KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK
INFORMATIKA ROVATTAL BŐVÍTVE
ALAPÍTOTTA: **ARANY DÁNIEL** 1894-ben

72. évfolyam 1. szám Budapest, 2022. január

Megjelenik évente 9 számban, januártól májusig és szeptembertől decemberig havonta 64 oldalon. ÁRA: 1050 Ft

TARTALOMJEGYZÉK

A szerkesztőség címe: 1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/C III. emelet 3.405.
Telefon: 372-2850
A lap megrendelhető az Interneten: `www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.h.shtml`.
Előfizetési díj egy évre: 8800 Ft
Kéziratokat nem őrzünk meg és nem küldünk vissza. Minden jog a KöMaL tulajdonosaié.
E-mail: `szerk@komal.hu`
Internet: `http://www.komal.hu`
This journal can be ordered from the Editorial office:
Pázmány Péter sétány 1/C III. emelet 3.405.
1117–Budapest, Hungary
telephone: +36 (1) 372-2850
or on the Postal address
H–1518 Budapest 112, P.O.B. 32, Hungary,
or on the Internet:
`www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.e.shtml`.
A Lapban megjelenő hirdetések tartalmáért felelősséget nem vállalunk.

Számelmélet és valószínűségszámítás*

A matematika e két ágának összekapcsolásában úttörő szerepet játszott a 20. századi matematika két óriása, *Erdős Pál* (1913–1996) és *Turán Pál* (1910–1976), akik egymásnak is közeli barátai és munkatársai voltak. Először Erdős egyik kedvenc, részben ma is megoldatlan problémájával foglalkozunk, majd Turán egyszerű bizonyítását mutatjuk be *Geoffrey Hardy* (1877–1947) és *Srinivasa Ramanujan* (1887–1920) híres tételére az egészek prímosztóinak tipikus számáról. Mindkettő elmondható valószínűségszámítás nélkül is, de éppen a valószínűségi szemlélet mutatja meg a lényeget. Mindkét esetben a *Csebisev-egyenlőtlenséget* fogjuk alkalmazni.

1. A Csebisev-egyenlőtlenség

Egy véges *valószínűségi változó* egy olyan függvény, amely véges sok valós számértéket vesz fel, és mindegyik értéknél megmondjuk, hogy az milyen valószínűséggel adódik. Például a kockadobásnál a lehetséges értékek 1, 2, 3, 4, 5 és 6, és mindegyiknek a valószínűsége 1/6. A továbbiakban csak ilyen legegyszerűbb típusú valószínűségi változókat használunk, amelyek értékkészlete N különböző valós szám, $v_1, v_2, \ldots, v_N$, és mindegyik v_i értéket $1/N$ valószínűséggel veszi fel a változó. A valószínűségi változókat általában ξ-vel, néha η-val fogjuk jelölni.

Egy valószínűségi változó *várható értéke* a lehetséges értékeknek a valószínűségekkel súlyozott átlaga. Ezt $E(\xi)$-vel jelöljük. A mi speciális esetünkben a várható érték a felvett értékek számtani közepe:

$$E = E(\xi) = \frac{v_1 + v_2 + \ldots + v_N}{N}. \tag{1.1}$$

Pl. a kockadobás várható értéke $(1+2+3+4+5+6)/6 = 3{,}5$.

A valószínűségi változó másik fontos jellemzője a *szórás,* amit $D(\xi)$-vel jelölünk. Ezt úgy kapjuk, hogy a felvett értékeknek a várható értéktől való négyzetes eltéréseit a valószínűségekkel súlyozva átlagoljuk és az eredményből négyzetgyököt vonunk. Így a mi speciális esetünkben a négyzetes eltérések számtani közepéből kell négyzetgyököt vonni:

$$D = D(\xi) = \sqrt{\frac{(v_1 - E)^2 + \ldots + (v_N - E)^2}{N}}. \tag{1.2}$$

A szórás tehát azt méri, milyen erősen ingadozik a változó a várható érték körül. A kockadobás szórása

$$\sqrt{\frac{(1-3{,}5)^2 + (2-3{,}5)^2 + (3-3{,}5)^2 + (4-3{,}5)^2 + (5-3{,}5)^2 + (6-3{,}5)^2}{6}} \approx 1{,}71.$$

* Ehhez a témához kapcsolódik a **B. 5220.** feladat is ebben a számban.

Belátható, hogy valószínűségi változók összegének a várható értéke a várható értékek összege:

$$E(\xi+\eta)=E(\xi)+E(\eta). \tag{1.3}$$

Ha a változók *függetlenek,* akkor ugyanez érvényes a szórások *négyzetére* is:

$$D^2(\xi+\eta)=D^2(\xi)+D^2(\eta). \tag{1.4}$$

Rátérünk a két számelméleti alkalmazás valószínűségszámítási alapját képező nevezetes egyenlőtlenségre, amely *Pafnutyij Lvovics Csebisev* (1821–1894) orosz matematikustól származik. Ez informálisan azt fejezi ki, hogy egy valószínűségi változó nagy valószínűséggel a várható értékétől nem túl távoli értéket vesz fel. Itt a távolság mértékegysége a szórás.

Pontos megfogalmazásban: Jelölje a ξ valószínűségi változó várható értékét E és szórását D, továbbá legyen $c>0$ tetszőleges. Ekkor $1/c^2$-nél kisebb annak a valószínűsége, hogy a változó a várható értéktől cD-nél távolabbi értéket vesz fel:

$$P\big(|\xi-E|>cD\big)<\frac{1}{c^2}. \tag{1.5}$$

Természetesen ez csak $c>1$ esetén ad érdemi információt, hiszen a valószínűség eleve legfeljebb 1.

A speciális esetünkben ezt a következő formában fogjuk használni: Ha a változó által egyforma valószínűséggel felvett N darab v_i érték között s olyan van, amelynek a várható értéktől való eltérése nagyobb a szórás c-szeresénél, azaz s-szer fordul elő, hogy $|v_i-E|>cD$, akkor $s/N<1/c^2$.

Ennek bizonyítása:

$$ND^2=\sum_{i=1}^{N}(v_i-E)^2>\sum_{|v_i-E|>cD}(v_i-E)^2>s(cD)^2, \quad \text{így} \quad N>c^2s.$$

Az első egyenlőség az (1.2) definíció egy másik alakja, ezután az összegből csak a nagy tagokat tartottuk meg, majd ezek mindegyikét lecsökkentettük a megadott cD alsó korlátra.

2. Csupa különböző összeg

Erdős egyik kedvenc problémája: Maximálisan hány pozitív egész adható meg n-ig, hogy közülük akárhány különbözőt összeadva (beleértve az egytagú összegeket és az összes szám összegét is) mindig különböző számot kapunk? Ezt a kérdést 1931-ben vetette fel és elsőként említi híres 1993-as gólyavári előadásában, amelynek videófelvétele az interneten elérhető. Itt számos további érdekes elemi számelméleti és geometriai problémáról is beszél közérthetően, és a felvételből Erdős lenyűgöző egyéniségéről is képet kaphatunk.

A kérdést formálisan is megfogalmazzuk: Mennyi a k maximuma (n függvényében), ha az $1\leqslant a_1<a_2<\ldots<a_k\leqslant n$ egész számokból képezett minden részösszeg különböző?

Ilyen egészek például a 2 hatványai a kettes számrendszerbeli felírás egyértelműsége miatt. A 2 kitevője 0-tól $\log_2 n$ egészrészéig terjedhet, tehát

$$\max k \geqslant 1 + \lfloor \log_2 n \rfloor > \log_2 n. \tag{2.1}$$

A $\max k$ felső becsléséhez megnézzük, hány részösszeg van, és ezek milyen intervallumba eshetnek. Mivel minden részösszeg különböző egész szám, ezért legfeljebb annyi részösszeg lehet, ahány egész szám található ebben az intervallumban.

A részösszegek száma $2^k - 1$. Mindegyik legalább 1 és legfeljebb

$$n + (n-1) + \ldots + (n-k+1) \leqslant nk - 1.$$

Minden részösszeg különböző, tehát $2^k - 1$ darab egész számnak el kell férnie 1 és $nk - 1$ között. Ezért

$$2^k - 1 \leqslant nk - 1, \quad \text{azaz} \quad 2^k \leqslant nk. \tag{2.2}$$

Mindkét oldal 2-es alapú logaritmusát véve kapjuk, hogy

$$k \leqslant \log_2 n + \log_2 k. \tag{2.3}$$

Nyilván $k \leqslant n$, tehát $\log_2 k \leqslant \log_2 n$, így

$$k \leqslant 2 \log_2 n. \tag{2.4}$$

Véve (2.4)-ben mindkét oldal logaritmusát $\log_2 k \leqslant 1 + \log_2 \log_2 n$ adódik, amit (2.3)-ba beírva a

$$k \leqslant \log_2 n + \log_2 \log_2 n + 1 \tag{2.5}$$

felső becslést nyerjük.

(2.1) és (2.5) alapján

$$1 < \frac{\max k}{\log_2 n} < 1 + \frac{\log_2 \log_2 n + 1}{\log_2 n},$$

tehát

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\max k}{\log_2 n} = 1,$$

azaz $\max k$ aszimptotikusan egyenlő $\log_2 n$-nel.

Erdős 500 dollárt ajánlott fel annak eldöntéséért, hogy $|\max k - \log_2 n|$ korlátos-e. Ez továbbra is reménytelenül nehéz.

Rátérünk a (2.1) alsó és (2.5) felső becslések javítására. Bár sokáig azt sejtették, hogy a 2-hatványok adják a legjobb konstrukciót, kiderült, hogy ennél eggyel(!) több számot is meg lehet adni, ha $n \geqslant 2^{21}$. Az továbbra is megoldatlan, hogy a kettőhatványoknál kettővel több szám megadható-e.

A felső becsléssel kapcsolatban Erdősnek és *Leo Moser* (1921–1970) kanadai matematikusnak a (2.5)-beli $\log_2 \log_2 n$-es hibatagot sikerült megfelezniük 70 évvel ezelőtt, és ma is ez a legjobb ismert eredmény. Ehhez a problémát átfogalmazták a valószínűségszámítás nyelvére. Így jött be a képbe a Csebisev-egyenlőtlenség, ami azt biztosította, hogy a részösszegek az $[1, nk-1]$ intervallumban nem egyenletesen oszlanak el, hanem az átlag közelében sűrűsödnek.

Nézzük mindezt részletesen. Legyen ξ az a valószínűségi változó, amelyik mind a 2^k darab részösszeget (beleértve az üreset is) $1/2^k$ valószínűséggel veszi fel.

Ez azt jelenti, hogy az egyes a_j egészek egymástól függetlenül 1/2–1/2 valószínűséggel szerepelnek a részösszegekben. Eszerint ξ az $\eta_1, \ldots, \eta_k$ független valószínűségi változók összege, ahol η_j a 0 és a_j értékeket veszi fel 1/2–1/2 valószínűséggel: $\xi = \sum_{j=1}^{k} \eta_j$.

Ennek megfelelően az η_j változó várható értéke és szórásnégyzete

$$E(\eta_j) = \frac{a_j}{2} \quad \text{és} \quad D^2(\eta_j) = \left(\frac{a_j}{2}\right)^2. \tag{2.6}$$

A valószínűségi változók összegének várható értékére és (függetlenség esetén) szórásnégyzetére vonatkozó (1.3) és (1.4) képletek alapján (2.6)-ból kapjuk, hogy

$$E(\xi) = \sum_{j=1}^{k} E(\eta_j) = \sum_{j=1}^{k} \frac{a_j}{2} \tag{2.7}$$

és

$$D^2(\xi) = \sum_{j=1}^{k} D^2(\eta_j) = \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{a_j}{2}\right)^2 < \frac{kn^2}{4}. \tag{2.8}$$

1. feladat. Bizonyítsuk be (2.7)-et és (2.8)-at közvetlenül, a várható érték és szórásnégyzet additivitására történő hivatkozás nélkül. (A feladatok megoldását a cikk végén vázoljuk.)

A ξ változó szórására (2.8)-ból a $D(\xi) < n\sqrt{k}/2$ felső becslés adódik. Alkalmazzuk most az (1.5) Csebisev-egyenlőtlenséget pl. $c = 2$-vel. Ez azt jelenti, hogy az átlagtól a szórás kétszeresénél távolabb eső részösszegek száma kevesebb, mint az összes részösszeg számának a negyedrésze.

Tehát több, mint $2^k \cdot \frac{3}{4}$ összeg esik egy $4D(\xi) < 2n\sqrt{k}$ hosszúságú intervallumba, amelynek a középpontja $E(\xi)$.

Ezek az összegek mind különbözők, így

$$2^k \cdot \frac{3}{4} < 2n\sqrt{k}, \quad \text{azaz} \quad 2^k < \frac{8n\sqrt{k}}{3}. \tag{2.9}$$

Összehasonlítva (2.9)-et az első gondolatmenettel adódó (2.2)-vel, azt nyertük, hogy (2.9) jobb oldalán k helyett csak $\sqrt{k}$ egy konstansszorosa áll. Ha most a korábbihoz hasonlóan kétszer logaritmálunk, akkor ($n > 8$-ra)

$$k < \log_2 n + \frac{\log_2 \log_2 n}{2} + 2$$

adódik, tehát (2.5)-ben a hibatagot lényegében megfeleztük.

3. Tipikusan hány prímosztója van egy számnak?

Áttérünk a második számelméleti kérdésünkre. Jelölje $\omega(n)$ az n pozitív egész különböző prímosztóinak a számát. Pl. $\omega(20)=2, \omega(64)=1$. Végtelen sok n-re, a prímhatványokra $\omega(n)=1$. De bármilyen nagy is lehet: az első s prím szorzatára $\omega(n)=s$, pl.

$$\omega(2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 17\cdot 19)=\omega(9\,699\,690)=8.$$

Bár nem nagyon látszik semmi szabályosság, belátjuk hogy egy jól ismert, „szép” $f(n)$ függvénnyel mégis teljesül, hogy a legtöbb számra $\omega(n)$ kb. $f(n)$. A „legtöbb” és „kb.” kifejezések persze pontos matematikai értelmet nyernek majd.

Legyen t egy tetszőleges (nagy) pozitív egész. Először kiszámítjuk, hogy $\omega(n)$ átlagosan mekkora 1 és t között:

$$E=\frac{\omega(1)+\omega(2)+\ldots+\omega(t)}{t}=\frac{W(t)}{t}.$$

$W(t)$ becsléséhez tekintsük azt a $t\times t$-es táblázatot, amelynek az i-edik sorában az $\omega(i)$-t „számoljuk meg”, azaz minden j-edik helyre 1-et írunk, ahol a j az i valamelyik prímosztója, a többi helyre pedig 0 kerül. Pl. $t=6$-ra:

	1	2	3	4	5	6
$\omega(1)=0$	0	0	0	0	0	0
$\omega(2)=1$	0	1	0	0	0	0
$\omega(3)=1$	0	0	1	0	0	0
$\omega(4)=1$	0	1	0	0	0	0
$\omega(5)=1$	0	0	0	0	1	0
$\omega(6)=2$	0	1	1	0	0	0

Tehát az i-edik sor j-edik eleme 1, ha j prímszám és osztója i-nek, egyébként pedig 0.

Hány 1-es van a táblázatban? Soronként számolva

$$\sum_{i=1}^{t}\omega(i)=W(t). \tag{3.1}$$

Most számoljunk oszloponként. Ha $j=p$ prímszám, akkor a p-edik oszlopban a p többszöröseinek megfelelő helyeken áll 1, tehát itt $\lfloor t/p\rfloor$ darab 1-es van, minden más elem 0. Így oszloponként összegezve az 1-esek száma

$$\sum_{p\leqslant t}\left\lfloor\frac{t}{p}\right\rfloor, \tag{3.2}$$

ahol az összegzés csak a prímekre történik. A továbbiakban p, q mindig prímszámot jelöl.

A soronkénti és oszloponkénti összegzést összevetve kapjuk, hogy

$$W(t)=\sum_{p\leqslant t}\left\lfloor\frac{t}{p}\right\rfloor. \tag{3.3}$$

Megjegyezzük, hogy (3.3)-at tulajdonképpen egy egyszerű összegátrendezéssel igazoltuk:

$$W(t)=\sum_{i=1}^{t}\omega(i)=\sum_{i=1}^{t}\sum_{p|i}1=\sum_{p\leqslant t}\sum_{p|i,\ i\leqslant t}1=\sum_{p\leqslant t}\left\lfloor\frac{t}{p}\right\rfloor.$$

(3.3)-at t-vel osztva adódik, hogy $\omega(n)$ átlaga $1\leqslant n\leqslant t$-re

$$E=\frac{W(t)}{t}=\frac{1}{t}\sum_{p\leqslant t}\left\lfloor\frac{t}{p}\right\rfloor=\left(\sum_{p\leqslant t}\frac{1}{p}\right)-h(t),\quad \text{ahol}\quad 0\leqslant h(t)<1. \tag{3.4}$$

Az utolsó egyenlőség az egészrészek elhagyásából adódott. Ekkor ugyanis mind a $\pi(t)$ darab tag egy 1-nél kisebb számmal nőtt, ahol $\pi(t)$ a prímek száma t-ig. Így az összeg $\pi(t)$-nél kevesebbel nőtt, ezt t-vel osztva kapjuk, hogy $0\leqslant h(t)<\pi(t)/t<1$. Mivel $\pi(t)/t$ tart a 0-hoz, ha $t\to\infty$, ennél erősebb állítás is igaz: $\lim\limits_{t\to\infty}h(t)=0$.

(3.4) tehát azt fejezi ki, hogy az 1 és t közötti egészek prímosztóinak átlagos száma lényegében a t-nél nem nagyobb prímszámok reciprokösszegével egyenlő. Felhasználjuk, hogy ez a reciprokösszeg nagyon jó közelítéssel $\ln\ln t$: létezik olyan c_1 abszolút konstans, hogy bármely t-re

$$\left|\sum_{p\leqslant t}\frac{1}{p}-\ln\ln t\right|<c_1,$$

lásd pl. [1], 5.6.2. tétel. Ez azt jelenti, hogy $\omega(n)$ átlagosan kb. $\ln\ln t$. Vagyis egy 1 és t közötti egésznek átlagosan $\ln\ln t$ különböző prímosztója van.

Az $\ln\ln x$ függvény nagyon lassan növekszik, pl. $t=10^{100}$-ra $\ln\ln t$ mindössze 5,44. Vegyük észre, hogy $\ln\ln\sqrt{t}=\ln(\ln t/2)=\ln\ln t-\ln 2$ miatt a $\sqrt{t}$ és t közötti növekedés csak $\ln 2$. Ezért az 1 és t közötti „majdnem minden" n esetén „kb. $\ln\ln t$" helyett nyugodtan mondhatunk „kb. $\ln\ln n$"-et is.

Abból azonban, hogy $\ln\ln n$ az átlag, nem következik, hogy a legtöbb esetben ehhez közeli a függvényérték, lehetnének nagy ingadozások és úgy jönne ki ez az átlag. Hardy és Ramanujan bonyolult módszerekkel belátták 1917-ben, hogy nem így van, a „legtöbb" n számnak tényleg kb. $\ln\ln n$ prímosztója van.

2. feladat. Ebben nem az a meglepő, hogy a legtöbb számnak ilyen kevés prímosztója van, hanem az, hogy ilyen sok. Magyarázzuk meg ezt a kijelentést.

3. feladat. Jelölje $\Omega(n)$ az n „összes" prímosztóinak a számát, tehát, hogy az n hány prímszám szorzata. Pl. $\Omega(20)=3$, $\Omega(64)=6$. Mutassuk meg, hogy a Hardy–Ramanujan-tétel $\Omega(n)$-re is érvényes. Ehhez igazoljuk, hogy $\sum\limits_{i=1}^{t}\big(\Omega(i)-\omega(i)\big)<t$.

A Hardy–Ramanujan-tételre Turán adott egyszerű bizonyítást 1934-ben. Ebben tulajdonképpen a Csebisev-egyenlőtlenséget használta (anélkül, hogy ennek tudatában lett volna), és ez lett a kiindulópontja a valószínűségszámítás számelméleti alkalmazásainak.

A lényeget tehát itt is a valószínűségszámítási megközelítés adja. Legyen ξ az a valószínűségi változó, amelyik az $\omega(1), \dots, \omega(t)$ értékek mindegyikét $1/t$ valószínűséggel veszi fel. Éppen ennek $E \approx \ln\ln t$ várható értékét számoltuk ki az előzőekben. Belátjuk, hogy kicsi a szórás, kisebb, mint $\sqrt{3E}$. Ekkor az (1.5) Csebisev-egyenlőtlenséget elég nagy c-vel alkalmazva ξ-nek az $E \approx \ln\ln t$ várható értéktől való eltérése 1-hez akármilyen közeli valószínűséggel $\sqrt{E}$ egy konstansszorosánál kisebb. Ez azt jelenti, hogy az 1 és t közötti majdnem minden egészre $\omega(n)$ nagyon jól közelíthető $\ln\ln t$-vel. És ahogy korábban jeleztük, majdnem minden ilyen n egészre $\ln\ln t$ helyett ez a tőle alig különböző $\ln\ln n$-nel is teljesül. Azaz valóban majdnem minden n egész számnak kb. $\ln\ln n$ különböző prímosztója van. (A precíz, formális megfogalmazást lásd pl. [1], 6.7.7. és 6.7.7a. tételek.)

Nézzük tehát a szórás felső becslését. Először Gyenes Zoltán javaslata alapján egy heurisztikus gondolatmenetet mutatunk, és utána következik majd a precíz levezetés.

A ξ változót fel tudjuk bontani prímenkénti η_p indikátorváltozók összegére. Legyen p prím és η_p értéke $1/p$ valószínűséggel 1 („a szám osztható p-vel") és $(p-1)/p$ valószínűséggel 0 („a szám nem osztható p-vel"). Ekkor

$$\xi = \sum_{p \leqslant t} \eta_p. \tag{3.5}$$

Az η_p valószínűségi változók várható értéke és szórásnégyzete

$$E(\eta_p) = \frac{1}{p} \quad \text{és} \quad D^2(\eta_p) = \frac{1}{p}\left(\frac{p-1}{p}\right)^2 + \frac{p-1}{p}\left(\frac{1}{p}\right)^2 = \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2}. \tag{3.6}$$

Az összes pozitív egészre nézve az η_p változók függetlenek. Ugyanis a különböző prímekkel való oszthatóságok a páronként relatív prímség miatt egymástól függetlenek. Formálisan: a p-vel való oszthatóság valószínűsége $1/p$ és a $p_1, \dots, p_r$ prímek mindegyikével való oszthatóság ugyanaz, mint az $M = p_1 \cdot \ldots \cdot p_r$ szorzattal való oszthatóság, tehát ennek a valószínűsége $1/M$, ami valóban az $1/p_i$ valószínűségek szorzata.

„Kicsit" csalva tekintsük úgy, hogy az η_p változók elég nagy t-re az 1 és t közötti egészekre szorítkozva is függetlenek maradnak. Ekkor

$$D^2(\xi) = \sum_{p \leqslant t} D^2(\eta_p) = \sum_{p \leqslant t} \frac{1}{p} - \sum_{p \leqslant t} \frac{1}{p^2} \approx E.$$

A heurisztika után nézzük a precíz levezetést. Mivel $D^2(\xi) = E\big((\xi - E)^2\big) = E(\xi^2) - E^2$, itt az első tagot kell felülről becsülnünk.

$$E(\xi^2) = \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{t}\omega^2(i) = \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{t}\omega(i)\sum_{p|i}1 = \frac{1}{t}\sum_{p\leqslant t}\sum_{p|i}\omega(i) = \tag{3.7}$$
$$= \frac{1}{t}\sum_{p\leqslant t}\sum_{v\leqslant t/p}\omega(vp) \leqslant \frac{1}{t}\sum_{p\leqslant t}\sum_{v\leqslant t/p}\big(1+\omega(v)\big) =$$
$$= \frac{1}{t}\sum_{p\leqslant t}\left\lfloor\frac{t}{p}\right\rfloor + \frac{1}{t}\sum_{p\leqslant t}\sum_{v\leqslant t/p}\omega(v).$$

Itt először a várható érték (1.1) definícióját alkalmaztuk ξ helyett ξ^2-re, majd az (egyik) $\omega(i)$-re beírtuk annak definícióját. Ezután átrendeztük az összeget és átírtuk a $p \mid i$ oszthatóságot $i = vp$ alakra. Az $\omega(vp) \leqslant 1 + \omega(v)$ egyenlőtlenség azért igaz, mert egy számot egy prímszámmal szorozva legfeljebb eggyel nő a prímosztók száma. Az utolsó lépésben két részre vágtuk az összeget.

(3.7) utolsó sorában az első összeg éppen $E(\xi) = E$. A második összeg belső szummáját átírjuk (3.3)-hoz hasonlóan, csak t helyett t/p-vel, majd felülről becsüljük:

$$\sum_{v\leqslant t/p}\omega(v) = \sum_{q\leqslant t/p}\left\lfloor\frac{\lfloor\frac{t}{p}\rfloor}{q}\right\rfloor < \sum_{q\leqslant t/p}\frac{t}{pq} < \frac{t}{p}\sum_{q\leqslant t}\frac{1}{q}.$$

Ennek alapján a teljes második összeg kisebb, mint

$$\left(\sum_{p\leqslant t}\frac{1}{p}\right)^2 = \big(E + h(t)\big)^2 = E^2 + 2h(t)E + h^2(t) < E^2 + 2E. \tag{3.8}$$

(3.7) és (3.8) alapján $E(\xi^2) < E^2 + 3E$, így $D^2 = E(\xi^2) - E^2(\xi) < E^2 + 3E - E^2 = 3E$, ahogy állítottuk.

Megjegyezzük, hogy a heurisztikusan kapott eredmény is elérhető, azaz a 3-as szorzó lényegében elhagyható a szórásnégyzet felső korlátjánál. Ugyanis $\pi(t) < c_2\frac{t}{\ln t}$ alkalmas c_2 abszolút konstanssal (lásd pl. [1], 5.4.3. tétel), ezért $h(t) < \frac{\pi(t)}{t} < \frac{c_2}{\ln t}$, és így (3.8)-ban

$$2h(t)E < \frac{2c_2 \cdot 1{,}01\ln\ln t}{\ln t} \to 0, \quad \text{ha } \ t \to \infty.$$

A feladatok vázlatos megoldása

1. Átlag: Párosítsunk minden részösszeget a komplementerével, ekkor minden ilyen pár összege $A = \sum_{j=1}^{k} a_j$. Az átlag így $2^{k-1}A/2^k = A/2$. Szórás: Egy részösszegből az $A/2$ átlagot levonva a részösszegben szereplő a_j tagok együtthatója $1/2$, a többi a_j számé pedig $-1/2$ lesz. Négyzetre emelve így mindegyik a_j^2 együtthatójára $1/4$, az a_ia_j szorzatokéra ($i < j$) pedig $\pm 1/2$ adódik. Megmutatjuk, hogy a négyzetek összeadásánál az $a_i a_j$ tagok kiesnek, mert ugyanannyiszor fordulnak elő pozitív együtthatóval, mint negatívval. Ugyanis pozitív előjelet akkor kapunk, ha a részösszegben a_i és a_j közül vagy mindkettő szerepel, vagy egyik sem. Összesen $2^{k-2}+2^{k-2}$ ilyen részösszeg van, hiszen a többi $k-2$ darab a_r mindegyike egymástól függetlenül lehet tagja vagy nem tagja a részösszegnek. Ugyanez a helyzet azokkal a részösszegekkel, amelyekben a_i és a_j közül pontosan az egyik szerepel. Így a különbségek négyzetösszegének átlaga

$$2^k \sum_{j=1}^{k} \frac{a_j^2}{4} / 2^k = \sum_{j=1}^{k} \frac{a_j^2}{4}.$$

2. Ha majdnem minden n számnak „lényegesen” több, mint $\ln\ln n$ prímosztója lenne, akkor 1 és t között ezek átlaga több lenne, mint $\ln\ln t$, ami ellentmondás. Az nyugodtan előfordulhatna, hogy a legtöbb n számnak jóval kevesebb, mint $\ln\ln n$ prímosztója van, és a nagyobb átlagot a kevés kiugró $\omega(n)$ érték okozza. Például (ellentétben az $\omega(n)$-nel és $\Omega(n)$-nel) a $d(n)$ osztók száma függvénynél ténylegesen ez a helyzet: $d(n)$ átlagértéke $\ln n$, ugyanakkor a legtöbb n egésznek csak kb. $(\ln n)^{\ln 2}$ pozitív osztója van. Ez utóbbi tény éppen a könnyen igazolható $2^{\omega(n)} \leqslant d(n) \leqslant 2^{\Omega(n)}$ kettős egyenlőtlenségből és a Hardy–Ramanujan-tételből következik.

3. A jelzett egyenlőtlenség alapján a $\Omega(n)$-re vonatkozó kérdést visszavezethetjük a $\omega(n)$-es Hardy–Ramanujan-tételre. Az egyenlőtlenség igazolásához pedig a (3.3) átalakítás mintájára lássuk be, hogy a kérdéses különbség

$$\sum_{r\geqslant 2,\ p^r\leqslant t} \left\lfloor \frac{t}{p^r} \right\rfloor .$$

Így elég megmutatni, hogy az összes (egynél nagyobb kitevőjű) prímhatvány reciprokösszege kisebb, mint 1. Egy adott p ilyen hatványainak a reciprokai mértani sorozatot alkotnak, amelynek összege $\frac{1}{p(p-1)}$. Ezeket prímek helyett minden $t \geqslant 2$ számra összegezve

$$\sum_{t=2}^{\infty} \frac{1}{t(t-1)} = \sum_{t=2}^{\infty} \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t} \right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots = 1.$$

Irodalom

[1] Freud Róbert–Gyarmati Edit: *Számelmélet.* Az interneten a Digitális Tankönyvtárban ingyenesen elérhető. Ebben a 12.6.3. tétel a valószínűségszámítás egy további alkalmazását is tárgyalja az Erdős és *Rényi Alfréd* (1921–1970) által bevezetett véletlen konstrukciókra támaszkodva.

Freud Róbert

Kedvcsináló a „Geometriafeladatok megoldása szinusztétellel” című íráshoz

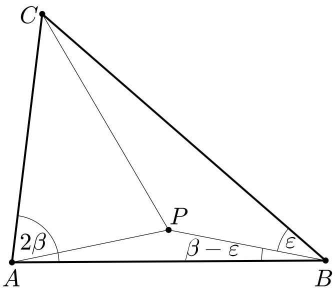
Bevezetés

A geometriafeladatok megoldásánál a klasszikus, megfelelő objektumok (pl. szögek, hasonlóságok) észrevételén és megfigyelésén alapuló megoldási módszerek mellett számolásos módszerekkel is eredményre juthatunk. Ezek közé tartozik a szögek szinuszának számolásán alapuló megoldásmód – többek között a koordinátageometriai, vektoros/komplex számos és baricentrikus koordinátázó módszerek mellett – melynek fő segédeszköze a szinusztétel (továbbiak a Ceva-tétel és az addíciós képletek). Előnye, hogy alkalmazása másmilyen gondolkodást, ötleteket igényel, mint a klasszikus módszerek, így az azokkal nehezen zöldágra vergődő versenyzőknek is alternatívát nyújt (kevesebb a „vegyük észre, hogy ...” típusú rész), miközben nem igényel sokkal több előismeretet. Ugyanakkor alkalmazhatósága korlátozottabb. Ezen módszert mutatja be a „Geometriafeladatok megoldása szinusztétellel” című írásom, mely megtalálható a KöMaL honlapján a cikkek között: `https://www.komal.hu/cikkek/cikklista.h.shtml`.

A bevezetés után elméleti összefoglalással folytatódó cikk versenyfeladatok megoldásain keresztül példákat hoz a módszer alkalmazhatóságára és további egyéni kidolgozást igénylő, vele megoldható feladatokat tartalmaz. Az ismertető további része ezekből mutat meg részleteket.

Egy geometriafeladat kidolgozott megoldással

EGMO/IMO/MEMO 1. válogatóverseny 2019., 3. feladat. Legyen az ABC háromszögben $CAB\sphericalangle = 2 \cdot ABC\sphericalangle$. Tegyük fel, hogy létezik egy P pont a háromszög belsejében, amelyre $AP = BP$ és $CP = AC$. Bizonyítsd be, hogy ekkor $PBC\sphericalangle = 30°$.



Megoldás. Jelöljük a B-nél lévő belső szöget β-val és a PBC szöget, melyről az állítás szól, ε-nal. Számoljunk ki belőlük néhány másik szöget. Mivel P belső pont,

$$PBA\sphericalangle = ABC\sphericalangle - PBC\sphericalangle = \beta - \varepsilon.$$

Mivel az ABP háromszög egyenlő szárú, a $PAB\sphericalangle$ is $\beta - \varepsilon$. Emellett $CAB\sphericalangle = 2\beta$ és $CAP\sphericalangle = \beta + \varepsilon$, az egyenlő szárú APC háromszögben az $APC\sphericalangle$ is $\beta + \varepsilon$. Ezért az APC háromszög harmadik belső szöge $ACP\sphericalangle = 180° - 2\beta - 2\varepsilon$. Mivel az ABC háromszögben a B-nél, illetve A-nál lévő belső szögek β, illetve 2β, $ACB\sphericalangle = 180° - 3\beta$ és ebből

$$BCP\sphericalangle = ACB\sphericalangle - ACP\sphericalangle = 180° - 3\beta - (180° - 2\beta - 2\varepsilon) = 2\varepsilon - \beta.$$

$\beta > \varepsilon$ és $180° - 3\beta > 0$, így $60° > \varepsilon$ ($> 0°$).

Most, hogy kiszámoltuk a belső szögeket, jöhet a szinusztétel alkalmazása. A PBC háromszögre

$$\frac{PB}{PC} = \frac{\sin(2\varepsilon - \beta)}{\sin\varepsilon},$$

a PAC háromszögre pedig

$$\frac{PA}{PC} = \frac{\sin(180° - 2\beta - 2\varepsilon)}{\sin(\beta + \varepsilon)}.$$

Mivel $AP = BP$, $\frac{PB}{PC} = \frac{PA}{PC}$, így

$$\frac{\sin(2\varepsilon - \beta)}{\sin\varepsilon} = \frac{\sin(180° - 2\beta - 2\varepsilon)}{\sin(\beta + \varepsilon)}.$$

Mivel $\sin(180° - 2\beta - 2\varepsilon) = \sin(2\beta + 2\varepsilon) = 2\cos(\beta + \varepsilon)\sin(\beta + \varepsilon)$, ezért

$$\frac{\sin(180° - 2\beta - 2\varepsilon)}{\sin(\beta + \varepsilon)} = 2\cos(\beta + \varepsilon)$$

(háromszög belső szögeként $\sin(\beta + \varepsilon) \neq 0$ és $\sin\varepsilon \neq 0$). Ezt felhasználva

$$\frac{\sin(2\varepsilon - \beta)}{\sin\varepsilon} = 2\cos(\beta + \varepsilon)$$

és $2\cos(\beta + \varepsilon)\sin\varepsilon = \sin(2\varepsilon - \beta)$. Addíciós tételekből

$$2\cos(\beta + \varepsilon)\sin\varepsilon = 2(\cos\beta\cos\varepsilon - \sin\beta\sin\varepsilon)\sin\varepsilon = 2\cos\beta\cos\varepsilon\sin\varepsilon - 2\sin\beta\sin^2\varepsilon,$$

míg

$$\begin{aligned}\sin(2\varepsilon - \beta) &= \sin 2\varepsilon\cos(-\beta) + \sin(-\beta)\cos 2\varepsilon = \sin 2\varepsilon\cos\beta - \sin\beta\cos 2\varepsilon = \\ &= 2\sin\varepsilon\cos\varepsilon\cos\beta - (\sin\beta\cos^2\varepsilon - \sin\beta\sin^2\varepsilon) = \\ &= 2\cos\beta\sin\varepsilon\cos\varepsilon - \sin\beta\cos^2\varepsilon + \sin\beta\sin^2\varepsilon.\end{aligned}$$

Ezek egyenlőségéből

$$2\cos\beta\cos\varepsilon\sin\varepsilon - 2\sin\beta\sin^2\varepsilon = 2\cos\beta\sin\varepsilon\cos\varepsilon - \sin\beta\cos^2\varepsilon + \sin\beta\sin^2\varepsilon,$$

így rendezve

$$\sin\beta\cos^2\varepsilon = 3\sin\beta\sin^2\varepsilon,$$

$\sin\beta \neq 0$-val osztva $\cos^2\varepsilon = 3\sin^2\varepsilon$. Mivel $\cos^2\varepsilon + \sin^2\varepsilon = 1$, ezért ebből $\cos^2\varepsilon = \frac{3}{4}$; mivel $60° > \varepsilon > 0°$, ezért $\cos\varepsilon > 0$. Így

$$\cos\varepsilon = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

és ebből ezen az intervallumon csak $\varepsilon = 30°$ lehet. Tehát $PBC\sphericalangle = 30°$, a feladat állítását beláttuk. $\square$

A témába vágó további feladatok

1. feladat (Kürschák verseny 1990/2). Az ABC háromszög beírt körének középpontja legyen K, a hozzáírt körök középpontjai A_0, B_0, C_0. Jelölje A_1 a BC oldal és a BKC szög felezőjének, B_1 az AC oldal és az AKC szög felezőjének, C_1 pedig az AB oldal és az AKB szög felezőjének a metszéspontját. Igazoljuk, hogy az A_0A_1, B_0B_1 és C_0C_1 egyenesek egy ponton mennek át.

2. feladat (IMO 2019 Shortlist G2 – Surányi János emlékverseny 2020/1). Legyen ABC hegyesszögű háromszög, az A, B és C-ből induló magasságok talppontjai legyenek rendre D, E, F. Legyen k_b és k_c a BDF és CDE háromszögek beírt köre, ezek érintsék a DF és DE szakaszokat rendre az M és N pontokban. Az MN egyenesnek a k_b és k_c körökkel vett másik metszéspontja rendre P és Q. Igazoljuk, hogy $MP = NQ$.

3. feladat (IMO 2001/5). Az ABC háromszögben legyen AP a $BAC\sphericalangle$ felezője, ahol P a BC oldalon van, BQ pedig az $ABC\sphericalangle$ felezője, ahol Q a CA oldalon van. Tudjuk, hogy $BAC\sphericalangle = 60°$ és hogy $AB + BP = AQ + QB$.

Mik az ABC háromszög szögeinek lehetséges értékei?

Füredi Erik

60. Rátz László Vándorgyűlés

2021. július 1–3.

A koronavírus-világjárvány miatt a Bolyai János Matematikai Társulat a 2021. évi vándorgyűlést online formában rendezte meg. Az eseményről, illetve annak előkészületeiről, az online formáról hosszú beszámoló olvasható az Érintő Elektronikus Matematikai Lapok szeptemberi számában (`https://ematlap.hu/hirek-ujdonsagok-2021-4/1120-a-60-online-ratz-laszlo-vandorgyules`).

Nagyon sajnáltuk, hogy nem találkozhattunk személyesen, de az online-nak előnye is van: utólag az összes előadás megtekinthető a vándorgyűlés honlapján (`https://www.bolyai.hu/60-ratz-laszlo-vandorgyules`).

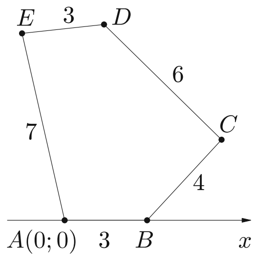
A 2021. évi Beke Manó Emlékdíjas tanárok méltatását is meghallgathattuk, a díjazottak: **Czimmermann József, Dr. Máder Attila, Fonyóné Németh Ildikó, Hujter Bálint, Kozma Lászlóné, Molnár Judit** és **Dr. Molnár István** (megosztott díj) és **Tomcsányi Szabó Katalin.**

Az általános iskolás és középiskolás tanárversenyt is online rendezték meg, a feladatokat és az eredményeket külön közöljük.

A 2022-es vándorgyűlés tervezett helyszíne már harmadik éve Eger, nagyon reméljük, hogy ezúttal már személyesen vehetünk részt ezen a nagy múltú és színvonalas eseményen.

A középiskolai tanárok versenyének feladatai

1. A 2020–2021-es tanév kezdetén Kiss tanár úr osztályában a „Szereted-e a matekot?” kérdésre a tanulók 50-50%-a válaszolt igennel illetve nemmel. A tanév végén megismételt kérdésre már az igen válaszok aránya 70%-ra nőtt, míg a nem válaszok aránya 30%-ra csökkent. A tanév során a diákok p%-a változtatta meg a véleményét. Mennyi a különbség p maximális és minimális értéke között? (A) 0; (B) 20; (C) 40; (D) 60; (E) 80.



2. Az $ABCDE$ konvex ötszög oldalainak hossza $AB=3$, $BC=4$, $CD=6$, $DE=3$, $EA=7$. Az ötszöget az ábrán látható módon elhelyezzük a koordinátarendszerben úgy, hogy az A csúcs az origóban, a B pedig az x tengely pozitív felén helyezkedjen el. Ezután az ötszöget az óramutató járásának megfelelően elkezdjük görgetni az x tengelyen. Melyik oldal fogja érinteni az x tengely $(2021;0)$ pontját? (A) AB; (B) BC; (C) CD; (D) DE; (E) EA.

3. A 10, 2, 5, 2, 4, 2, x számok átlaga, mediánja és módusza valamilyen sorrendben egy nem állandó számtani sorozat három egymást követő tagja. Mennyi x lehetséges értékeinek összege? (A) 3; (B) 6; (C) 9; (D) 17; (E) 20.

4. Hány különböző kétjegyű pozitív egész számmal osztható $2^{24}-1$? (A) 4; (B) 8; (C) 10; (D) 12; (E) 14.

5. Az $ABCD$ téglalapban $AB=6$ és $BC=3$. M a CD oldal azon pontja, melyre $AMD\sphericalangle = BMA\sphericalangle$. Mekkora az $AMD\sphericalangle$? (A) 30°; (B) 60°; (C) 72°; (D) 75°; (E) 80°.

6. Hány természetes számokból álló $(a;b;c;d)$ számnégyes megoldása az alábbi egyenletnek?

$$a\lg 2 + b\lg 3 + c\lg 5 + d\lg 7 = 2021$$

(A) 0; (B) 1; (C) 4; (D) 2021; (E) végtelen sok.

7. Ha $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = 5$ és $\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = 6$, akkor mekkora $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ értéke? (A) 1; (B) $\sqrt{3}$; (C) 3; (D) 11; (E) 30.

8. Két kőműves közül az egyik 10, a másik pedig 9 óra alatt tud egy kéményt felfalazni. Amikor együtt dolgoznak, akkor sokat beszélgetnek, ezért romlik a teljesítményük, és így együttesen óránként 10 téglával kevesebbet tudnak beépíteni. Együttes munkával 5 óra alatt tudják felépíteni a kéményt. Hány téglából áll a kémény? (A) 500; (B) 900; (C) 950; (D) 1000; (E) 1800.

9. Egy reggeli során Viki családjának minden tagja azonos térfogatú tejeskávét ivott. A kávé és tej mennyisége csészéről csészére változott, de minden pohár tartalmazta mindkét összetevőt. Viki a teljes tejmennyiség negyedét, a kávénak pedig a hatodát itta meg. Hány személyből áll Viki családja? (A) 3; (B) 4; (C) 5; (D) 6; (E) 7.

10. Az A, B, C halmazokat „minimális metszetű halmaztriónak” nevezzük, ha $|A\cap B| = |B\cap C| = |C\cap A| = 1$, $A,B,C\neq\emptyset$ és az $A\cap B$, $B\cap C$, $C\cap A$ halmazok páronként különbözőek. Pl. az $\{1,2\}$, $\{2,3\}$, $\{1,3,4\}$ halmazok ilyen tulajdonságúak. Legyen n a $H=\{1,2,3,4,5,6\}$ halmaz részhalmazaiból alkotható „minimális metszetű halmaztriók” száma. Mekkora n értéke, ha a trión belül a halmazok sorrendjét nem vesszük figyelembe? (A) 27; (B) 64; (C) 384; (D) 540; (E) 1280.

11. Legyen B az $A_1A_2\dots A_n$ szabályos n-szögön kívül egy olyan pont, melyre az A_1BA_2 háromszög szabályos, B, A_1, A_n pedig egy másik szabályos sokszög három egymást követő csúcsa. Mekkora lehet n legnagyobb értéke? (A) 6; (B) 9; (C) 12; (D) 18; (E) 42.

12. Hány olyan $1 \leqslant n \leqslant 1000$ pozitív egész szám van, amely előállítható két négyzetszám különbségeként? (A) 250; (B) 500; (C) 750; (D) 999; (E) 1000.

13. Artúr király 25 lovagja egy kör alakú asztalnál ül. A király véletlenszerűen kiválaszt közülük hármat és elküldi őket, hogy öljék meg a közelben tartózkodó gonosz sárkányt. Jelölje P annak valószínűségét, hogy a kijelölt lovagok között legalább kettő az asztalnál egymás szomszédja volt. P-t redukált törtalakban felírva mennyi a számláló és a nevező összege? (A) 5; (B) 57; (C) 67; (D) 113; (E) 287.

14. Az osztály matematika órán Tünde nénitől a faktoriális fogalmát tanulta. Dávid lelkes volt, és kiszámolta 1-től 20-ig a természetes számok szorzatát, majd a kapott 19-jegyű számot felírta a táblára. Szünetben azonban valaki letörölt néhány számjegyet, így most a táblán a következő egyenlőség látható:

$$20! = 24329020\square 81766\square\square\square\square\square,$$

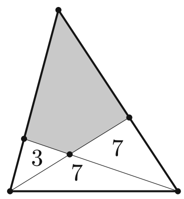
ahol a $\square$-ek helyén álló számjegyek már nem láthatók. Mennyi a letörölt számjegyek összege? (A) 4; (B) 5; (C) 6; (D) 8; (E) 10.

15. Az $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ másodfokú függvényekre

$$f(x) = x^2 - 2x + 2, \quad g(x) = 2x^2 - 4x + 3$$

és bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén $f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x)$. Ha $h(11) = 181$, akkor mekkora $h(6)$ értéke? (A) 31; (B) 36; (C) 41; (D) 46; (E) többféle is lehet.

16. Egy háromszöget felosztunk három háromszögre és egy négyszögre úgy, hogy a háromszög két csúcsát összekötjük a velük szemközti oldal egy-egy pontjával. A három háromszög területe az ábra szerint 3, 7, 7 területegység. Mekkora a szürke négyszög területe? (A) 15; (B) 17; (C) $\frac{35}{2}$; (D) 18; (E) $\frac{55}{3}$.



17. A $48, 84, 108, \dots$ sorozat tagjai két számtani sorozat megfelelő tagjainak összeszorzásával jönnek létre. Mekkora a sorozat 9. tagja? (A) 0; (B) 32; (C) 126; (D) 180; (E) 420.

18. Az a, b, c, d pozitív egész számokra teljesülnek az alábbi feltételek:

$$a > b > c > d, \quad a + b + c + d = 2022, \quad a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 2022.$$

Mekkora a lehetséges értékeinek száma? (A) 0; (B) 1; (C) 502; (D) 503; (E) 2021.

19. Az alábbi táblázat vázlatosan mutatja be az Országos Pontyfogó Bajnokság eredményeit:

Fogott pontyok száma (n)	0	1	2	3	...	13	14	15
Az n pontyot fogott versenyzők száma	9	5	7	23	...	5	2	1

A Sporthorgász magazin így számolt be a rendezvényről:

- A győztes 15 pontyot fogott.

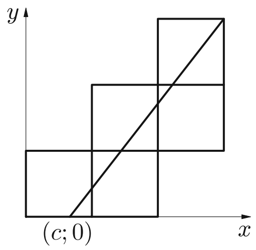
- Azok, akik legalább 3 pontyot fogtak, azok átlagosan 6 halat tudtak felmutatni a mérlegelésnél.
- Azok, akik legfeljebb 12 pontyot fogtak, azok neve mellé átlagosan 5 hal került be az eredménylistába.

Hány pontyot fogtak összesen a bajnokság résztvevői? (A) 936; (B) 943; (C) 960; (D) 1024; (E) 2021.

20. R, L, V olyan természetes számok, melyekre

$$R + L + V = 21.$$

Mennyi a $R \cdot L \cdot V + R \cdot L + L \cdot V + V \cdot R$ kifejezés maximumának értéke? (A) 221; (B) 480; (C) 482; (D) 490; (E) 512.



21. Öt egységnégyzetet az ábrán látható módon elhelyezünk egy koordinátarendszerben. A $(c;0)$ és a $(3;3)$ pontokat összekötő szakasz a kijelölt tartományt két egyenlő területű részre osztja fel. Mekkora a c értéke? (A) $\frac{1}{2}$; (B) $\frac{3}{5}$; (C) $\frac{2}{3}$; (D) $\frac{3}{4}$; (E) $\frac{4}{5}$.

22. Az $\{1,2,3,\ldots,1000\}$ halmazból véletlenszerűen kiválasztunk előbb három számot $\{a_1,a_2,a_3\}$, majd a maradék 997 elemből még hármat $\{b_1,b_2,b_3\}$. Legyen a_1, a_2, a_3 egy téglatest alakú doboz, b_1, b_2, b_3 pedig egy szintén téglatest alakú tégla három, egy csúcsból kiinduló élének hossza. Legyen P annak a valószínűsége, hogy megfelelő elforgatással a tégla kilógás nélkül elhelyezhető a dobozban. P-t redukált törtalakban felírva mennyi a számláló és a nevező összege? (A) 4; (B) 5; (C) 7; (D) 10; (E) 12.

23. Jelölje n a 2021 felírásainak számát $2021 = a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$ formában, ahol $0 \leqslant a_i \leqslant 99$ ($a_i \in \mathbb{N}$, $i = 0,1,2,3$). Például egy lehetséges felírási lehetőség: $2021 = 1 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 67 \cdot 10 + 51$. Mekkora n értéke? (A) 3; (B) 9; (C) 202; (D) 203; (E) 420.

24. Két doboz mindegyikében fehér és fekete golyók vannak. A két dobozban együttesen 25 golyó található. Becsukott szemmel mindkét dobozból véletlenszerűen kiveszünk egy-egy golyót. Ha annak a valószínűsége, hogy mindkettő fekete lesz $\frac{27}{50}$, akkor mi a valószínűsége annak, hogy mindkét kihúzott golyó fehér lesz? (A) $\frac{1}{50}$; (B) $\frac{2}{50}$; (C) $\frac{4}{50}$; (D) $\frac{5}{50}$; (E) Nem határozható meg egyértelműen.

25. Z, a hangya az ABC szabályos háromszög A csúcsából indul, és minden lépése során véletlenszerűen átmászik a háromszög egyik oldalán haladva a másik két csúcs valamelyikébe. Mi a valószínűsége annak, hogy a 6. lépés után ismét az A csúcsban fog tartózkodni? (A) $\frac{8}{32}$; (B) $\frac{10}{32}$; (C) $\frac{11}{32}$; (D) $\frac{12}{32}$; (E) $\frac{16}{32}$.

26. Az $ABCD$ konvex négyszögben $DAB\sphericalangle = ABC\sphericalangle$, $BDA\sphericalangle = BCD\sphericalangle$, $CD = 5$, $DA = 8$ és $BD = 10$. Mekkora a BC oldal hossza? (A) 12; (B) 12,5; (C) 13; (D) 13,5; (E) 145.

27. Egy pozitív egész számot „kígyózónak” nevezünk, ha tízes számrendszerbeli $\overline{a_1a_2a_3\ldots a_k}$ ($k \in \mathbb{N}^+$) alakjára teljesül, hogy $a_i < a_{i+1}$, ha i páratlan és $a_i > a_{i+1}$, ha i páros ($i \in \mathbb{N}^+$, $1 \leqslant i < k-1$). Hány különböző jegyekből álló négyjegyű „kígyózó” szám létezik? (A) 252; (B) 630; (C) 882; (D) 1050; (E) 1260.

28. A Rátz László Vándorgyűlésen a Tanárverseny után az egyik versenyző a társával beszélgetve így értékelte saját teljesítményét:

„80 pontnál többet szereztem. Ha összpontszámomat megmondanám neked, akkor meg tudnád állapítani, hogy hány jó és hány rossz választ adtam. Viszont bármely ennél gyengébb, de 80 pontnál jobb eredmény esetén már nem lennél erre képes."

(A versenyen a versenyzők pontszámát a $p=30+4\cdot j-r$ képlettel határozzák meg, ahol j és r jelöli rendre a jó, illetve a rossz válaszok számát, és a megválaszolatlan kérdésekért nem jár pontlevonás.)

Hány kérdésre nem adott választ a versenyző? (A) 0; (B) 1; (C) 2; (D) 3; (E) 4.

29. Legyen H azon r $(0<r<1)$ racionális számok halmaza, amelyek végtelen periodikus tizedestört alakja $0{,}abcabcabc\ldots=0{,}\dot{a}b\dot{c}$, ahol a, b, c nem feltétlenül különböző számjegyek. Felírva H elemeinek redukált tört alakját, hányféle számlálót kapunk? (A) 630; (B) 642; (C) 648; (D) 660; (E) 998.

30. Egy szabályos pénzérmét egymás után 15-ször feldobva rögzítjük a fejek és az írások sorrendjét. Ezután megvizsgáljuk a közvetlenül egymás után következő dobáspárokat. Azt állapítottuk meg, hogy a sorozatban pontosan két FF, három FI, négy IF és öt II dobáspár fordult elő. Hány különböző sorrend szerint alakulhatott ki a feltételeknek megfelelő dobássorozat? (A) 120; (B) 560; (C) 1568; (D) 5005; (E) 2 522 520.

A feladatsort **Fonyóné Németh Ildikó** és **Fonyó Lajos** állította össze

A középiskolai tanárok versenyének eredménye

1. Molnár István (Békéscsabai Andrássy Gyula Gimn.)
2. Fridrik Richárd (Hódmezővásárhely, Eötvös József Technikum)
3. Kallós Béla (Nyíregyháza, Szent Imre Katolikus Gimn.)
4. Balla Éva (Hajdúszoboszló, Hőgyes Endre Gimn.)
5. Kasztl Rozália (Fonyód, Mátyás Király Gimn.)
6. Pituk Andrea Mária (Mátészalkai Esze Tamás Gimn.)
7. Káplár Veronika (Marcali Berzsenyi Dániel Gimn.) és
Vértes Judit (Budapest, Kölcsey Ferenc Gimn.)
9. Bakos Enikő (Budapest, ELTE Apáczai Csere János Gyak. Gimn.) és
Baloghné Cseh Judit (Szolnok, Varga Katalin Gimn.).

Az általános iskolai tanárok versenyének* eredménye

1. Moróné Pálos Zsuzsanna (Budapest, Újbudai Teleki Blanka Ált. Isk.)
2. Tóth Gabriella (Csantavér, Hunyadi János Ált. Isk.)
3. Egyed László (Bajai III. Béla Gimn.),
4. Miklós Ildikó (Vámosmikolai Ált. Tagisk.) és
Paróczay Eszter (Gödöllői Premontrei Szent Norbert Ált. Isk. és Gimn.)
6. Borbélyné Rostaházi Krisztina (Székesfehérvár, Ciszterci Szent István Gimn).

* Az általános iskolai tanárok versenyének feladatait nem közöljük.

Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire

I. rész

1. Három pénzváltó vállalkozás aktuális forint-euró árfolyamait ismerjük:

	Vétel	**Eladás**	**Illeték**
Első	348,50	352,90	nincs
Második	351,00	352,00	a tranzakció összegének 0,3%-a, de maximum 1500 Ft
Harmadik	350,00	352,50	400 Ft

A *vételi* árfolyam adja meg, hogy a valutaváltó hány Ft-ért vesz meg az ügyféltől 1 eurót. Az *eladási* árfolyam adja meg, hogy a valutaváltó hány Ft-ért ad el az ügyfélnek 1 eurót. Végül az *illeték* adja meg, hogy minden egyes pénzváltási tranzakció után mekkora díjat kell pluszban kifizetni.

a) Annának 250 euróra volt szüksége. Mennyit kellene ezért fizetnie az egyes pénzváltóknál? (*3 pont*)

b) Balázs 600 000 Ft-ért vett eurót az Első Pénzváltónál. Később kiderült, hogy nem lesz rá szüksége, ezért visszaváltotta a pénzt forintra a Második Pénzváltónál. Hány forint vesztesége keletkezett? (*4 pont*)

c) Határozzuk meg, hány euró vásárlása esetén lesz a Harmadik Pénzváltóé a legkedvezőbb átváltási ajánlat. (*7 pont*)

2. *a*) Melyik az a legkisebb olyan 77-tel osztható négyjegyű pozitív egész szám, amelyik pontosan három különböző számjegyet tartalmaz? (*4 pont*)

b) Hány olyan négyjegyű pozitív egész szám van, amelyik pontosan három különböző számjegyet tartalmaz? (*4 pont*)

c) Hány olyan négyjegyű pozitív egész szám van, amely a 7 és a 11 közül legalább az egyikkel osztható? (*4 pont*)

3. *a*) Egy számtani sorozat első 10 tagjának összege megegyezik az ezt követő 5 tag összegével. A sorozat 19-edik tagja a 777. Határozzuk meg a sorozat első tagját és differenciáját. (*7 pont*)

b) Egy mértani sorozat első 2 tagjának összege hatszorosa a sorozat harmadik tagjának. A sorozat 4-edik tagja az 1. Határozzuk meg a sorozat első tagját és hányadosát. (*6 pont*)

4. *a*) Igaz-e a következő állítás?

Ha $x=3$, akkor $f(x)=2x^2-10x+14$ értéke pozitív prímszámmal egyenlő.

Fogalmazzuk meg az állítás megfordítását. Igaz-e az állítás megfordítása? A választ indokoljuk. (*5 pont*) *b*) Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:

$$|2\sin^2 x + 3\sin x - 1| = 1. \qquad (7\ pont)$$

II. rész

5. Nagyi a 31,5 cm × 30 cm (belső) méretű tepsijében sütött süteményt az unokáinak. A sütemény 4 cm magas lett. Nagyi a sütemény négy oldalát és a tetejét be szeretné vonni csokikrémmel.

a) Hány dkg csokikrémre lesz ehhez szüksége, ha 1 dm^2 felület bevonásához 2 dkg csokikrém elegendő? A választ egészre kerekítve adjuk meg. (*3 pont*)

Az unokái közül ugyanannyian szeretik a sütemény „szélét”, mint a „közepét”. Ezért Nagyi szeretne a sütemény széléből mind a négy oldalon egy azonos szélességű csíkot levágni úgy, hogy a levágott részek alapterülete és a sütemény közepének alapterülete egyenlő legyen.

b) Határozzuk meg a levágandó csík szélességét. (*7 pont*)

Nagyi minden unokájának ugyanannyi szeletet szeretne adni a süteményből.

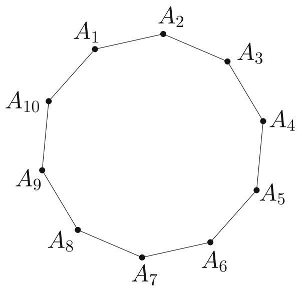
Ha $10 \cdot 5$ szeletre vágná a süteményt, akkor az osztás után 2 szelet megmaradna. Ha $9 \cdot 5$ szeletre vágná, akkor 3 szelet, ha pedig $10 \cdot 4$ szeletre vágná, akkor 4 szelet maradna meg az osztás után.

c) Hány unokája van Nagyinak? (*6 pont*)

6. Egy szabályos 10-szög alakú asztal egy oldalának hossza 50 cm. Erre az asztalra egy olyan kör alakú terítőt készítenek, amely sehol nem lóg le az asztalról.

a) Határozzuk meg a legnagyobb ilyen terítő területét. (*3 pont*)

b) Legfeljebb hány százalékát tudja lefedni ez a terítő az asztal területének? (*3 pont*)



Jelölje F_1 az A_1A_2 és F_2 az A_3A_4 szakaszok felezőpontját. Az asztallapot az A_8F_1 és az $A_{10}F_2$ egyenesekkel négy részre osztják. Jelölje M a két egyenes metszéspontját.

c) Igazoljuk, hogy az $A_{10}A_9A_8M$ négyszög és az $F_2A_3A_2F_1M$ ötszög területe egyenlő. (*4 pont*)

Egy szabályos 10-szög csúcsai közül véletlenszerűen kiválasztunk hármat, így egy háromszög csúcsait kapjuk.

d) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a háromszög tompaszögű? (*6 pont*)

7. Az egyetemen 220 diák írt meg egy dolgozatot, az átlag századokra kerekítve 3,82 lett. (Csak az 1, 2, 3, 4, 5 egész értékű osztályzatok lehettek az eredmények.)

a) Legalább és legfeljebb hány 5-ös dolgozat született, ha nem volt 1-es? (*7 pont*)

Egy szabályos dobókockával háromszor egymás után dobunk.

b) Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy valamelyik dobott szám a másik két dobott számnak számtani vagy mértani közepe lesz. (*6 pont*)

c) Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy a dobott számok között van 6-os, feltéve, hogy valamelyik dobott szám a másik két dobott számnak a számtani vagy mértani közepe. (*3 pont*)

8. *a*) Az $y=\frac{8}{3}x-\frac{4}{9}x^2$ egyenletű görbe és az x-tengely által határolt zárt tartományt két részre osztja az $y=\frac{4}{3}x$ egyenletű egyenes. Határozzuk meg a két rész területének arányát. (*8 pont*)

b) Egy háromszög csúcsai a koordináta-rendszerben $A(0;0)$, $B(3;0)$ és $C(3;4)$. A háromszöget megforgatjuk a leghosszabb oldala körül. Határozzuk meg az így kapott forgástest felszínét és térfogatát. (*8 pont*)

9. Egy építőipari vállalkozónak a legutóbbi építkezés után megmaradt 200 kg cementje, és úgy döntött, hogy egyenlő tömegű részekre osztva értékesíti.

A kereskedelemben szokásos módon nagyobb kiszerelésű csomag esetén alacsonyabb a cement kilogrammonkénti ára (egységára): ha egy csomag cement tömege m kg, akkor $\left(40-\frac{m}{10}\right)$ pengős egységáron kínálja eladásra. A cement becsomagolásának is van költsége, mégpedig m kg-os csomag esetén $\left(25+\frac{m}{10}\right)$ pengő csomagonként.

a) Határozzuk meg, hogy mekkora lesz a vállalkozónak az eladásából (a csomagolás költségének levonása után) származó bevétele, ha a cementet 10 egyenlő tömegű részre osztva értékesíti. (*5 pont*)

b) Határozzuk meg, hány egyenlő tömegű részre kell osztani a cementet ahhoz, hogy – azt a tervek szerint értékesítve – az eladásból származó (a csomagolási költségek levonása utáni) bevétel maximális legyen. (*11 pont*)

Koncz Levente
Budapest

Megoldásvázlatok a 2021/12. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához

I. rész

1. *Felírjuk az* 1*;* 2*;* 3*;* 4*;* 5 *számjegyek sorbarendezésével képezhető összes ötjegyű számot.*

a) *Mennyi ezeknek az ötjegyű számoknak az összege?* (6 pont)

b) *Hány olyan számtani sorozat létezik, melynek első tagja* 12 345*, szerepel benne az* 54 321 *is, és a differenciája pozitív egész szám?* (6 pont)

Megoldás. *a*) Egy kiválasztott számjegy az egyesek helyén $4! = 24$-szer fordul elő, mert a többi számjegyet ennyiféle sorrendben írhatjuk mellé. Az egyesek helyén álló számok összege ezért $24\cdot(1+2+3+4+5)=360$.

Ugyanez érvényes a többi helyiértékre. Az összeg tehát $11\,111\cdot 360 = 3\,999\,960$.

b) $12\,345+(n-1)d=54\,321 \Rightarrow (n-1)d=41\,976=2^3\cdot 3^2\cdot 11\cdot 53$. Osztóinak száma $4\cdot 3\cdot 2\cdot 2=48$, a differencia s vele a sorozat tehát 48-féle lehet. (Mivel minden d-hez van megfelelő n és így megfelelő sorozat is.)

2. *Egy sorsjegy ára* 1000 Ft. *A sorsjegy lehetséges nyereményei:* 2 000 Ft, 5 000 Ft, 20 000 Ft, 100 000 Ft, 500 000 Ft.

Ezek valószínűsége rendre: 11%, 5%, 0,81%, 0,17%, 0,02%.

a) *Mennyi a nyeremény várható értéke?* (*3 pont*)

b) *Mekkora a valószínűsége, hogy nem nyerünk, ha egy sorsjegyet vásárolunk?* (*2 pont*)

Tíz alkalommal veszünk egy-egy sorsjegyet. Mekkora a valószínűsége, hogy

c) *legalább kétszer nyerünk;* (*5 pont*)

d) *pontosan háromszor nyerünk?* (*3 pont*)

Megoldás. *a*)

$$0{,}11\cdot 2000+0{,}05\cdot 5000+0{,}0081\cdot 20\,000+0{,}0017\cdot 100\,000+0{,}0002\cdot 500\,000=902.$$

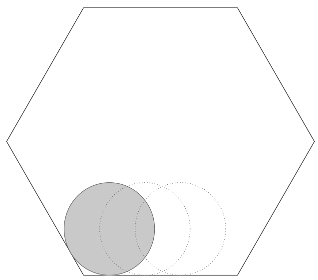
A nyeremény várható értéke 902 Ft.

b) $1-(0{,}11+0{,}05+0{,}0081+0{,}0017+0{,}0002)=0{,}83$.

c) Vonjuk ki 1-ből annak a valószínűségét, hogy egyszer sem nyerünk, illetve pontosan 1-szer nyerünk: $1-0{,}83^{10}-10\cdot 0{,}83^9\cdot 0{,}17=0{,}527$.

d) $\binom{10}{3}\cdot 0{,}83^7\cdot 0{,}17^3=0{,}16$.

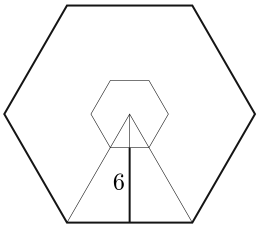
3. *Egy* 10 cm *oldalú, szabályos hatszög alakú fehér tálca pereme mellett végiggörgetünk egy* 6 cm *átmérőjű, alul festékes korongot. Mekkora az ilyen módon beszínezett terület? A választ* mm^2 *pontossággal adjuk meg.* (*12 pont*)

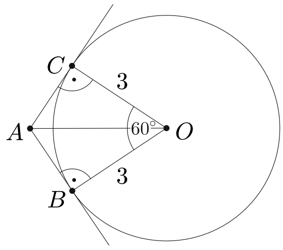


Megoldás. A tálca területéből kivonjuk a fehéren maradó belső kis hatszög és a sarokrészek területét. A nagy hatszög középponti háromszögének magassága $5\sqrt{3}\approx 8{,}66$ cm. A hatszög területe $6\cdot\frac{10\cdot 5\sqrt{3}}{2}=259{,}8\ \mathrm{cm}^2$.

A kis hatszög középponti háromszögének magassága $8{,}66-6=2{,}66$ cm. A hatszög területe:

$$\left(\frac{2,66}{8,66}\right)^2\cdot 259{,}8=24{,}51\ \mathrm{cm}^2.$$





A sarkon kimaradó íves „háromszög” területét megkapjuk, ha a 60° középponti szögű, 3 cm sugarú körcikk területét ($3^2\pi/6 = 4{,}71$ cm^2) kivonjuk az $ABCD$ négyszög területéből (5,196 cm^2). A hat kis sarokrész együttes területe

$$6 \cdot (5{,}196 - 4{,}71) = 2{,}92 \text{ cm}^2.$$

A befestett terület $259{,}8 - 24{,}51 - 2{,}92 = 232{,}37$ cm^2 = 23 237 mm^2.

4. *a) Adjuk meg az* $x = \frac{y^2}{8} + 3$ *egyenletű parabolához a* $P(0; -1)$ *pontból húzható érintők egyenletét.* *(8 pont)*

b) Határozzuk meg azokat a valós x értékeket, melyekben az $f(x) = \sin^2 x + \cos x$ *függvény grafikonjának érintője párhuzamos az x-tengellyel.* *(6 pont)*

Megoldás. *a)* Az érintő egyenlete $y = mx - 1$. Az érintő és a parabola egyenletéből álló egyenletrendszernek pontosan egy megoldást kell adnia. y-t behelyettesítve a parabola egyenletébe az $m^2x^2 - (2m + 8)x + 25 = 0$ paraméteres másodfokú egyenlethez jutunk. Ennek akkor van pontosan egy gyöke, ha

(1) $m = 0$. Ez nem megoldás, mert a parabola tengelyével párhuzamos egyenest jelent, ami nem érintő.

(2) az egyenlet diszkriminánsa 0, vagyis $-96m^2 + 32m + 64 = 0$. Ezt megoldva $m = 1$, illetve $m = -2/3$ adódik. Az érintők egyenlete: $y = x - 1$, illetve $y = -2/3x - 1$.

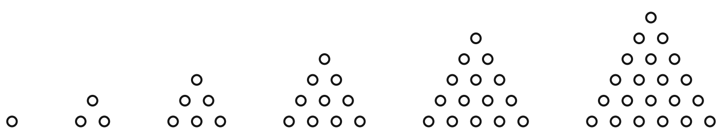
b) Azon x értékeket keressük, melyekre a derivált értéke 0:

$$f'(x) = 2 \sin x \cos x - \sin x = \sin x(2 \cos x - 1) = 0.$$

$\sin x = 0$, ebből $x = k \cdot \pi$, vagy $\cos x = 1/2$, ebből $x = \pm\pi/2 + 2l\pi$ $(k, l \in \mathbb{Z})$.

II. rész

5. *A pitagoreusok azokat a természetes számokat nevezték háromszögszámnak, amely számú kavicsot az* ábrán *látható módon háromszög alakba lehet rendezni.*

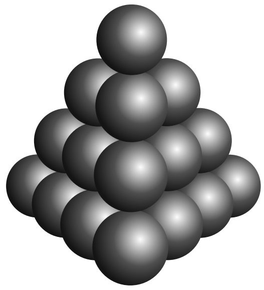


Az első hat háromszögszám: 1, 3, 6, 10, 15, 21.

a) Számítsuk ki a kilencedik és a századik háromszögszámot. *(2 pont)*

b) Bizonyítsuk be, hogy az első n háromszögszám összege $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$. *(6 pont)*

c) A golyós piramis nevű térbeli logikai játék elemeiből ezt a tetraéderszerű építményt kell összeállítani. Milyen magas az építmény, ha a golyók átmérője 2 cm? *(A megoldást* cm*-ben egy tizedes jegy pontossággal adjuk meg.)* *(8 pont)*



Megoldás. *a*) Az n-edik háromszögszám $1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$. A kilencedik tehát $\frac{9\cdot 10}{2}=45$, a századik pedig $\frac{100\cdot 101}{2}=5050$.

b) Teljes indukcióval bizonyítunk.

$n=1$-re az állítás igaz, mert $\frac{1\cdot 2}{2}=\frac{1\cdot 2\cdot 3}{6}$.

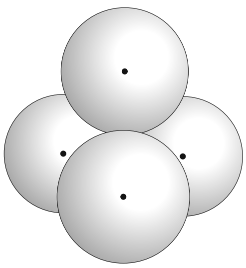
Tegyük fel, hogy $n=k$-ra igaz az összefüggés. Megmutatjuk, hogy ekkor $n=$ $=k+1$-re is igaz:

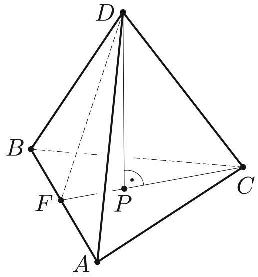
$$\frac{1\cdot 2}{2}+\frac{2\cdot 3}{2}+\frac{3\cdot 4}{2}+\ldots+\frac{k(k+1)}{2}+\frac{(k+1)(k+2)}{2}=$$

$$=\frac{k(k+1)(k+2)}{6}+\frac{(k+1)(k+2)}{2}=\frac{k(k+1)(k+2)}{6}+\frac{3(k+1)(k+2)}{6}=$$

$$=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{6}.$$

c) Egy négy golyóból álló kis „gúla” középpontjai 2 cm élű szabályos tetraédert alkotnak. Ha ennek magassága M, akkor az egész építmény magassága $3M+$kétszer a gömbök sugara.





Számítsuk ki a négy középpont által meghatározott tetraéder magasságát. Az oldallap magassága $\sqrt{3}$ cm. Az FPD derékszögű háromszög átfogója $\sqrt{3}$ cm, egyik befogója $\sqrt{3}/3$ cm, másik befogója M. Ebből $M=\sqrt{24}/3$ cm. Az egész építmény magassága $3M+2$ cm $\approx 6{,}9$ cm.

6. *A hangerőt a hanghullámok intenzitása határozza meg, amelynek mértékegysége* $\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$. *Az egyenlőnek érzékelt hangerő-különbségek egyenlő intenzitás-arányokat takarnak. A hangerő mértékegysége a decibel.*

Az emberi fül ingerküszöbe az $I_0=10^{-12}\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$. *Ezt nevezzük* 0 *decibelnek. Bármely más* I *intenzitású hang hangerejét a* $H=10\cdot\lg\frac{I}{I_0}$ dB *képlet adja meg.*

a) Hány dB *a* $3\cdot10^{-9}\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$ *intenzitású halk beszéd?* (*3 pont*)

b) Mekkora a mennydörgés intenzitása, ha a hangereje 125 dB? (*4 pont*)

c) Az intenzitást 5*-szörösére növelve hány* dB *hangerő-emelkedést érünk el?* (*3 pont*)

Az érzékelt hangmagasság a hang rezgésszámával áll összefüggésben. Az egyenlőnek hallott hangközök egyenlő rezgésszám-arányokat takarnak. Pl. ha egy hangot egy másiknál egy oktávval magasabbnak érzékelünk, akkor a rezgésszáma az előbbiének 2*-szerese. A rezgésszám a hangmagasság függvényében tehát exponenciálisan nő.*

A kromatikus skála az oktávot 12 *egyenlő hangközre, ún. félhangokra osztja. Ha egy hang egy másiknál félhanggal magasabb (pl. C és Cisz), akkor a rezgésszáma* $\sqrt[12]{2}$*-szöröse az előbbiének.*

d) Hányszorosa a nagyterc hangközben (négy félhang) a magasabb hang rezgésszáma a mélyebbének? (Pontos arányszámot adjon meg.) (*2 pont*)

e) Adjunk képletet, amellyel egy tiszta zenei hangközről a rezgésszámok x *aránya ismeretében kiszámíthatjuk, hogy hány félhangnyi távolságot jelent.* (*4 pont*)

Megoldás.

a) $$H=10\cdot\lg\frac{3\cdot10^{-9}}{10^{-12}}\ \mathrm{dB}=10\cdot\lg300\ \mathrm{dB}=34{,}8\ \mathrm{dB}.$$

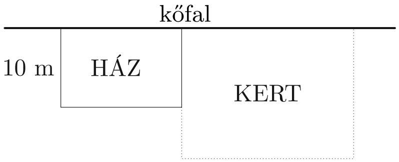
b) $$125=10\cdot\lg\frac{I}{10^{-12}},$$
$$12{,}5=\lg(10^{12}I),$$
$$10^{12{,}5}=10^{12}I,$$
$$I=\sqrt{10}\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}=3{,}16\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}.$$

c) $$10\lg\frac{5I_1}{I_0}-10\lg\frac{I_1}{I_0}=10\lg(5I_1)-10\lg I_0-(10\lg I_1-10\lg I_0)=$$
$$=10\lg(5I_1)-10\lg I_1=10\lg5+10\lg I_1-10\lg I_1=10\lg5\approx7\ \mathrm{dB}.$$

d) $$\left(\sqrt[12]{2}\right)^4=\sqrt[3]{2}.$$

e) $$\left(\sqrt[12]{2}\right)^n=x,\quad x^{12}=2^n,\quad n=\log_2x^{12}=12\cdot\log_2x.$$

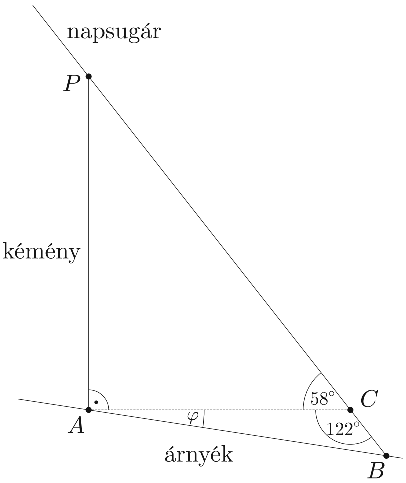
7. *a) A ferde háztetőn egy kémény árnyéka épp a tető lejtésének irányába esik. Mekkora a tető dőlésszöge, ha a kémény* 1 m *magas, árnyéka* 86 cm, *és ugyanekkor a kertben növő* 120 cm*-es napraforgó árnyéka* 75 cm? *(8 pont)*



b) A telken a ház mellett szeretnénk elkeríteni egy 450 m^2*-es, téglalap alakú kiskertet. Mekkorák legyenek a kiskert oldalai, hogy a legrövidebb kerítést kelljen építeni? (Ahol fal van, nem kell kerítés. A kert mélysége legalább akkora legyen, mint a házé.)* *(8 pont)*

Megoldás. *a)* A napraforgó árnyékának hosszából kiszámítva a napsugarak $\arctan\frac{120}{75}=58°$-os szögben érik a talajt. A PAC derékszögű háromszögben kiszámítjuk az AC hosszúságot:

$$AC=\frac{75}{120}\cdot 1\text{ m}=0{,}625\text{ m}.$$



Az ABC háromszögre a szinusztételt alkalmazva:

$$\frac{0{,}86}{0{,}625}=\frac{\sin 122°}{\sin\beta},$$

amiből $\sin\beta=0{,}6163$ és így $\beta=38{,}05°$ (mivel csak hegyesszög lehet). Ebből $\varphi=19{,}95°$.

A tető a vízszinteshez 19,95°-ban hajlik.

b) A kőfalra merőleges oldalt x-szel jelölve a kerítés hossza $K(x)=2x-10+450/x$, $x\geqslant 10$.

$$K'(x)=2-\frac{450}{x^2}=\frac{2x^2-450}{x^2}=\frac{2(x-15)(x+15)}{x^2}.$$

A nevező pozitív. A tört előjele a számlálótól függ. Az értelmezési tartományon belül $x=15$-re 0 a derivált, kisebb x-ekre negatív, nagyobbakra pozitív. A $K(x)$ függvény 15-ig szigorúan monoton csökken, utána szigorúan monoton nő, így a minimumhely $x=15$.

A kiskert oldalai 15 m és 30 m hosszúak.

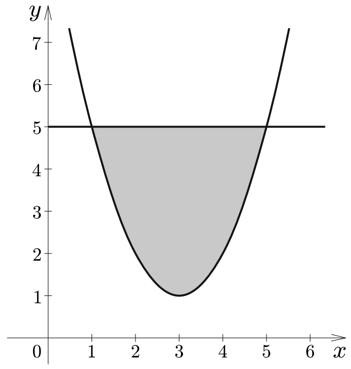
8. *Számítsuk ki a derékszögű koordinátarendszerben az egyenlőtlenségekkel megadott két ponthalmaz pontos területét:*

a) $6(x+y)-2\leqslant x^2+y^2\leqslant 6(x+y)+7.$ *(7 pont)*

b) $(x-3)^2+1\leqslant y\leqslant 5.$ *(9 pont)*

Megoldás. *a*) A két egyenlőtlenséget rendezve $(x-3)^2+(y-3)^2\leqslant 25$, illetve $(x-3)^2+(y-3)^2\geqslant 16$ adódik. A vizsgált alakzat egy körgyűrű, melyet a $(3;3)$ középpontú, 4, illetve 5 egység sugarú körök határolnak. A két kör területének különbsége $25\pi-16\pi=9\pi$.

b) $(x-3)^2+1\leqslant 5$ megoldása $1\leqslant x\leqslant 5$. A két függvényt ezen az intervallumon integráljuk, a terület a két integrál különbsége.



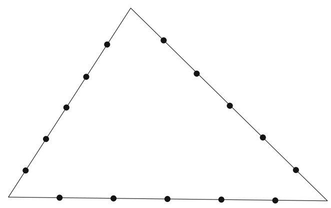
$$\int_1^5 5\,\mathrm{d}(x)=[5x]_1^5=20,$$

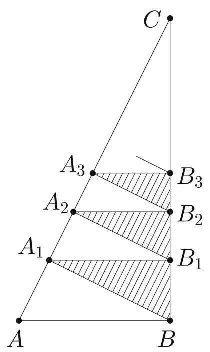
$$\int_1^5 (x^2-6x+10)\,\mathrm{d}(x)=$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}-3x^2+10x\right]_1^5=\frac{28}{3},$$

$$T=20-\frac{28}{3}=\frac{32}{3}.$$

9. *a*) *A háromszög oldalain* 5–5–5 *pontot jelöltünk ki. Hány háromszöget határoz meg a tizenöt pont?*





Az ABC derékszögű háromszög AB befogója 10 *egység, BC befogója* 20 *egység hosszúságú.*

A_1 a B csúcsból az AC oldalra állított merőleges, B_1 az A_1-ből BC-re állított merőleges talppontja. Ugyanígy A_2 a B_1-ből AC-re állított merőleges, B_2 az A_2-ből BC-re állított merőleges talppontja, és így tovább.

b) *Számítsuk ki az A_1B_1, A_2B_2 és A_3B_3 szakasz hosszát.* (*5 pont*)

c) *Az eljárást a végtelenségig folytatva keletkezik a vonalkázással jelölt háromszögek végtelen sorozata. Számítsuk ki a háromszögek területének összegét.* (*6 pont*)

Megoldás. *a*) Egy oldalon levő három pont nem alkot háromszöget.

A háromszög csúcsai lehetnek három különböző oldalon, az ilyen esetek száma $5\cdot 5\cdot 5=125$.

Ha két csúcs egy adott oldalra esik, a harmadik csúcs egy másikra, akkor a lehetőségek száma $\binom{5\cdot 4}{2}\cdot 5=50$. A két oldalt $3\cdot 2=6$-féleképpen választhatjuk ki, az ilyen háromszögek száma tehát $6\cdot 50=300$.

A tizenöt pont összesen 425 háromszöget határoz meg.

b) A nagy háromszög átfogója $10\sqrt{5}$. Az ábrán a derékszögű háromszögek mind hasonlók, mert szögeik egyenlők. Az oldalarányok egyenlőségét több lépésben egymás után alkalmazva:

$$\frac{A_1B_1}{A_1B}=\frac{A_1B}{10}=\frac{20}{10\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Ebből előbb $A_1B=\frac{20}{\sqrt{5}}$, majd $A_1B_1=\frac{400}{50}=8$. Hasonlóan:

$$\frac{A_2B_2}{A_2B_1}=\frac{A_2B_1}{A_1B_1}=\frac{A_2B_1}{8}=\frac{2}{\sqrt{5}},$$

amiből $A_2B_1=\frac{16}{\sqrt{5}}$, és így $A_2B_2=\frac{16^2}{5\cdot 8}=6{,}4$. Végül

$$\frac{A_3B_3}{A_3B_2}=\frac{A_bB_2}{A_2B_2}=\frac{A_3B_2}{6{,}4}=\frac{2}{\sqrt{5}},$$

amiből $A_3B_2=\frac{12{,}8}{\sqrt{5}}$, és így $A_3B_3=\frac{163{,}84}{5}:6{,}4=5{,}12$ egység.

c) Az A_1BB_1 háromszög területe $\frac{8\cdot 4}{2}=16$ egység. A területek mértani sorozatot alkotnak, melynek hányadosa a háromszögek hasonlóságának négyzete:

$$q=\left(\frac{A_2B_2}{A_1B_1}\right)^2=\left(\frac{6{,}4}{8}\right)^2=\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{16}{25}.$$

A mértani sor összegképletébe behelyettesítve a háromszögek együttes területe

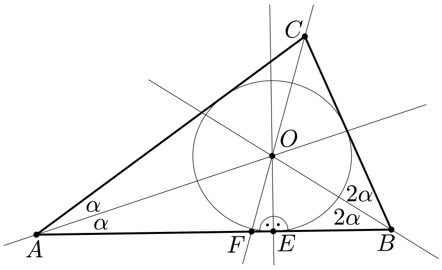
$$16\cdot\frac{1}{1-\frac{16}{25}}=16\cdot\frac{25}{9}=\frac{400}{9}=44{,}4 \text{ területegység.}$$

Deák Anna
Budapest

Matematika feladat megoldása

B. 5194. *Az ABC háromszögben $ABC\sphericalangle=2CAB\sphericalangle$. Az AB oldal a beírt kört az E pontban érinti, a C-ből induló szögfelezőt az F pontban metszi. Igazoljuk, hogy $AF=2BE$.*

(*4 pont*)



1. ábra

I. megoldás. Legyen az ABC háromszög beírt körének középpontja O, sugara $(OE =)r$ és $CAB\sphericalangle = 2\alpha$, ekkor $OAB\sphericalangle = \alpha$, mert az AO egyenes szögfelező (*1. ábra*). A $CBA\sphericalangle = 4\alpha$ a feladat feltétele miatt, és $ACB\sphericalangle = 180^\circ - 6\alpha$, $FCB\sphericalangle = 90^\circ - 3\alpha$, mert a CO egyenes szögfelező.

Mivel $ABC\sphericalangle = 2CAB\sphericalangle$, ezért $AC > BC$, így C az OE egyenes B pont felőli oldalán van, emiatt F az AE szakaszon van. Az FBC háromszögben a szögek összege 180°, ezért $OFE\sphericalangle = 90^\circ - \alpha$ és így $FOE\sphericalangle = \alpha$. Az OEB háromszög derékszögű, ezért $EOB\sphericalangle = 90^\circ - 2\alpha$, amelyhez α-t adva megkapjuk, hogy $FOB\sphericalangle = 90^\circ - \alpha$, így az FBO háromszög egyenlő szárú, tehát $BO = BF$.

Az AOE háromszög hasonló az OFE háromszöghöz, hiszen derékszögűek és van α nagyságú belső szögük, ezért a megfelelő oldalhosszak aránya egyenlő, így felírható a következő egyenlőség:

$$\frac{EF}{r} = \frac{r}{AE},$$

ami ekvivalens az $EF \cdot AE = r^2$ egyenlettel. Mivel $AE = AF + FE$, így

$$EF \cdot (AF + FE) = r^2.$$

Alkalmazzuk Pitagorasz tételét az OEB háromszögre: $r^2 + BE^2 = BO^2$. Ekkor $BO = BF$ miatt $r^2 + BE^2 = BF^2$, majd az előzőekben kapott kifejezésben r^2 helyére helyettesítve a következőt kapjuk:

$$EF \cdot (AF + FE) + BE^2 = BF^2.$$

Felhasználjuk, hogy $BF = BE + EF$, így az

$$EF \cdot (AF + FE) + BE^2 = (BE + EF)^2$$

egyenlethez jutunk. Felbontjuk a zárójeleket:

$$EF^2 + EF \cdot AF + BE^2 = BE^2 + 2 \cdot EF \cdot BE + EF^2,$$

majd ekvivalens átalakítások után az

$$AF = 2 \cdot BE$$

egyenletet kapjuk, ami éppen a bizonyítandó állítás.

Koltai Csaba Ferenc (Budapest XIV. kerületi Szent István Gimn., 9. évf.) dolgozata alapján

II. megoldás. Legyen a beírt kör középpontja O, sugara r, és $OAB\sphericalangle=\alpha$ (lásd az 1. ábrát). Mivel O a szögfelezők metszéspontja, ezért $OAC\sphericalangle = =OAB\sphericalangle=\alpha$. A feladat szövege alapján

$$OBA\sphericalangle = OBC\sphericalangle = 2\alpha, \quad \text{így} \quad ACO\sphericalangle = BCO\sphericalangle = 90^\circ - 3\alpha.$$

Mivel $ABC\sphericalangle = 2CAB\sphericalangle$, ezért $AC>BC$, így C az OE egyenes B felőli oldalán van, emiatt pedig F az AE szakaszon van.

$$CFB\sphericalangle = 180^\circ - FCB\sphericalangle - CBF\sphericalangle = 180^\circ-(90^\circ-3\alpha)-4\alpha = 90^\circ-\alpha,$$

innen

$$FOE\sphericalangle = 180^\circ - OEF\sphericalangle - OFE\sphericalangle = 180^\circ - 90^\circ - (90^\circ-\alpha) = \alpha.$$

Továbbá $BAC\sphericalangle + ABC\sphericalangle = 6\alpha < 180^\circ$, ebből következően $0^\circ<\alpha<30^\circ$, tehát $\operatorname{tg}\alpha$ és $\operatorname{tg}2\alpha$ is értelmezve van, valamint $\operatorname{tg}\alpha\neq 0$, $\operatorname{tg}2\alpha\neq 0$. Nyilvánvalóan $\operatorname{tg}\alpha\neq 1$, ezért $1-\operatorname{tg}^2\alpha\neq 0$.

A BEO háromszögben $BE=\frac{r}{\operatorname{tg}2\alpha}$, az AEO háromszögben $AE=\frac{r}{\operatorname{tg}\alpha}$, az FEO háromszögben pedig $FE=r\cdot\operatorname{tg}\alpha$. Ezeket felhasználva felírjuk a szóban forgó szakaszhosszak arányát, ekvivalens átalakításokat végzünk, és alkalmazzuk a kétszeres szög tangensére vonatkozó addíciós tételt:

$$\frac{AF}{BE} = \frac{AE-FE}{BE} = \frac{\frac{r}{\operatorname{tg}\alpha} - r\cdot\operatorname{tg}\alpha}{\frac{r}{\operatorname{tg}2\alpha}} = \frac{\operatorname{tg}2\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} - \operatorname{tg}2\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha =$$

$$= \frac{\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}}{\operatorname{tg}\alpha} - \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}\cdot\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} - \frac{2\operatorname{tg}^2\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{2(1-\operatorname{tg}^2\alpha)}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = 2.$$

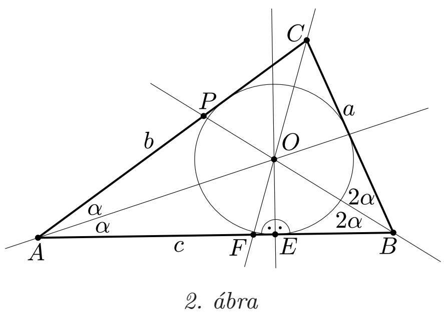
Következésképpen $AF=2BE$, ezzel állításunkat bebizonyítottuk.

Fekete Richárd (Debreceni Fazekas Mihály Gimn., 12. évf.)
dolgozata alapján

III. megoldás. Készítsünk ábrát, és használjuk a *2. ábra* jelöléseit.

A szögfelezőtétel szerint $\frac{c-AF}{AF}=\frac{a}{b}$, mindkét oldalhoz 1-et adva: $\frac{c}{AF}=\frac{a+b}{b}$, amiből $AF=\frac{bc}{a+b}$. Tudjuk azt is, hogy $BE=s-b$, ahol s a háromszög félkerülete. Ekkor a bizonyítandó állítást a következőképpen írhatjuk fel:

$$\frac{bc}{a+b} = 2(s-b).$$



2. ábra

A zárójel felbontása és $2s = a + b + c$ felhasználása után kapjuk, hogy

$$\frac{bc}{a+b} = 2s - 2b = a + c - b,$$

amiből ekvivalens átalakításokkal a

$$bc = (a+b)(a+c-b), \quad \text{majd a} \quad bc = a^2 - b^2 + ac + bc$$

egyenlethez jutunk. Az egyenlet mindkét oldalából bc-t kivonunk, majd kifejezzük b^2-t: $b^2 = a^2 + ac$.

Legyen a P pont a B csúcson átmenő belső szögfelező és az AC oldal metszéspontja. Mivel a BPC és az ACB háromszögek egyik belső szöge közös, egy másikról pedig tudjuk, hogy 2α nagyságú, hiszen BP szögfelező és a feltétel szerint $ABC\sphericalangle = 2CAB\sphericalangle$, ezért ezek a háromszögek hasonlók, így a megfelelő oldalhosszak arányára felírhatjuk a következő egyenletet:

$$\frac{AC}{CB} = \frac{AB}{PB} = \frac{CB}{PC}.$$

Ebből az is következik, hogy:

$$\frac{AC}{CB} = \frac{AB+CB}{PB+PC}.$$

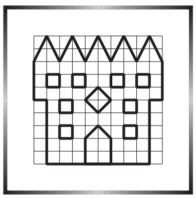
Az ABP háromszög egyenlő szárú, mert az A-nál és B-nél lévő szögek egyenlőek. Így $AP = PB$, vagyis $PB + PC = b$, ezért az előbbi kifejezést átalakíthatjuk az alábbiak szerint:

$$\frac{b}{a} = \frac{c+a}{b},$$

amely a $b^2 = a^2 + ac$ alakra hozható, erről pedig az imént beláttuk, hogy ekvivalens a feladat állításával, így a bizonyítás végére értünk.

Szakács Domonkos (Budapest, Jedlik Ányos Gimn., 9. évf.)

Összesen 80 dolgozat érkezett. 4 pontos 66, 3 pontos 7, 2 pontos 1 dolgozat. 1 pontot 4 versenyző kapott. Nem versenyszerű: 1 dolgozat. Nem számítjuk a versenybe a születési dátum vagy a szülői nyilatkozat hiánya miatt: 1 dolgozat.



A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok ABACUS-szal közös pontverseny 9. osztályosoknak (714–718.)

K. 714. Egy sorozat első tagja 3, és a következő tagot mindig úgy képezzük, hogy az előző tag kétszereséből kivonunk 2-t.

a) Írjuk fel a sorozat első 8 tagját.

b) Az alábbi számok közül melyik szám tagja a sorozatnak és melyik nem? Ha a szám tagja a sorozatnak, akkor mondjuk meg, hányadik tagja, ha pedig nem, indokoljuk, miért nem.

$$8194, \quad 649\,287\,365, \quad 29\,453\,759\,372, \quad 8\,398\,507\,839\,348.$$

K. 715. Van két darab kétliteres kancsónk. Az elsőbe 2 liter 100%-os narancslevet öntünk, a másodikba 1 liter vizet.

1. A narancslé felét átöntjük a vizeskancsóba, annak tartalmát egy kanállal összekeverjük, majd visszatöltünk 1 liter folyadékot az első kancsóba.

2. Ezt az 1 literes áttöltést keveréssel együtt megismételjük még egyszer, tehát az első kancsóból 1 litert keverés után áttöltünk a másodikba, összekeverjük a tartalmát, majd visszaöntünk 1 litert az elsőbe.

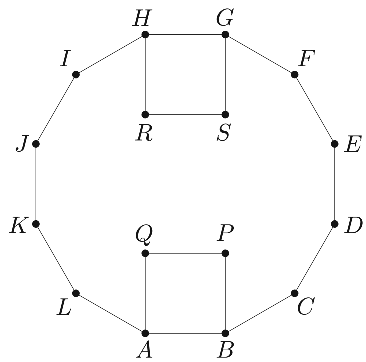
Ezek után melyik kancsóban hány százalékos az üdítő a narancslére nézve?

K. 716. Egy boltban három füzet és két toll ára 1110 Ft, öt füzet és négy toll ára pedig 2010 Ft. Mennyibe kerül egy füzet és mennyibe kerül egy toll?

K/C. 717. Egy szabályos

$$ABCDEFGHIJKL$$

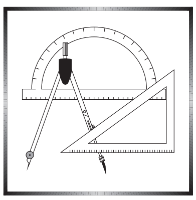
tizenkétszög AB és GH oldalára az $ABPQ$ és $GHRS$ négyzeteket írjuk befelé az *ábrán* látható módon. Mutassuk meg, hogy PQ és RS egy szabályos hatszög két szemközti oldala.



K/C. 718. Hány olyan szám van 1-től 50-ig, amit fel lehet írni legalább két szomszédos nemnegatív egész szám összegeként?

Beküldési határidő: 2022. február 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (717–718., 1699–1703.)



Feladatok 10. évfolyamig

K/C. 717. A szövegét lásd a **K** feladatoknál.

K/C. 718. A szövegét lásd a **K** feladatoknál.

Feladatok mindenkinek

C. 1699. Határozzuk meg, hogy az $(x+1)\cdot(x^2+1)\cdot(x^3+1)\cdot\ldots\cdot(x^{12}+1)$ szorzatban szereplő műveleteket elvégezve, összevonás után mennyi az x^{14} hatvány együtthatója.

C. 1700. Az O középpontú körnek az O-tól különböző belső pontja A. A kör kerületének egy B pontjára $OAB\sphericalangle=\alpha$. Legyen C a körvonal egy olyan pontja, amelyre $BAC\sphericalangle=\beta$ jelöléssel $2\alpha+\beta=180^\circ$ teljesül és a $BAO\sphericalangle$ és $BAC\sphericalangle$ szögtartományoknak az AB félegyenesen kívül nincs közös pontja. Igazoljuk, hogy ekkor az O, A, B, C pontok egy körön vannak.

C. 1701. Mennyi azon x egész számok összege, amelyekre

$$\sqrt{2x^2-6x-20}<-x+5$$

teljesül?

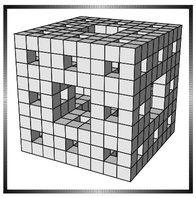
Feladatok 11. évfolyamtól

C. 1702. Az $ABCD$ négyszög A csúcsa illeszkedik az S síkra, BD átlója párhuzamos a síkkal, C csúcsa 8 egység távolságra van az S síktól. Azt tapasztaljuk, hogy a négyszög S-re vonatkozó merőleges vetülete egy négyzet, melynek átlója 6 egység. Bizonyítsuk be, hogy az $ABCD$ négyszög rombusz, valamint számítsuk ki az oldalainak hosszát.

Javasolta: *Zagyva Tiborné* (Baja)

C. 1703. Az a és b 10-es számrendszerbeli természetes számok, mindegyik számjegyük 1-es. Mutassuk meg, hogy ha a és b nem relatív prímek, akkor számjegyeik $S(a)$ és $S(b)$ összege sem az.

Beküldési határidő: 2022. február 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`



A B pontversenyben kitűzött feladatok (5214–5221.)

B. 5214. A 110 egy olyan számjegysorozat, amelyet bármilyen 1-nél nagyobb pozitív egész alapú számrendszerben tekintve páros számot kapunk. Van-e olyan 1-esekből és 0-kból álló számjegysorozat, amelyet bármilyen 1-nél nagyobb pozitív egész alapú számrendszerben tekintve 3-mal osztható pozitív egész számot kapunk?

(*3 pont*)

B. 5215. Adjuk meg az összes x pozitív valós számot, amelyre $x+\frac{1}{x}$ egész szám és $x^3+\frac{1}{x^3}$ prímszám.

(*4 pont*) *Szaszkó-Bogárné Eckert Bernadett* és *Szaszkó-Bogár Viktor* ötlete alapján

B. 5216. Az ABC derékszögű háromszög köré írt körhöz az A pontban és a derékszögű C csúcsban érintőt rajzolunk, az érintők metszéspontja D. Bizonyítsuk be, hogy a BD egyenes felezi a C-ből induló magasságot.

(*3 pont*)

B. 5217. Egy háromszög súlyvonalainak $\frac{2}{\sqrt{3}}$-szorosából mint oldalakból újabb háromszöget szerkesztünk. Az eljárást megismételjük a kapott háromszögre. Mutassuk meg, hogy a második lépésben az eredetivel egybevágó háromszöget kapunk.

(*4 pont*) Javasolta: *Bártfai Pál* (Budapest)

B. 5218. Legfeljebb hány választható ki az első 2022 pozitív egész szám közül úgy, hogy semelyik két kiválasztott szám különbsége ne legyen prímszám?

(*5 pont*)

B. 5219. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges a, b, c valós számokra

$$\frac{|a+b+c|}{1+|a+b+c|}\leqslant\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}+\frac{|c|}{1+|c|}.$$

Mikor áll fenn egyenlőség?

(*5 pont*) Javasolta: *Schultz János* (Szeged)

B. 5220. Legyen n pozitív egész szám. Mutassuk meg, hogy megadható 1-től 2^{n+2}-ig n négyzetszám úgy, hogy közülük akárhány különbözőt összeadva (beleértve az egytagú összegeket és az összes szám összegét is) csupa különböző számot kapjunk.*

(*6 pont*) Javasolta: *Freud Róbert* (Budapest)

B. 5221. Az ABC hegyesszögű háromszögben a beírt kör érintési pontja a BC, CA, AB oldalon rendre D, E, illetve F. A háromszög köré írt kör az AEF kört az A-tól különböző P, a BFD kört a B-től különböző Q, a CDE kört pedig a C-től különböző R pontban metszi. Mutassuk meg, hogy a DP, EQ és FR egyenesek egy ponton mennek át.

(*6 pont*) Javasolta: *Lovas Márton* (Budapest)

Beküldési határidő: 2022. február 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

* Lásd Freud Róbert cikkét a 2. oldalon.

Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (815–817.)

A. 815. Legyen q egy 1 főegyütthatós, egész együtthatós polinom. Bizonyítandó, hogy létezik olyan, csak a q polinomtól függő C konstans, melyre tetszőleges p prímszám és tetszőleges $N \leqslant p$ pozitív egész esetén az $n! \equiv q(n) \pmod p$ kongruenciának legfeljebb $CN^{2/3}$ megoldása van bármely N darab egymást követő egész között.

Javasolta: *Navid Safaei* (Irán)

A. 816. Petinek 2022 darab látszólag egyforma mágneses vasúti kocsija van, melyek kétféle típusúak: bizonyosoknak az eleje északi és a hátulja déli, másoknak pedig a hátulja északi és az eleje déli mágneses polaritású (ezek olyan játékkocsik, melyek eleje és hátulja megkülönböztethető). Peti szeretné eldönteni, hogy egyforma számú van-e a kétféle típusú kocsiból. Egy próba során össze lehet illeszteni két vasúti kocsit. Legkevesebb hány próbára van ehhez szükség?

Javasolta: *Pálvölgyi Dömötör* (Budapest)

A. 817. Legyen ABC egy tetszőleges háromszög. Tekintsük azt a kört, amely érinti az AB és AC oldalt, és belülről érinti a háromszög körülírt körét a T pontban. A háromszög beírt körének középpontja legyen I, és a beírt kör érintse a BC, CA, illetve AB oldalt a D, E, illetve F pontban. Legyen N a DF szakasz felezőpontja. Bizonyítsuk be, hogy a BTN háromszög körülírt köre, a TI egyenes és a D pontból az EF szakaszra állított merőleges egy ponton megy át.

Javasolta: *Diaconescu Tashi* (Románia)

Beküldési határidő: 2022. február 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

Informatikából kitűzött feladatok

I. 553. Faktoriális számrendszerben a helyiértékek nem egy egész szám, az alapszám hatványai, hanem az n-edik helyiérték az n szám faktoriálisa. Tehát az első helyiértéken lévő számjegyet 1-gyel, a második helyiértéken álló számot 2-vel, a harmadik helyiértéken álló számot 6-tal kell szorozni, és így tovább. Ennek megfelelően a $3310_!$ faktoriális szám értéke tízes számrendszerben $3 \cdot 4! + 3 \cdot 3! + 1 \cdot 2! = 92$. Igazolható, hogy a felírás egyértelmű, tehát minden pozitív egésznek egy alakja van faktoriális számrendszerben.

Készítsünk programot `i553` néven, amely egy tízes számrendszerben megadott pozitív egész számot felír faktoriális számrendszerben. A program a standard bemenet első sorából olvassa be a tízes számrendszerben felírt pozitív egészet, és a standard kimenetre írja ki a számot faktoriális számrendszerben. A bemenet legföljebb 18 számjegyből áll. Amennyiben a szám faktoriális alakjában egy helyiértéken többjegyű szám áll, akkor azt tegyük zárójelbe.

Példa bemenetek	**Példa kimenetek**
`500`	`40310`
`5698`	`1052120`
`89764351`	`22732241101`
`1569787435467978`	`47068(11)0(10)725350300`

Beküldendő egy tömörített `i553.zip` állományban a program forráskódja és rövid dokumentációja, amely megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben fordítható.

I. 554. A magyar asztalitenisz-bajnokság 1905-ben kezdődött. Jelenleg ötféle versenyszám – férfi egyéni, női egyéni, férfi páros, női páros és vegyes páros – bajnoki címét osztják ki évente. A magyar nyelvű Wikipédia oldalán megtalálható adatok sok érdekes kérdés megválaszolásához nyújtanak forrást:

`https://hu.wikipedia.org/wiki/Magyar_asztalitenisz-bajnokság`.

A feladatunk a forrásadatok feldolgozása, átrendezése olyan formába, hogy azokat adatbázisba lehessen importálni. Minden adatot a megadott webcímről mentsünk le és szervezzük az alább megadott adatbázis-szerkezetbe, más forrás nem áll rendelkezésre.

1. Mentsük le a megadott webcímről a bajnokok adatait.

Tetszőleges alkalmazással rendezzük át, töröljük ki a felesleges részeket, illetve egészítsük ki a szükséges adatokkal a táblákat. Használhatunk például szövegszerkesztőt, táblázatkezelőt vagy készíthetünk saját programot is. Az átalakítás egyes lépéseit más-más programmal is végezhetjük. A rendezett adatokat utolsó lépésként `TXT` típusú, tabulátorokkal tagolt UTF-8 kódolású egyszerű szöveges állományokként mentsük, amelyek neve a táblanevekkel egyezzen meg. Az állományok első sora tartalmazza a mezőneveket az adatbázisba importáláshoz.

2. A táblák kialakításához vegyük figyelembe az alábbi táblaleírásokat és kapcsolatokat:

Tábla:

jatekos (id, nev, neme)

id	A játékos azonosítója (szám), ez a kulcs.
nev	A játékos neve (szöveg).
neme	A játékos neme (logikai), értéke igaz (férfi) és hamis (nő) esetén.

bajnok (id, ev, vsz_id, jatekos_id, egyesulet_id)

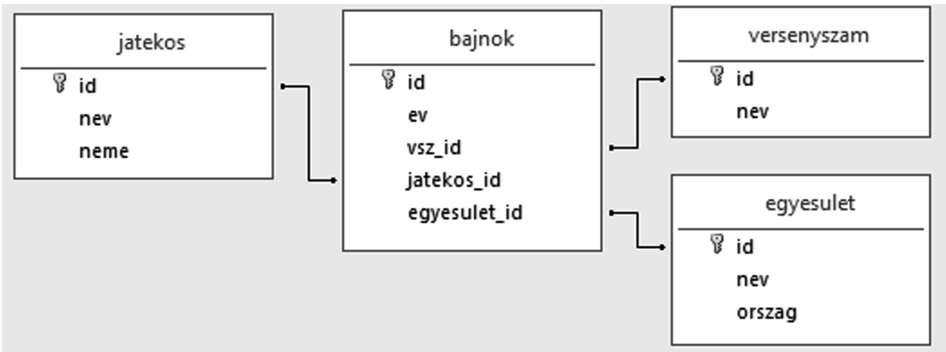
id	A bajnoki cím azonosítója (szám), ez a kulcs.
ev	A bajnokság éve (szám).
vsz_id	A versenyszám azonosítója (szám).
jatekos_id	A bajnoki címet szerző játékos azonosítója (szám).
egyesulet_id	A játékos ebben az évben melyik egyesületet képviselte (szám).

versenyszam (id, nev)

id	A versenyszám azonosítója (szám), ez a kulcs.
nev	A versenyszám neve (szöveg), értéke férfi egyéni, női egyéni, férfi páros, női páros és vegyes páros lehet.

egyesulet (id, nev, orszag)

id	Az egyesület azonosítója (szám), ez a kulcs.
nev	Az egyesület neve (szöveg).
orszag	Az egyesület országa (szöveg).



A táblák elsődleges kulcs mezőjét (id) tetszőleges értékkel kitölthetjük, míg az idegen kulcsok (jatekos_id, egyesulet_id, vsz_id mezők) megadásakor úgy járjunk el, hogy azok helyes kapcsolatot mutassanak.

Beküldendő egy tömörített `i554.zip` állományban a négy adattábla szöveges állománya és rövid dokumentációja, amely megadja a feldolgozás lépéseit, eszközeit.

A következő feladat a most elkészített adatbázishoz kapcsolódik. Ha megoldottuk ezt a feladatot, akkor a következő feladatban használjuk a saját megoldást az adatbázis forrásaként. Amennyiben ezt a feladatot nem vagy csak részben oldottuk meg, akkor a következő feladathoz mellékelt forrásokat használjuk annak megoldásához.

I. 555 (É). A magyar asztalitenisz-bajnokság eddigi adatait kellett az **I. 554.** feladatban előkészíteni, azaz szöveges típusú állományokba, az adatbázisba történő importáláshoz megfelelő szerkezetben és tartalommal menteni.

Ebben a feladatban az adatbázis létrehozása, majd a kérdésekre adandó válaszokhoz lekérdezések készítése a megoldandó probléma. Az adatok, ha az **I. 554.** feladatot megoldottuk, akkor az ott létrehozott állományokban, vagy csökkentett rekordszámmal a `jatekos.txt`, a `bajnok.txt`, a `versenyszam.txt` és az `egyesulet.txt` állományokban állnak rendelkezésünkre. Az állományok tabulátorral tagolt, UTF-8 kódolású szövegfájlok, az első sorok a mezőneveket tartalmazzák.

A táblák kialakításához vegyük figyelembe az **I. 554.** feladatnál megadott táblaleírásokat és kapcsolatokat. A forrásadatok kiegészítése nem része ennek a feladatnak.

3. Készítsünk új adatbázist `pingpong` néven. Importáljuk az adattáblákat az adatbázisba.
4. A létrehozás során állítsuk be a megfelelő típusokat és elsődleges kulcsokat.

Készítsük el a következő feladatok megoldását. A zárójelben lévő néven mentsük el azokat. Ügyeljünk arra, hogy a megoldásban pontosan a kívánt mezők szerepeljenek.

5. Adjuk meg lekérdezés segítségével, hogy melyik évben adták ki a vegyes páros bajnoki címet először. (5vegyes)
6. Listázzuk ki lekérdezés segítségével az első 10 legtöbb bajnoki címet nyerő játékos nevét. (6top10)
7. Az egyik legeredményesebb női játékos Bátorfi Csilla volt. Lekérdezéssel adjuk meg, hogy női páros versenyszámban kikkel nyert bajnokságot. A listában minden név egyszer jelenjen meg. (7batorfiparjai)
8. Adjuk meg lekérdezés segítségével, hogy Klampár Tibor első és utolsó bajnoki címe között férfi egyesben ki szerzett még bajnoki címet. A listában minden játékos neve egyszer szerepeljen, de Klampár Tibor nevét már ne jelenítsük meg. (8klamparral)
9. Lekérdezéssel határozzuk meg, hogy a magyar egyesületeken kívül mely országok klubjainak játékosai nyertek bajnoki címet Magyarországon. Minden ország neve egyszer szerepeljen a listában. (9nemzetek)
10. Készítsünk lekérdezést, amely kilistázza azokat az éveket, amikor a női páros bajnoki címet azonos egyesülethez tartozó játékosok nyerték. A listában az évszám, a játékosok neve és az egyesületek neve jelenjen meg. (10kereszt)

Beküldendő egy tömörített `i555.zip` állományban a megoldást adó `pingpong` adatbázis és egy rövid dokumentáció, amely leírja, hogy az adatbázis melyik program segítségével készült.

Letölthető állomány: `jatekos.txt`, `bajnok.txt`, `versenyszam.txt`, `egyesulet.txt`.

I/S. 59. Egy távoli országban egy hosszas havazás után D gyerek eldöntötte, hogy az egész napot hóemberépítéssel fogja tölteni. A nap végére el is készítettek N darab hógömböt. Az i-edik hógömb átmérője $T[i]$ milliméter. Egy hóember építésekor tetszőleges számú hógömböt kell egymás tetejére tenni (egy hóember legalább két hógömbből áll), de figyelni kell arra, hogy egy hógömbre csak egy szigorúan kisebb hógömböt tehetünk.

Egy hóember szépsége H, ha H darab hógömbből áll. A gyerekek megegyeztek, hogy mindegyikük pontosan egy darab H szépségű hóembert épít a hógömbök felhasználásával. Adjuk meg azt a legnagyobb H szépséget, amely esetén mindegyik gyerek tud egy H szépségű hóembert építeni a rendelkezésre álló hógömbökből.

A bemenet első sorában az N és D számok találhatóak. A következő sor N darab számot tartalmaz, az i-edik szám $T[i]$.

A kimenet egyetlen sorában egy szám szerepeljen: a legnagyobb elérhető H szépség. Ha nem lehetséges a megadott feltételek mellett legalább D azonos szépségű hóembert építeni, akkor a kimenet egyetlen sorában a -1 szerepeljen.

Példa:

Bemenet	**Kimenet**
`6 2` `1 4 2 1 5 1`	`2`

Nem építhető két darab 3 szépségű hóember, de 2 szépségű igen.

Korlátok: $1 \leqslant N, D \leqslant 100\,000$, $1 \leqslant T[i] \leqslant 10^9$. Időlimit: 0,4 mp.

Értékelés: a pontok 50%-a kapható, ha a program az $1 \leqslant N \leqslant 10$ tesztesetekre helyes megoldást ad.

Beküldendő egy `is59.zip` tömörített állományban a megfelelően dokumentált és kommentezett forrásprogram, amely tartalmazza a megoldás lépéseit, valamint megadja, hogy a program melyik fejlesztői környezetben futtatható.

S. 158. Egy négyzethálón adott egy sokszög, melynek oldalai a rácsvonalakra illeszkednek. Van D számú dobozunk. Egy-egy dobozban 1, 2 és 3 egység hosszú pálcikák vannak, melyek összhossza megegyezik a sokszög kerületével. Kérdés, hogy le lehet-e fedni a sokszög oldalait az egyes dobozokban található pálcikákkal azok eltörése nélkül? Több pálcika alkothat egy hosszabb oldalt. Készítsünk programot, amely a sokszög és minden egyes doboz esetén megválaszolja a kérdést!

Bemenet: az első sor tartalmazza a sokszög csúcsainak N számát. A következő N sor mindegyike egy-egy csúcs x és y koordinátáját tartalmazza a sokszög valamilyen irányú körüljárása szerint. A sokszög első és utolsó csúcsa is élet alkot. A következő sorban a dobozok D száma van. Ezután D sorban az egyes dobozok tartalmát írjuk le. Ezek mindegyike három szám, melyek rendre az 1, 2, illetve 3 hosszú pálcikák darabszáma a dobozban.

Kimenet: D sort kell kiírni. Ezek mindegyike „`IGEN`”, ha a sokszög oldalai a doboz tartalmával lefedhetők és „`NEM`” különben.

Példa:

Bemenet (a / jel sortörést helyettesít)	**Kimenet** (a / jel sortörést helyettesít)
`4 / 0 0 / 1 0 / 1 2 / 0 2` `3 / 6 0 0 / 2 2 0 / 1 1 1`	`IGEN / IGEN / NEM`

Korlátok: a koordináták abszolút értéke és a kerület is legfeljebb 10^5. Időlimit: 1 mp.

Értékelés: a pontok 30%-a kapható, ha a program a legfeljebb 20 kerületű tesztesetekre helyes megoldást ad.

Beküldendő egy `s158.zip` tömörített állományban a megfelelően dokumentált és kommentezett forrásprogram, amely tartalmazza a megoldás lépéseit, valamint megadja, hogy a program melyik fejlesztői környezetben futtatható.

A feladatok megoldásai regisztráció után a következő címen tölthetők fel:
`https://www.komal.hu/munkafuzet`
Beküldési határidő: 2022. február 15.

Matematikai képzések az ELTE TTK-n

Kedves leendő Egyetemista! A *KöMaL* olvasójaként bizonyára szívesen foglalkozol matematikával, és felmerülhetett már Benned az a gondolat, hogy életpályádul ennek a szép tudománynak a művelését választod, illetve szeretnél megismerkedni alkalmazásaival a műszaki, gazdasági és pénzügyi élet különböző területein.

Az alkalmazott matematika ma már az élet szinte minden területén nélkülözhetetlen, és az ilyen képzettségű munkaerő iránt egyre növekszik az igény. A *Fortune* magazin cikke szerint a legjelentősebb változás az üzleti életben az ipari forradalom óta a matematikai algoritmusok térhódítása (`http://fortune.com/2015/01/22/the-algorithmic-ceo/`). Egy amerikai felmérés évről évre a legjobb foglalkozások között tartja számon a matematikust és a szintén matematikai előképzettséget igénylő adattudóst, aktuáriust és statisztikust (`https://www.careercast.com/jobs-rated/best-jobs-2021`). Mindez Magyarországra is igaz, az ELTE-n végzett matematikusokat nemcsak a kutatóintézetek, egyetemek várják, hanem számos cég is, igen jó fizetéssel.

Esetleg még nem döntöttél, de leginkább matematikából folytatnál felsőfokú tanulmányokat? Minderre kitűnő lehetőség nyílik az ország egyik legnagyobb múltú egyetemén, az Eötvös Loránd Tudományegyetem Természettudományi Karán, ahol világhírű professzoroktól és lelkes, közvetlen fiatal oktatóktól tanulhatsz. Pezsgő diákélet vár rád az ELTE korszerű számítógépparkkal felszerelt, a KöMaL szerkesztőségének is otthont adó modern lágymányosi épületegyüttesében.

A bolognai képzési rendszerbe illeszkedik BSc képesítést nyújtó hároméves matematikai alapképzésünk. Itt az első évben hallgatói és oktatói mentorok biztosítják, hogy mindenki be tudjon illeszkedni és találjon előismereteinek, képességeinek és tanulási sebességének megfelelő nehézségű feladatokat. Az első év végén dönthetsz arról, hogy milyen témákkal szeretnél a továbbiakban behatóbban foglalkozni.

A kínálat széles: aki szeretne, az elmélyedhet az elméleti matematika kérdéseiben, hiszen szinte minden fontos területről hirdetünk kurzusokat. Ezek építenek a magyar matematikai kutatások méltán világhírű hagyományaira, ugyanakkor szilárd alapokat nyújtanak a modern matematika műveléséhez, jól felkészítve hallgatóinkat a leendő kutatói munkára.

Akit viszont az alkalmazások érdekelnek, megteheti, hogy az alapok elsajátítása után olyan modern témákkal is foglalkozzon, mint az adattudomány vagy a mesterséges intelligencia matematikai kérdései. Azoknak is ajánljuk a matematika alapképzési szakot, akik ismereteiket később inkább a matematikán kívül szeretnék majd gyümölcsöztetni. Itt szerzett tudásukat hasznosíthatják például gazdasági területen, médiában, a matematika népszerűsítésében, a közművelődésben – és a megszerzett matematikai gondolkodásmód mindvégig segíteni fogja őket a munkájukban.

A képzés egyéb vonatkozásairól további részletek a `http://www.math.elte.hu/` honlapon a Képzések menüpont alatt találhatók. Ajánljuk a középiskolásoknak szóló oldalainkat is, ahol végzett diákjainkkal készült interjúk is láthatók.

A legkiemelkedőbb hallgatók az egyetemi oktatómunkába is bekapcsolódhatnak, és jó eséllyel pályázhatnak ösztöndíjakra, külföldi részképzésre (pl. az Erasmus+ program keretében). Az ÚNKP ösztöndíjprogramja már a leendő elsőéveseknek is elérhető! Részletes tájékoztató: `http://csikvarip.web.elte.hu/diak_kutatas.html`.

Az alapképzést további kétéves szakasz követ(het)i (mesterképzés vagy röviden MSc), egyetemünkön a Matematikai Intézet gondozásában matematikus, alkalmazott matematikus, valamint biztosítási és pénzügyi matematika mesterszakok indulnak. BSc-t végzett hallgatóink természetesen más (bel- és külföldi) oktatási intézmény programjain is folytathatják tanulmányaikat. A mesterszakot végzettek közül a legkiválóbbak számára biztosítjuk a doktori fokozat megszerzésének lehetőségét (PhD-képzés).

Egyetemünkön gondosan ápolt hagyomány, hogy a rátermett, tehetséges diákok neves professzorok vezetésével bekapcsolódnak a tudományos kutatásba. A legkiválóbb hallgatók matematikai versenyeken is sikerrel szerepelnek, például az Egyetemi Hallgatók Nemzetközi Matematikaversenyén az elmúlt tíz évben kétszer is az ELTE csapata végzett az élen több, mint 70 egyetem csapatának versenyében – olyan nagyhírű egyetemeket is megelőzve, mint a Yale, a Princeton vagy a Moszkvai Állami Egyetem.

Matematikatanár-képzés az ELTE TTK-n

Az ELTE Természettudományi Karán sok évtizedes múltra tekint vissza a matematika szakos tanárképzés. Az általános és középiskolák részéről mindig jelentős igény mutatkozott a nálunk végzett matematikatanárok iránt, akik közül sokan külföldön is sikeres oktatói pályát futottak be.

A matematika szakos tanári pályát elsősorban azoknak a középiskolás diákoknak ajánljuk, akik számára örömet jelent érdekes matematikai feladatokon gondolkodni, és jó érzést okoz a megoldásokra másokat is rávezetni, másokkal is megosztani azt az élvezetet, amit a matematika megismerése jelent.

A tanárképzés osztatlan formában zajlik. A tanárképzésre való jelentkezés során a leendő hallgatóknak egy szakpárt kell megjelölni. Az ELTE-n a matematika szak mellé természettudományos szakokon és az informatikán kívül választani lehet a bölcsész szakok (például a magyar, a történelem vagy a nyelvszakok) közül is. A szaktárgyi tanítási gyakorlatok teljesítésére az ELTE hallgatóinak a legjobb budapesti iskolákban, kiváló vezetőtanárok irányítása mellett nyílik lehetőségük.

Bátran állíthatjuk tehát, hogy a KöMaL minden olvasójának testhezálló képzést tudunk nyújtani az ELTE Matematikai Intézetében. Ha személyesen is szeretnél találkozni leendő oktatóiddal, beszélgetni a mostani egyetemistákkal, akkor gyere el az ELTE TTK nyílt napjára január 21-én!

Fizika alapszak és fizikatanár-képzés az ELTE TTK Fizikai Intézetében

A világon az egyik legizgalmasabb és legszebb feladat a természet kutatása, működésének megértése. A kutatás egy életre szóló élmény, egy életre szóló kihívás és izgalom. Ugyanakkor a hallgatóink olyan nyitottságot, problémamegoldó készséget is elsajátítanak, amely az élet bármely területén nagyon jól hasznosítható. Az itt végzettek között kiváló, a nemzetközi élvonalban dolgozó fizikusokat találunk, de olyan cégvezetőt is, aki egy patinás Wall Street-i befektetési bank budapesti matematikai modellező csoportját vezeti, vagy például olyan, ma már az USA-ban élő vállalkozót, aki az amerikai légierőnek szállít folyadékkristály-kijelzős sisakokat.

A fizika alapképzés mellett intézetünkben képezzük a fizikatanárok jelentős részét. Aki szereti a fizikát és már most is szereti társait tanítani, ajánljuk figyelmébe a fizikatanár-képzésünket!

Hogy miért érdemes a fizika alapszakot választani?

- **Modern oktatás**

A képzésünk többszintű és sokoldalú. A sokoldalúság abban mutatkozik meg, hogy a harmadik félévvel kezdődően érdeklődési terület szerint specializációt (fizikus, informatikus fizikus, biofizikus, csillagász, geofizikus, meteorológus) lehet választani.

A képzés közös részében a magas szintű fizikai ismereteken túl matematikát, elektronikát és informatikát is oktatunk. Mivel nincs fizikus kísérletek nélkül, az alapvető fizikai mérési készségeket és magát a kísérletező szemléletet a fizikai laboratóriumi gyakorlatokon lehet elsajátítani. A laborokon a diákok például Raspberry Pi vezérlést használva végzik alapméréseiket, később pedig olyan érdekes fizikai jelenségekkel és berendezésekkel találkoznak, mint a pozitronemissziós tomográfia, a holográfia, a pásztázó elektronmikroszkóp vagy éppen a kvantumradír. A kurzusok jelentős része két (normál és emelt) szinten végezhető, melyek könnyen átjárhatóak. A normál szint biztosítja, hogy a nem elit iskolából érkező, de motivált hallgatók számára is elsajátítható és élvezhető legyen a tananyag. Az emelt szintű órákon gyorsabb haladást és kiegészítő tartalmakat biztosítunk.

- **Világszínvonalú kutatások**

A világon körülbelül 1100 olyan fizikai intézet van, amelyet rangsorolnak (Sanghaj rangsor), és ez már egy válogatott társaság. Ebben intézetünk a 100–150. hely között van, közel a felső 10%-hoz. Így bátran állíthatjuk, hogy az ELTE TTK Fizikai Intézet nemzetközi viszonylatban is kiemelkedő hely a fizika tanulására. Az összes magyar intézet közül itt a legszélesebb a választéka azoknak a területeknek, amelyeket oktatunk és kutatunk. A fizika legmodernebb, legizgalmasabb területeivel foglalkozunk: a gravitációs hullámok kutatásától a részecske- és biofizikán keresztül az asztrofizikáig, a nanotechnológiáig és a kvantumszámítógépekig mindent lefedünk, ami ma érdekes a fizikában. Körülbelül száz oktatónkkal és kutatónkkal, valamint diákjainkkal nagyon sok nemzetközi együttműködésben veszünk részt. A kutatás iránt is érdeklődő diákok számára bejáratott út vezet a tudományos diákköri projektek felé. A diákköri kutatómunkák kiváló alapot adnak a külföldi egyetemeken történő mesterképzésben vagy doktori iskolában történő továbbtanulásra. Az ELTE TTK-n folyó fizikai témájú kutatások sok esetben világszínvonalú kutatóhelyekkel történő együttműködésben valósulnak meg. Diákjaink eljuthatnak a svájci CERN részecskefizikai kutatócentrumba, vagy a LIGO amerikai gravitációshullám-detektor eredményeit elemezhetik.

• **Kitűnő elhelyezkedési lehetőségek**

A fizika tárgy tudása, a felső szintű matematika és a programozási ismeretek, amit a fizika alapszakokon el lehet sajátítani, számos munkahelyen ad lehetőséget a karrier építésére. A fizika szakon végzetteket nemcsak a kutatóintézetekben, egyetemeken várják, hanem például a pénzügyekkel, informatikával, távközléssel, mérnöki vagy orvostudományokkal foglalkozó cégek is szívesen alkalmazzák őket.

• **Hallgatói élet**

Az ELTE TTK hallgatói élete vidám és szerteágazó. A Magyar Fizikus Hallgatók Egyesülete számos programot szervez a hallgatóinknak. Külföldi diákkonferenciákon vagy cseregyakorlatokon lehet részt venni, szabadidős programok és a fizika tárgyakban felkészítő programok szerepelnek a palettán. A fizika szakokhoz jól szervezett mentorprogram társul. Minden évfolyamon több kiképzett mentor segít a tárgyak felvétele körüli kérdésekben, az optimális egyetemi stratégiák megtalálásában, és átadják a felsőbb éves diákok által összegyűjtött tapasztalatokat.

A fizika szak nem ér véget a BSc-fokozat megszerzésével. Az ELTE TTK Fizikai Intézetében 5 kétéves mesterképzési (MSc) szakra lehet jelentkezni: fizikus, geofizikus, csillagász, meteorológus, anyagtudomány. A fizikus mesterin belül a kutatófizikus, biofizikus, környezetfizikus, tudományos adatanalitika és modellezés (ez utóbbi többek között napjaink „forró" témájával, az óriási adathalmazokon végzett kutatásokkal, a „big data"-val foglalkozik). A képzés harmadik szintje az intézetben a négyéves doktori iskola (PhD-fokozat).

Hogy miért érdemes fizikatanár szakot választani?

• **2022-től új rendszerű, 5 éves osztatlan képzés**

2022 szeptemberében indul az új rendszerű fizikatanár-képzés. Az új rendszerben a képzési idő 5 év, melynek teljes utolsó féléve egy iskolai gyakorlat, de lényegében minden félévben lesz tanítási gyakorlat. Az ELTE három gyakorlóiskolája kiváló terep a tanári szakma komplex elsajátítására. A szakmai és módszertani tárgyakat az intézet kitűnő kutatói-oktatói és a legjobb középiskolai tanárok tartják. A fizika szak mellé az ELTE szinte bármilyen szakpárt indít, így könnyű másik szakot választani.

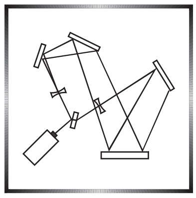
• **A tanári pálya szépségei**

Napjainkban a fizikatanár egy hiányszakma, ezért biztos elhelyezkedést jelent azok számára, akik szeretnének ezen a társadalmilag is fontos pályán elhelyezkedni. Gyakorlatilag a 4. évtől hallgatóink jelentős hányada rész-, vagy főállásban tanít. Nagy előnye a pályának, hogy a tanár nincs kitéve a piac szeszélyeinek, a versenyszféra visszásságainak. A tanári munka a családi élettel jól összehangolható munkabeosztást (nyári szünet, ünnepek stb.) jelent. Kreatív és változatos állás, mely folyamatosan fiatalon tart. A pedagógus előmeneteli rendszer és bérezés megismeréséhez érdemes áttekinteni a „pedagógus életpályamodell”-t!

- **Hallgatói élet**

A Klebelsberg Képzési Ösztöndíj Program keretében egyetemistaként félévente akár 375 000 Ft-ot lehet kapni, mely több különféle ösztöndíjjal is kiegészíthető. Fontos megemlíteni, hogy lehetőség van oktatással kapcsolatos kutatásokba való becsatlakozásra és doktori tanulmányok folytatására a Fizika Tanítása Doktori Program keretében. Tanárszakos hallgatók előmenetelét mentorok segítik.

A képzések részleteiről az intézet honlapján (`https://physics.elte.hu`) lehet további információkat szerezni, vagy érdemes ellátogatni nyílt napunkra (`https://ttk.elte.hu/nyiltnap2022`).



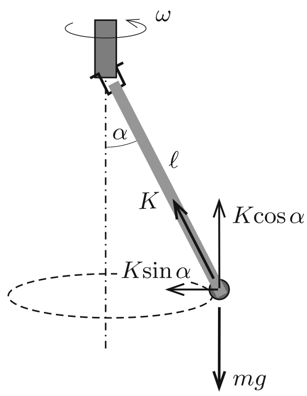
A kúpingáról*

Egy ℓ hosszúságú, könnyű (elhanyagolható tömegű), vékony (de merev) pálca egyik végére egy m tömegű, kicsiny testet erősítünk. A pálca másik végét vízszintes tengellyel látjuk el. Ily módon egy matematikai ingának tekinthető rendszert kapunk, amelynek a pálca függőleges állásánál van stabil egyensúlyi helyzete, innen kicsit kimozdítva

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

lengésidejű harmonikus rezgőmozgást végezhet.

Vajon mi történik, ha a pálca felső végénél lévő vízszintes tengelyt – egy függőleges rúd és egy kengyel segítségével – adott ω szögsebességgel egyenletesen forgatjuk (*1. ábra*)? Az inga – ω nagyságától függő mértékben – valamekkora szögben kitérül, és (állandósult állapotban) a pálca egy kúp palástja mentén mozog. Emiatt ezt az elrendezést *kúpingának* is szokták nevezni.



1. ábra

Vizsgáljuk meg a kúpinga mozgását, és határozzuk meg, hogy miként függ a pálca kitérülésének α szöge az ω szögsebességtől! Az ingatestre két erő hat: az mg nehézségi erő, és a pálca által kifejtett, a pálcával megegyező irányú K erő.

Megjegyzés. Egy pálca (rúd) általában nem csak pálca irányú erőt képes kifejteni. (Például egy vízszintes helyzetű mérleghinta ki tudja egyensúlyozni a végén ülő gyerekre

* A cikk megtalálható honlapunkon, a fizika cikkek „Ami a tankönyvekből kimaradt, de a versenyzőknek hasznos lehet” részében: `https://www.komal.hu/cikkek/cikklista.h.shtml`.

ható nehézségi erőt.) Esetünkben a pálca végeinél ható erőnek azért kell a pálca irányába mutatnia, mert a pálca tömege elhanyagolható, tehát a pálca fonálként „viselkedik”.

Az erők függőleges komponensei kiegyenlítik egymást, a K erő vízszintes összetevője biztosítja a centripetális gyorsulást. Ez egyenletekben kifejezve:

$$K\cos\alpha = mg, \tag{1}$$

$$K\sin\alpha = m\omega^2 r. \tag{2}$$

A körpálya sugarát a pálca hosszával és az α szöggel kifejezve $r=\ell\sin\alpha$. Ezt írjuk be a (2) egyenletbe, így az egyenletrendszer a következő alakot ölti:

$$K\cos\alpha = mg,$$

$$K\sin\alpha = m\omega^2\ell\sin\alpha.$$

Az egyenletrendszernek az egyik nyilvánvaló (triviális) megoldása: $\alpha=0$, a másik megoldás:

$$\cos\alpha = \frac{g}{\ell\omega^2}.$$

Az első megoldás azt jelenti, hogy ha forgatni kezdjük az inga tengelyét, akkor az mindig lehetséges, hogy az inga mindvégig függőleges helyzetben lóg. A másik megoldás csak akkor lehetséges, ha $\cos\alpha=\frac{g}{\ell\omega^2}<1$. Ez akkor nem teljesül, ha az ω szögsebesség viszonylag alacsony. Ha a forgás szögsebessége $\omega<\sqrt{\frac{g}{\ell}}$, az inga mindenképpen függőlegesen fog lógni. (A szögsebesség küszöbértéke éppen a forgatás nélküli matematikai inga lengésidejéhez tartozó $2\pi/T$ „szögsebesség”.)

Ha az inga szögsebessége a küszöbérték fölé növekszik, az inga forgása az

$$\alpha = \arccos\frac{g}{\ell\omega^2}$$

szög mellett lesz stabil, az $\alpha=0$-nak megfelelő megoldás pedig – mint látni fogjuk – instabillá válik.

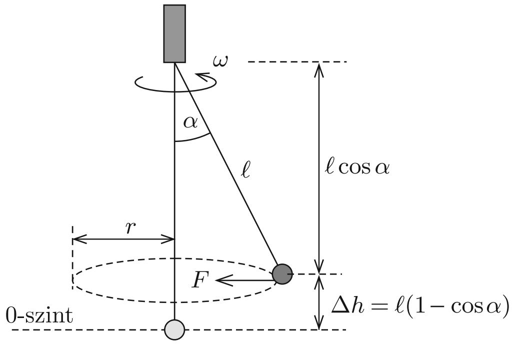
A stabilitás vizsgálata

A pálcával együtt forgó koordináta-rendszerből nézve az inga nehezéke mozdulatlan, egyensúlyi állapotban van. Azt, hogy az egyensúly stabil vagy instabil, a potenciális energiát megadó függvény vizsgálatával dönthetjük el. A stabil egyensúly a *minimális* helyzeti energiájú helyzetben valósul meg, az instabil helyzetre pedig az energia lokális maximuma jellemző.

Az ingatest megemelkedése miatt a nehézségi erőből származó helyzeti energiája (ha ennek a 0-szintjét az inga függőleges helyzetéhez választjuk – lásd a *2. ábrát*):

$$E_1 = mg\ell(1-\cos\alpha).$$

Az inga forgásából is származik egyfajta „helyzeti” energia. Ennek feltérképezéséhez vizsgáljuk meg, mennyi munkát kell végeznünk, ha a már forgásban lévő ingát a függőleges helyzetből lassan az α szöggel jellemzett helyzetbe hozzuk.



2. ábra

Ahhoz, hogy a tengelytől r távolságban (a forgó rendszerből nézve) egyensúlyban tartsuk az ingatestet, állandó

$$F(r) = m\omega^2 r$$

erővel kell a tengely felé húznunk. Ez az erő az r távolsággal egyenesen arányos, iránya pedig ellentétes az elmozdulás irányával. Az általunk végzett munka az átlagos erő és az elmozdulás szorzata:

$$W = -F_{\text{átlagos}} \cdot r = -\frac{m\omega^2 r + 0}{2} \cdot r = -\frac{1}{2} m\omega^2 r^2 = -\frac{1}{2} m\omega^2 \ell^2 \sin^2 \alpha.$$

(A negatív előjel arra utal, hogy az F erő ellentétes irányú az r elmozdulással.)

Ahhoz, hogy visszahúzzuk az ingatestet a tengelyhez, $+\frac{1}{2} m\omega^2 \ell^2 \sin^2 \alpha$ munkát kell végeznünk. (Ha óvatosan elengedjük az ingatestet, ugyanekkora munkát nyerhetünk vissza, amíg r távolságra jut az ingatest a tengelytől.) Elmondhatjuk tehát, hogy az ingatestnek a tengelytől r távolságban a forgás következtében

$$E_2 = -\frac{1}{2} m\omega^2 \ell^2 \sin^2 \alpha$$

helyzeti energiája van.

Az ingatest függőleges és vízszintes helyzetéből fakadó potenciális energiájának összege:

$$E(\alpha) = E_1 + E_2 = W = mg\ell(1 - \cos \alpha) - \frac{1}{2} m\omega^2 \ell^2 \sin^2 \alpha,$$

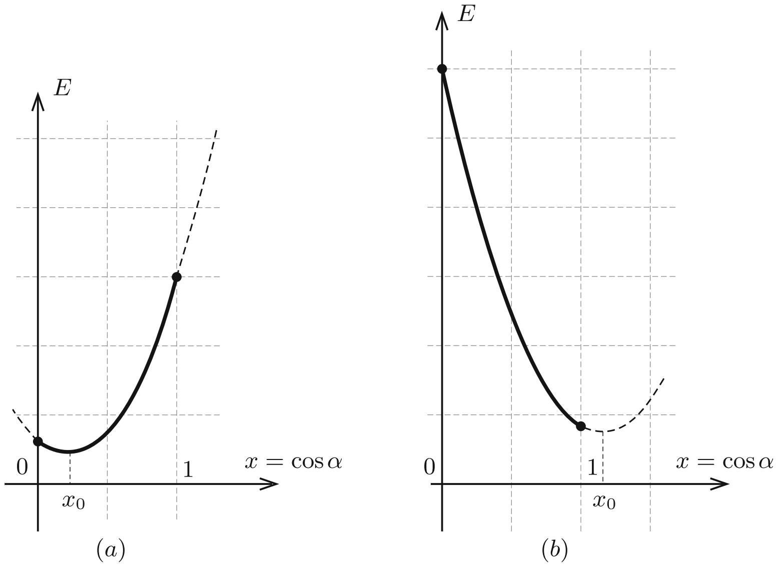
amit a $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$ azonosság felhasználásával így is felírhatunk:

$$E(\alpha) = \frac{1}{2} m\omega^2 \ell^2 \cos^2 \alpha - mg\ell \cos \alpha + mg\ell - \frac{1}{2} m\omega^2 \ell^2.$$

Ez a kifejezés $x \equiv \cos \alpha$-ra másodfokú: $E(x) = ax^2 + bx + x$ alakú, és fontos szem előtt tartanunk, hogy a függvény csak a $(0;\, 1]$ intervallumon van értelmezve, hiszen egy $-90^\circ < \alpha < 90^\circ$ szög koszinusza ebbe a tartományba eshet. A függvény képe egy pozitív irányba eltolt parabola íve. Ezért a másodfokú függvény minimuma vagy az

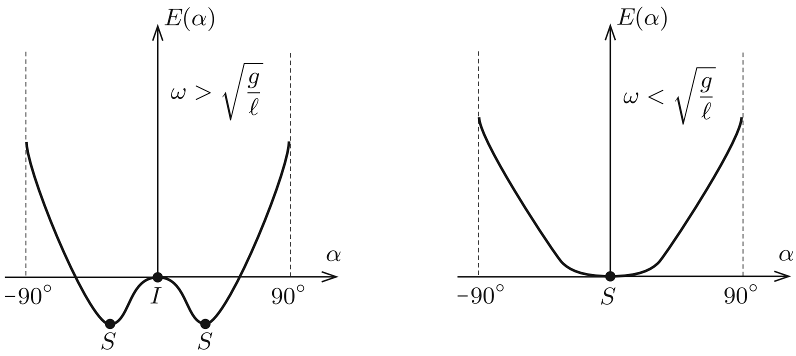
$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-mg\ell}{2\cdot\frac{1}{2}m\omega^2\ell^2} = \frac{g}{\ell\omega^2}$$

értéknél, vagy pedig, ha ez az érték kiesik az értelmezési tartományból, akkor az értelmezési tartomány határánál ($x = 1$) van.



3. ábra

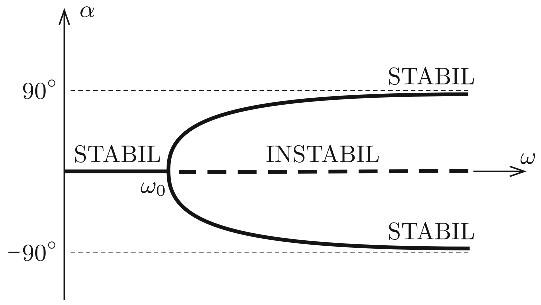
Ha $x_0 \leqslant 1$, vagyis az értelmezési tartományon belül van (*3a. ábra*), létezik olyan α_0 szög, amelyre $x_0 = \cos\alpha_0 = \frac{g}{\ell\omega^2}$. Itt tehát *stabil* egyensúlyt (S) találunk. $x = 1$-nél ($\alpha = 0$-nál), ami pedig energiamaximum, *instabil* (I) egyensúly van. Ha $x_0 > 1$, akkor a másodfokú kifejezést ábrázoló parabola csúcsa az értelmezési tartományon kívülre esik (*3b. ábra*), ezért $E(x)$ minimuma $x = 1$-hez kerül, tehát ez válik stabil egyensúllyá.



4. ábra

A fent leírtak jól látszanak, ha az energiát közvetlenül az α szög függvényében ábrázoljuk (*4. ábra*).

Ábrázoljuk az inga egyensúlyi helyzeteit jellemző α szöget az ω szögsebesség függvényében! Egy koszinuszértékhez két szög tartozik, melyek egymás ellentettjei (*5. ábra*).



5. ábra

Látható, hogy egy darabig csak a függőleges helyzet stabil, majd egy ω_0 értéknél ez a helyzet instabillá válik, és megjelenik két másik stabil egyensúlyi helyzet. A stabil állapot hirtelen kétszereződését, két ágra szakadását *bifurkációnak* nevezik.

Megjegyzések. 1. Érdekesség, hogy a bifurkáció kezdőpontjában, vagyis az ω_0 értéknél a függvény gráfjának meredeksége végtelen, vagyis az érintő „függőleges".

2. A stabilitás vizsgálatát dinamikailag is el lehet végezni, ami a jelen esetben sokkal egyszerűbb, mint az energetikai vizsgálat, de ennek a cikknek az egyik célja az volt, hogy bemutassa az energetikai megfontolás lehetőségét.

3. A cikkben leírtakhoz hasonló problémával foglalkozik a 2021–2022-es tanévi fizika OKTV 1. fordulóján az I. kategória 1. feladata is.

Baranyai Klára
Veresegyház

Mérési feladatok megoldása

M. 403. *A kereskedelemben kapható néhány szemcsés anyag esetében (pl.: lencse, rizs, tarhonya stb.) méréssel határozzuk meg, hogy tárolási térfogatuk hány százaléka levegő!*

(*6 pont*) Közli: *Zsigri Ferenc,* Budapest

Megoldás. Kétféle technikával és három különböző anyaggal összesen négy mérést végeztünk. Először a vizsgálandó szemcsés anyagot egy jól meghatározott szintig mérőpohárba töltöttük, majd a továbbiakban kétféle módszert alkalmaztunk.

I. Vizes módszer. A szemcsés anyaggal megtöltött mérőpoharat feltöltjük vízzel, addig, hogy épphogy ellepje az anyagot. Eközben konyhai mérleggel mérjük a betöltött víz tömegét, amelyből kiszámíthatjuk a keresett térfogatot.

II. Lisztes módszer. A mérőpohárból átöntjük az anyagot egy másik tálba, majd összekeverjük liszttel, úgy, hogy egy tömör massza legyen. (Feltételezzük, hogy a massza már nem tartalmaz számottevő mennyiségű levegőt, mert a szemcsék közötti üregeket a liszt tölti ki.) Ezután visszaöntjük a keveréket a mérőpohárba, és megnézzük, most most milyen térfogatú. Ezt követően az anyagot és a lisztet szétválasztjuk szitával, és a liszt térfogatát megmérjük a mérőpohár segítségével. Ha a liszt térfogatának és a szemcsés anyag kezdeti térfogatának összegéből levonjuk a lisztes keverék térfogatát, megkapjuk a szemcsék közötti levegő térfogatát.

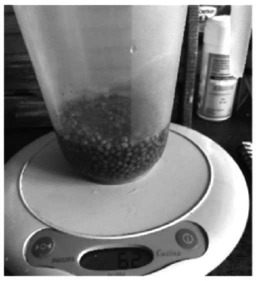
1. mérés. 100 ml sárgaborsót a vizes technikával felöntünk vízzel. A víz térfogata 25 ml, így a keresett levegő térfogata is 25 ml.

2. mérés. 100 ml sárgaborsót a lisztes technikával összevegyítünk liszttel. Együttes térfogatuk a mérés után 150 ml, a liszt térfogata önmagában 70 ml. A liszt és a sárgaborsó együttes térfogatából levonjuk az öszegyúrt borsó-liszt keverék térfogatát, az eredmény: $70+100-100=20$, tehát a keresett levegő térfogata 20 ml.

3. mérés. 200 ml mungóbabot mérlegen felöntünk vízzel. A víz tömege 62 g, térfogata 62 ml, tehát a levegő térfogata is ennyi.





4. mérés. Megismételjük a 3. mérést új, eddig nem használt mungóbabbal. A víz betöltése után a mérleg 63 g-mal többet mutat, mint korábban, tehát 63 ml volt a babszemek közötti levegő térfogata.

Mérések

anyagok	technika	a szemcsés anyag kezdeti térfogata	a levegő térfogata	a levegő aránya
sárgaborsó	vízzel	100 ml	25 ml	25%
sárgaborsó	liszttel	100 ml	20 ml	20%
mungóbab	vízzel	200 ml	62 ml	31%
mungóbab	vízzel	200 ml	63 ml	31,5%

A mérési hibák lehetséges okai:

– a mérőpohár jelzésének pontatlan leolvasása;

– a szemcsés anyagból nem tudunk sík felületet kialakítani a mérőpohár adott jelzésénél;

– az áttöltögetésnél fellépő „melléöntések”;

– a mért anyag vízfelvétele;

– a víz párolgása;

– a liszt szemcseméretéből adódó nem teljes térkitöltés;

– a liszt egy része rátapad a mérőpohárra, a vizsgált anyag szemcséire, a szitára és egyéb tálakra;

– a liszt átöntetésénél megfigyelhető porzás.

(A felsorolt hibaforrásokból nehéz lenne számszerű hibabecslést adni.)

Dózsa Levente (Óbudai Árpád Gimn., 11. évf.) és
Szalai Henrietta (Óbudai Árpád Gimn., 11. évf.)
mérőpár dolgozata alapján

6 dolgozat érkezett. Helyes 5 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 1 dolgozat.

M. 405. *Mérjük meg egy keverőcsaptelep vízhozamát először úgy, hogy a csapból hideg víz folyjék, majd úgy is, ha forró víz folyik a csapból! Mérjük meg a hideg és a forró víz hőmérsékletét is. Végül mérjük meg a csaptelep vízhozamát langyos víz esetében is, és számítsuk ki, hogy a langyos vízhozam hányad részét adja a hideg víz, illetve hányad részét adja a forró víz!*

(*6 pont*) Közli: *Honyek Gyula,* Veresegyház

Megoldás.

1. A felhasznált eszközök

– kétliteres mérőedény,

– fürdőszobai csap,

– stopperóra,

– maghőmérő.

2. A mérés elve és menete

A mérés során a csapot teljesen megnyitva először hideg, majd forró, ezután pedig langyos vízzel teletöltjük a $V = 2\ \mathrm{dm}^3$-es mérőedényt, miközben mérjük az időt. Miután az edény megtelt, megmérjük a víz hőmérsékletét a maghőmérővel. Ezt minden esetben háromszor végezzük el, majd az eredményeket táblázatba foglaljuk és kiszámítjuk a kért adatokat.

3. Mérési eredmények és számolás

Hideg víz

mérések	idő [s]	hőmérséklet [°C]
1.	12,6	24,0
2.	12,7	23,4
3.	13,1	22,9
átlag	12,8	23,4

A vízhozam:

$$Q_{\text{hideg}} = \frac{V}{t} = \frac{2{,}0\ \mathrm{dm}^3}{12{,}8\ \mathrm{s}} = 0{,}16\ \frac{\mathrm{dm}^3}{\mathrm{s}}.$$

Forró víz

mérések	idő [s]	hőmérséklet [°C]
1.	13,4	44,2
2.	13,3	45,3
3.	13,6	45,4
átlag	13,4	45,0

A vízhozam:

$$Q_{\text{forró}} = \frac{V}{t} = \frac{2{,}0\ \mathrm{dm}^3}{13{,}4\ \mathrm{s}} = 0{,}15\ \frac{\mathrm{dm}^3}{\mathrm{s}}.$$

Langyos víz

mérések	idő [s]	hőmérséklet [°C]
1.	10,5	29,9
2.	9,8	30,4
3.	10,2	31,6
átlag	10,2	30,6

A vízhozam:

$$Q_{\text{langyos}} = \frac{V}{t} = \frac{2{,}0\ \text{dm}^3}{10{,}2\ \text{s}} = 0{,}20\ \frac{\text{dm}^3}{\text{s}}.$$

Jelöljük a langyos víz eredetileg forró összetevőjének tömegét $m_{\text{forró}}$-val, az eredetileg hideg összetevőjének tömegét pedig m_{hideg}-gel. A kalorimetrikus egyenlet szerint

$$c\, m_{\text{hideg}}(T_{\text{langyos}} - T_{\text{hideg}}) = c\, m_{\text{forró}}(T_{\text{forró}} - T_{\text{langyos}}),$$

ahonnan a keresett tömegarány:

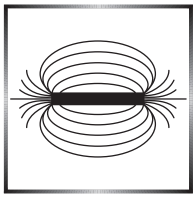
$$\frac{m_{\text{hideg}}}{m_{\text{forró}}} = \frac{T_{\text{forró}} - T_{\text{langyos}}}{T_{\text{langyos}} - T_{\text{hideg}}} = \frac{45{,}0 - 30{,}6}{30{,}6 - 23{,}4} = 2{,}0.$$

Eszerint (az adott csapállásnál) a langyos vízhozam 67%-át adta a hideg víz, 33%-át pedig a forró víz.

Jeszenői Sára (Kecskemét, Katona J. Gimn., 10. évf.)

6 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott 2 megoldás. Hiányos (4 pont) 3, nem értékelhető 1 dolgozat.

Fizika feladatok megoldása



P. 5337. *Párhuzamos pályákon állandó sebességgel közlekedik két tehervonat. Ellentétes irányban haladva* 20 s *alatt, azonos irányban haladva pedig* 60 s *alatt haladnak el egymás mellett. Egy* 600 m *hosszú hídon az egyik szerelvény* 40 s *alatt, a másik* 100 s *alatt halad át.*

Határozzuk meg a szerelvények hosszát és sebességét!

(*4 pont*) Közli: *Székely György,* Budapest

Megoldás. Legyen az első szerelvény hossza ℓ_1, sebességének *nagysága* v_1, a másik szerelvény hossza ℓ_2, sebességének nagysága pedig v_2. A 600 m hosszúságú hídon áthaladva annyival több utat kell megtenniük a híd hosszánál, amekkora a saját hosszúságuk. Ha a sebességeket m/s, az időt másodperc, a távolságokat pedig méter egységekben mérjük, akkor a következők teljesülnek:

$$\ell_1 + 600 = 40\, v_1, \tag{1}$$

$$\ell_2 + 600 = 100\, v_2. \tag{2}$$

Ha a két szerelvény egymással szemben halad el, a mozdonyok elejének találkozásakor a vonatok végei $\ell_1 + \ell_2$ távolságra vannak egymástól. Ezek a „vonatvégek" $v_1 + v_2$ sebességgel közelednek egymáshoz és 20 másodperc múlva találkoznak, felírható tehát a következő összefüggés:

$$\ell_1 + \ell_2 = 20\,(v_1 + v_2). \tag{3}$$

Az (1)–(3) egyenletekből ℓ_1-et, ℓ_2-t és v_1-et kifejezhetjük v_2 segítségével:

$$v_1 = 60 - 4\, v_2, \qquad \ell_1 = 1800 - 160\, v_2 \qquad \text{és} \qquad \ell_2 = 100\, v_2 - 600. \tag{4}$$

Amikor a vonatok azonos irányban haladnak, a szerelvények találkozásakor az elöl haladó szerelvény mozdonyának eleje és a hátul haladó szerelvény vége $\ell_1 + \ell_2$ távolságra van egymástól. Ezek a pontok most $|v_1 - v_2|$ sebességgel közelednek egymáshoz és 60 másodperc múlva találkoznak. Fennáll tehát, hogy

$$\ell_1 + \ell_2 = 60\,|v_1 - v_2|. \tag{5}$$

Ha (5)-ben minden ismeretlen helyére a v_2-t tartalmazó kifejezést helyettesítjük be, a következőt kapjuk:

$$20 - v_2 = |60 - 5\, v_2|. \tag{6}$$

A továbbiakban két lehetőséget vizsgálunk. Amennyiben $60 \geqslant 5\, v_2$, vagyis $v_2 \leqslant 12$, akkor (6) szerint

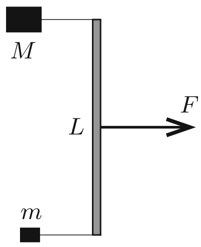
$$20 - v_2 = 60 - 5\, v_2, \qquad \text{vagyis} \qquad v_2 = 10,$$

továbbá (4)-ből a $v_1 = 20$, $\ell_1 = 200$ és $\ell_2 = 400$ eredmény adódik. Ha $60 - 5v_2$ negatív, akkor (6)-ból $20 - v_2 = 5\, v_2 - 60$, vagyis $v_2 = \frac{40}{3}$ következik. Ehhez a sebességhez $\ell_1 = -\frac{1000}{3} < 0$ vonathossz tartozna, ami nyilván lehetetlen, emiatt a $60 < 5\, v_2$ lehetőséget ki kell zárnunk.

A feladat megoldása tehát az, hogy az egyik szerelvény hossza $\ell_1 = 200$ m és $v_1 = 20\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 72\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ sebességgel halad, a másik tehervonat hossza $\ell_2 = 400$ m, sebessége pedig $v_2 = 10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 36\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$.

Egyházi Hanna (Budapest, ELTE Apáczai Csere J. Gyak. Gimn., 12. évf.)

104 dolgozat érkezett. Helyes 72 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 12, hiányos (1–2 pont) 18, hibás 2 dolgozat.



P. 5339. *Vízszintes, súrlódásmentes felületen egy $L=0{,}6$ m hosszúságú, elhanyolható tömegű, vékony rúd fekszik. A rúd végpontjaihoz elhanyagolható tömegű, feszes fonalakkal $m=0{,}2$ kg és $M=0{,}8$ kg tömegű testeket rögzítettünk. A fonalak merőlegesek a rúdra. Egy adott pillanatban a rúd középpontjára a vízszintes felülettel párhuzamos, a rúdra merőleges, $F=8$ N nagyságú erőt fejtünk ki.*

a) Határozzuk meg a kezdőpillanatban a rúd középpontjának gyorsulását!

b) A rúd melyik pontjára kellene kifejteni ezt az F erőt, hogy a testek gyorsulása azonos legyen? Mekkora erők ébrednek ekkor a fonalakban?

(*4 pont*) Közli: *Kotek László,* Pécs

Megoldás. *a*) Ha a rúd tömege (és így a tehetetlenségi nyomatéka is) elhanyagolható, akkor a kezdőpillanatban a rúdra ható erők eredője, és a forgatónyomatékok eredője is nulla kell hogy legyen (*1. ábra*):

$$F=F_1+F_2, \qquad \text{illetve} \qquad F_1\frac{L}{2}=F_2\frac{L}{2},$$

ahonnan

$$F_1=F_2=\frac{F}{2}=4\ \mathrm{N}$$

következik.

A rúd végeihez rögzített testek gyorsulása:

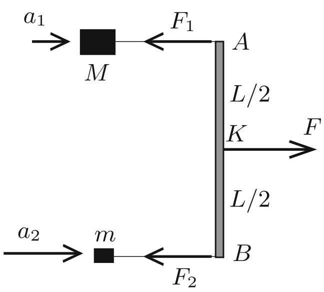
$$a_1=\frac{F_1}{M}=\frac{4\ \mathrm{N}}{0{,}8\ \mathrm{kg}}=5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2},$$

illetve

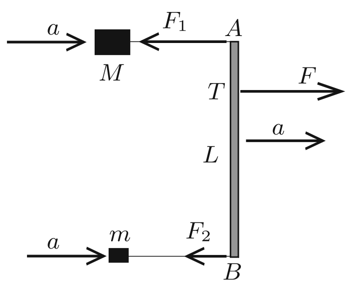
$$a_2=\frac{F_2}{m}=\frac{4\ \mathrm{N}}{0{,}2\ \mathrm{kg}}=20\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

A rúd K geometriai középpontjának (ami nem egyezik meg a rendszer tömegközéppontjával) a gyorsulása az a_1 és a_2 gyorsulás számtani közepe:

$$a_K=\frac{a_1+a_2}{2}=12{,}5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$



1. ábra



2. ábra

b) Egy alkalmasan választott T pontban ható F erő hatására a rúd nem fordul el, tehát az egész rendszer a gyorsulással mozog (*2. ábra*).

Ilyenkor

$$F_1 = Ma \qquad \text{és} \qquad F_2 = ma,$$

vagyis

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{M}{m} = 4,$$

továbbá

$$F_1 + F_2 = F = 8\ \text{N},$$

tehát

$$F_1 = 6{,}4\ \text{N} \qquad \text{és} \qquad F_2 = 1{,}6\ \text{N}.$$

A T pont helyét a forgatónyomatékok egyensúlyából kapjuk meg:

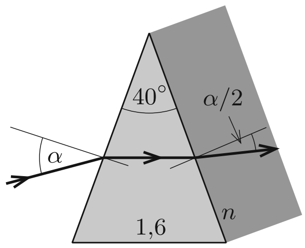
$$\frac{BT}{AT} = \frac{F_1}{F_2} = 4,$$

másrészt $AT + BT = AB = 60$ cm, ahonnan $AT = 12$ cm és $BT = 48$ cm.

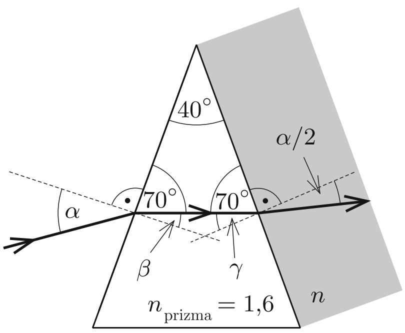
Juhász-Molnár Erik (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 9. évf.)

43 dolgozat érkezett. Helyes 10 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 1, hiányos (1–2 pont) 29, hibás 3 dolgozat.

P. 5344. *Egyenlő szárú háromszög keresztmetszetű prizma törőszöge* 40°, *anyagának törésmutatója* 1,6. *Mekkora* α *beesési szöggel érkezik a fénysugár az egyik oldallaphoz, ha ez a fénysugár a prizmában az alappal párhuzamosan halad tovább? Mekkora* n *törésmutatója van annak az üvegnek, amiből készült hasábot a prizma másik oldalához illesztve a törési szög az* ábra *szerint* $\alpha/2$?



(*4 pont*) Közli: *Kobzos Ferenc,* Dunaújváros



Megoldás. Az *ábrán* látható jelöléseket használva (és a levegő abszolút törésmutatóját jó közelítéssel 1-nek tekintve) megállapíthatjuk, hogy $\beta = \gamma = 20°$, továbbá a törési törvény szerint

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin\alpha}{\sin 20°} = 1{,}6,$$

ahonnan

$$\sin\alpha = 0{,}547, \qquad \text{tehát} \qquad \alpha = 33{,}2°.$$

A prizmából az üveghasábba lépő fényre a törési törvény így írható:

$$\frac{\sin\gamma}{\sin(\alpha/2)}=\frac{\sin 20^\circ}{\sin 16{,}6^\circ}=1{,}20=n_{\text{relatív}}=\frac{n_{\text{hasáb}}}{n_{\text{prizma}}}=\frac{n}{1{,}6},$$

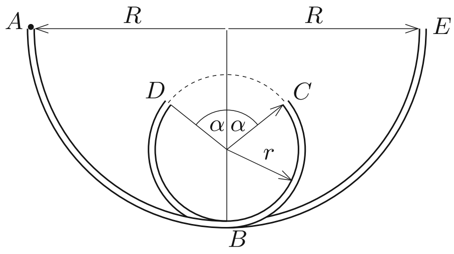
ahonnan a hasáb anyagának abszolút törésmutatója:

$$n=1{,}6\cdot 1{,}2=1{,}92.$$

Elekes Dorottya (Budapest, Fasori Evangélikus Gimn., 9. évf.)

55 dolgozat érkezett. Helyes 37 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 4, hiányos (1–2 pont) 13, hibás 1 dolgozat.

P. 5345. *Vékony csőből két R sugarú negyedkört készítünk, majd egy-egy r sugarú, α szöggel „hiányos” félkörívet csatlakoztatunk hozzájuk, végül az egész elrendezést az ábrán látható módon egy függőleges síklaphoz erősítjük. Az A pontból kezdősebesség nélkül beejtünk egy kis golyót a csőbe. A golyó az AB és a BC köríven végigcsúszik, a C és a D pont között szabadon esik (ferde hajítás szerint mozog), majd a DB és BE köríven csúszik tovább.(A súrlódást és a légellenállást figyelmen kívül hagyhatjuk.)*



a) Mekkora az α szög, ha $\frac{R}{r}=\frac{5}{2}$?

b) Vizsgáljuk meg, hogy különböző $\frac{R}{r}$ arányoknál mekkora α szög (vagy szögek) esetében valósulhat meg a leírt mozgás!

(*6 pont*) *Romániai versenyfeladat nyomán*

Megoldás. Határozzuk meg, hogy egy adott α szögnél mekkora v sebességgel kell rendelkezzen a golyó a C pontban, hogy éppen eljusson a D pontig. (Ha ez megtörténik, akkor – az elrendezés szimmetriája miatt – a D pontbeli sebességének iránya is megfelelő lesz.) A v sebesség ismeretében – az energiamegmaradás törvényét alkalmazva – meg tudjuk mondani, hogy milyen magasról indult a kis golyó, vagyis hogy mekkora az R sugár nagysága. (Ha gondolatban megnöveljük a v sebességet, akkor a golyó túl fog repülni a D ponton, ha pedig csökkentjük, akkor nem fog elrepülni odáig, tehát az α szögből *egyértelműen* meg tudjuk mondani a v sebességet, majd abból a mozgás kezdőpontjának magasságát.)

Legyen a C és D pont közötti ferde hajítás mozgásának időtartama t. A vízszintes irányú elmozdulásra

$$2r\sin\alpha=v\cos\alpha\cdot t,\tag{1}$$

a függőleges irányú mozgásra pedig

$$\frac{gt}{2}=v\sin\alpha\tag{2}$$

teljesül. Az (1) és (2) egyenlet szorzatából

$$gtr\sin\alpha = v^2 t\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$

adódik. Mivel a tényleges ferde hajításnál $t\neq 0$ és $\alpha\neq 0$, $t\sin\alpha$-val egyszerűsíthetünk:

$$v^2=\frac{rg}{\cos\alpha}, \tag{3}$$

ami – az energiamegmaradás törvénye szerint – annyit jelent, hogy az A és C pontok magasságának különbsége

$$h=\frac{v^2}{2g}=\frac{r}{2\cos\alpha}.$$

Másrészt igaz, hogy

$$R=r+r\cos\alpha+h,$$

tehát

$$\frac{R}{r}-1=\cos\alpha+\frac{1}{2\cos\alpha}. \tag{4}$$

Szorozzuk meg (4)-et $\sqrt{2}$-vel, és vezessük be az

$$x=\sqrt{2}\left(\frac{R}{r}-1\right),\qquad \text{illetve}\qquad b=\sqrt{2}\,\cos\alpha$$

jelöléseket. Ezekkel

$$x=b+\frac{1}{b},$$

vagyis

$$b^2-xb+1=0, \tag{5}$$

aminek megoldása:

$$b_{1,2}=\frac{x\pm\sqrt{x^2-4}}{2}. \tag{6}$$

Látjuk, hogy a feladatnak csak $x\geqslant 2$, vagyis $\frac{R}{r}\geqslant 1+\sqrt{2}$ esetén lehet fizikailag reális megoldása.

a) Ha $\frac{R}{r}=\frac{5}{2}$, akkor $x=\frac{3}{\sqrt{2}}$, tehát

$$b_{1,2}=\frac{3\pm 1}{2\sqrt{2}},$$

vagyis

$$\cos\alpha_1=1\qquad\text{és}\qquad\cos\alpha_2=\frac{1}{2},$$

és ennek megfelelően

$$\alpha_1 = 0^\circ, \qquad \text{illetve} \qquad \alpha_2 = 60^\circ.$$

Az első „megoldás” nem felel meg tényleges hajításnak, azt elvethetjük.

b) Legyen most $\frac{R}{r}$ tetszőleges, és vizsgáljuk meg a leírt mozgásnak megfelelő α szög lehetséges értékeinek számát.

(*i*) A (6) összefüggés azt mutatja, hogy $\frac{R}{r} < 1+\sqrt{2}$ esetén α egyetlen értéke sem megfelelő, vagyis a feladatnak *nincs* megoldása.

(*ii*) Amennyiben $\frac{R}{r} \geqslant 1+\sqrt{2}$, a feladatnak *lehet* megoldása, esetleg *több* is. A legkisebb, valós megoldásra vezető $x=2$ értéknél, vagyis a szóba jöhető legkisebb R/r aránynál (6) szerint

$$b_1 = b_2 = 1, \qquad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \alpha = 45^\circ.$$

Ezek szerint $\frac{R}{r} = 1+\sqrt{2}$ esetén *egyetlen* α szögnél valósulhat meg a leírt mozgás.

(*iii*) Ha $\frac{R}{r} > 1+\sqrt{2}$, akkor (6)-nak két különböző megoldása van. Ezek csak akkor felelnek meg fizikailag értelmezhető α szögeknek, ha $\cos\alpha \leqslant 1$, vagyis $b \leqslant \sqrt{2}$. Ez a másodfokú egyenlet kisebbik gyökére biztosan teljesül, hiszen (a gyökök és az együtthatók összefüggése szerint) $b_1 b_2 = 1$, azaz a kisebbik gyök nem lehet nagyobb 1-nél. A feladatnak ebben az R/r tartományban *legalább egy* megoldása van.

Két különböző α szöget akkor kapunk, ha (6) nagyobbik gyöke $\sqrt{2}$-nél kisebb:

$$\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2} < \sqrt{2},$$

vagyis

$$\sqrt{x^2-4} < 2\sqrt{2} - x, \qquad \text{azaz} \qquad x^2 - 4 < \left(2\sqrt{2} - x\right)^2 = x^2 - 4\sqrt{2}\,x + 8.$$

Ez

$$x < \frac{3}{\sqrt{2}}, \qquad \text{vagyis} \qquad \frac{R}{r} < \frac{5}{2}$$

esetén teljesül.

Ha tehát $1+\sqrt{2} < \frac{R}{r} < \frac{5}{2}$, akkor két különböző, $\frac{R}{r} \geqslant \frac{5}{2}$ esetben pedig csak egy megoldásunk van.

Fey Dávid (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.)
dolgozata alapján

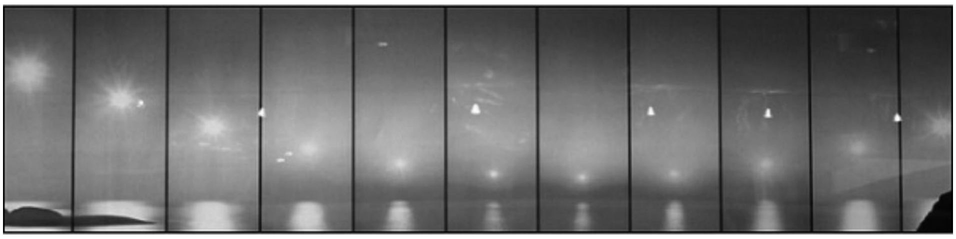
53 dolgozat érkezett. Helyes 19 megoldás. Kicsit hiányos (5 pont) 3, hiányos (1–2 pont) 29, hibás 2 dolgozat.

Fizikából kitűzött feladatok

M. 410. Ha egy kis méretű, erős mágnes és egy vízszintes helyzetű gemkapocs közé egy kártyalapot helyezünk, akkor a kártyánál fogva még fel tudjuk emelni a gemkapcsot. Mérjük meg, hány darab egymásra rakott kártyalap kell ahhoz, hogy már ne tudjuk felemelni a gemkapcsot! Mekkora ezen egymásra helyezett lapok vastagsága? Csatlakoztassunk egymáshoz két ugyanolyan kis mágnest, és vizsgáljuk meg, hány kártyalap szükséges ahhoz, hogy a gemkapcsot már ne tudjuk felemelni!

(*6 pont*) Közli: *Szász Krisztián,* Budapest

G. 765. A képsorozat mind a 11 felvétele ugyanarról a helyről készült, a fényképezőgépet mindig a Nap felé fordították. A képek időrendben balról jobbra készültek. Mennyi időt mutatott az óra, amikor a Nap képe legközelebb volt a horizonthoz? Milyen égtáj felé fordult a kamera, amikor a Nap a legalacsonyabban járt az égen? Hol és milyen évszakban készült a képsorozat?



(*4 pont*)

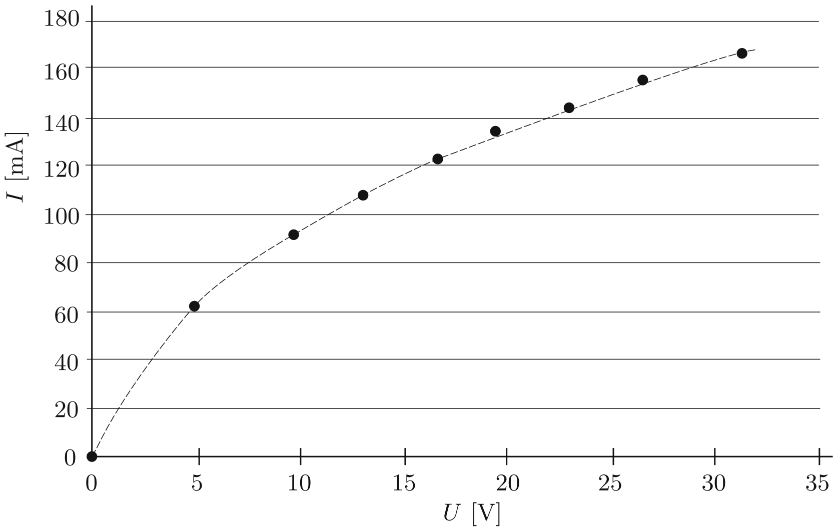
G. 766. A fizika leghíresebb képlete a tömeg és az energia egyenértékűségét kifejező $E=mc^2$ összefüggés, ahol E az energia, m a tömeg és c a vákuumbeli fénysebesség. Ennek felhasználásával becsüljük meg, hogy saját mobiltelefonunk mennyivel nehezebb teljesen feltöltött akkumulátorral ahhoz képest, mintha az akkumulátor teljesen lemerült állapotban lenne!

(*3 pont*)

G. 767. Az Esthajnalcsillag (valójában a Vénusz bolygó) egy ideig esténként látszik, azután egy ideig csak hajnalonként látható. Mennyi ennek a változásnak a periódusideje?

(*4 pont*) Közli: *Rakovszky Andorás,* Budapest

G. 768. Száz égőből álló, sorosan kapcsolt karácsonyfa-füzér egyik volfrámszálas izzójának áram-feszültség összefüggését láthatjuk az *ábrán.*



a) A grafikon alapján állapítsuk meg, hogy összesen mekkora elektromos teljesítményt vesz fel a teljes füzér, ha 230 V feszültségre kapcsoljuk!

b) Mekkora lesz a teljes felvett teljesítmény, ha csak tíz, sorosan kapcsolt égőből álló füzért kötünk 230 V-ra?

Megjegyzés: A második esetben az égők viszonylag rövid idő múlva kiégnek.

(*4 pont*)

P. 5373. A 7,3 km vonalhosszúságú M4-es metróvonal Kelenföld vasútállomást és a Keleti pályaudvart köti össze, miközben további 8 állomást érint. A szerelvények állandó 1,0 $\mathrm{m/s^2}$ gyorsulással hagyják el az állomásokat, és fékezésnél is ekkora lassulással állnak meg. Az állomások között a maximális haladási sebesség 80 km/h. A megállókban az utascsere átlagos ideje 0,5 perc.

a) Mennyi ideig tart, amíg az állomásról indulva a szerelvény eléri az utazási sebességét? Mekkora utat tesz meg ezalatt?

b) A szerelvény egy útja során mennyi ideig halad a 80 km/h-s utazósebességével?

c) Mennyi az M4-es metró menetideje a két végállomás között, azaz mennyi idő telik el a szerelvény kelenföldi elindulása és Keleti pályaudvari megérkezése között?

(*4 pont*) *Tarján Imre Országos Emlékverseny,* Szolnok

P. 5374. A *képen* egy sorozatlövő, rugós játékpuska látható, ami hat darab, vékony, henger alakú szivacslövedéket képes kilőni. Minden egyes lövés előtt a fekete csúszkát jobbra el kell húzni ütközésig, nagyjából 10 cm-re. A puska felhúzásához szükséges maximális erőről egy digitális testsúlymérleg segítségével azt találtuk, hogy ez az erő 6,6 kg-os tömeg súlyának felel meg.

a) Hogyan történhetett az erő meghatározása, ha a mérlegen kívül semmilyen segédeszközt nem kellett igénybe venni?

b) Becsüljük meg, hogy maximálisan mekkora sebességgel repül ki a 3 g tömegű szivacslövedék, ha a rugó összes energiájának 10%-a fordítódik a lövedék gyorsítására!

(*4 pont*) Közli: *Honyek Gyula,* Veresegyház

P. 5375. Súrlódásmentes, vízszintes síkon fekvő vékony, homogén pálca egyik végét hirtelen úgy ütjük meg, hogy a végpont sebessége a pálcára merőleges és v nagyságú legyen.

a) A pálcának melyik része lesz zérus kezdősebességű?

b) A pálca másik vége mekkora és milyen irányú sebességgel indul el?

(*5 pont*) Közli: *Gelencsér Jenő,* Kaposvár

P. 5376. Egy $2L$ hosszúságú, vízszintes tartályt egy hőszigetelő dugattyú oszt két azonos térfogatú részre. Mindkét részben T_0 hőmérsékletű, n mól kétatomos ideális gáz van. A dugattyú mindkét oldala egy-egy D direkciós erejű, vízszintes helyzetű húzó-nyomó rugóval van összekötve a tartály függőleges falaival. A rugók kezdetben nyújtatlanok. Ha a jobb oldali gázzal lassan hőt közlünk, a dugattyú $L/2$ távolságot mozdul el balra. A folyamat során a bal oldali részben lévő gáz egy T_0 hőmérsékletű, nagy hőkapacitású hőtartályhoz kapcsolódik.

a) Mekkora a jobb oldali részben a gáz nyomása akkor, amikor a dugattyú x távolsággal mozdult el az eredeti helyzetétől?

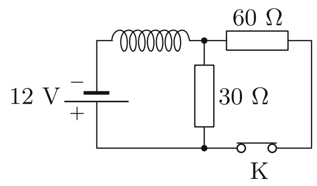
b) Adjuk meg a jobb oldali gázzal a teljes folyamat során közölt hőt!

(*5 pont*) Közli: *Szász Krisztián,* Budapest

P. 5377. Három, egyenként q elektromos töltésű, pontszerű testet egy egyenlő oldalú háromszög csúcsaiban rögzítünk. Mekkora Q töltésű pontszerű testet kell elhelyeznünk a háromszög középpontjában, hogy a rögzítés feloldása után mindegyik töltés nyugalomban maradjon?

(*4 pont*) Közli: *Holics László,* Budapest

P. 5378. Az *ábrán* látható áramkör K kapcsolója hosszú ideje zárva van. Egyszer csak a kapcsolót kinyitjuk. Mekkora a tekercsben indukálódó feszültség nagysága közvetlenül a kapcsoló kinyitása után?



(*5 pont*) *Példatári feladat nyomán*

P. 5379. Ideális polárszűrők segítségével szeretnénk a lineárisan polarizált fény polarizációs síkját 45°-kal elforgatni úgy, hogy az intenzitásveszteség legfeljebb 10% legyen. Legalább hány polárszűrőre van szükségünk, és hogyan kell azokat optimálisan elhelyezni?

(*5 pont*) *Példatári feladat nyomán*

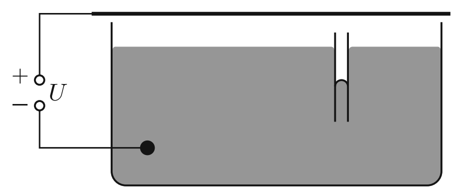
P. 5380. Egy speciális izotóplaborban a doziméterek hitelesítésére extrém aktivitású ^{137}Cs, illetve ^{60}Co forrásokat használnak. A két nagy tisztaságú radioaktív forrás ellenőrzésekor azt tapasztalták, hogy a 68 mg-nyi cézium és egy ismeretlen tömegű kobaltforrás esetében is jó közelítéssel percenként ugyanannyi bomlás történt.

a) Mekkora a kobaltforrás tömege?

b) Mennyi idő múlva és melyik izotópminta aktivitása lesz a másik kétszerese? (A ^{137}Cs felezési ideje: 30,17 év, a ^{60}Co felezési ideje: 5,27 év.)

(*4 pont*) Közli: *Kis Tamás,* Heves

P. 5381. Egy üvegből készült (szigetelő) edény higannyal van töltve. A higanyba egy függőleges, $d = 0{,}5$ mm átmérőjű kapilláris cső merül az *ábrán* látható módon. A higany felszíne fölé $h = 6$ mm magasságban egy nagy kiterjedésű, vízszintes fémlemezt helyeztünk. Mennyivel változik meg a kapilláris csőben a higanyszint, ha a fémlemez és a higany közé $U = 20$ kV egyenfeszültséget kapcsolunk?



(*6 pont*) Közli: *Vigh Máté,* Biatorbágy

Beküldési határidő: 2022. február 15.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL FOR SECONDARY SCHOOLS
(Volume 72. No. 1. January 2022)

Problems in Mathematics

New exercises for practice – competition K (see page 30): **K. 714.** The first term of a sequence is 3, and every further term is obtained by subtracting 2 from the double of the previous term. *a*) List the first 8 terms of the sequence. *b*) Which of the numbers below occur as terms of the sequence, and which of them do not occur? If a number occurs as a term, find the index of the term, otherwise explain why it is not a term of the sequence. 8194, 649 287 365, 29 453 759 372, 8 398 507 839 348. **K. 715.** We have two jugs. Each of them can hold 2 litres of liquid. Initially, one jug is filled with 2 litres of 100% orange juice, and the other contains 1 litre of water. 1. Half the orange juice is poured into the water jug, and stirred with a spoon. Then 1 litre of the mixture is poured back in the first jug. 2. The procedure is repeated once more: 1 litre is transferred from the first jug to the second, stirred, and 1 litre is transferred back to the first jug. Find the resulting percentage of orange juice in the content of each jug. **K. 716.** In a shop, three notebooks and two pens cost 1110 forints (HUF, Hungarian currency). Five notebooks and four pens cost 2010 forints. What is the price of one notebook, and what is the price of one pen? **K/C. 717.** In a regular dodecagon $ABCDEFGHIJKL$ the squares $ABPQ$ and $GHRS$ are drawn on sides AB and GH, on the inside, as shown in the *figure.* Show that PQ and RS are two opposite sides of a regular hexagon. **K/C. 718.** How many numbers are there from 1 to 50 that can be represented as a sum of at least two consecutive non-negative integers?

New exercises for practice – competition C (see page 31): **Exercises up to grade 10: K/C. 717.** See the text at Exercises **K. K/C. 718.** See the text at Exercises **K. Exercises for everyone: C. 1699.** In the expansion of the product $(x+1)\cdot(x^2+1)\cdot(x^3+1)\cdot\ldots\cdot(x^{12}+1)$, what is the coefficient of the term in x^{14}? **C. 1700.** In a circle of centre O, A is an interior point different from O. For a point B on the circumference of the circle, $\angle OAB=\alpha$. Let C be a point on the circumference such that $2\alpha+\beta=180^\circ$, where $\angle BAC=\beta$, and the angles $\angle BAO$ and $\angle BAC$ have no common points apart from the ray AB. Prove that the points O, A, B, C are concyclic. **C. 1701.** What is the sum of all integers x for which $\sqrt{2x^2-6x-20}<-x+5$? **Exercises upwards of grade 11: C. 1702.** Vertex A of a quadrilateral $ABCD$ lies on the plane S, its diagonal BD is parallel to the plane S, and its vertex C is at a distance of 8 units from the plane S. Given that the orthogonal projection of the quadrilateral onto S is a square with a diagonal 6 units long, prove that quadrilateral $ABCD$ is a rhombus, and calculate the length of its sides. (Proposed by *N. Zagyva,* Baja) **C. 1703.** The natural numbers a and b each have only digits of 1 in decimal notation. Prove that if a and b are not relatively prime then the sums of their digits, $S(a)$ and $S(b)$ are not relatively prime either.

New exercises – competition B (see page 32): **B. 5214.** The sequence of digits 110 represents an even integer, whatever positive integer greater than 1 is the base of notation. Is there a sequence of digits 1 and 0 such that it represents a multiple of 3, whatever positive integer greater than 1 is the base of notation? (*3 points*) **B. 5215.** Find all positive real numbers x for which $x+\frac{1}{x}$ is an integer, and $x^3+\frac{1}{x^3}$ is a prime number. (*4 points*) (Based on the idea of *B.* and *V. Szaszkó-Bogár*) **B. 5216.** The tangents drawn to the circumscribed circle of a right triangle ABC at the right-angled vertex C and at another vertex A intersect at D. Prove that the line BD bisects the altitude drawn from vertex C. (*3 points*) **B. 5217.** A new triangle is constructed out of the line segments obtained by multiplying the medians of a triangle by $\frac{2}{\sqrt{3}}$. The procedure is repeated with the triangle obtained. Show that the triangle obtained in the second step is congruent to the original triangle. (*4 points*) (Proposed by *P. Bártfai,* Budapest) **B. 5218.** What is the largest number of elements that can be selected out of the first 2022 positive integers such that the difference of any two selected numbers is not a prime? (*5 points*) **B. 5219.** Prove that $\frac{|a+b+c|}{1+|a+b+c|}\leqslant\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}+\frac{|c|}{1+|c|}$ for all real numbers a, b, c. On what condition will equality occur? (*5 points*) (Proposed by *J. Schultz,* Szeged) **B. 5220.** Let n be a positive integer. Prove that it is possible to select n perfect squares from the numbers 1 to 2^{n+2} such that the sums obtained by adding an arbitrary subset of the selected numbers (including sums of single terms and the sum of all the numbers) are all distinct. (*6 points*) (Proposed by *R. Freud,* Budapest) **B. 5221.** In an acute-angled triangle ABC, the points of tangency of the inscribed circle on sides BC, CA, AB are D, E, and F, respectively. The circumscribed circle of the triangle intersects circle AEF at a point P different from A, intersects circle BFD at a point Q different from B, and intersects circle CDE at a point R different from C. Show that the lines DP, EQ and FR are concurrent. (*6 points*) (Proposed by *M. Lovas,* Budapest)

New problems – competition A (see page 34): **A. 815.** Let q be a monic polynomial with integer coefficients. Prove that there exists a constant C depending only on polynomial q such that for an arbitrary prime number p and an arbitrary positive integer $N \leqslant p$ the congruence $n! \equiv q(n) \pmod p$ has at most $CN^{2/3}$ solutions among any N consecutive integers. (Submitted by *Navid Safaei,* Iran) **A. 816.** Peter has 2022 pieces of magnetic railroad cars, which are of two types: some has the front with north and the rear with south magnetic polarity, and some has the rear with north and the rear with south magnetic polarity (on these railroad cars the front and the rear can be distinguished). Peter wants to decide whether there are the same number of both type of cars. He can try to fit together two cars in one try. What is the least number of tries needed? (Submitted by *Dömötör Pálvölgyi,* Budapest) **A. 817.** Let ABC be a triangle. Let T be the point of tangency of the circumcircle of triangle ABC and the A-mixtilinear incircle (the circle which is tangent to sides AB, AC, and internally tangent to the circumcircle of triangle ABC). The incircle of triangle ABC has center I and touches sides BC, CA and AB at points D, E and F, respectively. Let N be the midpoint of line segment DF. Prove that the circumcircle of triangle BTN, line TI and the perpendicular from D to EF are concurrent. (Submitted by *Diaconescu Tashi,* Romania)

Problems in Physics

(see page 58)

M. 410. If a playing card is placed between a small, strong magnet and a horizontal paper clip, then we can lift the paper clip by the card. Measure how many cards you need to stack so that you can no longer lift the paper clip. What is the thickness of these stacked sheets? Connect two magnets of the same size and investigate how many cards are needed so that we can no longer lift the paper clip.

G. 765. Each of the 11 shots in the series of photos was taken from the same location, with the camera always facing the Sun. The chronological order of the photos is from left to right. What was the time when the image of the Sun was the closest to the horizon? To which point of the compass did the camera face when the Sun was at its lowest position in the sky? Where and in which season was the series of photos taken? **G. 766.** The most famous formula in physics is the relation of $E = mc^2$ expressing the equivalence of mass and energy where E is the energy, m is the mass, and c is the speed of light in vacuum. Using this, estimate how much heavier is our mobile phone, when its battery is fully charged, than when its battery is fully discharged. **G. 767.** The Morning Star (actually the planet Venus) is visible for a while only in the evenings, and then it appears for a while only at dawns. What is the period of this change? **G. 768.** The *figure* shows the current-voltage characteristic of one of the tungsten filament bulbs of a string of a Christmas tree lights, which contains a hundred bulbs connected in series. *a*) Using the graph determine the total dissipated electrical energy by all the bulbs of the string if it is connected to a voltage supply of 230V. *b*) What is the total dissipated electrical energy by the string if it contains only ten bulbs and it is connected to 230 V? *Note:* In the second case the bulbs will quite soon burn out.

P. 5373. The 7.3 km M4 metro line connects Kelenföld railway station and Keleti railway station, and between them it has 8 other stops. Trains leave each station (or stop) with a constant acceleration of 1.0 m/s^2 and and stop with the same deceleration when braking. The maximum speed between stations is 80 km/h. At the stations the average time to change passengers is 0.5 minutes. *a*) How long does it take for the train to reach its cruising speed when it leaves the station? How far does it travel during this time? *b*) During one journey, how long does the train travel at the speed of 80 km/h? *c*) What is the journey time of the M4 metro between the two terminals, i.e. how much time elapses between the departure of a train from Kelenföld and its arrival at Keleti railway station? **P. 5374.** The picture shows a serial firing, spring-loaded toy rifle, which can fire six thin, cylindrical sponge bullets. Before each shot, the black slide must be pulled to the rightmost position by about 10 cm. We used a digital scale and found that the maximum force required to cock the rifle is the same as the weight of a 6.6 kg object. *a*) How could the force have been determined if no auxiliary means other than the balance was used? *b*) Estimate the maximum velocity at which a sponge bullet of mass 3 g will fly out if 10% of the energy stored in the spring is used to accelerate the bullet. **P. 5375.** One end of a thin, uniform-density stick lying in a frictionless horizontal plane is suddenly struck so that the the velocity of the end point is perpendicular to the stick and has a magnitude of v. *a*) Which part of the stick will have zero initial speed? *b*) What is the speed and direction of the motion of the other end of the stick, at the moment when it starts to move? **P. 5376.** A horizontal tank of length $2L$ is divided into into two parts, having equal volume, by a thermally insulating piston. Both parts contain a sample of ideal gas of n moles of diatomic molecules at a temperature of T_0. To each side of the piston a horizontal spring of spring constant D is attached. Both springs are designed for compression and tension and their other ends are fixed to the vertical walls of the container. The springs are initially unstretched. When the gas in the right part of the container is slowly heated, the piston moves a distance of $L/2$ towards the left. During the process the gas in the left part is connected to a high heat capacity heat reservoir of temperature T_0. *a*) What is the pressure of the gas in the right part when the piston has moved a distance of x from the original position? *b*) Determine the heat absorbed by the gas in the right part during the whole process. **P. 5377.** Three point-like objects, each having an electric charge of q, are fixed at the vertices of an equilateral triangle. Another point-like object of charge Q is placed to the centroid of the triangle. What should the charge Q of this fourth object be in order that even if the fixation of the objects is ceased all of the charged objects remain at rest? **P. 5378.** Switch K in the circuit shown in the *figure* has been closed for a long time. Once the switch is opened. What is the magnitude of the induced electromotive force in the coil immediately after the switch is opened? **P. 5379.** With the help of ideal polarizing filters, we would like to turn the polarization plane of linearly polarized light by 45° in order to reduce the intensity loss by at most 10%. At least how many polarizing filters are needed and how should they be optimally arranged? **P. 5380.** In a special isotope laboratory, extreme activity ^{137}Cs and ^{60}Co sources are used to validate dosimeters. When the two high-purity radioactive sources were checked, it was found that in a minute approximately the same number of decays occurred in the case of the 68 mg caesium source, and in the case of the cobalt source of unknown mass. *a*) What is the mass of the cobalt source? *b*) After how long and which source will have twice the activity of the other? (Half-life of ^{137}Cs: 30.17 years, half-life of ^{60}Co: 5.27 years.) **P. 5381.** An (insulating) glass container is filled with mercury. A vertical capillary tube of diameter $d = 0.5$ mm is immersed in the mercury as shown in the *figure.* Above the surface of the mercury at a height of $h = 6$ mm, a large, horizontal metal sheet is placed. How much does the mercury level in the capillary tube change if a DC voltage source of $U = 20$ kV is connected across the mercury and the metal sheet?