Mesterséges égitestek mozgásával kapcsolatos problémák és feladatok[1]

A szputnyikok, lunyikok, Vosztok-űrhajók és egyéb mesterséges égitestek a felszállás és az esetleges visszatérés rövid szakaszát leszámítva a tömegpontokra vonatkozó mechanikai törvények által megszabott egyszerű pályákon mozognak a világűrben. Ez a tény más szóval azt jelenti, hogy ezen törvények ismeretében magunk is kiszámíthatjuk, hogy milyen *feltételek* mellett oldható meg valamilyen űrhajózási feladat, és hogy mi lesz a *további sorsa* a pályára helyezett új mesterséges égitestnek. Ha megoldunk egy-egy ilyen feladatot, jobban meg tudjuk ítélni az egyes űrhajózási kísérletek nehézségi fokát (legalábbis a pályára juttatás szempontjából), és ellenőrizni tudjuk az újságokban megjelenő pályaadatok helyességét is.

A mozgástörvények a Newton-féle általános tömegvonzás törvényéből vezethetők le. Tételezzük fel először, hogy a mesterséges égitestre, melynek mozgását vizsgálni kívánjuk, csak egyetlen, nálánál természetesen sokkal nagyobb tömegű égitest vonzása hat. Ez az égitest legyen gömb alakú és homogén tömegeloszlású, hogy az egész tömegét a középpontjában egyesítve képzelhessük el. A kérdés, melyre választ keresünk, így hangzik: hol és mekkora sebességgel kell a mesterséges égitestet útnak indítani, hogy egy bizonyos pályát írjon le; vagy fordítva, milyen pályát ír le egy mesterséges égitest, ha a vonzócentrumtól r távolságban adott irányban és v sebességgel indítjuk útnak. Noha eredetileg a Napra mint vonzócentrumra és a bolygókra mint körülötte keringő tömegpontokra mondták ki őket, a Kepler-törvények tulajdonképpen a mesterséges holdak mozgását is szabályozzák.

Kepler 1. törvénye megadja, hogy kúpszelet pályák jönnek létre, melyek egyik gyújtópontjában a vonzócentrum van. E törvény értelmében tehát a kúpszeletekre érvényes geometriai összefüggések alkalmazhatók a mesterséges égitestek pályáira is. Ha például egy a Föld körül keringő testnél ismerjük a földfelszín feletti legkisebb (h_p) és legnagyobb (h_a) magasságot, az ellipszispálya fél nagytengelye (a) és excentricitása $\left(e=\frac{c}{a}\right)$ kiszámítható:

$$r_\mathrm{p}=a(1-e) \qquad \text{és} \qquad r_\mathrm{a}=a(1+e),$$

ahol

$$r_\mathrm{p}=R_\text{Föld}+h_\mathrm{p}, \qquad r_\mathrm{a}=R_\text{Föld}+h_\mathrm{a}, \qquad R_\text{Föld}=6370\,\mathrm{km},$$

végül a fél kistengely $b=a\sqrt{1-e^2}$.

A tengelyek hossza segítségével megrajzolhatjuk ugyan a pályaellipszist, de nem tudjuk még, hogy a pálya síkja hogyan helyezkedik el a Föld körül, és hogyan mozog rajta a mesterséges hold. Ez utóbbi kérdés általánosabban úgy fogalmazható meg, hogy a vonzócentrumtól r távolságban milyen v sebességgel mozogjon a test a megadott pályán; vagy fordítva, adott r-hez és v-hez milyen pálya tartozik.

Kepler 2. törvénye tulajdonképpen tartalmazza a választ, de egy a tömegvonzás törvényéből levezethető képlet, az ún. *energiaintegrál* segítségével sokkal egyszerűbben számolhatunk. Az egzakt levezetés helyett kíséreljük meg ezt a törvényt a következő gondolatmenet alapján elfogadni. Az energiamegmaradás értelmében egy test mozgási és helyzeti energiájának összege állandó. (A helyzeti energiára vonatkozólag lásd a KöMaL XXV. 5. számában[2] megjelent „Erőterek szemléletes ábrázolása” c. cikket.) Tehát egységnyi tömegű, v sebességű testnél az M tömegű vonzócentrumtól r távolságban

$$\frac{1}{2}v^2-G\frac{M}{r}=\text{konstans},$$

ahol $G=6{,}674\cdot10^{-11}\,\mathrm{m^3/(kg\,s^2)}$. Körpályán mozgó testnél, ahol a centripetális erőt a gravitáció szolgáltatja

$$\frac{v_\text{kör}^2}{r}=\frac{GM}{r^2},$$

vagy a sugarú körpályára

$$v^2=\frac{GM}{a}.$$

[1] Ez a cikk a KöMaL 1962. évi novemberi számában jelent meg; a benne leírtak a mai napig aktuálisak és tanulságosak. A szöveget eredeti formájában közöljük, mindössze az időközben megváltozott mértékegységeket írtuk át a ma használatosakra.

[2] KöMaL 1962. évi májusi szám

Eszerint a test összenergiája a sugarú körpálya esetén

$$\frac{GM}{2a} - G\frac{M}{a} = -\frac{GM}{2a}.$$

Igazolható, hogy azonos nagytengelyű pályákra az összenergia azonos, így tetszőleges a nagytengelyű pályán mozgó testre:

$$\frac{1}{2}v^2 - G\frac{M}{r} = -\frac{GM}{2a}, \qquad \text{amiből} \qquad v^2 = GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right).$$

Ez az összefüggés, az energiaintegrál, igen nagy jelentőségű az űrhajózási feladatok megoldásánál. Az olyan kérdések, hogy hogyan lehet r-ből és a-ból v-t, illetve r-ből és v-ből a-t meghatározni, az energiaintegrállal közvetlenül megválaszolhatók, sőt, mint látjuk, elegendő a fél nagytengely ismerete (az excentricitás nélkül), és a sebesség nagyságát, mint a vonzócentrumtól mért távolság függvényét ki tudjuk számítani. Már a levezetésből láttuk, hogy a körmozgás sebessége (az első kozmikus sebesség)

$$v_{\text{kör}} = \sqrt{\frac{GM}{r}}.$$

Ahhoz, hogy egy bizonyos r távolságban már ne a vonzócentrum körül záródó ellipszis, hanem nyílt parabolapálya jöjjön létre, vagyis $a = \infty$, $\frac{1}{a} = 0$ legyen, nyilván

$$v_{\text{parabola}} = \sqrt{\frac{2GM}{r}} = \sqrt{2}v_{\text{kör}}$$

kezdősebesség szükséges (második kozmikus vagy szökési sebesség). Nagyobb magasságokban nyilván már kisebb sebesség elegendő a keringéshez és a szökéshez is. Ha bizonyos r mellett a kezdősebességet tovább növeljük, az energiaintegrál értelmében $a < 0$, és a pálya hiperbola[3] lesz. Az is látszik, hogy ezeken a pályákon távolodva a test sebessége nem nullára, hanem egy

$$v_\infty = \sqrt{\frac{GM}{|a|}}$$

maradéksebességre csökken le, így a hiperbolapályán mozgó testnél az energiaintegrál szerint

$$v^2 = v_{\text{parabola}}^2 + v_\infty^2.$$

Az energiaintegrálból tehát a pálya bármely pontjára kiszámíthatjuk a szabadon repülő test sebességének nagyságát, ehhez csupán a nagytengely hosszát kell ismerni. Ez utóbbit viszont egy új mesterséges égitest pályára állítása után rendszerint az újságokban közölt adatokból is kiszámíthatjuk: ellipszispályánál vagy a h_p és h_a mennyiségekből a már említett módon, vagy a T keringési időből közvetlenül Kepler 3. törvényével:

$$a = \sqrt[3]{\frac{GM}{4\pi^2}T^2}.$$

(Körpálya esetében ezt a formulát megkapjuk, ha a bolygó tömegének és gyorsulásának szorzatát egyenlővé tesszük a gravitációs erővel.) Ebben a képletben is M a vonzócentrum tömege, mely tehát a és T közvetlen mérése útján meghatározható. Parabola- vagy hiperbolapályán mozgó űrrakétáknál pedig a-t az energiaintegrállal kapjuk meg, ha a pálya egyetlen pontjában ismerjük a rakéta sebességének nagyságát.

Mindez természetesen nem elegendő ahhoz, hogy a térben, a csillagokhoz képest elhelyezzük a pályát, például eldöntsük, hogy a pálya síkja milyen szöget ár be az Egyenlítővel. A fenti képletekkel ugyancsak nem számítható ki, hogy mekkora annak a hiperbolapályának az excentricitása, melyen az űrrakéta mozog. Ezen problémák megoldásakor a rakéta sebességének nemcsak a nagyságát, hanem az irányát is ismerni kell. Számos érdekes kérdésre azonban, mint láttuk, enélkül is választ kaphatunk, s hogy eredményeink mennyire helytállóak, az újságokban később közölt valódi pályaadatokkal ellenőrizhetjük.

[3] A hiperbola fél nagytengelye $|a|$

Maradt természetesen egy alapvető feltevés, melynek jogossága csak bizonyos határok között fogadható el. Feltettük ugyanis, hogy csak egyetlen test, pontosabban egyetlen tömegpont vonzása hat a mesterséges égitestre, noha tudjuk, hogy a valóságban nem ez a helyzet: a Földhöz közel keringő égitesteknél a Föld lapultsága, a távolabbra repülő részeknél más égitestek (pl. a Hold) vonzása már nem elhanyagolható tényező. Felléphetnek továbbá nem gravitációs jellegű erők is, mint például a földi légkör közegellenállása. Ezek a tényezők általában néhány nap után már nagyobb mértékben módosítják a kezdeti pályát, s ha a test egy másik égitest közelébe kerül (pl. holdrakéta), pályája teljesen meg is változhat. Általában eredményesen alkalmazható egy közelítő eljárás, mely a Földről egy másik égitest közelébe tartó rakéta pályáját szakaszokra bontja, s egy-egy szakaszon belül csak egyetlen égitest vonzását veszi figyelembe, tehát úgy számol, ahogy az eddigiekben tettük. Úgy tekintjük tehát, hogy egy a Hold felé induló rakéta pályáját például indulástól a Hold 60 000 km sugarú környezetéig csak a Föld, az említett körzeten belül viszont csak a Hold vonzása alakítja ki. A Földtől 930 000 km távolságot elérve már csak a Nap vonzóerejével számolunk. Anélkül, hogy ezen egyszerű, és közelítő számításokra kiválóan alkalmas módszert részletesen ismertetnénk, megállapíthatjuk, hogy kezdeti, látszólag speciális feltételeink a mesterséges égitestek életének legnagyobb részében teljesülnek, tehát a megadott egyszerű képletekkel hozzávetőlegesen csaknem minden asztronautikai pályaproblémát megoldhatunk. Úgy vélem, hogy aki egy-egy űrhajózási terv nyilvánosságra hozatala vagy megvalósítása idején maga is ilyen számításokat végez, közelebb jut ahhoz, hogy értékelni tudja korszakunk e kiemelkedő tudományos eseményeinek jelentőségét.

Gyakorló feladatok

Általános feltevések:

1. A Föld körpályán, 29,77 km/s sebességgel kering a Nap körül;
2. a rakéták felgyorsítási szakasza végtelen rövid, közben gravitációs veszteségek nincsenek;
3. a mozgás kezdettől fogva közegellenállás nélküli térben történik.

(További feladatokat a „Kitűzött feladatok” között fogunk találni mostani (1962. novemberi) számunkban és a későbbi számokban.[4])

1. Számítsuk ki egy ellipszispályán mozgó mesterséges hold sebességét a földközelpontban és a földtávolpontban! Milyen távolságban és a pályája mely pontjában lesz a hold sebessége éppen e két sebesség mértani közepe?

2. Tudjuk, hogy 1000 km-re a földfelszíntől, hozzánk képest 4,00 km/s sebességgel ismeretlen irányban mozog egy mesterséges égitest. Ha a motorjait nem kapcsolja be újra, mekkora az a legnagyobb távolság, ameddig eltávolodhat a földfelszíntől? Ha keringést végez a Föld körül, mekkora a keringési idő? Mi lehet az égitest további sorsa?

A feladatok megoldása

1. $v_{\mathrm{p}} = v_{\text{kör}}\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}$, $\quad v_{\mathrm{a}} = v_{\text{kör}}\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}$; a Föld középpontjától a távolságban, vagyis a kistengely végpontjaiban.

(Az v_{p}-t és v_{a}-t helyettesítsük az energiaintegrál képletébe. A két sebesség mértani közepe $v_{\text{kör}}$, mely az a távolsághoz tartozik.

2. 1990 km; 45 perc; keringés nem jöhet létre, az égitest visszazuhan a földre.

(A legnagyobb magasságot akkor éri el, ha radiálisan távolodik, ekkor $r_{\mathrm{a}} = 2a$. A megadott két adatból az energiaintegrállal a kiszámítható, ebből Kepler 3. törvényével a keringési idő.)

Dr. Almár Iván

[4]Lásd a KöMaL 1962. évi 12. számban a 310. feladatot, továbbá az 1963. évi januári számban a 312. és 322. feladatot.