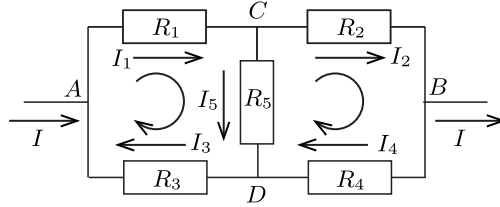


# A hídkapcsolás eredő ellenállása és áramerősségei

Az öt ellenállásból készített szokványos hídkapcsolás eredő ellenállását többnyire csak a konkrét számértékek ismerete mellett szoktuk meghatározni. Ha azonban vesszük a fáradságot és levezetjük általános jelekkel (paraméterekkel), akkor - megfelelő átalakítások után - egy viszonylag egyszerű képlethez jutunk. Az alábbiakban ezt a számolást végezzük el.<sup>1</sup>



1. ábra

A kapcsolás, a szokásos jelölésekkel, az 1. ábrán látható. A huroktörvényt és a csomóponti törvényt alkalmazva írunk fel egyenleteket. A két hurok körüljárási irányát a görbe nyilak jelzik. Végcélunk az öt ellenállásból álló egyenáramú áramköri kapcsolás ábrán jelzett  $A$  és  $B$  pontok közötti  $R_{AB}$  eredő ellenállásának meghatározása általános képlettel.

A bal oldali hurokban

$$(1) \quad I_1 R_1 + I_5 R_5 + I_3 R_3 = 0,$$

a jobb oldali hurokban

$$(2) \quad -I_5 R_5 + I_2 R_2 + I_4 R_4 = 0.$$

A  $C$  csomópontban

$$(3) \quad I_1 - I_2 - I_5 = 0,$$

a  $D$  csomópontban

$$(4) \quad I_5 + I_4 - I_3 = 0,$$

és végül a  $B$  csomópontban

$$(5) \quad I_2 - I - I_4 = 0.$$

Az  $A$  pontban befolyó és a  $B$  pontban kifolyó áram  $I$  erősségét mint paramétert kezeljük, így a fenti öt egymástól független egyenlet elegendő az öt ismeretlen áramerősség meghatározásához.

Egy lehetséges lépéssorozat a következő: A (3) és (5) csomóponti egyenletek összeadásával kapjuk, hogy

$$I_1 = I + I_4 + I_5.$$

A  $D$  csomóponti egyenletből  $I_3 = I_4 + I_5$ . Ezeket az első hurokegyenletbe beírva

$$I_1 R_1 + I_4 R_1 + I_5 R_1 + I_4 R_3 + I_5 R_3 = 0$$

adódik. A második hurokegyenletet a  $B$  csomóponti összefüggés alapján  $I_2 = I + I_4$  helyettesítéssel átírva ezt kapjuk:

$$-I_5 R_5 + I R_2 + I_4 R_2 + I_4 R_4 = 0.$$

Így most már csak két ismeretlenünk van, két független egyenlettel. Kiemelések után ez a két egyenlet:

$$\begin{aligned} (R_1 + R_3)I_4 + (R_1 + R_3 + R_5)I_5 &= -R_1 I, \\ (R_2 + R_4)I_4 - R_5 I_5 &= -R_2 I. \end{aligned}$$

<sup>1</sup>A paraméteres képletnek megvan az az előnye, hogy csak egyszer kell kiszámítanunk, a továbbiakban már csak alkalmazzuk. Ugyanígy járunk el pl. a másodfokú egyenlet megoldóképletével is; azt is elegendő egyszer levezetni, utána pedig már akárhányszor alkalmazhatjuk.

Az egyenletrendszer megoldása:

$$I_4 = -\frac{R_1 R_5 + R_2(R_1 + R_3 + R_5)}{(R_1 + R_3)R_5 + (R_2 + R_4)(R_1 + R_3 + R_5)} I,$$

$$I_5 = \frac{R_2(R_1 + R_3) - R_1(R_2 + R_4)}{(R_1 + R_3)R_5 + (R_2 + R_4)(R_1 + R_3 + R_5)} I.$$

*Megjegyzés.* Itt most érdemes kitérni arra a kérdésre, hogy milyen feltételek mellett lesz  $I_5$  értéke zérus. A legutóbbi képlet számlálójából következik, hogy ez akkor áll fenn, ha

$$\frac{R_2}{R_4} = \frac{R_1}{R_3}.$$

Ez az eset a régi időkben használt Wheatstone-híd nevű ellenállásmérő kapcsolás megfelelője. E kapcsolatban  $R_5$  helyén egy érzékeny áramerősségmérő műszer van,  $R_1$  helyére illesztjük a megméréndő ellenállást,  $R_2$  helyén ismert értékű etalon ellenállás helyezkedik el, és  $R_3, R_4$  egyetlen drótszál azon két részének ellenállása, amelyek a műszer csúsztatható  $D$  pontbeli csatlakozásától az  $A$ , illetve  $B$  pontig tartanak. A műszer  $D$  pontbeli csatlakozását ide-oda csúsztatva, megkeressük azt a helyét, amely mellett a műszeren átfolyó  $I_5$  erősségű áram zérus értékű. Ekkor fennáll a fenti aránypár, amiből  $R_1 = (R_3/R_4)R_2$ . Míthogy  $R_3$  és  $R_4$  ugyanazon huzal két darabja, ezért ellenállásuk pontosan hosszúságukkal arányos, tehát ellenállásaik hányadosa is megegyezik hosszúságaik hányadosával. E hosszúságokat pedig egyszerűen mérhetjük. Így az ismeretlen ellenállás értékét könnyen megkapjuk az etalon értékének ismeretében:

$$R_1 = \frac{\ell_3}{\ell_4} R_2.$$

Természetesen a fenti képletünk azt is kifejezi, hogy  $I_5$  értéke akkor is zérus, ha az  $R_5$  jelű áthidaló ellenállás értéke „végtelen nagy”. A képletben  $R_5$  a nevező mindkét tagjában szerepel, a számlálóban pedig nem, így, ha  $R_5$  végtelen nagy értékhez tart, akkor a tört értéke nullához tart. Ez gyakorlatban annak felel meg, hogy  $C$  és  $D$  pontokat nem köti össze semmilyen vezető sem. Azt is mondhatnánk, hogy ilyenkor  $R_5$  a két pont közötti levegő vagy egyéb szigetelőanyag végtelenül nagynek tekinthető ellenállása.

Visszatérve a számításokhoz,  $I_4$  és  $I_5$  ismeretében megkapjuk  $I_3$  értékét: .

$$I_3 = I_4 + I_5 = \frac{R_2(R_1 + R_3) - R_1(R_2 + R_4) - R_1 R_5 - R_2(R_1 + R_3 + R_5)}{(R_1 + R_3)R_5 + (R_2 + R_4)(R_1 + R_3 + R_5)} I.$$

a  $B$  csomópontra felírt Kirchhoff-összefüggésből

$$I_2 = I + I_4 = \frac{R_5(R_1 + R_3) + (R_2 + R_4)(R_1 + R_3 + R_5) - R_1 R_5 - R_2(R_1 + R_3 + R_5)}{(R_1 + R_3)R_5 + (R_2 + R_4)(R_1 + R_3 + R_5)} I,$$

és végül a  $C$  csomópontnál érvényes összefüggésből

$$I_1 = I_2 + I_5 = \frac{(R_2 + R_5)(R_1 + R_3) + (R_2 + R_4)(R_3 + R_5) - R_1 R_5 - R_2(R_1 + R_3 + R_5)}{(R_1 + R_3)R_5 + (R_2 + R_4)(R_1 + R_3 + R_5)} I,$$

Mindezek ismeretében meghatározhatjuk a hídkapcsolásunk  $A - B$  pontjai között érvényes ellenállását, mert  $R_{AB} = U_{AB}/I$ , de  $U_{AB}$ -t megkapjuk, ha az  $A$  pontból a  $B$  pontba vezető *valamelyik* úton összegezzük a feszültségeséseket. A legegyszerűbb út az  $R_1$  és  $R_2$  ellenállásokon keresztül vezet, tehát

$$(6) \quad U_{AB} = I_1 R_1 + I_1 R_2.$$

Így a keresett ellenállásérték:

$$R_{AB} = \frac{R_1(R_2 + R_5)(R_1 + R_3) + R_1(R_2 + R_4)(R_3 + R_5) - R_1^2 R_5 - R_1 R_2(R_1 + R_3 + R_5)}{(R_1 + R_3)R_5 + (R_2 + R_4)(R_1 + R_3 + R_5)} +$$

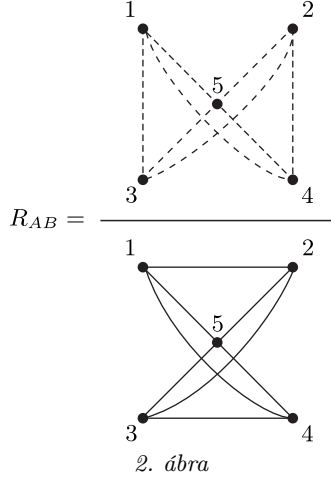
$$+ \frac{R_2 R_5(R_1 + R_3) + R_2(R_2 + R_4)(R_1 + R_3 + R_5) - R_1 R_2 R_5 - R_2^2(R_1 + R_3 + R_5)}{(R_1 + R_3)R_5 + (R_2 + R_4)(R_1 + R_3 + R_5)}.$$

Ezt tulajdonképpen végeredményünknek tekinthetnénk, de érdemes elvégezni a szorzásokat és összevonásokat mind a számlálókban, mind a nevezőkben és egyetlen törtben foglalni össze az eredményt:

$$R_{AB} =$$

$$R_{AB} = \frac{R_1 R_2 R_3 + R_1 R_2 R_4 + R_1 R_3 R_4 + R_1 R_3 R_5 + R_1 R_4 R_5 + R_2 R_3 R_4 + R_2 R_3 R_5 + R_2 R_4 R_5}{R_1 R_2 + R_1 R_4 + R_1 R_5 + R_2 R_3 + R_2 R_5 + R_3 R_4 + R_3 R_5 + R_4 R_5}$$

Képletünk, monoton egyszerűsége miatt, arra is alkalmas, hogy programozható zseb-kalkulátorunkba egyszerű programlépésekkel beírjuk; de még a fejből való megjegyzése sem nagyon kényelmetlen. Ez utóbbit segítheti, ha a (\*) képlet számlálójának is és a nevezőjének is egy-egy gráfot feleltetünk meg. A gráf csúcspontjait számozzuk meg az ellenállások indexeinek megfelelő számokkal. A nevezőben *szereplő* szorzatok index-párjainak megfelelő csúcspontokat kössük össze egy-egy *folytonos* vonallal, egy másik gráfon pedig *szaggatott* vonallal azokat a csúcspontokat kössük össze, amelynek megfelelő indexű ellenállások *nem szerepelnek* a számláló háromtényezős szorzataiban (2. ábra).



A rajz jól mutatja a hídkapcsolás azon szimmetriáját, hogy  $R_{AB}$  nem változik meg, ha az elrendezést akár a „függőleges”, akár a „vízszintes” szimmetriatengelyére tükrözzük, vagyis végrehajtjuk az

$$(7) \quad R_1 \leftrightarrow R_2 \quad \text{és} \quad R_3 \leftrightarrow R_4,$$

vagy az

$$(8) \quad R_1 \leftrightarrow R_3 \quad \text{és} \quad R_2 \leftrightarrow R_4$$

felcseréléseket.

$R_{AB}$  levezetett képletének ellenőrzésére (ami egy ilyen hosszú számolás után mindenképpen célszerű) számos lehetőség kínálkozik. Nézzük meg, mekkora az eredő ellenállás, ha a hidat képező  $R_5$  ellenállás értéke zérus, ami egyszerűen azt jelenti, hogy a  $C$  és  $D$  pontokat egyesítettük (rövidre zártuk). Ekkor  $R_1$  és  $R_3$  párhuzamos kapcsolásban van, hasonlóan az  $R_2$  és  $R_4$  ellenállás is, és a két ellenálláspár sorba van kapcsolva. A könnyen megkapható eredő tehát

$$R_{AB} = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} + \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4}.$$

Ha a (\*) végképletünkbe is  $R_5 = 0$  értéket helyettesítünk, ugyanezt az eredményt kapjuk.

Második ellenőrzésként tekintsük azt az esetet, ha nincsen a kapcsolásban hidat képező  $R_5$  jelű ellenállás, tehát nem is kapcsoltuk össze a  $C$  és  $D$  pontokat. Ilyenkor  $R_1$  és  $R_2$  közvetlenül sorosan vannak kapcsolva, hasonlóan  $R_3$  és  $R_4$  is, majd a belőlük alkotott két ellenállás van párhuzamosan kapcsolva  $A$  és  $B$  pontok közé. Ebben az esetben is könnyen kiszámítható eredőjük:

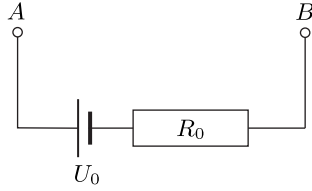
$$R_{AB} = \frac{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}{(R_1 + R_2) + (R_3 + R_4)} = \frac{R_1 R_3 + R_1 R_4 + R_2 R_3 + R_2 R_4}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}.$$

Ha végképletünkkel ezt az esetet is ellenőrizni kívánjuk, akkor a hiányzó hidat végtelen nagy ellenállásnak kell gondolnunk, azaz keresnünk kell, hogy mely értékhez tart  $R_{AB}$ , ha benne  $R_5$  tart a végtelenhez. Ha a (\*) képletünkben mind a számlálót, mind a nevezőt osztjuk  $R_5$ -tel, majd vesszük a tört határértékét, akkor ezt kapjuk:

$$\lim_{R_5 \rightarrow \infty} = \frac{R_1 R_3 + R_1 R_4 + R_2 R_3 + R_2 R_4}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4},$$

tehát a képletünk ebben az esetben is megállta helyét.

Ha a hídkapcsolás  $R_{AB}$  eredő ellenállásának meghatározása után az egyes elemekben folyó áram erősségét akarjuk meghatározni abban az esetben, amikor az  $A - B$  pontokban csatlakoztatunk hozzá egy  $U_0$  üresjárási feszültségű és  $R_0$  belső ellenállású áramforrást (3. ábra), akkor a következőket kell tennünk.



3. ábra

Meg kell határoznunk az  $U_{AB}$  feszültséget. Minthogy  $R_{AB}$ -t már kiszámítottuk a (\*) képletünkkel, írhatjuk, hogy

$$U_{AB} = U_0 - IR_0, \quad \text{ahol} \quad I = \frac{U_{AB}}{R_{AB}},$$

amiből

$$(9) \quad U_{AB} = \frac{R_{AB}}{R_0 + R_{AB}} U_0.$$

A kapcsolás ellenállásain folyó áramokra (amelyeket az 1. ábrán jelölt, feltételezett irányokban tekintjük pozitívnak) fennállnak az (1)-(5) egyenlőségek, továbbá (6) és (9), valamint  $U_{AB} = IR_{AB}$ , ahol  $R_{AB}$  a (\*) képlettel megadott kifejezés. Ennek az egyenletrendszernek a megoldása pl. az  $R_2$  és az  $R_5$  ellenállásokon átfolyó áram erősségére:

$$(10) \quad I_2 = \frac{(R_5 R_{AB} - R_1 R_4) U_0}{[(R_1 + R_2) R_5 + (R_2 + R_4) R_1] (R_0 + R_{AB})},$$

$$(11) \quad I_5 = \frac{[(R_2 + R_4) R_{AB} - (R_1 + R_2) R_4] U_0}{[(R_1 + R_2) R_5 + (R_2 + R_4) R_1] (R_0 + R_{AB})}.$$

Ezekből a többi áramerősség is kiszámolható, hiszen  $I_1 = I_2 + I_5$ ,  $I_3 = I_1 - I$ ,  $I_4 = I_3 - I_5$ .

*Megjegyzés.* Az  $I_1$ ,  $I_3$  és  $I_4$  áramerősségeket a (10) képlet alapján is kiszámíthatjuk, ha alkalmazzuk a (7) vagy (8), esetleg mindkettő átnevezés lehetőségét. Ezzel a transzformációval elérhetjük, hogy az  $R_1$ ,  $R_3$  és  $R_4$  ellenállások bármelyike a kapcsolás jobb felső (eredetileg  $R_2$ -vel jelzett) ellenállásának helyére kerüljön, és ezután már alkalmazhatjuk a (10) képletet. Vigyázat: a (10) transzformáció során  $I_5$  kivételével valamennyi áram előjele megváltozik.

Az  $I_5$  áramerősségre, vagyis a hidat képező  $R_5$  ellenálláson folyó áram erősségére vonatkozólag ismét felvethetjük a már előzőleg említett, kiegyensúlyozott Wheatstone-híd esetét, amelynél fennáll, hogy  $R_1/R_2 = R_3/R_4$ . Ekkor, természetesen

$$(12) \quad R_{AB} = \frac{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4},$$

vagyis  $R_5$ -nek nincsen szerepe a hídkapcsolás eredőjében, nullának vagy akár végtelen nagynak tekinthető.

Ellenőrizzük, hogy a (11) képletünk ez esetben valóban zérus áramerősségértéket ad-e. A választ a képlet számlálójában a szögletes zárójelben lévő kifejezés, annak várható eltűnése adja meg. Ebbe beírva  $R_{AB}$  (12)-beli értéket, ezt kapjuk:

$$(R_2 + R_4) R_{AB} - (R_1 + R_2) R_4 = \frac{(R_2 + R_4)(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} - (R_1 + R_2) R_4.$$

Elvégezve a közös nevezőre hozást, a szorzásokat, összevonásokat, az új tört számlálójára kapjuk:

$$R_1 R_2 R_3 + R_1 R_2 R_4 + R_2 R_4^2 - R_1^2 R_4 - R_1 R_2 R_4 - R_2 R_4^2 = R_1 (R_2 R_3 - R_1 R_4) = 0.$$

Az utolsó lépésnél figyelembe vettük, hogy  $R_1/R_2 = R_3/R_4$ . Látjuk, hogy (11) számlálója zérus, tehát valóban igaz, hogy  $I_5 = 0$ .

**Légrádi Imre**