KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK
INFORMATIKA ROVATTAL BŐVÍTVE
ALAPÍTOTTA: **ARANY DÁNIEL** 1894-ben

72. évfolyam 4. szám Budapest, 2022. április

Megjelenik évente 9 számban, januártól májusig és szeptembertől decemberig havonta 64 oldalon. ÁRA: 1050 Ft

TARTALOMJEGYZÉK

A szerkesztőség címe: 1117 Budapest,
Pázmány Péter sétány 1/C III. emelet 3.405.
Telefon: 372-2850
A lap megrendelhető az Interneten:
`www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.h.shtml`.
Előfizetési díj egy évre: 8800 Ft

E-mail: `szerk@komal.hu`
Internet: `http://www.komal.hu`
This journal can be ordered from
the Editorial office:
Pázmány Péter sétány 1/C III. emelet 3.405.
1117–Budapest, Hungary
telephone: +36 (1) 372-2850
or on the Postal address
H–1518 Budapest 112, P.O.B. 32, Hungary,
or on the Internet:
`www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.e.shtml`.

Mennyi a téglalap területe?

Kivonat

Cikkünkben megmutatjuk, hogy a téglalap területképlete levezethető néhány észszerű feltevésből. Megközelítésünkben a Cauchy-féle függvényegyenlet játszik kulcsszerepet, melynek matematikai és történeti vonatkozásaira szintén kitérünk röviden.

1. Bevezetés

A területfogalom kialakítása már az általános iskolában elkezdődik. Bevezetésként a téglalapot szokás vizsgálni, részben „egyszerűsége” miatt, részben, mert számos alakzat területképlete ebből származtatható. Így mindenki számára magától értetődő tény, hogy a téglalap területe a két merőleges oldal hosszának szorzata. Ám a kérdés valójában nem az, hogy *mennyi* a téglalap területe, hanem hogy *miért* pont ennyi. Az intuíció ugyanis még a területképlet megismerése előtt sugalmaz bizonyos evidenciákat. Elvárjuk, hogy a terület csak az oldalak hosszától függő nemnegatív érték legyen; elvárjuk, hogy ha egy téglalapot bármelyik párhuzamos oldalpárja mentén azonos mértékben és irányban meghosszabbítva újabb téglalappá egészítünk ki, akkor a két rész területének összege egyezzen meg az összterülettel; végezetül elvárjuk, hogy az egységnégyzet területe egységnyi legyen. Mindezeket szabatosan a következő megállapodásokban rögzíthetjük. (A továbbiakban $\mathbb{R}$ a valós, $\mathbb{R}_+$ a nemnegatív valós, $\mathbb{Q}$ a racionális, $\mathbb{Q}_+$ a nemnegatív racionális számok halmazát jelöli.)

1. megállapodás. A terület egy $T:\mathbb{R}_+^2\to\mathbb{R}_+$ függvény.

2. megállapodás. Ha a, a_1, a_2, valamint b, b_1, b_2 adott nemnegatív számok, akkor

$$T(a_1+a_2,b)=T(a_1,b)+T(a_2,b)\quad\text{és}\quad T(a,b_1+b_2)=T(a,b_1)+T(a,b_2).$$

3. megállapodás. $T(1,1)=1$.

Ezekre a továbbiakban rendre *nemnegativitási, additivitási* és *normáltsági feltételként* fogunk hivatkozni. Elsőként azt igazoljuk, hogy e három geometriai tartalmú megállapodás egy és csakis egy algebrai formulát eredményezhet: az általános iskolában megismert területképletet.

A cikk a Bolyai János Kutatási Ösztöndíj és az Innovációs és Technológiai Minisztérium ÚNKP-20-5 kódszámú Új Nemzeti Kiválóság Programjának támogatásának a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Alapból finanszírozott szakmai támogatásával készült.

2. Ennyi a téglalap területe

Tegyük fel, hogy az $A \subseteq \mathbb{R}$ halmaz zárt az összeadásra, azaz bármely két elemével együtt azok összegét is tartalmazza. Azt mondjuk, hogy az $f : A \to \mathbb{R}$ függvény *additív,* ha minden $x, y \in A$ esetén teljesül rá az úgynevezett *Cauchy-féle függvényegyenlet:*

$$f(x+y) = f(x) + f(y). \tag{1}$$

Az egyenlet általános megoldásának leírása nem könnyű feladat. Nyilván az identitás számszorosa, vagyis egy $f(x) = cx$ alakú függvény mindig additív. Sőt, az $A = \mathbb{R}_+$ speciális választás és a nemnegativitási feltétel mellett valamennyi additív függvény csakis ilyen alakú lehet:

Tétel. *Ha $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ additív függvény, akkor minden $x \in \mathbb{R}_+$ esetén $f(x) = f(1)x$.*

Bizonyítás. Elsőként megmutatjuk, hogy f racionálisan homogén, azaz minden $r \in \mathbb{Q}_+$ és minden $x \in \mathbb{R}_+$ esetén $f(rx) = rf(x)$ teljesül. Az (1) egyenletben az $x = y$ helyettesítést alkalmazva kapjuk, hogy $f(2x) = 2f(x)$. Innen teljes indukcióval igazolható, hogy $f(nx) = nf(x)$ teljesül minden n pozitív egész esetén. Legyen most $r = m/n$ alakban adott, ahol m és n pozitív egészek. Az előbbi tulajdonságot kétszer felhasználva,

$$f(rx) = f\left(\frac{m}{n}x\right) = mf\left(\frac{1}{n}x\right) = \frac{m}{n} \cdot nf\left(\frac{1}{n}x\right) = \frac{m}{n}f(x) = rf(x).$$

Másodszor azt igazoljuk, hogy f monoton növekvő. Legyenek $x \leqslant y$ nemnegatív számok. Ekkor $y - x$ is nemnegatív, így az f additivitása és a nemnegativitása miatt

$$f(y) = f\big((y-x)+x\big) = f(y-x) + f(x) \geqslant f(x).$$

A harmadik és egyben utolsó lépésben megmutatjuk, hogy minden $x \in \mathbb{R}_+$ esetén az $f(x)$ és az $f(1)x$ értékek eltérése akármilyen pozitív számnál kisebb. Ez ugyanis pontosan azt jelenti, hogy az eltérés nulla, azaz $f(x) = f(1)x$. Jelölje $[x]$ az x valós szám (alsó) egészrészét. Mivel minden $n \in \mathbb{N}$ és minden $x \in \mathbb{R}_+$ esetén $[nx] \leqslant nx < [nx] + 1$, ezért

$$r_n := \frac{[nx]}{n} \leqslant x < \frac{[nx]}{n} + \frac{1}{n} = r_n + \frac{1}{n}.$$

Azonban f racionálisan homogén és monoton növő, ezért ebből az egyenlőtlenségláncból következik, hogy

$$r_n f(1) = f(r_n) \leqslant f(x) \leqslant f\left(r_n + \frac{1}{n}\right) = \left(r_n + \frac{1}{n}\right) f(1).$$

Ha még fölhasználjuk az $x - \frac{1}{n} \leqslant r_n \leqslant x$ egyenlőtlenséget, akkor itt $f(1) \geqslant 0$ miatt a bal oldal alsó, míg a jobb oldal felső becsléssel folytatható:

$$\left(x - \frac{1}{n}\right) f(1) \leqslant f(x) \leqslant \left(x + \frac{1}{n}\right) f(1).$$

Tehát
$$\left|f(x)-f(1)x\right| \leqslant \frac{f(1)}{n}$$
teljesül minden $n \in \mathbb{N}$ és minden $x \in \mathbb{R}_+$ esetén, és éppen ezt akartuk belátni. □

Rögzített nemnegatív b szám mellett az $a \mapsto T(a,b)$ függvény nemnegatív és additív az első két megállapodás értelmében, így a fenti tétel miatt $T(1,b)a$ alakú. Hasonlóan, a $b \mapsto T(1,b)$ függvény szükségképpen $T(1,1)b$ alakú. Vagyis megállapodásaink *egyértelműen meghatározzák* a téglalap területképletét:
$$T(a,b) = T(1,b)a = T(1,1)ab = ab.$$

A területfogalom megalapozásának most bemutatott útja Legendre munkásságára eredeztethető [5]. Megállapodásai lényegében a mieinkhez hasonlóak, egyetlen apró eltéréssel: nincs feltételezve a terület nemnegativitása. Rövidesen látni fogjuk, hogy e feltétel hiányában az előző tétel érvényét veszti.

3. Kitekintés: a Cauchy-féle függvényegyenlet

Mint említettük, az identitás konstansszorosa, vagyis egy cx alakú függvény additív a valós egyenesen. Az ilyen típusú megoldásokat *reguláris megoldásnak* nevezzük. Mit állíthatunk a nem reguláris additív valós függvényekről? A továbbiakban erre a kérdésre keresünk választ a koordinátageometria segítségével.

A Descartes-féle sík, azaz $\mathbb{R}^2$ rendezett számpárjait hol pontoknak, hol vektoroknak fogjuk tekinteni. Ez ugyanis sohasem okoz majd félreértést, viszont adott esetben biztosítja a választás kényelmét. A szokásos módon két ilyen vektor összege a komponensek összegéből képzett vektor, egy vektor számszorosa pedig az eredeti komponensek számszorosából álló vektor. Egy vektor *normája* alatt a Pitagorasz-tétel szerint számított euklideszi hosszát értjük:
$$\|\mathbf{v}\| := \sqrt{x^2+y^2}, \qquad \text{ahol} \qquad \mathbf{v}=(x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Az így bevezetett norma *pozitív definit, abszolút homogén* és *szubadditív.* Azaz, minden $\mathbf{v},\mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$ és minden $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

- $\|\mathbf{v}\| \geqslant 0$, és egyenlőség pontosan akkor áll, ha $\mathbf{v}$ a nullvektor;
- $\|\lambda\mathbf{v}\| = |\lambda| \cdot \|\mathbf{v}\|$;
- $\|\mathbf{v}+\mathbf{w}\| \leqslant \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$.

Könnyen ellenőrizhető, hogy a norma segítségével a $\mathbf{p}$ középpontú, $\varepsilon > 0$ sugarú nyílt körlap a következő módon adható meg:
$$U(\mathbf{p},\varepsilon) := \left\{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{v}-\mathbf{p}\| < \varepsilon\right\}.$$

Az $U(\mathbf{p},\varepsilon)$ körlemezt szokás a $\mathbf{p}$ pont ε sugarú környezeteként is említeni. Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény *gráfja* alatt az $\left\{\left(x,f(x)\right) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\right\}$ halmazt értjük. Világos, hogy reguláris additív valós függvény gráfja egy origón áthaladó egyenes. Teljesen másként viselkednek a nem reguláris additív függvények:

Tétel. *Ha $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ nem reguláris additív függvény, akkor gráfja mindenütt sűrű a Descartes-féle síkon. Azaz, a sík minden pontjának minden környezete tartalmaz gráfpontot.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ nem reguláris, azaz nem cx alakú. Ekkor léteznek olyan $x_1\neq x_2$ valós számok, hogy az $\big(x_1,f(x_1)\big)$ és az $\big(x_2,f(x_2)\big)$ pontok két különböző origón átmenő egyenest határoznak meg. Másképpen fogalmazva, a

$$\mathbf{v}_1=\big(x_1,f(x_1)\big)\quad\text{és}\quad\mathbf{v}_2=\big(x_2,f(x_2)\big)$$

vektorok egy nem elfajuló paralelogrammát feszítenek ki a Descartes-féle síkon. Legyen most a $\mathbf{p}\in\mathbb{R}^2$ pont és az $\varepsilon>0$ sugár tetszőlegesen adott. Azt kell megmutatnunk, hogy az $U(\mathbf{p},\varepsilon)$ nyílt körlemez tartalmaz f gráfjáról valamilyen $\mathbf{q}$ pontot. Mivel a $\mathbf{v}_1$ és $\mathbf{v}_2$ vektorok nem párhuzamosak, ezért a sík minden pontja előállítható a segítségükkel. Azaz, léteznek olyan α_1 és α_2 valós számok, hogy

$$\mathbf{p}=\alpha_1\mathbf{v}_1+\alpha_2\mathbf{v}_2.$$

Válasszunk olyan r_1 és r_2 racionális számokat, amelyek elég közel vannak az α_1 és α_2 együtthatókhoz az alábbi értelemben:

$$|\alpha_1-r_1|<\frac{\varepsilon}{\|\mathbf{v}_1\|+\|\mathbf{v}_2\|};\qquad|\alpha_2-r_2|<\frac{\varepsilon}{\|\mathbf{v}_1\|+\|\mathbf{v}_2\|}.$$

Ilyen r_1 és r_2 racionális szám létezését az előző tétel bizonyításának harmadik lépésében használt módszer biztosítja. Tekintsük a $\mathbf{q}=r_1\mathbf{v}_1+r_2\mathbf{v}_2$ pontot. A norma abszolút homogenitása és szubadditivitása, valamint r_1 és r_2 választása miatt

$$\begin{aligned}\|\mathbf{p}-\mathbf{q}\|&=\big\|(\alpha_1\mathbf{v}_1+\alpha_2\mathbf{v}_2)-(r_1\mathbf{v}_1+r_2\mathbf{v}_2)\big\|=\big\|(\alpha_1-r_1)\mathbf{v}_1+(\alpha_2-r_2)\mathbf{v}_2\big\|\\&\leqslant\big\|(\alpha_1-r_1)\mathbf{v}_1\big\|+\big\|(\alpha_2-r_2)\mathbf{v}_2\big\|=|\alpha_1-r_1|\cdot\|\mathbf{v}_1\|+|\alpha_2-r_2|\cdot\|\mathbf{v}_2\|\\&<\frac{\varepsilon}{\|\mathbf{v}_1\|+\|\mathbf{v}_2\|}\cdot\|\mathbf{v}_1\|+\frac{\varepsilon}{\|\mathbf{v}_1\|+\|\mathbf{v}_2\|}\cdot\|\mathbf{v}_2\|=\varepsilon.\end{aligned}$$

Ez azt mutatja, hogy $\mathbf{q}\in U(\mathbf{p},\varepsilon)$. Másrészt, az előző tétel bizonyításában látottak alapján megmutatható, hogy f racionálisan homogén. Ezt és f additivitását szem előtt tartva,

$$\begin{aligned}\mathbf{q}=r_1\mathbf{v}_1+r_2\mathbf{v}_2&=\big(r_1x_1+r_2x_2,r_1f(x_1)+r_2f(x_2)\big)\\&=\big(r_1x_1+r_2x_2,f(r_1x_1)+f(r_2x_2)\big)\\&=\big(r_1x_1+r_2x_2,f(r_1x_1+r_2x_2)\big).\end{aligned}$$

Ha tehát $x=r_1x_1+r_2x_2$, akkor $\mathbf{q}=\big(x,f(x)\big)$ alakú. Vagyis $\mathbf{q}$ egy megfelelő gráfpont az $U(\mathbf{p},\varepsilon)$ nyílt körlemezben. $\square$

Továbbra is kérdés persze, hogy egyáltalán létezik-e nem reguláris additív valós függvény. Gondoljuk csak el, mi a szemléletes tartalma ennek a tételnek: egy mindenütt sűrű függvénygráfot az egész síkot kitöltő szürke ködhöz lehet leginkább hasonlítani. Nem véletlenül akarták sokáig makacsul azt igazolni, hogy minden additív $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ reguláris. Ez a törekvés csak akkor bizonyult sikeresnek, ha valamilyen többletfeltételt szabtak a keresett függvényre. A teljesség igénye nélkül megemlítjük, hogy az (1) egyenletet elsőként a névadó Cauchy tanulmányozta és oldotta meg a folytonosság feltételezése mellett [2]. Darboux vette észre, hogy a nemnegativitási feltétel szintén reguláris megoldásokra vezet [3].

A probléma végső megoldása sokáig váratott magára. A fordulatokban gazdag történeti és matematikai részletekkel kapcsolatban ajánljuk Aczél könyvét [1]. Most csupán arra utalunk, hogy végül Hilbert tanítványa, Hamel oldotta meg a Cauchy-egyenletet miden egyéb segédfeltétel nélkül. Mindenki legnagyobb meglepetésére eredményéből kiderült, hogy a megoldások között *léteznek* nem reguláris megoldások. Egy ilyen megoldás birtokában lehetőségünk nyílna a téglalap területének másfajta mérésére is. Kérdés persze, hogy mire megyünk egy olyan területmértékkel, amely lehet negatív, és ráadásul egy mindenütt sűrű függvénygráffal áll kapcsolatban ...

Hivatkozások

[1] Aczél J.: *Lectures on functional equations and their applications,* Mathematics in Science and Engineering, Vol. 19, Academic Press (New York–London, 1966).

[2] Cauchy, A. L.: *Cours d'analyse de l'Ecole Polytechnic, Analyse algébrique,* V., Oeuvres (2)3 (Paris, 1897).

[3] Darboux, G.: *Sur le théorème fundamental de la géométrie projective,* Math. Ann., **17** (1880), 55–61.

[4] Hamel, G.: *Eine Basis aller Zahlen und die unstetige Lösungen der Funktionalgleichung* $f(x+y) = f(x) + f(y)$, Math. Ann., **60** (1905), 459–462.

[5] Legendre, A. M.: *Eléments de géométrie,* Note II. (Paris, 1791).

Bessenyei Mihály és **Maksa Gyula**
Debreceni Egyetem, Matematikai Intézet
H-4010 Debrecen, Pf. 12
besse@science.unideb.hu
b9wgla@unideb.hu

Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire

I. rész

1. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán:

a) $a^2 - 5a + 4 \leqslant 0,$ (*3 pont*)

b) $\log_{\frac{1}{2}}(5^{x+1} - 25^x) \leqslant -2.$ (*8 pont*)

2. A bolthálózat raktárában 14 500 doboz üdítőt tárolnak. A rövid szavatossági idő miatt a tulajdonos szeretné a teljes készletet 29 napon belül eladni. Az első napon 150 darabot sikerült értékesíteni.

a) Legalább mennyivel kell naponta növelni az eladott üdítők számát, hogy a terv sikerüljön? (*3 pont*)

A bolthálózat növekedése miatt szükségessé vált egy új raktárépület megvásárlása, amelyet a tulajdonos hitel felvételével kíván megvalósítani. A banktól kapott 30 millió forint kölcsönt 5 éven át 5 egyenlő részletben kell visszafizetnie. A 2021. januárjában felvett kölcsönre a bank minden év végén 3,5%-os kamatot számít fel. A törlesztést a tulajdonos a következő év januárjában kezdi meg.

b) Mekkorák az egyes törlesztőrészletek ezer forintra kerekítve? (*5 pont*)

A bolt gazdasági vezetője azt tanácsolta, hogy évente maximum 4 millió forintot költsön a tulajdonos az új raktárépületre felvett kölcsön törlesztésére, az előzővel megegyező banki kamat mellett.

c) Hány év alatt tudja így a tulajdonos visszafizetni a kölcsönt? (*5 pont*)

3. Legyen az U alaphalmaz az első n pozitív egész szám, amelynek három részhalmaza:

A : 6-tal osztható számok,

B : 15 többszörösei,

C : olyan egészek, amelyeknek osztója a 20.

a) Mennyi lehet n legkisebb és legnagyobb értéke, ha az $A \cap B \cap C$ halmaz elemszáma 3? (*3 pont*)

b) Hány olyan szám található 1 és 200 között, amelyek A, B és C halmazok közül pontosan kettőnek elemei? (*5 pont*)

c) Határozzuk meg a következő állítások logikai értékét. Válaszainkat minden esetben indokoljuk.

(*i*) A $B \setminus (A \cup C)$ halmaz elemeinek utolsó számjegye 5 vagy 6.

(*ii*) $B \setminus (A \cup C) = B \setminus A$.

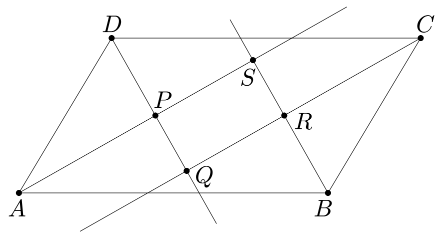
(*iii*) A $C \setminus (A \cup B)$ halmaz elemeinek szorzata 10 darab 0-ra végződik $n = 200$ esetén. (*6 pont*)

4. Tekintsük az $ABCD$ paralelogrammát, amelynek AB oldala 16 cm-rel hosszabb, mint az AD oldala, valamint hegyesszöge $DAB\sphericalangle = \alpha$.

a) Igazoljuk, hogy a paralelogramma szögfelezői által meghatározott $PQRS$ négyszög téglalap. (*3 pont*)

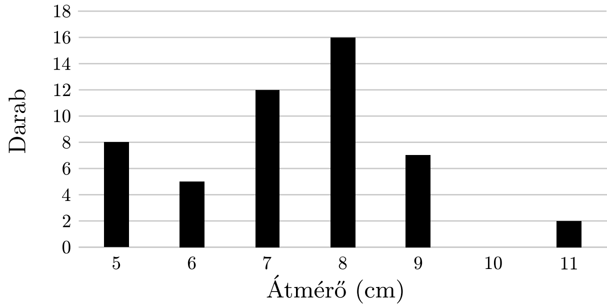
b) Igazoljuk, hogy a $PQRS$ téglalap területe cm^2-ben mérve $T = 128 \cdot \sin\alpha$. (*7 pont*)

c) Mekkora a $PQRS$ téglalap átlójának hossza? (*3 pont*)



II. rész

5. Almaszüret után véletlenszerűen kiválasztottak 50 darab almát, megmérték az átmérőjüket, ezt mutatja az alábbi *oszlopdiagram.*



a) Mennyi az almák átmérőjének átlaga és szórása? (*4 pont*)

A következő évben újfajta tápoldatot is használtak az almafák öntözésére. Az újabb almaszüret után újra választottak 50 darabot, amelyeknek megmérték az átmérőjét. Az előző évi mintával összehasonlítva azt tapasztalták, hogy a 8 cm-nél kisebb gyümölcsök átmérője 24%-kal nőtt, ha méretüket egész cm-re kerekítjük.

b) Mekkora lesz az új minta mediánja, illetve a minta mediántól való átlagos abszolút eltérése? (*5 pont*)

A szüreten szedett gyümölcsből almalevet préselnek. A leszedett almát meghámozzák, kiszedik a magját, ezáltal 12%-ot veszít a tömegéből. A préseléskor 8 kg pucolt almából átlagosan 5 liter levet készítenek.

c) Hány kg almát szedtek a szüret alkalmával, ha abból összesen 3 000 liter almalé készült? (*3 pont*)

Az almát 200 Ft/kg egységáron tudja eladni a gazda. Az almalé árát úgy szeretné meghatározni, hogy azzal 20%-kal több bevétele legyen.

d) Mennyibe kerüljön 1 liter almalé? (A választ egész forintra kerekítve adjuk meg.) (*4 pont*)

6. A színház szervezési osztályán 196 bérletet adtak el az aktuális évadra. A bérletes előadások előtt – a bérlettulajdonosok elfoglaltsága miatt – átlagosan 5% bérletlemondás történik. A színház pénztárában az ilyen esetekre úgynevezett lépcsőjegyeket adnak el, amelyek nem helyre szólnak, hanem a bérletlemondás miatt megüresedett helyeket tölthetik fel a nézők. A 12. évfolyam tanulói 7 db lépcsőjegyet vásároltak.

Simon azt mondja: „Mind a 7 diáknak jut ülőhely a színházban."

a) Fogalmazzuk meg Simon állításának megfordítását. (*2 pont*)

Tamás azt mondja: „Legalább 65% a valószínűsége, hogy mindenkinek jut ülőhely a színházban."

b) Igazoljuk Tamás állítását. (*6 pont*)

A színházban a szék aljára barna, sárga és lila színű borítékokat ragasztottak 4 : 5 : 5 arányban, amelyekben vásárlási kedvezményre jogosító kuponok találhatóak. A barna borítékok felében 10%-os, a többiben 15%-os kupon található. A sárga színűek harmadában 15%-os, a többiben 20%-os kupon van. A lila borítékokba egységesen 15%-os kupont tettek. Réka 15%-os kedvezményt talált a saját borítékjában.

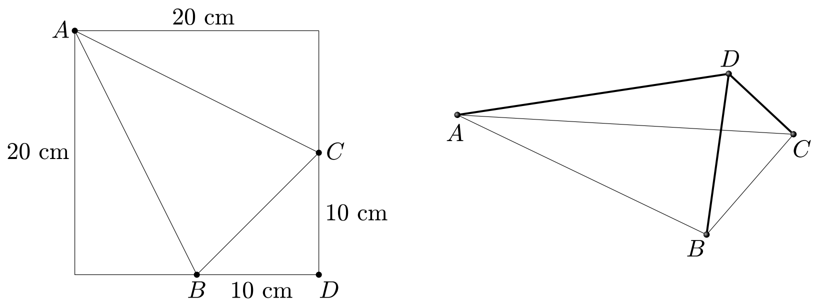
c) Mekkora a valószínűsége, hogy Réka sárga színű borítékot kapott? (*8 pont*)

7. *a*) Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:

$$2\sin x = |x-1| + |x-3|. \qquad (7\ pont)$$

b) Mekkora az $f(x) = 2\sin x$, $g(x) = |x-1| + |x-3|$ görbék és az y tengely által határolt korlátos síkidom területének pontos értéke? (*9 pont*)

8. A 20 cm oldalhosszúságú négyzet alakú fehér lapból a kezdő origami szakkörön tetraédert hajtogatnak a gyerekek úgy, hogy az *ábrán* jelölt AC, AB és BC szakaszok mentén hajtják meg a lapot.



a) Mekkora a tetraéder legnagyobb és legkisebb területű lapjának hajlásszöge a hajtogatás után? (*7 pont*)

b) Mekkora a tetraéder térfogata? (*3 pont*)

Az elkészített tetraédereket a gyerekek megerősítik az élek hosszára ragasztott színes szívószálak segítségével. Majd a legnagyobb területű lapjára állítva leteszik egy asztalra egyformán igazítva a testeket.

c) Hány különböző megerősített tetraéder készíthető piros, zöld, sárga és kék színű szívószállal, ha az egy csúcsban találkozó szívószálak nem lehetnek egyforma színűek? (*6 pont*)

9. A koordinátarendszerben megrajzoltuk a $p:\ y = \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{10}{3}$ egyenletű parabolát.

a) Írjuk fel a parabola és az y-tengely metszéspontjában a parabolához húzott érintő egyenletét. (*6 pont*)

Fizika tanulmányok alapján ismert, hogy a parabolatükör a tengelyével párhuzamos fénysugarakat a fókuszponton keresztül veri vissza.

b) A parabola belsejében fénysugár érkezik az y-tengely mentén. Mi a visszaverődő fénysugár egyenesének egyenlete? (*7 pont*)

Fizikában beesési merőlegesnek hívják a beesési pontban a parabola érintőjére állított merőlegest.

c) Mekkora az y-tengely mentén beeső fénysugár és a beesési merőleges által bezárt szög? (*3 pont*)

Jócsik Csilla
Győr

Megoldásvázlatok a 2022/3. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához

I. rész

1. *a*) *Oldjuk meg a* $2^{x+1}+3=2^{1-x}$ *egyenletet a valós számok halmazán.*

A $H=\{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$ *alaphalmaz* A, B, C *részhalmazairól az alábbiakat ismerjük:*

$$B\subset A;\quad \overline{A\cup C}=\{0;8\};\quad A\cap C=\{3;4;7\};\quad \overline{C}=\{0;1;2;8;9\};\quad A\setminus B=\{2;7;9\}.$$

b) *Elemeinek felsorolásával adjuk meg az* A, B, C *halmazokat.* (*11 pont*)

Megoldás.

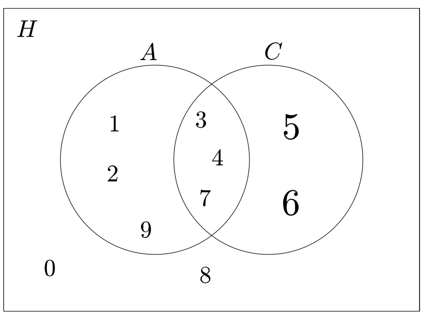
a)
$$2\cdot 2^x+3=\frac{2}{2^x};\quad 2\cdot\left(2^x\right)^2+3\cdot 2^x-2=0;$$

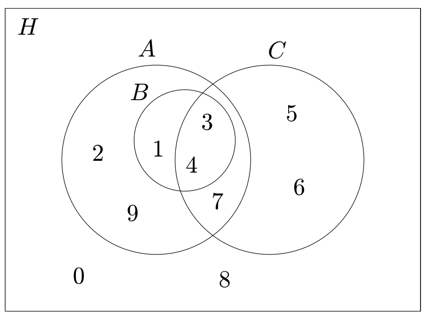
$$\left(2^x\right)_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{4}=\frac{-3\pm 5}{4};\quad 2^x\neq -2;\quad 2^x=\frac{1}{2};\quad 2^x=2^{-1}\Rightarrow x=-1$$

(a 2^x függvény szigorúan monoton növő).

Ellenőrzés: $2^0+3=2^{1-(-1)}$; $1+3=2^2$; $4=4$. (Az ellenőrzés helyettesíthető az ekvivalens átalakításokra való hivatkozással.)

b) Mivel $B\subset A$, vizsgáljuk először az A, C, H halmazok viszonyát. Ez a második, harmadik és negyedik információ alapján az első *ábráról* leolvasható.





Az 5 és a 6 csak a $C \setminus A$ halmazban lehet. A továbbiakban a B halmazt úgy kell elhelyezni az A-n belül, hogy az utolsó feltétel is teljesüljön. A második *ábrán* láthatjuk a megfelelő elhelyezést, így a halmazok:

$$A = \{1; 2; 3; 4; 7; 9\},$$
$$B = \{1; 3; 4\},$$
$$C = \{3; 4; 5; 6; 7\}.$$

A H halmaz elemeinek elrendezése a feltételek alapján egyértelmű, ezért a feladatnak egyéb megoldása nincs.

2. *Egy* 10 cm *oldalú négyzet minden oldalára kifelé egyenlő szárú háromszögeket rajzoltunk, melyeknek szárai* 13 cm*-esek, így egy csillagszerű alakzatot kaptunk.*

a) Mekkora a csillag területe?

Felhajtogatva az egyenlő szárú háromszögeket, egy négyzet alapú egyenes gúla keletkezett.

b) Mekkora a gúlába írható gömb sugara? (*13 pont*)

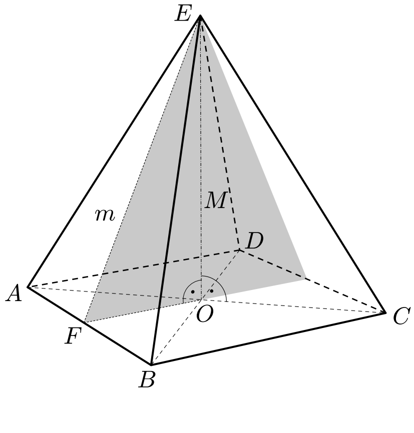
Megoldás. *a*) Az egyenlő szárú háromszög magassága m; $5^2 + m^2 = 13^2 \Rightarrow \Rightarrow m = 12$ cm;

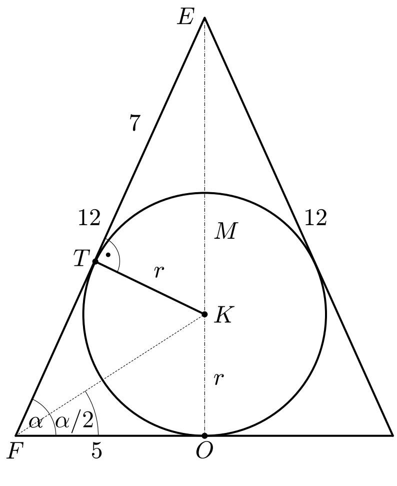
$$T = 10^2 + 4 \cdot \frac{10 \cdot 12}{2} = 340 \text{ cm}^2.$$

b) A gúla M magassága egyik befogója az FOE derékszögű háromszögnek: $5^2 + M^2 = 12^2 \Rightarrow M = \sqrt{119}$ (cm). Másképpen:

$$OC = 5\sqrt{2}; \quad \left(5\sqrt{2}\right)^2 + M^2 = 13^2; \quad M^2 = 169 - 50 \Rightarrow M = \sqrt{119} \text{ (cm)}.$$

Készítsünk egy síkmetszetet a testről; a metszősík átmegy az E, O, F pontokon. Az érintőgömb középpontja szimmetria okok miatt rajta van az OE egyenesen, ezért a metszősík a gömböt egy főkörében metszi, ez a kör érintőköre lesz a síkmetszet háromszögnek.





Alkalmazhatjuk a jól ismert $r=\frac{T}{s}$ képletet, ahol T a háromszög területe, r a beírt kör sugara, s pedig a félkerület. Itt

$$T=\frac{10\cdot\sqrt{119}}{2},\quad s=\frac{10+12+12}{2}=17,\quad \text{tehát}\quad r=\frac{5\sqrt{119}}{17}\approx 3{,}21\text{ cm}.$$

Egy másik lehetőség: az $ETK\triangle\sim EOF\triangle$ (szögeik páronként megegyeznek) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow\frac{r}{7}=\frac{5}{\sqrt{119}}\Rightarrow r=\frac{35}{\sqrt{119}}=\frac{35\sqrt{119}}{119}=\frac{5\sqrt{119}}{17}.$$

3. *András és Balázs „zsíroznak". A „zsírozás" a 32 lapos magyar kártya egyik egyszerű játéka, amelynek az a lényege, hogy a végén az „ütések" során megszerzett lapok „zsír" tartalma alapján dől el, ki nyerte a játékot.*

A magyar kártyában négy „szín": piros, zöld, makk, tök; mindegyik színen belül ász, király, felső, alsó, tízes, kilences, nyolcas, hetes található. „Zsírnak" számít az ász és a tízes, az nyer, akinek több a „zsírja". (Ha mindketten 4–4 „zsírt" szereztek, akkor az nyert, aki utoljára „ütött"; döntetlen nincs.)

Az első leosztásnál egyszerre négy-négy lapot kapnak a játékosok.

a) Mennyi a valószínűsége annak, hogy András első leosztáskor kapott négy lapja között legalább egy „zsír", és legalább egy hetes található?

Azért, hogy eldöntsék, ki kezdi a játékot, sorsolnak úgy, hogy a megkevert csomagból felváltva visszatevés nélkül leemelnek egy-egy lapot. Aki az első hetest húzza, az kapja először a négy lapot, és kezdi meg a játékot. (Ha pl. András húz először hetest, akkor Balázs kever, és oszt előbb Andrásnak négy lapot, majd saját magának négyet; András kezdi a játékot. Később ez a keverés, osztás- kezdés felváltva történik.)

András kezdte a sorsolást, és Balázsnak a második húzására sikerült hetest húznia.

b) Mennyi ennek a valószínűsége? (*13 pont*)

Megoldás. A csomagban 8 „zsír", 4 hetes és 20 egyéb lap van. Az esemény szempontjából kedvező eseteket a könnyebb áttekinthetőség kedvéért a *táblázatban* foglaltuk össze.

Az esemény valószínűsége:

$$P(A)=\frac{9704}{\binom{32}{4}}=\frac{9704}{35960}=\frac{1213}{4495}\approx 0{,}2699.$$

Megkaphatjuk az eredményt úgy is, hogy a komplementer esemény valószínűségét számítjuk ki először. A komplementer esemény az, ha a négy lap között nincs „zsír", vagy nincs hetes. Ha kivesszük a „zsírokat", 24; ha a heteseket, 28; ha mindkettőt, 20 lap marad. A komplementer esemény szempontjából kedvező esetek száma:

$$\binom{24}{4}+\binom{28}{4}-\binom{20}{4}=26\,256,\quad \text{így}\quad P(\overline{A})=\frac{26\,256}{35\,960},$$

„Zsír” (8)	Hetes (4)	Egyéb (20)	Hányféleképpen?
1	1	2	$\binom{8}{1}\binom{4}{1}\binom{20}{2}=6080$
1	2	1	$\binom{8}{1}\binom{4}{2}\binom{20}{1}=960$
1	3	0	$\binom{8}{1}\binom{4}{3}=32$
2	1	1	$\binom{8}{2}\binom{4}{1}\binom{20}{1}=2240$
2	2	0	$\binom{8}{2}\binom{4}{2}=168$
3	1	0	$\binom{8}{3}\binom{4}{1}=224$
		Összesen:	9704

tehát

$$P(A)=1-\frac{26\,256}{35\,960}=\frac{9704}{35960}\approx 0{,}2699.$$

b) András húzott először, nem lett hetes; Balázs húzott, nem hetes; András húzott, nem hetes; Balázs húzott, hetes.

$$P(B)=\frac{28}{32}\cdot\frac{27}{31}\cdot\frac{26}{30}\cdot\frac{4}{29}=\frac{78\,624}{863\,040}=\frac{819}{8990}\approx 0{,}0911.$$

4. *Vegyük az alábbi kijelentéseket:*

A) *Ha egy mértani sorozatnak van véges határértéke, akkor hányadosa egynél kisebb.*

B) *Ha $f(x)=x+1$, és $g\circ f=x^2+2x+1$, akkor $g(x)=x^2$.*
($g\circ f=g\big(f(x)\big)$, a g függvény az f függvénynek közvetett függvénye.)

C) *Ha két sorozat összege és szorzata konvergens, akkor a sorozatok külön-külön is konvergensek.*

a) *Állapítsuk meg a kijelentések logikai értékét (igaz, hamis). Állításainkat igazoljuk.*

D) *Ha egy n csúcsú egyszerű gráf minden csúcsa legalább $\left[\frac{n}{2}\right]$ fokú, akkor a gráf összefüggő. ($\left[\frac{n}{2}\right]$ az $\frac{n}{2}$ egész részét jelenti.)*

b) *Fogalmazzuk meg a D) állítás megfordítását, majd döntsük el, hogy ez igaz, vagy hamis. Megállapításunkat indokoljuk.* *(14 pont)*

Megoldás. *a*) *A*) Hamis. A konstans sorozat tekinthető egy $q=1$ hányadosú mértani sorozatnak, amely konvergens, azaz van olyan véges határértékkel rendelkező mértani sorozat, amelynek hányadosa nem kisebb 1-nél.

B) Igaz. $g\circ f=g\big(f(x)\big)=(x+1)^2=x^2+2x+1$.

C) Hamis. Ellenpéldák:

$$a_n=\left|\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right|,\quad b_n=\left|\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right|\quad (n\in\mathbb{Z}^+);$$

vagy

$$a_n = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + n\cdot\frac{\pi}{2}\right), \quad b_n = \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4} + n\cdot\frac{\pi}{2}\right) \quad (n\in\mathbb{Z}^+);$$

vagy $a_n = (-1)^n$, $b_n = (-1)^{n+1}$; vagy

$$a_n = \begin{cases} 2022, & \text{ha } n \text{ pozitív páratlan} \\ 0, & \text{ha } n \text{ pozitív páros} \end{cases} \text{ szám,}$$

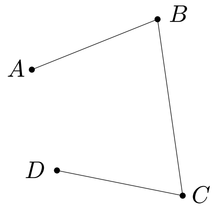
$$b_n = \begin{cases} 0, & \text{ha } n \text{ pozitív páratlan} \\ 2022, & \text{ha } n \text{ pozitív páros} \end{cases} \text{ szám;} \qquad \text{stb.}$$

b) A *D*) állítás megfordítása:

Ha egy n csúcsú egyszerű gráf összefüggő, akkor minden csúcsa legalább $\left[\frac{n}{2}\right]$ fokú.

Az állítás *hamis.*

Pl.: az *ábrán* összefüggő négy csúcsú gráf van, amelyben az A és D csúcsok foka 1, azaz fokuk nincs legalább 2.



Megjegyzés. A *D*) állítás igaz, ennek bizonyítása azonban most nem feladatunk.

II. rész

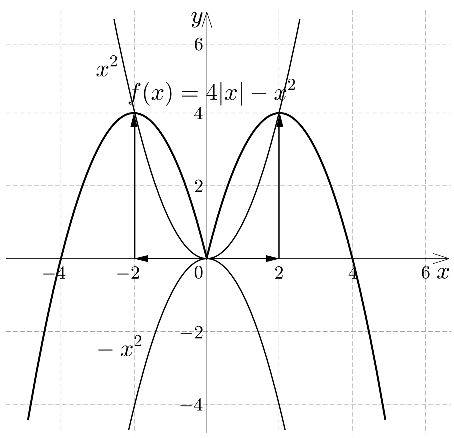
5. *a*) *Függvény-transzformációk felhasználásával ábrázoljuk az $f(x) = 4|x| - x^2$ függvényt a $[-5;5]$ intervallumon.*

A H halmaz elemeit az $f(x)$ függvény zérushelyei és lokális maximumhelyei alkotják. Ismétlés nélkül, véletlenszerűen kiválasztunk három elemet H-ból.

b) *Mennyi a valószínűsége annak, hogy a három elem összege osztható 9-cel?*

Egy korlátos síkidomot a $g(x) = 4x - x^2$, $x\in\mathbb{R}$ függvény grafikonja és az x tengely zár közre.

c) *Számítsuk ki a síkidom területét.* (*16 pont*)



Megoldás.

a)

$$f(x) = \begin{cases} -4x - x^2 = -(x+2)^2 + 4, \\ \qquad \text{ha } x\in[-5;0), \\ 4x - x^2 = -(x-2)^2 + 4, \\ \qquad \text{ha } x\in[0;5]. \end{cases}$$

Innen leolvashatók a transzformációs lépések: először tükrözzük az x^2 függvény grafikonját (a normálparabolát) az x tengelyre, majd eltoljuk $x<0$ esetén a $(-2;4)$, $x\geqslant 0$ esetén pedig a $(2;4)$ vektorral.

b) A zérushelyek: -4, 0, 4; ellenőrzés behelyettesítéssel, vagy a hiányos másodfokú egyenletek megoldásával. A lokális maximumhelyek: -2, 2.

Indoklás vagy elemi úton: akkor kapjuk a legnagyobb értéket, ha 4-ből a lehető legkevesebbet veszünk el, ez pedig akkor következik be, ha a zárójelben a nulla áll;
vagy: a zérushelyek számtani közepe;
vagy: differenciálszámítással.

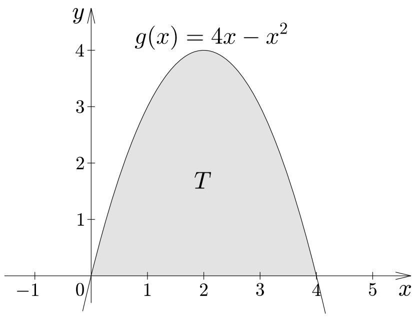
Tehát $H=\{-4;-2;0;2;4\}$. A kiválasztott három szám összege legalább -6 és legfeljebb 6, vagyis akkor lesz 9-cel osztható, ha az összeg 0. Ez két esetben fordulhat elő, ha a -2, 0, 2, vagy a -4, 0, 4 számokat választottuk ki. Az összes lehetőség $\binom{5}{3}=10$, így a keresett valószínűség:

$$P(A)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}=0{,}2.$$

c) Látható, hogy a $g(x)$ függvény megegyezik az $f(x)$ függvénnyel, ha $x\geqslant 0$, ezért a síkidom területe:

$$T=\int_0^4(4x-x^2)\,\mathrm{d}x=\left[4\cdot\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^4=$$

$$=2\cdot 4^2-\frac{4^3}{3}=\frac{32}{3}.$$



Egy másik lehetőség, ha használjuk a függvénytáblázatot (Nemzeti Tankönyvkiadó, raktári szám: 16129/1, 60. oldal), ahol közlik a parabolaszelet területét, amely alkalmazható ebben az esetben:

$$T=\frac{2}{3}\cdot 4\cdot 4=\frac{32}{3}.$$

6. *Egy vitorlázórepülő pilóta teljesítményrepülést tervez a következőképpen: Szombathelyről indul, délkelet felé repül, majd Kaposvár környékén irányt vált É-ÉK felé. Mikor Székesfehérvár légterét elérte, nyugatra tart, így érkezik vissza a kiinduló repülőtérre. (É-ÉK az északi és északkeleti irány szögfelezőjébe mutató irány.)*

Az $1:450\,000$*-es méretarányú térképen a Kaposvár-Székesfehérvár távolság* 22 cm. *(Az* $1:450\,000$*-es méretarány azt jelenti, hogy a térképen mért távolság* $450\,000$*-szerese van a valóságban a két objektum között.)*

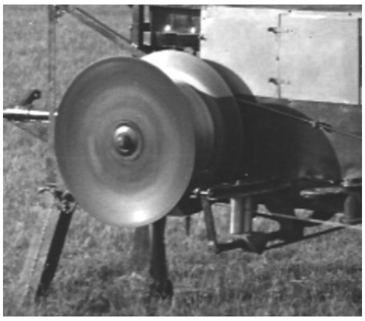
a) *Mekkora a tervezett távrepülés hossza légvonalban? A végeredményt* 10 km*-es pontosságúra kerekítve* km*-ben adjuk meg.*

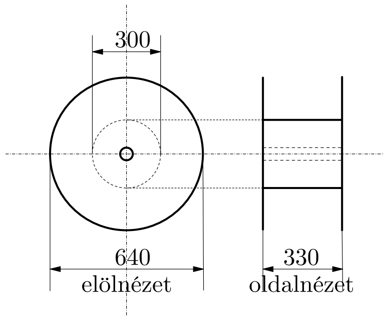
A repülőgép hagyományos magasságmérője a p *légköri nyomásból határozza meg a tengerszint feletti magasságot a* $p=p_0\cdot 2^{-\frac{h}{5500}}$ *képlet alapján, ahol* p_0 *a tengerszinten mért nyomást,* h *pedig a tengerszint feletti magasságot jelenti méter mértékegységben megadva.*

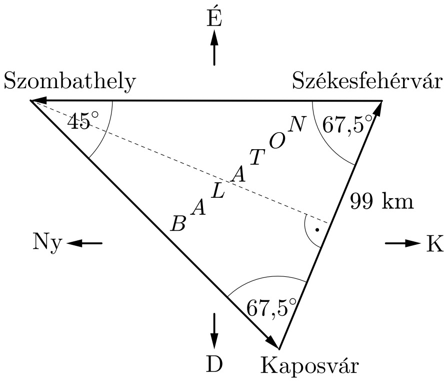
b) Milyen magasan van a repülőgép, ha $p_0 = 103$ kPa*,* $p = 88$ kPa*?*

A vitorlázó repülőgépek levegőbe emelésének leggyakrabban alkalmazott módja a csörlővel vontatás. Ez úgy történik, hogy a csörlőaggregátor egy kötéldobra rétegenként szorosan feltekercseli a drótkötelet, amelynek végén a vitorlázó repülőgép van. A mellékelt ábrán *a kötéldob legfontosabb méreteit milliméter mértékegységben tüntettük fel. A drótkötél átmérője* 6 mm.

c) Legfeljebb milyen hosszú drótkötelet lehet feltekerni erre a dobra? (*16 pont*)







Megoldás. *a*) A térkép méretarányából és a térképen mért távolságból az első és második fordulópont távolsága (1 cm = 4,5 km) $22 \cdot 4{,}5$ km = 99 km; a közölt irányokból egy egyenlő szárú háromszög adódik.

A szár legyen x, ekkor

$$\cos 67{,}5^\circ = \frac{49{,}5}{x},$$

ahonnan $x = 129{,}3$ km.

(Vagy másképpen: $\frac{x}{99} = \frac{\sin 67{,}5^\circ}{\sin 45^\circ} \Rightarrow x = 129{,}3$.)

A teljes táv $2x + 99 = 357{,}6$ km, kerekítve 360 km.

b) Behelyettesítve az adatokat, a $88 = 103 \cdot 2^{-\frac{h}{5500}}$ egyenletet kell megoldani.

$$\frac{88}{103} = 2^{-\frac{h}{5500}}; \quad \lg\frac{88}{103} = \lg 2^{-\frac{h}{5500}}; \quad \lg\frac{88}{103} = -\frac{h}{5500}\lg 2; \quad h = -5500\frac{\lg\frac{88}{103}}{\lg 2},$$

$h = 1249{,}9 \approx 1250$ m.

c) Az első hurok hossza egy 300 mm átmérőjű kör kerülete (300π), ilyen hurokból (ha a lehető legszorosabban tekercselik) $\frac{330}{6} = 55$ fér el az első rétegben. A rétegenkénti hurkok száma a továbbiakban is 55 lesz, de a rétegek átmérője 12 mm-enként növekszik egészen addig, amíg el nem éri a 640 mm-t.

A rétegek átmérői tehát egy olyan számtani sorozat elemeit alkotják, amelynek első eleme 300 (mm), az utolsó pedig nem nagyobb 640-nél.

$$300+(n-1)\cdot 12\leqslant 640 \Rightarrow n\leqslant \frac{88}{3}\Rightarrow n\leqslant 29,$$

a kötéldobra legfeljebb 29 réteg drótkötél fér fel.

A legnagyobb hurok átmérője: $d_{29}=300+28\cdot 12=636$ (mm), így összesen legfeljebb

$$S_{29}=\frac{29(300+636)}{2}\cdot\pi\cdot 55=234\,5073{,}252\ (\mathrm{mm})\approx 2{,}3\ \mathrm{km}$$

hosszú kötél fér fel a dobra.

Megjegyzés. A gyakorlatban a legnagyobb réteg átmérője – azért, hogy véletlenül se tekeredjen le a kötél a dobról – 8-10 cm-rel kevesebb lehetséges legnagyobb átmérőnél (640 mm), valamint a tekercselés szorossága, a repülőtér mérete, a drótkötél súlya miatt egy ekkora dobra kb. 1,1–1,4 km kötelet szoktak feltekerni.

7. *Egy trapéz rövidebbik alapja* 1*, egy másik oldala* 7 *egység hosszú. A trapéz oldalainak hosszát megfelelő sorrendbe rakva egy számtani sorozat szomszédos elemeit kapjuk.*

a) Mekkora a trapéz nagyobbik alapja, mekkorák a szárak?

Az alábbi adatsokaságban néhány trapéz oldalhosszának mérőszámát soroltuk fel véletlenszerűen: 1, 3, 5, 7, 1, 4, 7, 10, 1, 7, 13, 19, 1, 6, 12, 15.

b) Számítsuk ki az adatok átlagát, szórását, határozzuk meg a móduszt és a mediánt.

Az egy síkban levő 1, 3, 7, 5 *egység hosszú szakaszokat ebben a sorrendben csuklósan rögzítettük egymáshoz, majd addig mozgattuk, míg egy húrnégyszöget sikerült kialakítani.*

c) Mekkora szöget zár be egymással ekkor az 5 *és* 7 *egység hosszú szakasz?*

(*16 pont*)

Megoldás. *a*) Rakjuk növekvő sorrendbe a számokat; a legkisebb az 1 lesz, egyébként negatív szám is szerepelne a sorozat elemei között, ami oldal mérőszáma nem lehet.

Ha a 7 a sorozat második eleme, akkor a továbbiak 13, illetve 19; ha a harmadik eleme, akkor a sorozat elemei: 1, 4, 7, 10; ha a negyedik, akkor pedig: 1, 3, 5, 7.

A háromszög-egyenlőtlenséget figyelembe véve mindhárom esetben akkor kapunk ezekből az adatokból trapézt, ha a nagyobbik alap a sorozat legnagyobb elemével egyenlő, a két szár pedig a két középső értékkel egyezik meg. A megoldások tehát:
alapok: 1, 19; szárak: 7, 13, vagy
alapok: 1, 10; szárak: 4, 7, vagy
alapok: 1, 7; szárak: 3, 5.

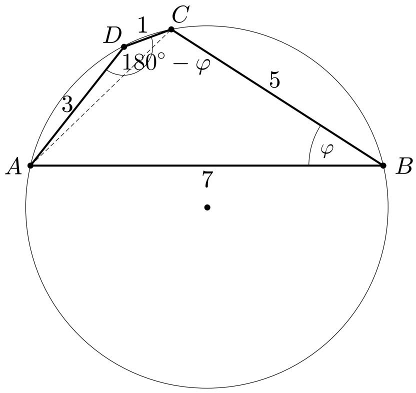
Megjegyzés. Mindegyik trapéz egyúttal érintőnégyszög is, mert a szemközti oldalak összege egyenlő.

b) Az adatokat nemcsökkenő sorrendbe rakva: 1, 1, 1, 1, 3, 4, 5, **6**, **7**, 7, 7, 10, 12, 13, 15, 19 leolvasható, hogy a módusz 1, a medián 6,5.

Az átlag: $\frac{112}{16} = 7$, a szórás:

$$\sqrt{\frac{4(7-1)^2+(7-3)^2+(7-4)^2+(7-5)^2+(7-6)^2+3(7-7)^2+ \\ +(7-10)^2+(7-12)^2+(7-13)^2+(7-15)^2+(7-19)^2}{16}} = 5{,}32.$$

Megjegyzés. Az átlag és szórás kiszámítására használhatjuk a zsebszámológép statisztikus funkcióját.



c) Írjuk fel a koszinusztételt az AC átlóra mindkét háromszögben:

$$AC^2 = 5^2 + 7^2 - 2\cdot 5\cdot 7\cdot \cos\varphi,$$

$$AC^2 = 1^2 + 3^2 - 2\cdot 1\cdot 3\cdot \cos(180^\circ - \varphi),$$

$$\cos(180^\circ - \varphi) = -\cos\varphi,$$

ezekből

$$25 + 49 - 70\cos\varphi = 1 + 9 + 6\cos\varphi,$$

$$\cos\varphi = \frac{64}{76} \Rightarrow \varphi = 32{,}64^\circ.$$

Az 5 és 7 egység hosszú szakasz $32{,}64^\circ$-os szöget zár be egymással.

8. *Egy vegyi anyagokat gyártó vállalat egy bizonyos terméket, melynek összetétele csak hatóanyagának koncentrációjában különbözik, kétféle kiszerelésben forgalmaz az alábbiak szerint.*

A változat: 60%*-os töménységű,* 2 *kg-os,* 3 dm^3*-es dobozban;*

B változat: 20%*-os töménységű,* 5 *kg-os,* 8 dm^3*-es dobozban.*

A vállalat mintaboltjában a fenti árukból árkedvezményt adnak azoknak a vevőknek, akik összesen legalább 40 *kg-ot vásárolnak ezekből. Egy vevő, akinek* 50%*-os keverékre van szüksége, vásárolni szeretne belőlük úgy, hogy minden megvásárolt doboz tartalmát teljes mértékben felhasználja.*

a) *Hány dobozzal vegyen az egyes változatokból, ha részesülni kíván az árkedvezményben, szállítóeszközére legfeljebb összesen* 120 *kilogrammnyi terhet rakhat, a megvásárolt áru teljes térfogata nem haladhatja meg a* 130 dm^3*-t, és a kedvezmény mértéke egyenesen arányos a megvásárolt áru össztömegével?*

Ez a vállalat egyike annak az öt vállalatból álló csoportnak, melyben mindegyik vállalat bármelyik másikkal üzleti kapcsolatban áll, és az egymással szembeni követeléseiket forintban, vagy euróban egyenlítik ki. Két szereplő egymás között ugyanabban a pénznemben fizeti ki a számlát. A szerződések megkötése után észrevették, *hogy nincs három olyan vállalat, melyek egymás között azonos valutában rendezik tartozásaikat.*

b) Igazoljuk, hogy mindegyik vállalat kettőnek forinttal, a másik kettőnek pedig euróval fizet. (*16 pont*)

Megoldás. *a*) Legyen a zacskók száma x, y az A és B változatú termékből ($x, y \in \mathbb{N}$), ekkor tömegük: $2x + 5y$, hatóanyag-tartalmuk $0{,}6 \cdot 2x + 0{,}2 \cdot 5y$, illetve $0{,}5 \cdot (2x + 5y)$ (a mértékegység kg).

A kétféleképpen számított hatóanyag-tartalom egyenlő, felírhatjuk, hogy $1{,}2x + y = x + 2{,}5y$, innen $x = 7{,}5y$; másrészt:

$$40 \leqslant 2x + 5y \leqslant 120;$$

$$40 \leqslant 2 \cdot 7{,}5y + 5y \leqslant 120 \quad / : 20$$

$$2 \leqslant y \leqslant 6.$$

Ahhoz, hogy x egész szám legyen, y-nak párosnak kell lennie, ezért $y = 2; 4; 6$; $x = 15; 30; 45$.

Az $x = 15$, $y = 2$ esetben a térfogat	$15 \cdot 3 + 2 \cdot 8 = 61\ \mathrm{dm}^3$;
az $x = 30$, $y = 4$ esetben	$30 \cdot 3 + 4 \cdot 8 = 122\ \mathrm{dm}^3$;
az $x = 45$, $y = 6$ esetben	$45 \cdot 3 + 6 \cdot 8 = 183\ \mathrm{dm}^3$;

ez utóbbi már több a megengedettnél, így ezt nem választhatja a vevő.

A maradék kettő közül az első esetben 40 kg, a másodikban 80 kg az áru össztömege, a kedvezmény a második esetben nagyobb, ezért a vevőnek az A változatból 30, a B-ből 4 dobozzal célszerű vásárolnia.

b) A feladatot modellezhetjük egy ötpontú teljes gráffal, melynek éleit két színnel (piros, kék) színeztük ki, pl. a piros jelentse azt, hogy a felek forint alapon, míg a kék, hogy euró alapon rendezik tartozásaikat. Tegyük fel a bizonyítandó állítással ellentétben, hogy van legalább egy olyan vállalat, amelyik legalább három másikkal ugyanabban a pénznemben fizeti a számlát. Legyen ez az A vállalat, az A pontból induljon ki három egyszínű (pl. piros) él a B, C, D pontokba. (Ha négy egyszínű él indul A-ból, akkor a negyediket hagyjuk figyelmen kívül.) Ha a B, C, D pontokat összekötő élek valamelyike (pl. BC) piros lenne, akkor az A, B, C pontokat piros élek kötnék össze, ami ellentmond a feltételeknek. Ekkor azonban a B, C, D pontokat kék élek kötik össze, ami szintén lehetetlen, így a feltevésünk helytelen volt. A gráf élei kiszínezhetők pl. úgy, hogy az ötszög oldalait pirosra, az átlóit pedig kékre festjük, minden pontból pontosan két piros és két kék él indul. Ezzel a feladatot megoldottuk.

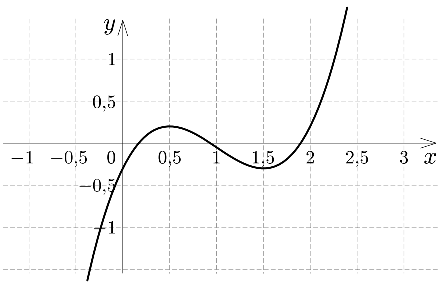
II. megoldás: tegyük fel a bizonyítandó állítással ellentétben, hogy van olyan vállalat, amelyik három (vagy négy) cégnek is ugyanabban a valutában, mondjuk forintban fizet. Legyen ez az A nevű cég, a többit nevezzük B, C, D, E-nek. Mivel fizetnek egymásnak a B, C, D cégek? (E-t figyelmen kívül hagyhatjuk!) Ha közülük bármelyik kettő forinttal egyenlíti ki a számlát, legyen pl. B és C, akkor az A, B, C cégek közötti számla kiegyenlítés forintban történik, ami ellentmond a feltételeknek. Ha azonban mindhárman egymás között euróban fizetik ki a számlát, akkor is ellentmondáshoz jutottunk. Mivel mindkét esetben ellentmondásra jutottunk, több eset pedig nem létezik, a kiinduló feltevésünk hamis, azaz igaz az állítás. A kifizetések megoldhatók pl. úgy, hogy A a B-nek, B a C-nek, C a D-nek, D az E-nek, E az A-nak forinttal fizet; A a C-nek és D-nek, B a D-nek és E-nek, C az E-nek és A-nak, D az A-nak és B-nek, E a B-nek és C-nek euróval fizet.

9. *a) A p valós paraméter mely értéke esetén lesz az $f(x)=x^3-3x^2+\frac{9}{4}x+p$ ($x\in\mathbb{R}$) függvénynek három különböző zérushelye a valós számok halmazán?*

A $g(x)=x^3+bx^2+cx+2022$ ($x\in\mathbb{R}$) függvény b és c együtthatóit szabályos dobókockával sorsoljuk ki; az első dobás b-t, a második c-t eredményezi.

b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy az így kapott függvénynek nem lesz helyi szélsőértéke? (*16 pont*)

Megoldás.



A polinomok mindenütt folytonosak és differenciálhatók, ennek a harmadfokú függvénynek akkor lesz három különböző valós zérushelye (a grafikonja akkor metszi három helyen az x tengelyt), ha lokális maximumának értéke pozitív, lokális minimumának értéke pedig negatív szám.

Megkeressük a lokális szélsőértékhelyeket.

$$f'(x)=3x^2-6x+\frac{9}{4};$$

$$3x^2-6x+\frac{9}{4}=0;$$

$$x_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{36-4\cdot 3\cdot \frac{9}{4}}}{6}=\frac{6\pm 3}{6}\ \Rightarrow\ x_1=\frac{1}{2},\quad x_2=\frac{3}{2};$$

$$f''(x)=6x-6;$$

$$f''\left(\frac{1}{2}\right)=6\cdot\frac{1}{2}-6=-3<0;$$

itt lokális maximuma van a függvénynek;

$$f''\left(\frac{3}{2}\right)=6\cdot\frac{3}{2}-6=3>0;$$

itt pedig lokális minimuma.

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^3-3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}\cdot\frac{1}{2}+p=\frac{1}{2}+p;$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right)=\left(\frac{3}{2}\right)^3-3\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{4}\cdot\frac{3}{2}+p=p;$$

$$\frac{1}{2}+p>0 \quad \text{és} \quad p<0 \ \Rightarrow\ -\frac{1}{2}<p<0.$$

A függvénynek akkor van három különböző valós zérushelye, ha $p\in\left]-\frac{1}{2};0\right[$.

Megjegyzés. Ha ismerjük a harmadfokú egyenlet Cardano-képletes megoldását, akkor a *casus irreducibilis* (Függvénytáblázat: 23. oldal) eset végigszámolásával a fenti eredményre jutunk.

b) A lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele, hogy a függvény első deriváltja 0 legyen.

$$g'(x)=3x^2+2bx+c;\ \ 0=3x^2+2bx+c;\ \ D=(2b)^2-4\cdot 3c=4b^2-12c=4(b^2-3c).$$

Ha $D>0$, akkor az egyenletnek két különböző valós gyöke van, ebben az esetben a függvénynek van lokális maximuma is és lokális minimuma is. (Ez egy harmadfokú függvénynél elégséges feltétel is.)

Ha $D<0$, akkor az egyenletnek nincs valós gyöke, a függvénynek nem lehet helyi szélsőértéke.

Ha $D=0$, akkor az egyenletnek egy valós gyöke van. Ebben az esetben sem lehet ez az (esetleges) szélsőérték egyszerre maximum is és minimum is (ekkor az egyenlet gyöke az inflexiós pont első koordinátájával egyezik meg). Az esemény szempontjából tehát ez is kedvező esetnek számít.

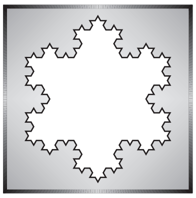
Ismét táblázatba foglaltuk az összes esetet.

b^2-3c		c					
		1	2	3	4	5	6
b	1	-2	-5	-8	-11	-14	-17
	2	1	-2	-5	-8	-11	-14
	3	6	3	0	-3	-6	-9
	4	13	10	7	4	1	-2
	5	22	19	16	13	10	7
	6	33	30	27	24	21	18

A keresett valószínűség: $P(A)=\frac{16}{36}=\frac{4}{9}=0{,}4444$.

Megjegyzés. Természetesen nem szükséges végigszámolni az összes esetet, ha az első dobás 5-öt, vagy 6-ot eredményezett, akkor a második dobás értékétől függetlenül D pozitív lesz, ezek tehát az esemény szempontjából rossz esetnek számítanak. (Ha $b=1$, akkor az összes c jó eset.)

Németh László
Fonyód



C gyakorlat megoldása

C. 1703. *Az a és b 10-es számrendszerbeli természetes számok, mindegyik számjegyük 1-es. Mutassuk meg, hogy ha a és b nem relatív prímek, akkor számjegyeik $S(a)$ és $S(b)$ összege sem az.*

Megoldás. Az a és a b szám egyike sem lehet 1, mert az 1 bármelyik egész számmal relatív prím, ezért $a>1$ és $b>1$.

1. eset Ha $a=b$, akkor $S(a)=S(b)>1$, így a feladat állítása igaz.

2. eset Ha $a\neq b$, akkor az általánosság megsértése nélkül feltehetjük, hogy $a>b$, ekkor $S(a)>S(b)$. Mindkét szám utolsó számjegye 1, ezért sem 2-vel, sem 5-tel nem oszthatóak és mivel nem relatív prímek, így van közös prímosztójuk. Legyen ez a közös prímtényező p, ekkor $p\neq 2$ és $p\neq 5$. Innentől „elfogyasztjuk" a számjegyeket a következő módszerrel. Kivonjuk a-ból b-t, így $p\mid a$ és $p\mid b$ miatt nyilván $p\mid(a-b)$ is teljesül. Ekkor $(a-b)$ egy olyan pozitív szám, amely $(S(a)-S(b))$ darab 1-essel kezdődik, közvetlenül utánuk pedig $S(b)$ darab nulla van. A nulláktól természetesen könnyedén „megszabadulhatunk", ha elosztjuk $10^{S(b)}$-nel, és mivel a tízhatványok csak 2-vel és 5-tel oszthatóak, ezért hányadosként (nevezzük c-nek) egy olyan csupa 1-es számjegyet tartalmazó számot kapunk, amelyre $p\mid c$, ezért $c>1$, valamint $S(c)=S(a)-S(b)$ és $c<a$ is igaz.

Ekkor előfordulhat, hogy $b=c$, ekkor nyilván $S(c)\mid S(b)$, ezért

$$S(c)\mid S(c)+S(b)=S(a).$$

Találtunk egy közös osztót, $S(c)$-t, ami ($c>1$ miatt) 1-nél nagyobb, így beláttuk, hogy $S(a)$ és $S(b)$ nem relatív prímek.

Ha $b\neq c$, akkor a nagyobbikból kivonjuk a kisebbiket és megismételjük az előbb ismertetett eljárást. Véges sok lépésben biztosan eljutunk odáig, hogy két egyenlő számot kapunk, amelyek nagyobbak 1-nél, mindegyik számjegyük 1, így számjegyeik összege is nagyobb 1-nél és osztója $S(a)$-nak és $S(b)$-nek, azaz utóbbiak nem relatív prímek. Ezzel a gondolatmenet végére értünk, a feladat állítását beláttuk.

Egyházi Hanna (Budapest, ELTE Apáczai Cs. J. Gyak. Gimn. és Koll., 12. évf.) dolgozata alapján

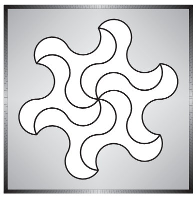
Összesen 25 dolgozat érkezett. 5 pontos 10, 4 pontos 3, 3 pontos 5 dolgozat. 1 pontot 3, 0 pontot 1 versenyző kapott. Nem versenyszerű: 3 dolgozat.

A javító megjegyzései. 1. A versenyzők egy része összekeverte az oszthatóság fogalmát azzal, hogy két szám relatív prím. Abból, hogy $(a;b)>1$ nem következik, hogy $a\mid b$ vagy $b\mid a$.

2. A másik komoly probléma a túlzott általánosítás volt, például a közös osztó létezésének megmutatása helyett sokan azonnal közös osztót mutattak, amelyre legtöbbször létezik triviális ellenpélda.

3. Végül, súlyos elvi hibaként előfordult, hogy csak néhány konkrét p prímre bizonyította a versenyző az állítást, de általánosan nem.

Matematika feladatok megoldása

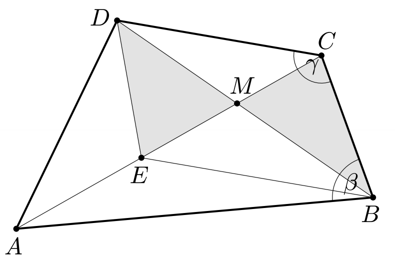


B. 5139. *Az $ABCD$ konvex négyszög átlóinak metszéspontja M. Az ADM háromszög területe nagyobb a BCM háromszög területénél. A négyszög BC oldalának felezőpontja P, AD oldalának felezőpontja pedig Q, $AP+AQ=\sqrt{2}$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor az $ABCD$ négyszög területe kisebb, mint* 1.

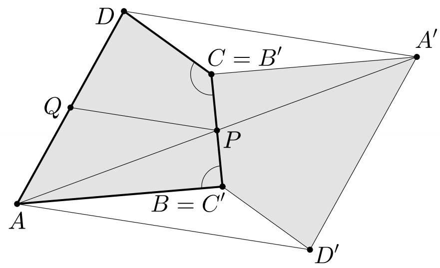
(*5 pont*)

Megoldás. Először megmutatjuk, hogy az $ABCD$ négyszögben $\beta+\gamma>180^\circ$ (*1. ábra*).

A feltétel szerint $T(ADM)>T(BCM)$, ezért az AM szakasz belsejében létezik olyan E pont, amelyre $T(EMD)=T(BCM)$. Ismert továbbá, hogy ez akkor és csak akkor teljesül, ha az $EBCD$ négyszög trapéz, úgy hogy EB és CD a trapéz alapjai. Ekkor $EBC\sphericalangle+\gamma=180^\circ$, azonban az E pont az AM szakasz belső pontja, azaz $EBC\sphericalangle<\beta$, így $\beta+\gamma>180^\circ$.



1. ábra



2. ábra

Tükrözzük a négyszöget a BC oldal P felezőpontjára és használjuk a *2. ábra* jelöléseit.

A tükrözésnél $ABD'A'CD$ egészen biztosan konkáv hatszöget alkot, mert B-nél és C-nél létrejött szögei a fentiek alapján nagyobbak 180°-nál. Látjuk tehát, hogy az $AD'A'D$ paralelogramma területe nagyobb a hatszög területénél.

$$AD+AA'=2\sqrt{2}=\sqrt{8},\quad \text{ezért ha}\quad AD=x,\ \text{akkor}\ AA'=\sqrt{8}-x.$$

Legyen a négyszög területe T, így a tükrözéssel kapott konkáv hatszög területe $2T$. Ennél biztosan nagyobb a paralelogramma két szomszédos oldalának szorzata $x\big(\sqrt{8}-x\big)$, mert a paralelogramma $AD=x$ alapjához tartozó magasság legfeljebb $AA'=\sqrt{8}-x$,

$$2T < x\big(\sqrt{8}-x\big).$$

A befejezéshez használjuk fel a számtani-mértani közepek közötti egyenlőtlenséget:

$$\sqrt{x\big(\sqrt{8}-x\big)} \leqslant \frac{x+\sqrt{8}-x}{2} = \sqrt{2}\,,$$

innen azonnal a

$$2T < x\big(\sqrt{8}-x\big) \leqslant 2,$$

vagyis az igazolandó $T<1$ adódik.

Csonka Illés (Ciszterci Rend Nagy Lajos Gimn., Pécs, 9. évf.)
dolgozata alapján

Összesen 44 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 36, 4 pontot 5 tanuló. 3 pontos 2, 1 pontos 1 versenyző dolgozata.

B. 5149. *Hányféleképpen lehet kitölteni egy* 6×6*-os táblázat mezőit az* $1,2,\ldots,36$ *számokkal úgy, hogy bárhogy választunk* 6 *mezőt, melyek közül semelyik kettő nincs egy sorban vagy oszlopban, a kiválasztott mezőkbe írt számok összege mindig ugyanannyi legyen?*

(*6 pont*)

Megoldás. Először oldjuk meg a következő feladatot: *hány, az* 1*-est tartalmazó* S *részhalmaza van a* $H:=\{1,2,\ldots,36\}$ *halmaznak, ha* S*-nek létezik* 6 *diszjunkt eltoltja, melyek uniója* H*?*

Tegyük fel, hogy S egy ilyen részhalmaz; bontsuk az S-ben található elemeket nem érintkező intervallumok uniójára; megmutatjuk, hogy ezek az intervallumok egyenlő hosszúak. Legyen az első intervallum hossza x; ennek az intervallumnak az elemei: $1,2,\ldots,x$. Az itt nem szereplő $x+1$-et az S halmaz x-szel való eltoltja tartalmazza. Ha S-ben lenne egy másik, $y>x$ hosszúságú intervallum, akkor az nem lenne diszjunkt az x-szel való eltoltjával. Hasonlóan belátható, hogy az utolsó intervallum is legalább olyan hosszú, mint a leghosszabb intervallum. Ha nem mindegyik intervallum ugyanolyan hosszú, akkor a hosszak sorozata csak $(2,1,1,2)$ lehet, ez azonban nem lehetséges: $S=\big\{[1,2],[a],[b],[c,c+1]\big\}$-ben $a,b,c,c+1>3$ miatt 3-at csak S-nek a 2-vel való eltoltja, $S+2=\big\{[3,4],[a+2],[b+2],[c+2,c+3]\big\}$ tartalmazhatja. Hasonlóan, az ebben nem szereplő 5-öt csak $S+4=\big\{[5,6],[a+4],$ $[b+4],[c+4,c+5]\big\}$ tartalmazhatja, stb. Az $a+1$ sem S-nek, sem pedig $S+2$-nek nem eleme, ezért $a+1\geqslant 5$, így $a+1$ az $S+4$, $S+6$, $S+8$, $S+10$ eltoltak valamelyikében, szükségszerűen az $[5,6]$, $[7,8]$, $[9,10]$, $[11,12]$ intervallumok egyikében van. Ez azt jelenti, hogy a viszont az $S+2,\ldots,S+10$ eltoltak egyikéhez tartozik – akkor azonban ez nem lenne diszjunkt S-sel.

Ha az intervallumok egyenlő hosszúak, hosszuk a 6 osztója, 1,2,3 vagy 6 lehet. Ha 6, akkor – mivel S tartalmazza az 1-et – S csak $\{1,2,3,4,5,6\}$ lehet.

Ha a közös hossz 3: A két intervallum közti távolság 3-mal osztható (kitölthető 3 hosszú intervallumokkal), ami lehet 6, 9, vagy 18, így a halmazok: $S \in \big\{\{1,2,3,7,8,9\},\ \{1,2,3,10,11,12\},\ \{1,2,3,19,20,21\}\big\}$ (az elsőt 3-mal eltolva egy 12, a másodikat 3-mal kétszer eltolva egy 18, a harmadikat 3-mal ötször eltolva egy 36 hosszú, lefedett intervallumot kapunk, ezeket rendre 2-szer, 1-szer, illetve 0-szor ismételve megkapjuk az $\{1,\ldots,36\}$ halmazt).

Ha a közös hossz 2: Az első és a második, illetve a második és a harmadik intervallum közti távolság ugyanaz (különben a korábbiakhoz hasonló ellentmondás adódik), ez a távolság lehet 4, 6, vagy 12, tehát a halmazok: $S \in \big\{\{1,2,5,6,9,10\}$, $\{1,2,7,8,13,14\},\ \{1,2,13,14,25,26\}\big\}$ (az elsőt 2-vel tolva egy 12, a másodikat 2-vel kétszer eltolva egy 18, a harmadikat 2-vel ötször eltolva egy 36 hosszú, lefedett intervallumot kapunk, ezt rendre 2-szer, 1-szer és 0-szor ismételve megkapjuk az $\{1,\ldots,36\}$ halmazt).

Ha a közös hossz 1: Alkalmazzuk azt az öndualitást, amely a korábbi 7 megfelelő részhalmazt a megfelelő, 1 hosszú intervallumokkal bíró részhalmazokhoz párosítja, úgy, hogy egy részhalmaz duálisa a hozzá tartozó eltoláshalmaz legyen! Mivel minden korábbi részhalmazt legalább 2-vel kellett eltolnunk, tehát az intervallumok távolsága a duálisban legalább 2, továbbá az eltolás kommutatív művelet, a korábbi eltolásokban felcserélve a tagok sorrendjét az unió az $\{1,\ldots,36\}$ marad, továbbá duális duálisa az eredeti részhalmaz. Így 7 ilyen részhalmaz van, tehát összesen $1+3+3+7=14$ a megfelelő S részhalmazok száma.

Például az $S=\{1,2,5,6,9,10\}$ duálisát a következőképpen kaphatjuk meg. Az S megfelelő eltoltjai:

$$\begin{array}{l}
(\ 1,\ \ 2,\ \ 5,\ \ 6,\ \ 9, 10),\\
(\ 3,\ \ 4,\ \ 7,\ \ 8, 11, 12),\\
(13, 14, 17, 18, 21, 22),\\
(15, 16, 19, 20, 23, 24),\\
(25, 26, 29, 30, 33, 34),\\
(27, 28, 31, 32, 35, 36).
\end{array}$$

Ekkor az S duálisa: $(1,3,13,15,25,27)$.

Térjünk vissza az eredeti feladathoz. Egy megfelelő kitöltésben jelölje a táblázat x-edik sorának y-adik elemét (x,y). Vegyük észre, hogy ha tetszés szerint permutáljuk a táblázat sorait és oszlopait, akkor továbbra is egy megfelelő kitöltést kapunk. Ezzel elérhetjük, hogy (alkalmas sor- és oszlopcserékkel) a táblázat első sorának első eleme az 1-es legyen. Tetszőleges x_1, x_2, y_1, y_2 esetén $(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1,y_2)+(x_2,y_1)$, mivel egy, a feladat feltételeinek megfelelő, (x_1,y_1)-et és (x_2,y_2)-t tartalmazó részösszegben felcserélve az y_1-edik és az y_2-edik oszlopot nem változik az összeg. Ekkor viszont $(i,j)-(1,j)=(i,1)-(1,1)$, tehát az i-edik sor az első sor eltoltja, úgy, hogy az első sor első cellájában az 1 van, tehát az így kapható táblázatok száma 14.

Az ilyen táblázatokat $(6!)\cdot(6!)$ féleképpen lehet visszarendezni, vagyis pontosan $14\cdot(6!)^2$ jó kitöltés létezik.

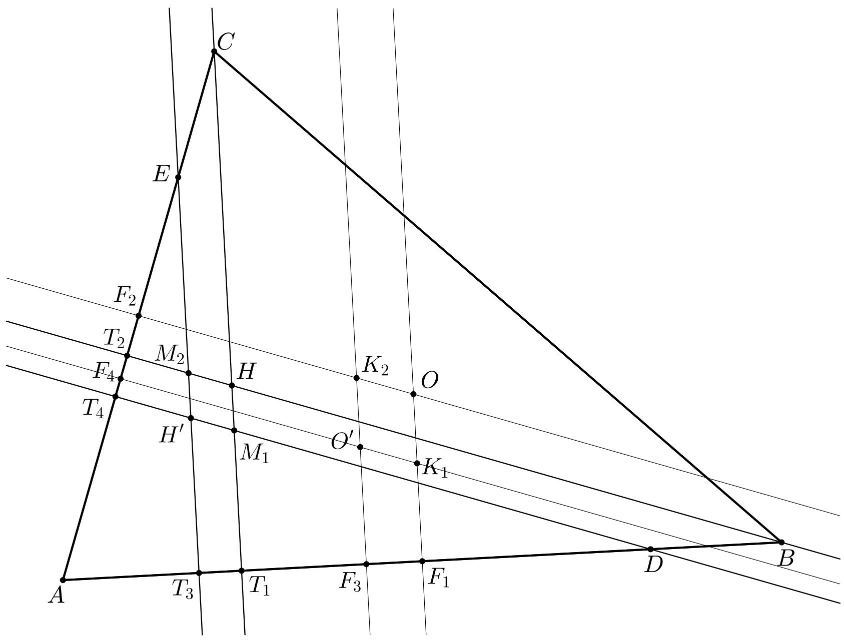
Németh Márton (Nagykanizsa, Batthyány L. Gimn., 10. évf.)

49 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott 16 versenyző: Argay Zsolt, Bán-Szabó Áron, Baski Bence, Csizmadia Miklós, Duchon Márton, Hegedűs Dániel, Kalocsai Zoltán, Kercsó-Molnár Anita, Kovács Tamás, Kökényesi Márk Péter, Móricz Benjámin, Nádor Benedek, Németh Márton, Seres-Szabó Márton, Szanyi Attila, Török Ágoston. 5 pontos 6, 4 pontos 4, 3 pontos 4, 2 pontos 4, 1 pontos 5, 0 pontos 10 dolgozat.

B. 5173. *Az ABC hegyesszögű háromszög magasságpontja H, körülírt körének középpontja O. Legyen D és E az AB, illetve AC szakasz belső pontja. Az ADE háromszög magasságpontja és körülírt körének középpontja H', illetve O'. Mutassuk meg, hogy a HH' és OO' egyenesek akkor és csak akkor párhuzamosak, ha $BD=CE$.*

(*6 pont*) Javasolta: *Bán-Szabó Áron* (Budapest)

Megoldás. Jelöljük az $ABC\triangle$-ben az AB, illetve AC oldalakhoz tartozó magasságvonalak talppontját T_1-gyel és T_2-vel, az $ADE\triangle$-ben az AD és AE oldalakhoz tartozó magasságvonalak talppontját pedig T_3-mal és T_4-gyel. Legyen $T_1H\cap T_4H'=M_1$ és $T_2H\cap T_3H'=M_2$, az AB, illetve AC szakaszok felezőpontja F_1 és F_2, az AD, illetve AE szakaszok felezőpontja F_3 és F_4, továbbá $F_1O\cap F_4O'=$ $=K_1$ és $F_2O\cap F_3O'=K_2$.



Vegyük észre, hogy az O és O' pontok nem eshetnek egybe, mert például D belső pontja az ABC háromszög köréírt körének, így $OD<OA$, míg $O'D=O'A$.

Ezért az OO' szakasz nem fajulhat egy ponttá. Mivel $EAD\sphericalangle = CAB\sphericalangle$ hegyesszög, az ABC és az ADE háromszög magasságpontja sem lehet az A pont, tehát $H \neq A$ és $H' \neq A$.

Tekintsük most a $H'M_1HM_2$ és az $O'K_1OK_2$ négyszögeket, amelyeknek szemközti oldalaik mind merőlegesek AB-re, illetve AC-re, ezért mindkét négyszög paralelogramma. Az egyik paralelogramma megfelelő oldalai páronként párhuzamosak a másik paralelogramma megfelelő oldalaival, hiszen mind az oldalfelező merőlegesek, mind a magasságvonalak merőlegesek a megadott oldalra, továbbá a megfelelő csúcsoknál ($H' \leftrightarrow O'$, $H \leftrightarrow O$) ugyanakkora belső szögek vannak, hiszen mindkettőt két A-hoz közelebbi egyenes (T_3H', T_4H', illetve F_3O' és F_4O') határolja, amelyek párhuzamosak. Ebből következően a $H'M_1H$ és az $O'K_1O$ háromszögek azonos körüljárási irányúak, valamint két-két oldaluk páronként párhuzamos ($H'M_1 \parallel O'K_1$ és $HM_1 \parallel OK_1$), így ha $HH' \parallel OO'$, akkor a szóban forgó háromszögek hasonlók, tehát megfelelő oldalaik hosszának aránya megegyezik:

$$\frac{H'M_1}{HM_1} = \frac{O'K_1}{OK_1}.$$

Ez tehát szükséges feltétele annak, hogy $HH' \parallel OO'$. Ez a feltétel azonban elégséges is, mert ha teljesül, akkor a $H'M_1H$ és $O'K_1O$ háromszögek hasonlók, azaz a harmadik oldalpár is párhuzamos. Kimondhatjuk tehát, hogy $HH' \parallel OO'$ akkor és csakis akkor teljesül, ha

$$\frac{H'M_1}{HM_1} = \frac{O'K_1}{OK_1}. \tag{1}$$

Most vizsgáljuk meg a $H'M_1HM_2$ paralelogramma oldalainak arányát. Ismert, hogy egy paralelogramma területét kiszámíthatjuk egy oldal hosszának és az oldalhoz tartozó magasság hosszának szorzataként:

$$T_{H'M_1HM_2} = HM_1 \cdot T_1T_3 = H'M_1 \cdot T_2T_4,$$

amiből azt kapjuk, hogy

$$\frac{HM_1}{H'M_1} = \frac{T_2T_4}{T_1T_3},$$

ahol a nevezők értéke nem 0, hiszen a feladat feltételei szerint E az AC szakasz belső pontja, ezért EH' nem eshet egybe CM_1-gyel. Mivel $ABT_2\sphericalangle$ és $ACT_1\sphericalangle$, merőleges szárú hegyesszögek, ezért egyenlő nagyságúak, így egy megfelelő egybevágósági transzformációval fedésbe hozhatók egymással. Ekkor alkalmazhatjuk a párhuzamos szelőszakaszok tételét a következőképpen:

$$\frac{T_2T_4}{T_1T_3} = \frac{BD}{CE},$$

ami a fentiek értelmében azt jelenti, hogy

$$\frac{HM_1}{H'M_1} = \frac{T_2T_4}{T_1T_3} = \frac{BD}{CE}, \quad \text{tehát} \quad \frac{BD}{CE} = \frac{HM_1}{H'M_1}.$$

Az $O'K_1OK_2$ paralelogramma esetében az előzőekhez hasonlóan azt kapjuk, hogy

$$\frac{OK_1}{O'K_1}=\frac{F_2F_4}{F_1F_3}.$$

Számoljuk ki az F_2F_4 és F_1F_3 szakaszok hosszát. Mivel F_2 az AC szakasz felezőpontja, ezért $AF_2=\frac{AC}{2}$, az F_4 pedig az AE szakasz felezőpontja, így

$$AF_4=\frac{AE}{2}=\frac{AC-CE}{2}=AF_2-\frac{CE}{2},$$

amiből

$$F_2F_4=\frac{CE}{2}$$

következik. Hasonlóképpen $F_1F_3=\frac{BD}{2}$, így

$$\frac{OK_1}{O'K_1}=\frac{F_2F_4}{F_1F_3}=\frac{\frac{CE}{2}}{\frac{BD}{2}}=\frac{CE}{BD}.$$

Beláttuk tehát, hogy $\frac{HM_1}{H'M_1}=\frac{BD}{CE}$ és $\frac{OK_1}{O'K_1}=\frac{CE}{BD}$, amit (1)-gyel összevetve azt kapjuk, hogy

$$\frac{BD}{CE}=\frac{CE}{BD},$$

s mivel szakaszok hosszai pozitív számok, ebből

$$BD=CE$$

következik. Ez tehát szükséges feltétel, már csak azt kell megmutatnunk, hogy elégséges is. Mivel az előbbiekben csupa egyenlőséggel dolgoztunk, ezek megfordítva is igazak, így a bizonyítás végére értünk.

Koleszár Domonkos (Miskolc, Herman Ottó Gimn., 11. évf.),
Kökényesi Márk Péter (Budapest, Szent István Gimn., 11. évf.),
Varga Boldizsár (Verőce, Géza Fejedelem Református Ált. Isk., 8. évf.)

Összesen 33 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott: Bán-Szabó Áron, Baski Bence, Bencsik Ádám, Bencsik Dávid, Bognár András Károly, Diaconescu Tashi, Duchon Márton, Fekete Richárd, Hegedűs Dániel, Kalocsai Zoltán, Kercsó-Molnár Anita, Koleszár Domonkos, Kovács Tamás, Kökényesi Márk Péter, Mohay Lili Veronika, Molnár-Szabó Vilmos, Móricz Benjámin, Nádor Benedek, Páhán Anita Dalma, Romaniuc Albert-Iulian, Seres-Szabó Márton, Simon László Bence, Somogyi Dalma, Terjék András József, Varga Boldizsár, Wiener Anna, Zömbik Barnabás. 5 pontos 3, 4 pontos 3 dolgozat.

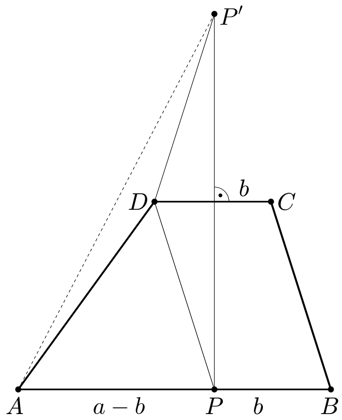
B. 5188. *Igazoljuk, hogy az érintőtrapéz magassága nem lehet nagyobb alapjai mértani közepénél.*

(*5 pont*) Javasolta: *Németh László* (Fonyód)

I. megoldás. Legyen az $ABCD$ érintőtrapéz két alapjának hossza $AB = a$ és $CD = b$, amelyekre teljesül, hogy $a \geqslant b$. (Mivel az $(A, B) \leftrightarrow (C, D)$ pontpárok cseréjével az állítás önmagába megy át, ezt mindig megtehetjük.) Húzzunk párhuzamost a D ponton át a BC szárral, messe ez az AB alapot a P pontban, ekkor $a \geqslant b$ miatt P az AB szakasz pontja (beleértve azt az esetet is, amikor $P = A$).

Mivel a $BCDP$ négyszög két-két szemközti oldala párhuzamos, ezért paralelogramma. A paralelogramma szemközti oldalainak hossza egyenlő, ezért $BP = CD = b$, amiből $AP = a - b$, továbbá $DP = BC$, amiből az érintőnégyszög tulajdonságait felhasználva $a + b = AB + CD = BC + AD = AD + DP$.

Tükrözzük a P pontot a CD alap egyenesére, legyen a tükörképe a P' pont (*1. ábra*). A tükrözés miatt egyrészt nyilvánvaló, hogy $PP' = 2m$, így az érintőtrapéz m magassága: $m = \frac{PP'}{2}$, másrészt $DP = DP'$. Ekkor az ADP' háromszögre (amely lehet elfajuló is) alkalmazzuk a háromszög-egyenlőtlenséget, így



1. ábra

$$AP' \leqslant AD + DP' = AD + DP = a + b.$$

Szintén a tükrözés következménye, hogy $PP' \perp CD \parallel AB$, tehát $PP' \perp AB$, ezért abban az esetben, amikor a P pont nem esik egybe A-val, az APP' háromszög derékszögű. A Pitagorasz-tétel alapján felírhatjuk, hogy

$$(PP')^2 = (AP')^2 - AP^2 = (AP')^2 - (a-b)^2 \leqslant (a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab,$$

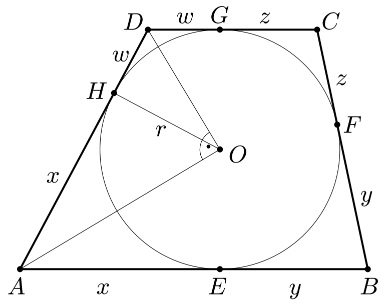
amelyből rendezéssel kapjuk a feladat állítását:

$$2m = PP' \leqslant 2\sqrt{ab}\,.$$

Ha $P = A$, akkor $a = b = m$ miatt szintén igaz az állítás.

Mivel a bizonyítás során csak egyetlenegy egyenlőtlenség volt, ezért egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha a háromszög-egyenlőtlenségben egyenlőség áll, azaz A, D és P' kollineárisak. Rövid szögszámítással könnyen belátható, hogy ez pontosan $AD = PD$ esetben teljesül. Ebből az következik, hogy $AD = PD = BC$, ezért az $ABCD$ érintőtrapéz egyúttal húrtrapéz is, ami az egyenlőség szükséges és elégséges feltétele.

Varga Boldizsár (Békásmegyeri Veres Péter Gimn., 9. évf.)
dolgozata alapján



2. ábra

II. megoldás. Legyenek a trapéz csúcsai A, B, C és D ebben a sorrendben úgy, hogy AB és CD a trapéz alapjai. Legyen a beírt kör érintési pontja az AB, BC, CD és DA oldalakon rendre E, F, G és H, továbbá a beírt kör középpontja O, sugara r (*2. ábra*). Mivel a körhöz egy pontból húzott érintőszakaszok egyenlő hosszúak, ezért

$$AH = AE =: x, \quad BE = BF =: y,$$

$$CF = CG =: z \text{ és } DG = DH =: w,$$

$x, y, z, w > 0$.

Mivel a beírt kör középpontja illeszkedik a szomszédos oldalak szögfelezőjére, AO és DO felezik a trapéz A-nál, illetve D-nél lévő belső szögét, tehát

$$OAD\sphericalangle + ADO\sphericalangle = \frac{BAD\sphericalangle}{2} + \frac{ADC\sphericalangle}{2} = \frac{BAD\sphericalangle + ADC\sphericalangle}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ,$$

hiszen a trapéz egy szárán fekvő belső szögei egymást 180°-ra egészítik ki. Ismert, hogy a háromszög belső szögeinek összege 180°, ekkor az $AOD\triangle$ harmadik szöge $AOD\sphericalangle = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$-os, tehát az $AOD\triangle$ derékszögű. Mivel a körhöz húzott érintő merőleges az érintési pontba húzott sugárra, $OH \perp AD$, vagyis az $OH(= r)$ szakasz az $AOD\triangle$ átfogóhoz tartozó magassága. Ekkor a magasságtétel alapján $\sqrt{xw} = r \ \Rightarrow \ xw = r^2$. Teljesen hasonlóan a másik száron az $yz = r^2$ teljesül, így a trapéz alapjainak szorzata:

$$(x+y)(z+w) = xz + xw + yz + yw = xz + yw + 2r^2.$$

Az előzőek alapján $xw = r^2$, így

$$xz = \frac{xw}{w} \cdot z = \frac{r^2}{w} \cdot z = r^2 \frac{z}{w},$$

és $yz = r^2$ miatt $yw = \frac{yz}{z} \cdot w = r^2 \frac{w}{z}$, amiből

$$xz + yw = r^2 \left(\frac{z}{w} + \frac{w}{z} \right).$$

Közismert, hogy bármely pozitív számhoz a reciprokát hozzáadva legalább 2-t kapunk, ezért a távolságok pozitivitása miatt: $\frac{z}{w} + \frac{w}{z} \geqslant 2$. Mivel r^2 pozitív, ekkor

$$xz + yw = r^2 \left(\frac{z}{w} + \frac{w}{z} \right) \geqslant 2r^2,$$

vagyis az alapok szorzata

$$(x+y)(z+w) = xz + yw + 2r^2 \geqslant 2r^2 + 2r^2 = 4r^2 = (2r)^2.$$

Tudjuk, hogy az érintési pontba húzott sugár merőleges az érintőre, ezért OE és OG merőleges a trapéz alapjaira, így az alapok párhuzamossága miatt az O, E, G pontok egy egyenesre esnek, és ez az egyenes merőleges az alapokra. Ebből következően a trapéz magassága $EG = OE + OG = 2r =: m$, vagyis $m^2 = (2r)^2$, így az alapok szorzata nem kisebb a magasság négyzeténél:

$$(x+y)(z+w) \geqslant (2r)^2 = m^2.$$

Pozitív mennyiségekről lévén szó, az egyenlőtlenség mindkét oldalából négyzetgyököt vonhatunk:

$$\sqrt{(x+y)(z+w)} \geqslant m,$$

ami azt jelenti, hogy az alapok mértani közepe nem kisebb a trapéz magasságánál. Ezzel a feladat állítását beláttuk.

Tudjuk, hogy bármely pozitív számnak és reciprokának összege legalább 2, egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha ez a szám az 1, vagyis jelen esetben akkor, ha $\frac{z}{w} = 1 \Rightarrow z = w$. Ez pedig pontosan a húrtrapézokban teljesül (ha az érintési pont felezi az alapot, akkor a trapéz szimmetrikus, ha pedig a trapéz szimmetrikus, akkor az érintési pont felezi az alapot).

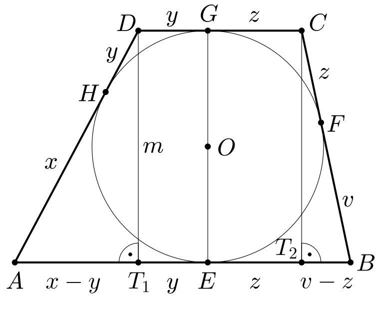
Duchon Márton (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.) dolgozata alapján

III. megoldás. Készítsük el a *3. ábrát.* Az ábrán az egy pontból húzott ugyanolyan hosszú érintőket x, y, z, v-vel jelöltem, illetve C és D merőleges vetületei AB-re T_2 és T_1, így $DG = T_1E = y$ és $GC = ET_2 = z$. Alkalmazzuk a Pitagorasz-tételt a DAT_1 háromszögre (az érintőtrapéz magasságát m-mel jelölöm):

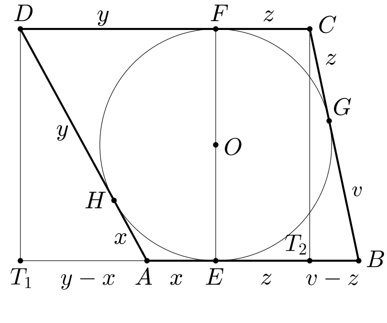
$$(x+y)^2 = m^2 + (x-y)^2,$$
$$m^2 = 4xy.$$

A BCT_2 háromszög is derékszögű, így az előzőekhez hasonlóan:

$$(v+z)^2 = m^2 + (v-z)^2,$$
$$m^2 = 4vz.$$



3. ábra



4. ábra

A két egyenletet összeszorozva:

$$m^4 = 16xyzv,$$

majd négyzetgyököt vonva (megtehetjük, mert mindkét oldal pozitív):

$$m^2 = 4\sqrt{xyzv}\,.$$

Alkalmazzuk a számtani-mértani közép közötti közismert összefüggést (x és v, illetve y és z közepeire):

$$m^2 = 4\sqrt{xv}\sqrt{yz} \leqslant 4 \cdot \frac{x+v}{2} \cdot \frac{y+z}{2} = (x+v)(y+z),$$

majd helyettesítsük be a trapéz ($a = x+v$ és $c = y+z$) alapjait és vonjunk ismét négyzetgyököt. Így éppen az

$$m \leqslant \sqrt{(x+v)(y+z)} = \sqrt{ac}$$

egyenlőtlenséghez jutunk, azaz a feladat állítását beláttuk.

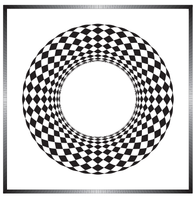
Diszkusszió: Az $x = y$ esetben létrejövő elfajult derékszögű háromszögre is igaz az állítás, az $x < y$ esetet a *4. ábrán* láthatjuk.

Ilyenkor a Pitagorasz-tételt alkalmazva az $(x+y)^2 = m^2 + (y-x)^2$ egyenletet kapjuk. Mivel $(x-y)^2 = (y-x)^2$, így ez sem befolyásolja a megoldást, és ugyanígy nincs baj, ha y és z arányait változtatjuk.

Egyenlőség a közepek miatt $x = v$ és $y = z$ esetén áll fenn, vagyis ha a trapéz nemcsak érintő-, hanem húrtrapéz is.

Jánosik Máté (Győr, Révai Miklós Gimn., 12. évf.)
dolgozata alapján

Összesen 79 dolgozat érkezett. 4 pontos 61, 3 pontos 9, 2 pontos 4 dolgozat. 1 pontot 1, 0 pontot 3 versenyző kapott. Nem versenyszerű: 1 dolgozat.



Nehezebb feladat megoldása*

A. 812. *Két játékos a következő játékot játssza: van két kupac, melyekből felváltva kell kavicsokat elvenniük, és az nyer, aki az utolsó kavicsot elveszi. Ha a kupacok mérete egy adott pillanatban A és B, akkor a soron következő játékos valamelyik kupacból elveheti A egy többszörösét vagy B egy többszörösét.*

* Szeptembertől ismét minden A-jelű feladat megoldása megtalálható honlapunkon, ez az egyik közülük.

Határozzuk meg azokat az (k, n) számpárokat, melyekre a második játékosnak van nyerő stratégiája, ha kezdetben az egyik kupacban k, a másikban pedig n darab kavics van.

Javasolta: *Pálvölgyi Dömötör* (Budapest)

Megoldás. Azt állítjuk, hogy pontosan akkor van a második játékosnak nyerő stratégiája, ha $n \leqslant \varphi k$ és $k \leqslant \varphi n$, ahol $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ az úgynevezett aranymetszés. Ismert, és könnyen ellenőrizhető, hogy $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$, ezt az azonosságot többször fogjuk alkalmazni.

Nevezzünk egy helyzetet nyerőnek, ha onnan a kezdő játékos nyer, vesztőnek, ha a második. Egy helyzet pontosan akkor nyerő, ha onnan lehet vesztőre lépni, és akkor vesztő, ha onnan csak nyerőre lehet lépni. Világos, hogy a $(0, k)$ és $(k, 0)$ helyzetek nyerők, és a (k, k) helyzet vesztő, mivel onnan csak $(0, k)$-ra vagy $(k, 0)$-ra lehet lépni ($k > 0$), így ezekben az esetekben tényleg igaz az állításunk. Mostantól a (k, n) állapotot vizsgáljuk, és feltesszük, hogy $n, k > 0$ és $k < n$.

Először tegyük fel, hogy (k, n) vesztő helyzet, igazoljuk, hogy ekkor csak nyerő helyzetre lehet lépni. Azt tudjuk, hogy $k < n \leqslant \varphi k < 2k$, így ebből az állásból csak a $(0, n)$, $(k, 0)$ és $(k, n-k)$ helyzetekbe lehet lépni. Az első kettő nyerő, és a harmadik is, mivel

$$\varphi(n-k) \leqslant \varphi^2 k - \varphi k = k,$$

és φ irracionális, így $\varphi(n-k) < k$.

Most tegyük fel, hogy (k, n) nyerő helyzet, azaz $\varphi k < n$. Indirekten tegyük fel, hogy nem tudunk innen vesztő helyzetre lépni. Osszuk el n-t maradékosan k-val, legyen $n = dk + r$ ahol $r < k$. Ekkor a (k, r) párra lehet lépni, így $\varphi r < k$. Továbbá a $\varphi k < r + k$ egyenlőtlenség is teljesül, mivel vagy tudunk ide lépni, és akkor az indirekt feltevés miatt igaz, vagy $r + k = n$, ekkor azért igaz, mert (k, n) nyerő helyzet. Ezt a két egyenlőtlenséget összevetve kapjuk, hogy

$$\varphi k < r + k < \frac{k}{\varphi} + k.$$

Átrendezve és φ-vel szorozva

$$k(\varphi^2 - \varphi - 1) < 0,$$

ami ellentmondás, mivel $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$.

Ezzel a bizonyítást befejeztük.

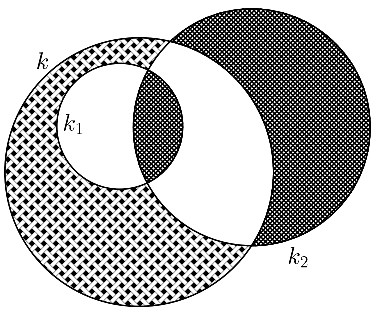
18 dolgozat érkezett. 7 pontot kapott 12 versenyző: Bán-Szabó Áron, Ben Gillott, Diaconescu Tashi, Lovas Márton, Móra Márton Barnabás, Móricz Benjámin, Nádor Benedek, Seres-Szabó Márton, Simon László Bence, Sztranyák Gabriella, Tarján Bernát, Varga Boldizsár. 6 pontos 1, 5 pontos 1, 3 pontos 1, 1 pontos 2, 0 pontos 1 dolgozat.

A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (1714–1720.)

Feladatok 10. évfolyamig

C. 1714. Egy táblára felírtuk 1-től 22-ig az egész számokat. Ezután egy lépésben kiválasztunk két számot, letöröljük őket és helyettük felírjuk a különbségük abszolútértékét. Bizonyítsuk be, hogy a táblára utoljára felírt szám páratlan.

(*német feladat*)



C. 1715. A k kör belsejébe rajzoltunk egy 8 cm sugarú k_1 kört. Mindkét kört metszi az *ábrán* látható módon egy 15 cm sugarú k_2 kör. Mekkora k sugara, ha a k belsejében, de k_1-en kívül levő satírozott síkidom területe megegyezik a k_2 belsejében levő satírozott síkidomok területének összegével?

Feladatok mindenkinek

C. 1716. Faktoriális számrendszerben a helyiértékek nem egy egész szám, az alapszám hatványai, hanem az n-edik helyiérték az n szám faktoriálisa. Tehát az első helyiértéken lévő számjegyet 1-gyel, a második helyiértéken álló számot 2-vel, a harmadik helyiértéken álló számot 6-tal kell szorozni, és így tovább. Ennek megfelelően pl. a $3310_!$ faktoriális számrendszerbeli szám értéke tízes számrendszerben $3\cdot4!+3\cdot3!+1\cdot2!=92$. (Amennyiben a szám faktoriális alakjában egy helyiértéken többjegyű szám áll, akkor azt zárójelbe tesszük.)* Megfigyeltük, hogy $111_!$ harmada $11_!$, az $111\,111_!$ harmadrésze $22\,011_!$ és $111\,111\,111_!$ harmada pedig $33\,022\,011_!$. Adjuk meg a $3n$ darab 1-esből álló, faktoriális számrendszerben megadott szám harmadát faktoriális számrendszerben.

Lénárt István (Budapest) ötletéből

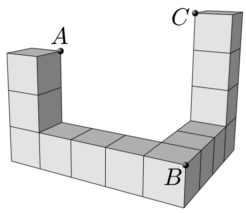
C. 1717. Legyen a $15x^2-21x+7=0$ egyenlet két valós gyöke x_1 és x_2. Adjuk meg az

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}+\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$$

kifejezés pontos értékét.

* Igazolható, hogy a felírás egyértelmű, tehát minden pozitív egésznek egy alakja van faktoriális számrendszerben. Lásd az **I. 553.** januári informatika feladatot.

C. 1718. Egy síkon elhelyeztünk 8 darab egységnyi élű kockát, majd ezekre még 5 darab egységkockát tettünk az *ábra* szerint.



Határozzuk meg az ABC háromszög oldalainak hosszát.

Feladatok 11. évfolyamtól

C. 1719. Tekintsük az ABC szabályos háromszög azon P belső pontjait, amelyekből az AB oldal $135°$-os szögben látszik. Bizonyítsuk be, hogy a PA, PB, PC szakaszokból mindig szerkeszthető háromszög, és a P pont bármely, a feltételnek megfelelő elhelyezkedése esetén ennek a háromszögnek az egyik szöge mindig ugyanakkora.

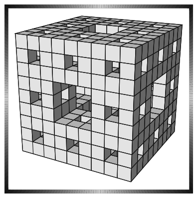
C. 1720. Adott egy 10 elemű halmaz, amelynek elemei legfeljebb kétjegyű, pozitív egész számok. Igaz-e, hogy ennek a halmaznak mindig van két olyan diszjunkt részhalmaza, amelyekben az elemek összege egyenlő?

❄

Beküldési határidő: 2022. május 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄

A B pontversenyben kitűzött feladatok (5238–5245.)



B. 5238. Oldjuk meg a következő egyenletet a pozitív egész számok körében:

$$(k+n)! = k^3 + n^3 + (k+n)(3kn-1).$$

(*3 pont*) Javasolta: *Szalai Máté* (Szeged)

B. 5239. Egy háromszög oldalai a, b és c, ebben a sorrendben számtani sorozatot alkotnak. Mutassuk meg, hogy a beírt kör középpontja harmadolja a b oldalhoz tartozó szögfelezőt.

(*3 pont*)

B. 5240. Mutassuk meg, hogy minden n pozitív egész számnak van olyan többszöröse, amelyben a számjegyek összege n.

(*4 pont*) Javasolta: *Sándor Csaba* (Budapest)

B. 5241. Az ABC háromszögben $ABC\sphericalangle > 90°$, a körülírt kör középpontja O. A körülírt körhöz C-ben húzott érintő az AB egyenest a P pontban, a P-ből BC-re állított merőleges pedig az OC egyenest Q-ban metszi. Igazoljuk, hogy AB merőleges AQ-ra.

(*4 pont*) Javasolta: *Nagy Zoltán Lóránt* (Budapest)

B. 5242. Legyenek m és n tetszőleges pozitív egész számok. Tekintsük azon $(x;y)$ rácspontokat a derékszögű koordinátarendszerben, amelyekre $1 \leqslant x \leqslant m$ és $1 \leqslant y \leqslant n$ teljesül. Legfeljebb hányat választhatunk ki ezen mn darab rácspont közül úgy, hogy semelyik négy kiválasztott pont se alkosson nem elfajuló paralelogrammát?

(*6 pont*) Javasolta: *Füredi Erik* (Budapest)

B. 5243. Az ABC háromszögben $CAB\sphericalangle = 48°$ és $ABC\sphericalangle = 54°$. A háromszög egy belső D pontjára teljesül, hogy $CDB\sphericalangle = 132°$ és $BCD\sphericalangle = 30°$. Igazoljuk, hogy az $ACDB$ töröttvonalat alkotó szakaszokból nem szerkeszthető háromszög.

(*5 pont*)

B. 5244. Határozzuk meg azokat az $n > 4$ egész számokat, melyekre minden n-nél kisebb k összetett számra $(k, n) > 1$.

(*5 pont*) Javasolta: *Róka Sándor* (Nyíregyháza)

B. 5245. *a*) Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok, páronként nem hasonló háromszög létezik, melynek mindhárom oldala egész szám, és az egyik szöge 3-szor akkora, mint egy másik.

b) A fenti tulajdonságú háromszögek között van-e olyan, amelynek mindhárom oldala legfeljebb 10?

(*6 pont*) *Hujter Mihály* (Budapest) ötlete alapján

Áprilisi fejtörő*. Helyezzünk el hat fehér bábut egy sakktáblára két szokásos készletből úgy, hogy egy feketét letéve bármely szabad mezőre, az biztosan üthető legyen.

Kovács Bence (Szombathely) és *Monos Attila* (Budapest)

❄

Beküldési határidő: 2022. május 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄

* Pontversenyen kívül. Egy lehetséges megoldást közlünk a májusi borítón.

Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (824–826.)

A. 824. Pozitív számok egy végtelen H halmazát töménynek nevezzük, ha minden $\big[1/(n+1), 1/n\big]$ alakú intervallumban (ahol n tetszőleges pozitív egész szám) van egy olyan szám, amely előáll két H-beli elem különbségeként. Létezik-e olyan tömény halmaz, amelyben a számok összege véges?

Javasolta: *Szűcs Gábor* (Szikszó)

A. 825. Keressük meg az összes $f:\mathbb{Z}^+\to\mathbb{R}^+$ függvényt, amelyre tetszőleges n és k pozitív egészekre $f(nk^2)=f(n)f^2(k)$, továbbá $\frac{f(n+1)}{f(n)}$ tart 1-hez.

A. 826. Az antilop egy sakkbábu, amely a huszárhoz hasonlóan lép: az $(x_1;y_1)$ mezőről pontosan akkor érhető el az $(x_2;y_2)$ mező antilopugrással, ha

$$\big\{|x_1-x_2|, |y_1-y_2|\big\}=\{3,4\}.$$

Egy $10^6\times 10^6$ méretű táblázat mezőit kitöltjük az egész számokkal 1-től 10^{12}-ig. Legyen D azon számok halmaza, amelyek $|a-b|$ alakban írhatóak, ahol az a-hoz tartozó mezőről elérhető a b-hez tartozó mező antilopugrással. Hányféle módon lehet elrendezni a számokat úgy, hogy D pontosan négy elemből álljon?

Javasolta: *Nikolai Beluhov* (Bulgaria)

Beküldési határidő: 2022. május 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄

Informatikából kitűzött feladatok

I. 562 (É). Egy műhold segítségével téglalap alakú területről fényerősség értékeket mértek éjszakai időszakban. A fényerősség 0 azon a helyen, ahol teljes a sötétség, és 100, ahol a műszer érzékelője maximumot érzékel. A téglalap alakú terület $N\times M$ négyzet területegységből áll, amelyek mindegyikét egy-egy fényerősség érték jellemez. A térkép szélein lévők kivételével minden területegységnek négy közvetlen szomszédja van.

Rendelkezésünkre áll a `terkep.txt` adatfájl, amelynek első sorában két egész szám ($1 \leqslant N, M \leqslant 100$) található, a térkép sorainak és oszlopainak száma. Az állomány következő N sorában, soronként M darab 0 és 100 közötti egész szám található, a fényerősség értékek. A térkép szélén a fényerősség értéke mindenhol 0. Az állomány soraiban az adatokat egy-egy szóköz választja el egymástól.

Készítsünk programot `i562` néven, amely az állomány adatait felhasználva a következő kérdésekre ad választ.

1. Olvassuk be és tároljuk el a `terkep.txt` állomány adatait, és annak felhasználásával oldjuk meg a következő feladatokat.
2. Határozzuk meg, hogy a terület hány százaléka nem sötét teljesen. Az eredményt két tizedesjegy pontossággal írjuk ki.

Fényesnek nevezzük azokat a mérési pontokat, amelyek nagyobb fényerősségűek a négy közvetlen szomszédjuknál.

Minta bemenet (a fényes mérési pontok félkövér stílussal):

7	8						
0	0	0	0	0	0	0	0
0	12	**52**	0	**86**	0	0	0
0	0	14	**86**	46	**52**	43	0
0	40	**100**	32	**96**	36	**66**	0
0	0	16	51	72	30	35	0
0	0	8	91	**100**	41	**86**	0
0	0	0	0	0	0	0	0

3. Írjuk a képernyőre a fényes mérési pontok számát.
4. Határozzuk meg a legkisebb területű azon téglalap bal felső és jobb alsó sarkának a koordinátáit, amelyben az összes fényes mérési pont benne van.
5. Határozzuk meg annak a $K \times K$-s négyzetnek a bal felső koordinátáit, amelyikben a legtöbb fényes mérési pont van. K értékét ($1 \leqslant K \leqslant \min(N, M)$) olvassuk be a billentyűzetről. Ha több megoldás van, akkor bármelyiket megadhatjuk.

Beküldendő egy tömörített `i562.zip` állományban a program forráskódja és rövid dokumentációja, amely megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben fordítható.

I. 563. Anna és Péter játék rulettel játszanak, illetve a játék nyerési lehetőségeit tanulmányozzák. A rulettben 0-tól 36-ig terjednek a számok. A rulettkeréken a számok egy körgyűrű 37 fiókjában találhatók, ezek közül zöld színű a nulláé, a többi harminchat szám fele-fele fekete, illetve piros színű dobozban foglal helyet.

Most csak színekre fogadnak, amely nyerés esetén a tét kétszeresét fizeti, vesztésnél a tét a banké. Anna csak pirosra és Péter csak feketére tesz. Céljuk a kezdőtőkéjük megkétszerezése. Egyforma zsetonszámmal kezdenek és elsőre mindketten 1-1 zsetont tesznek. Ha Anna veszít, akkor megkétszerezi a tétjét, ha nyer, akkor újra egyet tesz. Péter vesztés esetén eggyel növeli a tétjét, míg ha nyer, akkor ő is visszatér a kezdeti tétre. A piros és a fekete valószínűsége természetesen azonos, de nem pontosan 50%, mivel a golyó a 0-ra érkezhet 1/37-ed eséllyel, amely zöld színű. Ekkor mindketten vesztenek. A bank tőkéje korlátlan.

Táblázatkezelő program segítségével oldjuk meg a játék szimulációját. A táblázat elrendezése tetszőleges lehet, de ügyeljünk az áttekinthetőségre és a megértést feliratokkal segítsük elő. A táblázat legyen felkészítve arra, hogy a játék hosszú is lehet, de a még fel nem használt cellák maradjanak üresen. A kezdőtőke 10 és 100 zseton között változhat.

Indulásnak adjuk meg, hogy mennyi Anna és Péter kezdőtőkéje. A játék addig tartson, amíg az egyikőjük vagy eléri a kezdőtőke kétszeresét, vagy elveszíti az összes zsetonját.

Értékelés: a feladat megoldása eddig 7 pontot ér. További 3 pont kapható, ha egymás utáni 10 játék alapján meghatározzuk, hogy hányszor tesz tétet Anna és Péter a játék során.

Beküldendő egy `i563.zip` tömörített állományban a táblázatkezelő munkafüzet, illetve egy rövid dokumentáció, amelyben szerepel a megoldáskor alkalmazott táblázatkezelő neve, verziószáma.

I. 564. Az ingamozgás során a test egy köríven, két szélső helyzet között periodikus mozgást végez.

Készítsünk animációt egy SVG-típusú vektorgrafikus képállományba, amely egy inga mozgását mutatja be. Az animációban szereplő alakzatok tetszőleges méretűek, színűek és kitöltésűek lehetnek. Az animációt a képállomány szövegének szerkesztésével érdemes megoldani. Az animációban az alakzatok olyan sebességgel mozogjanak, hogy a mozgás megfigyelhető legyen. A lejátszási idő, az ismétlődések száma, valamint más paraméterek szabadon választhatók.

SVG-ábra animációjának készítése szerepelt az **I. 357.** feladatban, illetve az ábra szerkezetéről olvashatunk a `http://svg.elte.hu/` címen.

Értékelés: a matematikai inga mozgásának bemutatásával 7 pont és az ingamozgás további jelenségének ábrázolásával még 3 pont érhető el.

Beküldendő tömörített `i564.zip` állományban az animáció SVG-állománya és egy rövid dokumentáció, amely tartalmazza a megoldás vázlatos leírását.

I/S. 62. Egy országban N város található, és közöttük M darab kétirányú út vezet. Szeretnénk kiépíteni egy hálózatot úgy, hogy bizonyos városokba adótornyokat telepítünk (mindegyikbe legfeljebb egyet). A városokat 1-től N-ig indexeljük.

Egy út tökéletesen lefedett, ha pontosan az egyik végpont városába telepítünk adótornyot. Adjuk meg, hogy maximum hány adótornyot tudunk telepíteni úgy, hogy mind az M út tökéletesen legyen lefedve.

A bemenet első sorában az N és M számok találhatók szóközzel elválasztva. A következő M sor mindegyike két számot tartalmaz: egy adott várospár indexeit, amelyeket út köt össze.

A kimenet egyetlen sorában egy szám szerepeljen: maximum hány adótornyot tudunk telepíteni a feltételeknek megfelelően. Ha ez nem lehetséges, írjunk ki `-1`-et.

Bemenet	Kimenet
`5 3` `1 2 / 3 2 / 4 5`	`3`

Magyarázat: telepítsünk adótornyot az 1, 3, 5 indexű városokba.

Korlátok: $1 \leqslant N, M \leqslant 10^5$. Időlimit: 0,4 mp.

Értékelés: a pontok 50%-a kapható, ha az $1 \leqslant N, M \leqslant 10$ feltételek esetén a program helyes kimenetet ad.

Beküldendő egy `is62.zip` tömörített állományban a megfelelően dokumentált és kommentezett forrásprogram, amely tartalmazza a megoldás lépéseit, valamint megadja, hogy a program melyik fejlesztői környezetben futtatható.

S. 161. Egy épület különböző pontjaira vizet kell vezetni. Az épület tervrajzán N darab pont mutatja ezeket a helyeket. A tervrajzra gondolatban egy koordináta-rendszert illesztünk, amelyen az N pont mindegyike egész koordinátákra esik. A vezetékeket úgy építik, hogy a pontokat összekötik egyenes csövekkel úgy, hogy bármelyikből bármelyik másikba el lehessen jutni a csöveken haladva. A merev csöveket csak a tervrajzon jelölt pontokban tudjuk elágaztatni és nem is keresztezhetik egymást. Minden cső a koordináta-rendszer egy-egy rácsvonalára kerül és két megadott pontot köt össze. Adjuk meg, hogy legalább milyen hosszú lesz a csővezetékek hossza, ha közvetetten bármely két pontot összekötjük.

Bemenet: az első sor tartalmazza a pontok N számát. A következő N sor mindegyike egy-egy pont x és y koordinátáját tartalmazza.

Kimenet: a kimenet első és egyetlen sorába a csövek lehető legkisebb összhosszát kell kiírni. Ha nem lehet őket mind összekötni, akkor `-1`-et kell kiírni.

Minta:

Bemenet (a `/` jel sortörést helyettesít)	**Kimenet**
`6 / 0 2 / 0 3 / 1 0 / 1 3 / 2 2 / 2 3`	`7`

Korlátok: a koordináták abszolút értéke legfeljebb 1000 és $N \leqslant 30$. Időlimit: 0,5 mp.

Értékelés: a pontok 30%-a kapható, ha az x koordináta 0 vagy 1 értéke esetén a program helyes kimenetet ad.

Beküldendő egy `s161.zip` tömörített állományban a megfelelően dokumentált és kommentezett forrásprogram, amely tartalmazza a megoldás lépéseit, valamint megadja, hogy a program melyik fejlesztői környezetben futtatható.

❄

A feladatok megoldásai regisztráció után a következő címen tölthetők fel:
`https://www.komal.hu/munkafuzet`
Beküldési határidő: 2022. május 15.

❄

Mérési feladat megoldása

M. 410. *Ha egy kis méretű, erős mágnes és egy vízszintes helyzetű gemkapocs közé egy kártyalapot helyezünk, akkor a kártyánál fogva még fel tudjuk emelni a gemkapcsot. Mérjük meg, hány darab egymásra rakott kártyalap kell ahhoz, hogy már ne tudjuk felemelni a gemkapcsot! Mekkora ezen egymásra helyezett lapok vastagsága? Csatlakoztassunk egymáshoz két ugyanolyan kis mágnest, és vizsgáljuk meg, hány kártyalap szükséges ahhoz, hogy a gemkapcsot már ne tudjuk felemelni!*

(*6 pont*) Közli: *Szász Krisztián,* Budapest

Megoldás. *1. A mérés elve.* A feladatunk az volt, hogy meghatározzuk, hány kártyalap esetén nem tudja már felemelni a mágnes az acél gemkapcsot, amelyet egyébként magához vonz. Tulajdonképpen azt a távolságot határoztuk meg, amelynél a mágneses vonzóerőt éppen legyőzi a gravitációs erő. (Elvileg levegőben is ez a távolság adódna, mert a kártyák nem befolyásolják a mágneses mezőt.)

2. A mérés kivitelezése. Francia kártya kétféle paklijával végeztük a mérést, egy nagyobb és egy kisebb méretűvel. Gemkapocsból is két méretünk volt. Mivel nagyon erős mágnessel dolgoztunk, ezért nem egyesével adtuk hozzá a lapokat, hanem más módszert alkalmaztunk. Kerestünk olyan állapotot, aminél már nem tudja megemelni a gemkapcsot a mágnes, majd innen indulva csökkentettük a lapok számát addig, amíg felemelte, és végül visszatettünk még egy lapot a pakliba.

Ezután következett a kezünkben lévő kártyapakli vastagságának meghatározása. Ehhez egy „sarokba szorítottuk" a paklit, precízen hozzárendezve a falakhoz, majd egy derékszögű vonalzót illesztettünk mellé, végül lefényképeztük, és a kinagyított felvételről olvastuk le néhány tizedmilliméter pontossággal a pakli magasságát.

3. További méréseink:

– *Egy nagy gemkapocs, egy mágnes, másik paklival.* Ismét azt a módszert alkalmaztuk, mint az első mérésnél. Megkerestük azt az állapotot, aminél még nem emeli fel a mágnes a gemkapcsot, majd azt, ahol már felemeli. A másik pakli használatánál több kártyalapra volt szükségünk a megfelelő állapot eléréséhez, mint az első mérésnél, de a magasságuk csak 0,4 milliméterrel tért el egymástól. Mivel két különböző gyártótól származtak a kártyák, ez okozhatta a lapok vastagságának eltérését.

– *Egy nagy gemkapocs, két mágnes, két paklival.* Ennél a mérésnél jóval több kártyalapra volt szükségünk, mint amikor csak egy mágnest használtunk, ugyanis a két mágnes nagyobb távolságból is képes volt felemelni a gemkapcsot, mert együtt erősebb mágneses mezőt hoztak létre. Azért vegyítettük a két kártyapaklit, mert ha a körülbelül 100-100 db-os paklikból csak az egyikkel próbálkoztunk, a mágnesek bőven felemelték a gemkapcsot 100 lapon keresztül is.

– *Egy kis gemkapocs, egy mágnes, két paklival.* A gemkapocs mérete (és így a tömege is) kisebb volt, tehát a mágnes vonzóerejének kisebb nehézségi erőt kellett legyőznie. Emiatt vastagabb kártyarétegen keresztül is sikerült felemelnünk a gemkapcsot. Mivel egy pakliban nem volt elegendő számú kártyalap, ezért itt is két paklival kellett dolgoznunk.

– *Egy kis gemkapocs, két mágnes, két paklival.* Mivel az már egyetlen mágnesnél is látszott, hogy nem lesz elég egy pakli, nyilvánvaló volt, hogy rögtön két paklival kezdjük az emelési kísérletet. Érthetően ez lett a legtöbb kártyalapot „felemésztő" mérés a maga 145 lapjával.

4. Mérési eredmények:

	kis gemkapocs	nagy gemkapocs	
1 db mágnes	115 lap; 33,1 mm vegyes pakli	99 lap 27,5 mm nagy méretű pakli	83 lap 27,9 mm kis méretű pakli
2 db mágnes	145 lap 42,0 mm vegyes pakli	121 lap 36,3 mm vegyes pakli	
gemkapcsok tömege	0,35 g	0,90 g	

5. Tapasztalataink: Két mágnes esetén a mágneses mező erőssége (a mágnesektől bizonyos távolságban) nagyobb, mint egyetlen mágnes térerőssége. Mindkét méretű (tömegű) gemkapocs esetén azt tapasztaltuk, hogy nem pontosan kétszer akkora vastagságú kártyapaklit (kétszer annyi kártyalapot) kellett a gemkapocs és a két mágnes közé helyezzünk, hanem kevesebb is elegendő volt, hogy a mágnesek vonzóerejét ugyanakkorára csökkentsük, mint egyetlen mágnesnél volt. Pontosabban: kis gemkapocs esetében a távolságarány $\frac{42{,}0}{33{,}1}=1{,}27\approx 1{,}3$, nagy gemkapocsnál pedig $\frac{36{,}3}{27{,}7}=1{,}31\approx 1{,}3$ volt. Ebből arra következtethetünk, hogy a mágneses vonzóerő nem fordítottan arányos a távolsággal, hanem valamilyen más összefüggés (talán valamilyen hatványványfüggvény) szerint változik. (Ezt a távolságfüggést sokféle méretű, vagyis sokféle tömegű gemkapocs emelésével lehetne tanulmányozni.)

6. Mérési hibalehetőségek:

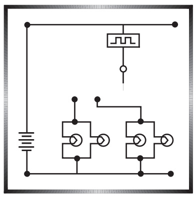
– A határeset megkeresésénél léphet fel ±1 lapnyi hiba.

– A kártyapakli vastagságának a vonalzóról történő leolvasása eredményezhet ±0,2 mm-es mérési hibát.

– A mágnes mérete lényegesen kisebb volt, mint a nagyobb méretű kártya. Igyekeztünk a legfelső kártya közepén tartani a mágnest, és a gemkapcsot is a másik oldalon próbáltuk úgy elhelyezni, hogy az éppen a mágnes alatt legyen, de ez nem mindig sikerült elegendő pontossággal.

Kiss Benedek (Sopron, Berzsenyi D. Ev. (Líceum) Gimn. és Koll., 9. évf.) és
Sós Ádám(Sopron, Berzsenyi D. Ev. (Líceum) Gimn. és Koll., 9. évf.)
mérőpár mérési jegyzőkönyve alapján

7 mérési jegyzőkönyv érkezett. 6 pontot kapott Daniel Fodor és Sterling Kocher (mérőpár), valamint Kiss Benedek és Sós Ádám (mérőpár). Kicsit hiányos (4–5 pont) 4, hiányos (2 pont) 1 dolgozat.



Fizika gyakorlatok megoldása

G. 755. *A* 80 kg *tömegű akcióhős olyan ejtőernyőt használ, amivel nyitott állapotban* 8 m/s *sebességgel süllyed. Egy jelenetben a* 60 kg *tömegű hősnőt a levegőben elkapja, majd ezután nyitja az ernyőt. Mekkora sebességgel ér földet az összekapaszkodott pár? Milyen magasságból történő leugrás esetén érnének szabadon esve ugyanekkora sebességgel a földre?*

(*4 pont*)

Megoldás. Az ejtőernyős addig gyorsul, amíg a légellenállásból származó erő kisebb, mint az emberre ható nehézségi erő, állandósult esési sebességnél pedig a két erő egyenlő. Ugyanakkora ejtőernyő esetében a légellenállás a sebesség négyzetével arányos. A két esetet összehasonlítva:

$$\frac{m_1 g}{m_2 g} = \frac{v_1^2}{v_2^2},$$

ahol $m_1 = 80$ kg, $m_2 = (80 + 60)$ kg, $v_1 = 8$ m/s, v_2 pedig az összekapaszkodott pár keresett sebessége.

A fenti egyenletből

$$v_2 = \sqrt{\frac{140}{80}} \cdot 8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 10{,}58\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Egy szabadon eső test

$$t = \frac{v_2}{g} = \frac{10{,}58\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 1{,}08\ \mathrm{s}$$

idő alatt éri el a v_2 nagyságú sebességet, miközben

$$h = \frac{g}{2}t^2 = \frac{9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{2}(1{,}08\ \mathrm{s})^2 \approx 5{,}7\ \mathrm{m}$$

utat tesz meg. Az akcióhős és a hősnő földet érési sebessége kb. 6 méter magasról történő leugrás végsebességének felelne meg, ha szabadon esnének.

Török Hanga (Budapest, Fasori Evangélikus Gimn., 10. évf.)

Megjegyzés. A megoldás során feltételeztük, hogy a közegellenállási erő teljes egészében az ejtőernyőtől származik, ami mellett az emberre (emberekre) ható légellenállás elhanyagolhatóan kicsi.

39 dolgozat érkezett. Helyes 27 megoldás. Hiányos (1–2 pont) 7, hibás 3, nem versenyszerű 2 dolgozat.

G. 760. *Alumíniumból készült,* 10 cm *magas, kúp alakú testet a csúcsához rögzített fonál segítségével lassan kiemelünk egy téglatest alakú akváriumból. Kezdetben a kúp a* 10 cm *átmérőjű alapkörén áll az akvárium alján, és a víz teljesen ellepi. Az akvárium térfogata sokkal nagyobb, mint az alumíniumkúpé.*

Ábrázoljuk a fonalat feszítő erőt a kúp elmozdulásának függvényében!

(*4 pont*) A KöMaL Nyári Tábor mérési feladata nyomán

Megoldás. Az alumíniumkúp magassága $M=10$ cm, alapkörének sugara $R=d/2=5$ cm. Az akváriumban a víz valamekkora h magasságban áll, és $M<h$, hiszen kezdetben a víz teljesen ellepi a fémkúpot.

Jelöljük a kúp alapkörének az akvárium aljától számított elmozdulását s-sel. A kúp térfogata

$$V_{\text{kúp}}=\frac{1}{3}R^2\pi M=262\ \text{cm}^3=2{,}62\cdot 10^{-4}\ \text{m}^3,$$

az alumíniumkúpra ható nehézségi erő

$$G=mg=\varrho_{\text{Al}}\,V_{\text{kúp}}\,g=2700\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\cdot(2{,}62\cdot 10^{-4}\ \text{m}^3)\cdot 9{,}81\ \frac{\text{N}}{\text{kg}}=6{,}94\ \text{N}.$$

Az alumíniumkúp kiemelésénél négy szakaszt különböztethetünk meg.

(*i*) Amíg a kúp az akvárium alján nyugszik ($s=0$), a nehézségi erővel a kúpra ható felhajtóerő ($F_{\text{felh.}}$) és az aljzat nyomóereje tart egyensúlyt. A fonalat feszítő erő $F_{\text{fonál}}=0$. A kúpra ható felhajtóerő megegyezik a kúp által kiszorított víz súlyával:

$$F_{\text{felh.}}=G_{\text{víz}}=m_{\text{víz}}g=\varrho_{\text{víz}}V_{\text{kúp}}g=1000\cdot(2{,}62\cdot 10^{-4})\cdot 9{,}81\ \text{N}=2{,}57\ \text{N}.$$

(*ii*) Ha lassan, egyenletes sebességgel elkezdjük felfelé húzni a kúphoz rögzített fonalat, a kúpra ható erők továbbra is egyensúlyban maradnak:

$$G=F_{\text{fonál}}+F_{\text{felh.}},$$

ahonnan

$$F_{\text{fonál}}=G-F_{\text{felh.}}=(6{,}94-2{,}57)\ \text{N}=4{,}37\ \text{N}.$$

A fonalat feszítő erő addig ennyi, amíg a kúp csúcsa el nem éri a víz felszínét, tehát amíg $s\leqslant h-M$.

(*iv*) Amikor $s\geqslant h$, akkor kúp teljesen kiemelkedett a vízből, a fonalat feszítő erő megegyezik a kúpra ható nehézségi erővel:

$$F_{\text{fonál}}=G=6{,}94\ \text{N}.$$

(Mivel az akvárium térfogata sokkal nagyobb, mint az alumíniumkúpé, a vízszint változását nem kell figyelembe vennünk.)

(*iii*) Ha $h-M<s<h$, az alumíniumkúp egy része már kiemelkedett a vízből, míg egy másik része még a vízszint alatt van. A kúpra ható felhajtóerő a kúp

vízbe merülő része által kiszorított víz súlyával egyenlő. A kiszorított víz térfogata megegyezik a víz alatt lévő csonkakúp térfogatával, amelyet úgy kapunk meg, hogy a kúp teljes térfogatából kivonjuk a víz feletti, kisebb kúp (csúcsi rész) térfogatát. A csúcsi rész alapkörének sugara r, a magassága x, ahol $x=s+M-h$. Hasonló derékszögű háromszögekből következik, hogy $\frac{R}{M}=\frac{r}{x}$, vagyis $r=\frac{R}{M}x$. A csonkakúp térfogata

$$V_{\text{csonkakúp}}=V_{\text{kúp}}-V_{\text{csúcs}}=V_{\text{kúp}}-\frac{1}{3}r^2\pi x=V_{\text{kúp}}-\left(\frac{R}{M}x\right)^2\pi\,\frac{x}{3}=V_{\text{kúp}}-\frac{R^2\pi}{3M^2}\cdot x^3.$$

Az ismert adatok behelyettesítése után ezt kapjuk:

$$V_{\text{csonkakúp}}=2{,}62\cdot 10^{-4}\ \text{m}^3-0{,}26\,x^3.$$

A fonalat feszítő erő

$$F_{\text{fonál}}=G-\varrho_{\text{víz}}gV_{\text{csonkakúp}}=6{,}94\ \text{N}-1000\cdot 9{,}81\cdot\left(2{,}62\cdot 10^{-4}-0{,}26\,\frac{x^3}{\text{m}^3}\right)\ \text{N}.$$

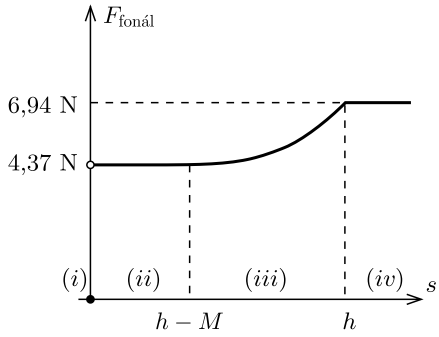
Figyelembe véve, hogy

$$x=s-h+M=s-h+0{,}1\ \text{m},$$

a fonálerő a kúp elmozdulásának függvényében:

$$F_{\text{fonál}}=$$
$$=4{,}37\ \text{N}+2551(s-h+0{,}1\ \text{m})^3\ \frac{\text{N}}{\text{m}^3}.$$

Miközben az s elmozdulás $h-M$-ről h-ra nő, a fonalat feszítő erő egy harmadfokú függvény szerint 4,37 N-ról 6,94 N-ra nő.



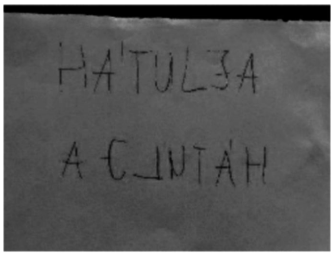
Hruby Laura (Budapest, Veres Pálné Gimn., 10. évf.)

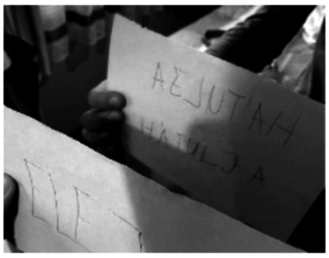
25 dolgozat érkezett. Helyes 5 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 9, hiányos (1–2 pont) 5, hibás 4, nem versenyszerű 2 dolgozat.

G. 761. *Hogyan írták a* HÁTULJA *szót a* KöMaL *felirat hátuljára: szokásos módon vagy tükörírással?*

(*3 pont*)

Megoldás. Egy ténylegesen elvégzett kísérlettel próbáltam kideríteni, hogy a HÁTULJA szót hogyan kell felírni ahhoz, hogy a lapot megfordítva a tükörben balról jobbra el tudjuk olvasni. Az első képen látható annak a lapnak a hátulja, amelyet megfordítva a tükör elé tettem. A második képen látható, hogy a tükörben az alsó sort lehet balról jobbra kiolvasni. Ebből megállapíthatjuk, hogy a KöMaL felirat hátuljára a HÁTULJA szót tükörírással kell felírni.





Földi Albert (Szolnok, Varga Katalin Gimn., 9. évf.)

52 dolgozat érkezett. Helyes 42 megoldás. Kicsit hiányos (2 pont) 1, hibás 5, nem versenyszerű 4 dolgozat.

G. 764. *Egy nyugalmi állapotból induló, szabadon eső test mozgásának utolsó másodpercében ugyanakkora utat tett meg, mint az első három másodperc alatt. Milyen magasról esett le a test? (Hanyagoljuk el a légellenállást.)*

(*4 pont*)

Megoldás. Mérjük az időt másodperc, a megtett utat pedig méter egységekben, és számoljunk g kerekített, $10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ értékével.

Egy szabadon eső test (ha a légelenállást elhanyagoljuk) t idő alatt $d=\frac{g}{2}t^2$ utat tesz meg. Az első három másodpercben ez az út:

$$d=\frac{10\cdot 3^2}{2}=45\ \mathrm{m}.$$

A t ideig tartó esés utolsó másodpercében is 45 métert tesz meg a test, tehát

$$\frac{10\,t^2}{2}-\frac{10\,(t-1)^2}{2}=45.$$

Ennek az egyenletnek $t=5$ a megoldása, vagyis az esés magassága:

$$h=\frac{g}{2}t^2=\frac{10}{2}\,5^2=125\ \mathrm{m}.$$

Ha g-nek a pontosabb, $9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ értékével számolunk, akkor a $h\approx 123$ m-es eredményt kapjuk.

Nagy Csenge (Székelyudvarhely, Tamási Áron Gimn., 9. évf.)

48 dolgozat érkezett. Helyes 30 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 7, hiányos (1–2 pont) 4, hibás 1, nem versenyszerű 6 dolgozat.

Fizika feladatok megoldása

P. 5347. *A kezdetben nyugvó, $m = 2$ kg tömegű test súrlódásmentesen mozoghat a vízszintes felületen. Egy adott pillanatban a testre a felülettel párhuzamosan egy olyan állandó irányú F erő kezd hatni, amelynek nagysága egyenletesen változva* 4 s *alatt* 0*-ról* 20 N*-ra nő.*

a) Mekkora lesz a test sebessége $t_1 = 3$ s múlva?

b) Mekkora utat tesz meg a test 3 s *alatt, ha a $t_2 = 2$ s alatt megtett út* $s_2 = \frac{10}{3}$ m?

(*5 pont*) Közli: *Kotek László,* Pécs

I. megoldás. Ha a 2 kg tömegű testre ható erő időben egyenletesen növekszik, akkor a test gyorsulása is egyenletesen változik, és $t_0 = 4$ s alatt 0-ról $a_0 = 10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$-re nő (*1. ábra*). Algebrai összefüggéssel:

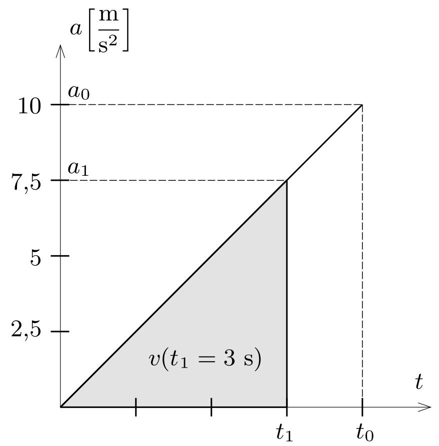
$$a(t) = 2{,}5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^3} \cdot t,$$

és a kérdéses

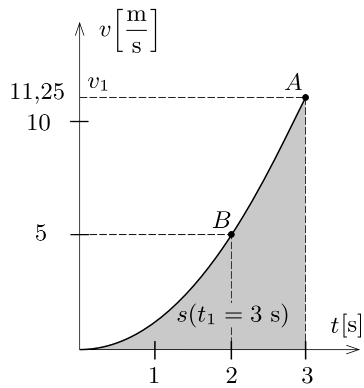
$$t_1 = \frac{3}{4} t_0 = 3\ \mathrm{s}$$

időpontban a gyorsulás:

$$a_1 = \frac{3}{4} a_0 = 7{,}5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$



1. ábra



2. ábra

a) A sebességet a gyorsulás–idő grafikon alatti területként kaphatjuk meg. Az 1. ábrán sötéten jelölt háromszögről leolvasható, hogy t_1 időpontban a sebesség:

$$v_1 = \frac{a_1\,t_1}{2} = \frac{7{,}5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot(3\ \mathrm{s})}{2} = 11{,}25\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Hasonló módon kapjuk, hogy tetszőleges t időpontban a sebesség:

$$v(t) = \frac{a(t)\cdot t}{2} = 1{,}25\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^3}\,t^2.$$

b) A sebesség–idő grafikon a *2. ábrán* látható. A t idő alatt megtett $s(t)$ út a parabola 0 és t időpontok közötti íve alatti területtel egyezik meg. Feladatunk a sötétebben jelölt terület nagyságának meghatározása.

Tudjuk, hogy a megtett utat egyenletes mozgás esetén a v_0t, egyenletesen gyorsuló mozgásnál az $\frac{a_0}{2}t^2$ képlet alapján számolhatjuk. Sejthető, hogy egyenletesen változó gyorsulás esetén a megtett út (ha a kezdősebesség nulla) az eltelt idő köbével arányos, és emiatt a 3 s alatt megtett út $(3/2)^3$-ször nagyobb, mint a 2 s alatt megtett $\frac{10}{3}$ méteres út.

Hogyan látható be ezen sejtés helyessége? Ha a 2. ábrán látható parabolát a t tengely mentén 2/3 arányban, a v tengely mentén pedig $(2/3)^2$ arányban összezsugorítjuk, akkor a görbe továbbra is parabola marad, de az A pont a B pontba kerül. Mivel a görbe alatti terület a két transzformáció együttes hatására $(2/3)^3$ arányban csökken, felírhatjuk, hogy

$$s(t=3\ \mathrm{s}) = \left(\frac{3}{2}\right)^3\cdot s(t=2\ \mathrm{s}) = \frac{27}{8}\cdot\frac{10}{3}\ \mathrm{m} = 11{,}25\ \mathrm{m}.$$

II. megoldás. A feladatot a differenciál- és integrálszámítás összefüggéseinek felhasználásával is megoldhatjuk. Esetünkben változó gyorsulású mozgással van dolgunk. A gyorsulás egységnyi idő alatt végbemenő változását „rándulásnak" nevezzük és j-vel jelöljük. A feladatban szereplő mozgás rándulása időben állandó, nagysága

$$j = \frac{\Delta a}{\Delta t} = \frac{10\ \mathrm{m}/s^2}{4\ \mathrm{s}} = 2{,}5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^3}.$$

A test rándulása a gyorsulás–idő függvény deriváltja:

$$j_0 = \frac{\mathrm{d}a(t)}{\mathrm{d}t},\qquad \text{tehát}\qquad a(t) = j_0\,t;$$

a test gyorsulása a sebesség–idő függvény deriváltja:

$$j_0\,t = \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t},\qquad \text{tehát}\qquad v(t) = j_0\frac{t^2}{2};$$

végül a test sebessége az út–idő függvény deriváltja:

$$j_0\frac{t^2}{2} = \frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t},\qquad \text{tehát}\qquad s(t) = j_0\frac{t^3}{6}.$$

(Kihasználtuk, hogy kezdetben, $t=0$ pillanatban a test gyorsulása, a sebessége és az elmozdulása is nulla.)

Ezek szerint a test sebessége $t=3$ s múlva

$$v(3\ \mathrm{s})=2{,}5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^3}\,\frac{(3\ \mathrm{s})^2}{2}=11{,}25\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}},$$

a megtett útja pedig

$$s(3\ \mathrm{s})=2{,}5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^3}\,\frac{(3\ \mathrm{s})^3}{6}=11{,}25\ \mathrm{m}.$$

Nem használtuk fel a 2 másodperc alatt megtett út megadott értékét, de ellenőrizhetjük, hogy az helyes-e:

$$s(2\ \mathrm{s})=2{,}5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^3}\,\frac{(2\ \mathrm{s})^3}{6}=\frac{10}{3}\ \mathrm{m}.$$

Waldhauser Miklós (Szegedi Radnóti M. Kísérleti Gimn., 11. évf.) dolgozata alapján

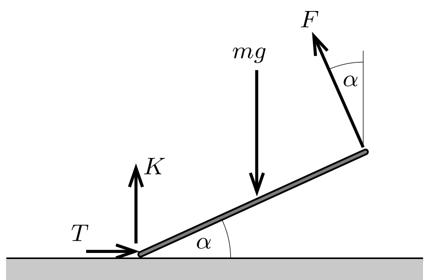
84 dolgozat érkezett. Helyes 51 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 13, hiányos (1–3 pont) 14, hibás 1, nem versenyszerű 5 dolgozat.

P. 5357. *Vízszintes asztallapon fekszik egy homogén tömegeloszlású rúd. Ezt a rudat lassan függőleges helyzetbe hozzuk az egyik végére ható, a rúdra mindenkor merőleges erővel. Legalább mekkora a rúd és az asztallap közötti tapadási súrlódási együttható, ha a rúd nem csúszik meg felállítás közben?*

(*5 pont*) Amerikai feladat nyomán

I. megoldás. Mivel a rudat lassan emeljük, ezért a rúd minden pillanatban nyugalmi helyzetűnek tekinthető. Emiatt a rúd minden helyzetében a rá ható erők összege és a forgatónyomatékok összege is *nulla.*

Legyen a rúdra mindenkor merőleges erő nagysága F, az asztal által kifejtett függőleges irányú kényszererő legyen K, a vízszintes irányú tapadási súrlódási erő pedig T. A rúd hosszát jelöljük ℓ-lel, tömegét m-mel, a vízszintessel bezárt szöge (ami lassan változik 0°-tól 90°-ig) legyen α (lásd az *1. ábrát*).



1. ábra

A forgatónyomatékok egyensúlyát (statikus esetben) a rúd bármely pontjára felírhatjuk. Legyen ez a pont a rúdnak az asztallal érintkező végpontja. Ekkor

$$F\ell=mg(\cos\alpha)\frac{\ell}{2},$$

vagyis

$$F=\frac{mg}{2}\cos\alpha. \tag{1}$$

A rúdra ható erők vízszintes irányú komponenseinek egyensúlya:

$$T(\alpha)=F\sin\alpha=\frac{mg}{2}\sin\alpha\,\cos\alpha, \tag{2}$$

a függőleges irányú komponenseké pedig

$$K+F\,\cos\alpha=mg,$$

ahonnan (1) felhasználásával

$$K(\alpha)=mg-\frac{mg\,\cos^2\alpha}{2}.$$

Az α szögben megemelt rúd akkor nem csúszik meg az asztalon, ha

$$T(\alpha)\leqslant\mu K(\alpha),$$

vagyis

$$\mu\geqslant\frac{T}{K}=\frac{\sin\alpha\,\cos\alpha}{2-\cos^2\alpha},$$

amit így is felírhatunk:

$$\mu\geqslant\frac{\sin\alpha\,\cos\alpha}{2\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}. \tag{3}$$

Bővítsük (3) jobb oldalán álló törtet $\frac{1}{\cos^2\alpha}$-val:

$$\mu\geqslant\frac{\operatorname{tg}\alpha}{2\operatorname{tg}^2\alpha+1}=\frac{1}{2\operatorname{tg}\alpha+\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}}. \tag{4}$$

Ennek az összefüggésnek tetszőleges $\operatorname{tg}\alpha$-ra teljesülnie kell, hiszen a rúd semelyik helyzetében nem csúszik meg. Alkalmazzuk (4) jobb oldalának nevezőjére a számtani és a mértani közepekre vonatkozó egyenlőtlenséget:

$$2\operatorname{tg}\alpha+\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\geqslant2\sqrt{2\operatorname{tg}\alpha\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}}=\sqrt{8},$$

ezzel a (4) feltétel:

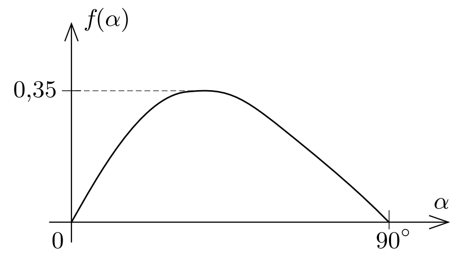
$$\mu\geqslant\frac{1}{\sqrt{8}}\approx0{,}35.$$

Ha ez teljesül, akkor a rúd a felállítása során nem csúszik meg.

Beke Bálint (Budapest, ELTE Apáczai Csere J, Gyak. Gimn., 11. évf.)

II. megoldás. Az I. megoldás gondolatmenetét követve a meg nem csúszás feltételére ezt kapjuk:

$$\mu \geqslant \frac{\sin\alpha\,\cos\alpha}{2-\cos^2\alpha} \equiv f(\alpha).$$



2. ábra

Ha ábrázoljuk az $f(\alpha)$ függvény grafikonját (pl. a `https://www.geogebra.org/classic?lang=hu` vagy a `https://www.wolframalpha.com/` alkalmazás segítségével), arról (lásd a *2. ábrát*) leolvashatjuk, hogy $f(\alpha)$ legnagyobb értéke kb. 0,35. Ha a tapadó súrlódási együttható ennél a számnál nagyobb, akkor a rúd függőleges helyzetbe hozható anélkül, hogy megcsúszna az asztalon.

Több dolgozat alapján

44 dolgozat érkezett. Helyes 23 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 3, hiányos (1–3 pont) 10, hibás 6, nem versenyszerű 2 dolgozat.

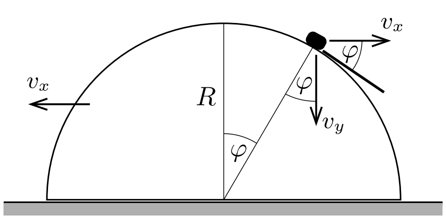
P. 5364. *Sima, vízszintes, súrlódásmentes síkon nyugszik egy R sugarú, m tömegű félhenger, domború felével felfelé. A félhenger tetejéről nyugalmi helyzetből indul el súrlódás nélkül egy kis méretű, de ugyancsak m tömegű test. Milyen hosszú utat tesz meg ez a test a félhengeren, mielőtt elválik tőle?*

(*5 pont*) Közli: *Szász Krisztián,* Budapest

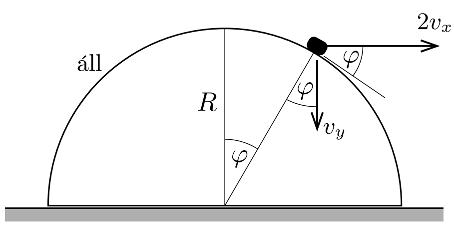
Megoldás. A kis testre a nehézségi erő hat lefelé, valamint a félhenger által kifejtett nyomóerő a félhenger felszínére merőlegesen. A félhengerre a gravitációs erő hat lefelé, az alátámasztás által kifejtett nyomóerő fölfelé, és a kis testre kifejtett nyomóerő ellenereje. Vízszintes irányban külső erő nem hat, a rendszer vízszintes irányú lendülete állandó, végig nulla, mint a kezdeti pillanatban. Ez úgy lehetséges, ha a henger sebessége és a kis test sebességének vízszintes komponense azonos nagyságú és ellenkező irányú (*1. ábra*).

Az energiamegmaradás törvénye szerint

$$mgR = mgR\cos\varphi + \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}m\left(v_x^2+v_y^2\right),$$



1. ábra



2. ábra

ahonnan

$$(1) \qquad 2gR(1-\cos\varphi) = 2v_x^2 + v_y^2.$$

A félhengerrel együtt mozgó vonatkoztatási rendszerben a félhenger áll, a kis test pedig egy kör mentén, a kör érintőjének irányában mozog. A kis test sebességének vízszintes komponense $2v_x$. Kényszerfeltétel, hogy a körpálya érintőjére merőleges sebességkomponens nulla: $v_y\cos\varphi = 2v_x\sin\varphi$. Ezt (1)-be helyettesítve kapjuk, hogy

$$v_x^2 = gR\frac{1-\cos\varphi}{1+2\,\mathrm{tg}^2\,\varphi}.$$

Amíg a kis test a félhenger felszínén mozog, addig v_x nem csökkenhet, hiszen a kör felszínére merőleges kényszererő vízszintes komponense a félhenger sebességével azonos irányba mutat, a nehézségi erőnek és a talaj nyomóerejének pedig nincs vízszintes komponense. A kis test akkor válik el a kör felszínéről, amikor a félhenger által kifejtett kényszererő nullává válik, vagyis amikor v_x értéke a legnagyobb. Ez ott következik be, ahol az

$$f(\varphi) = \frac{1-\cos\varphi}{1+2\,\mathrm{tg}^2\,\varphi}$$

függvénynek maximuma van a $[0;\pi/2]$ intervallumon. Szélsőértékszámítással, vagy $f(\varphi)$ grafikus ábrázolásával belátható, hogy $\varphi = \varphi_{\max} \approx 0{,}75(\mathrm{rad}) \approx 43^\circ$ szögnél van a maximum, így a kis testnek a félhenger felszínén megtett útja:

$$s = R\varphi_{\max} \approx 0{,}75\,R.$$

Dóra Márton (Budapest, ELTE Apáczai Csere J. Gyak. Gimn., 12. évf.)

50 dolgozat érkezett. Helyes 16 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 1, hiányos (1-3 pont) 21, hibás 7, nem versenyszerű 5 dolgozat.

P. 5366. *Ideális gáz állandó nyomáshoz, illetve állandó térfogathoz tartozó fajhőinek hányadosa κ.*

a) A gáz adiabatikusan tágul. Mekkora a gáz munkájának és a belső energia megváltozásának aránya?

b) A gáz izotermikusan összenyomódik. Mekkora a gáz munkájának és a felvett hőnek az aránya?

c) A gázt izobár folyamatban melegítjük. Mekkora a gáz munkájának és a felvett hőnek az aránya?

(*4 pont*) Közli: *Zsigri Ferenc,* Budapest

Megoldás. *a*) Ha a gáz adiabatikusan tágul, akkor a gázon végzett munka (W) negatív (azaz a gáz végez munkát: $W = -W_{\text{gáz}}$), és a gáznak átadott hő $Q = 0$. Az I. főtétel szerint a belső energia változása $\Delta U = Q + W$. Mivel $Q = 0$, $\Delta U = W = -W_{\text{gáz}}$, így $W_{\text{gáz}}$ és ΔU aránya -1.

b) Ha a gáz izotermikusan összenyomódik, akkor a hőmérséklet-változás $\Delta T = 0$. Ideális gázra

$$\Delta U = \frac{f}{2} nR\Delta T,$$

ahol f a szabadsági fokok száma, n a gáz mennyisége molban és R a gázállandó. Állandó hőmérsékleten a belső energia állandó, tehát $\Delta U = 0$. Mivel $\Delta U = Q + W = 0$, így $Q = -W = W_{\text{gáz}}$, tehát a gáz munkájának és a felvett hőnek az aránya $+1$.

c) Ha a gázt izobár folyamatban melegítjük, akkor a nyomása állandó, azaz $\Delta p = 0$. A belső energia változása:

$$\Delta U = \frac{f}{2}\, p\Delta V.$$

Kihasználtuk az egyetemes gáztörvényt, ami szerint esetünkben

$$n\, R\, \Delta T = \Delta(pV) = p\Delta V.$$

Másrészt tudjuk, hogy

$$Q + W = \Delta U = \frac{f}{2}\, p\Delta V,$$

továbbá hogy a gáz által végzett munka:

$$W_{\text{gáz}} = p\Delta V.$$

Ezek szerint

$$Q + W = Q - W_{\text{gáz}} = \frac{f}{2}\, W_{\text{gáz}},$$

azaz

$$Q = \left(\frac{f}{2} + 1\right) W_{\text{gáz}}.$$

Az ideális gáz állandó nyomáshoz, illetve állandó térfogathoz tartozó fajhőinek hányadosa a szabadsági fokokkal kifejezve:

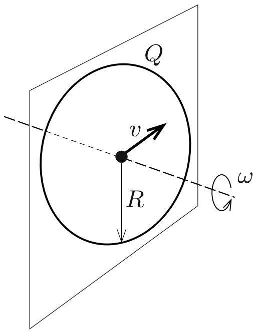
$$\kappa = \frac{f+2}{f}, \qquad \text{ahonnan} \qquad f = \frac{2}{\kappa - 1}$$

következik. Így izobár változásnál a gáz munkájának és a felvett hőnek az aránya:

$$\frac{W_{\text{gáz}}}{Q} = \frac{\kappa - 1}{\kappa} = 1 - \frac{1}{\kappa}.$$

Csillingek csapat:
Csilling Dániel (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 9. évf.) és
Csilling Katalin (Budapest, Szilágyi E. Gimn., 12. évf.)

61 dolgozat érkezett. Helyes 15 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 11, hiányos (1–2 pont) 21, hibás 9, nem versenyszerű 5 dolgozat.



P. 5368. *Egy* $R=30$ cm *sugarú, fémhuzalból készült karikának* $Q=6\cdot10^{-6}$ C *töltést adunk, majd a középpontján átmenő, a síkjára merőleges tengely körül* $\omega=520$ 1/s *szögsebességgel megforgatjuk vákuumban. Egy adott pillanatban egy elektron éppen a karika középpontján repül át* $v=120$ m/s *nagyságú, a karika síkjába eső sebességgel.*

Mekkora az elektron pályájának görbületi sugara a karika középpontjában, ha ott a Föld mágneses tere éppen az elektron sebességének irányába mutat?

(*5 pont*) Közli: *Holics László,* Budapest

Megoldás. A karikával együtt forgó töltések

$$I=\frac{\Delta Q}{\Delta t}=\frac{Q}{T}=\frac{Q}{\frac{2\pi}{\omega}}=\frac{Q\omega}{2\pi}$$

erősségű áramot hoznak létre. A karikát tehát tekinthetjük egy R sugarú körvezetőnek, amelyben I erősségű áram folyik.

Az elektron pillanatnyi helyén, vagyis a körvezető középpontjában a mágneses indukcióvektor nagysága

$$|\boldsymbol{B}|=\mu_0\frac{I}{2R}=\mu_0\frac{Q\omega}{4\pi R},$$

iránya pedig merőleges a karika síkjára.

A $(-e)$ töltésű, $\boldsymbol{B}$-re merőleges sebességű elektronra ható Lorentz-erő nagysága

$$F=\big|(-e)(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\big|=evB=\frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{evQ\omega}{R}.$$

(Mivel a földi mágneses tér iránya éppen párhuzamos az elektron sebességével, így a Lorentz-erő számításánál figyelmen kívül hagyható.)

Az m tömegű elektronra ható mágneses erő a részecske pályáját elgörbíti. Newton mozgásegyenlete szerint

$$F=m\frac{v^2}{r},$$

ahol r a pálya görbületi sugara a karika középpontjában. Innen kapjuk, hogy a keresett görbületi sugár:

$$r=\frac{mv^2}{F}=\frac{4\pi}{\mu_0}\,\frac{mvR}{eQ\omega}=10^7\,\frac{(9{,}11\cdot10^{-31})\cdot120\cdot0{,}3}{(1{,}6\cdot10^{-19})\cdot(6\cdot10^{-6})\cdot520}\,\mathrm{m}\approx66\ \mathrm{cm}.$$

Bencz Benedek (Budapest, Baár-Madas Ref. Gimn., 9. évf.)

25 dolgozat érkezett. Helyes 11 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 7, hiányos (1–3 pont) 4, hibás 1, nem versenyszerű 2 dolgozat.

P. 5370. *Egy rövidlátó ember szemének közelpontja* 8 cm-*re van a szemétől szemüveg nélkül. Mekkora lesz a közelpontjának a távolsága, ha felveszi* -5 *dioptriás szemüvegét?*

(*4 pont*) Közli: *Honyek Gyula*, Veresegyház

Megoldás. Az egyszerűség kedvéért tekintsük a szemet optikai szempontból egyetlen vékony lencsének, jóllehet a tényleges helyzet ennél bonyolultabb.

Jelölések:
– f_1 a szem fókusztávolsága,
– $D_1 = \frac{1}{f_1}$ a szem dioptriája,
– f_2 a szemüveg fókusztávolsága,
– $D_2 = \frac{1}{f_2}$ a szemüveg dioptriája,
– t_1 a közelpont és a szemlencse távolsága szemüveg nélkül,
– t_2 a közelpont és a szemlencse távolsága szemüveggel,
– k a szemlencse és a retina távolsága (a szem mérete).

Megjegyzés. A szem f_1 fókusztávolságát bizonyos határok között képesek vagyunk változtatni, legkisebb értéke a közelpontban lévő tárgytávolságnak felel meg. Ez az adat is független a szemüveg viselésétől.

A méterben mért fókusztávolság reciproka (a dioptria) megegyezik a közelponttávolság reciprokának és a képtávolság reciprokának összegével:

$$D_1 = \frac{1}{t_1} + \frac{1}{k}.$$

A szemüveg és a szemlencse nagyon közel van egymáshoz, így a dioptriájuk összeadódik, tehát a szemüveges ember szeme $D_1 + D_2$ dioptriásnak tekinthető.

A kép szemüveggel és anélkül is a szem „hátulján”, tehát ugyanott keletkezik, így fennáll, hogy

$$D_1 + D_2 = \frac{1}{t_2} + \frac{1}{k}.$$

A fenti két egyenlet különbségéből $D_2 = \frac{1}{t_2} - \frac{1}{t_1}$ adódik, vagyis (méter egységekkel számolva): $-5 = \frac{1}{t_2} - \frac{1}{0{,}08}$. Innen

$$\frac{1}{t_2} = -5 + 12{,}5, \qquad \text{azaz} \qquad t_2 = 0{,}133 \text{ m}.$$

Tehát a rövidlátó ember közelpontjának távolsága kb. 13 cm-re lesz a szemétől, ha felveszi a szemüvegét.

Marozsi Lenke Sára (Kecskeméti Katona J. Gimn., 11. évf.) és
Vig Zsófia (Szeged, SZTE Gyak. Gimn., 11. évf.)
dolgozata alapján

67 dolgozat érkezett. Helyes 39 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 7, hiányos (1–2 pont) 8, hibás 2, nem versenyszerű 11 dolgozat.

P. 5371. *A tau-részecske* (τ) *elektromos töltése ugyanakkora, mint az elektroné. Tömege* 3470-*szer akkora, mint az elektroné és* 1,89-*szer akkora, mint a protoné. Nagyon rövid az élettartama* ($3 \cdot 10^{-13}$ s), *mégis előfordulhat, hogy a protonnal kötött rendszert alkot. Ebben az esetben a két részecske a közös tömegközéppont körül körpályán kering, és a rendszer teljes perdülete* $n\hbar$ ($n = 1, 2, \ldots$).

a) Adjuk meg a τ*-proton atom és a* H*-atom színképeiben a megfelelő hullámhosszak arányát!*

b) Mekkora a τ*-proton atom kötési energiája?*

(*5 pont*) Közli: *Simon Péter,* Pécs

Megoldás. A $\tau-\mathrm{p}$ atom (tau-hidrogén) energiaszintjeit az $\mathrm{e}-\mathrm{p}$ rendszer (közönséges H-atom) energiaszintjeihez hasonló módon kaphatjuk meg, alkalmazva a Bohr-féle atommodell feltevéseit. A két eset közötti különbség az, hogy a τ-részecske tömege összemérhető a proton tömegével, emiatt célszerű merev testként kezelni ezt a rendszert.

Legyen a két részecske távolsága r, a tömegközéppontjuktól mért távolságok pedig
$$r_{\mathrm{p}} = \frac{m_\tau}{m_\tau + m_{\mathrm{p}}}\, r, \qquad \text{illetve} \qquad r_\tau = \frac{m_{\mathrm{p}}}{m_\tau + m_{\mathrm{p}}}\, r.$$
A τ-proton „merev test” tehetetlenségi nyomatéka a részecskék mozgási síkjára merőleges, a tömegközépponton átmenő tengelyre:

$$\Theta = m_{\mathrm{p}} r_{\mathrm{p}}^2 + m_\tau r_\tau^2 = \frac{m_{\mathrm{p}}\, m_\tau}{m_\tau + m_{\mathrm{p}}}\, r^2 \equiv m^*\, r^2. \tag{1}$$

(Az m^* mennyiséget a két részecske *redukált tömegének* nevezik.)

Ha a két részecske (mint merev test) ω szögsebességgel forog a közös tömegközéppont körül, akkor a perdülete (impulzusnyomatéka) a Bohr-féle kvantumfeltétel szerint

$$\Theta\omega = n\hbar, \tag{2}$$

ahol $\hbar = h/(2\pi)$ és n pozitív egész szám.

Mindkét részecske körmozgását a Coulomb-erő biztosítja:
$$m_{\mathrm{p}} r_{\mathrm{p}} \omega^2 = m_\tau r_\tau \omega^2 = k\frac{e^2}{r^2},$$
ahonnan

$$m^* r \omega^2 = k\frac{e^2}{r^2}. \tag{3}$$

Az (1), (2) és (3) összefüggésből kiszámíthatjuk, hogy
$$\omega = \frac{m^* \left(ke^2\right)^2}{\left(n\hbar\right)^3}, \qquad \text{illetve} \qquad r = \frac{\left(n\hbar\right)^2}{m^* (ke^2)}.$$

A rendszer teljes energiája a kinetikus és a potenciális energia összege:

$$E = E_{\mathrm{kin.}} + E_{\mathrm{pot.}},$$

ahol

$$E_{\mathrm{kin.}} = \frac{1}{2}\Theta\omega^2 = \frac{m^*(ke^2)^2}{2n^2\hbar^2}$$

a mozgási (kinetikus) energia,

$$E_{\mathrm{pot.}} = -\frac{ke^2}{r} = -\frac{m^*(ke^2)^2}{n^2\hbar^2}$$

pedig a rendszer potenciális (Coulomb-) energiája. Leolvashatjuk, hogy az összenergia

$$E = -\frac{m^*(ke^2)^2}{2n^2\hbar^2},$$

ami *a redukált tömeggel arányos.*

Hasonlítsuk össze a τ-proton és az elektron-proton rendszer kötési energiáját, vagyis számítsuk ki a redukált tömegek arányát. A hidrogénatomnál a redukált tömeg gyakorlatilag az elektron tömege (m_{e}), hiszen $m_{\mathrm{e}} \ll m_{\mathrm{p}}$. A megadott tömegarányok szerint a redukált tömegek aránya:

$$\frac{m^*_{\tau-\mathrm{p}}}{m^*_{\mathrm{e-p}}} = \frac{m_{\mathrm{p}}\, m_\tau}{m_{\mathrm{e}}(m_\tau + m_{\mathrm{p}})} = \frac{m_{\mathrm{p}}}{m_\tau} \cdot \frac{m_\tau}{m_{\mathrm{e}}} \cdot \frac{m_\tau}{m_\tau + m_{\mathrm{p}}} = \frac{3470}{1{,}89} \cdot \frac{1{,}89}{2{,}89} \approx 1200.$$

a) A τ-proton rendszer energiaszintjeinek abszolút értéke 1200-szor nagyobb, mint a hidrogénatom megfelelő energiaszintjeinek abszolút értéke. A Bohr-modell szerint a kisugárzott fotonok energiája az energiaszintek különbségével egyezik meg. Az elektromágneses hullámok frekvenciája (a $hf = \Delta E$ összefüggés szerint) ugyancsak egyenesen arányos a redukált tömeggel, a megfelelő hullámhosszak tehát a τ-proton színképében kb. 1200-szor rövidebbek, mint a H-atoméban.

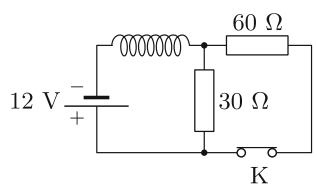
b) A kötési energia (az $n = 1$-es állapot ionizálásához szükséges energia) a τ-protonnál 1200-szor nagyobb, mint a H-atom 13,6 eV kötési energiája, tehát mintegy 16,3 keV, azaz kb. $2{,}6 \cdot 10^{-15}$ J.

Téglás Panna (Révkomárom, Selye János Gimn., 12. évf.)

15 dolgozat érkezett. Helyes 7 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 1, hiányos (1–3 pont) 5, hibás 2 dolgozat.

P. 5378. *Az* ábrán *látható áramkör* K *kapcsolója hosszú ideje zárva van. Egyszer csak a kapcsolót kinyitjuk. Mekkora a tekercsben indukálódó feszültség nagysága közvetlenül a kapcsoló kinyitása után?*

(5 pont) *Példatári feladat nyomán*



Megoldás. A kapcsoló zárt állásában az áramkör eredő ellenállása

$$R_\mathrm{e}=\frac{1}{\frac{1}{60\ \Omega}+\frac{1}{30\ \Omega}}=20\ \Omega.$$

A főágban, vagyis a tekercsen keresztül

$$I=\frac{U}{R_\mathrm{e}}=\frac{12\ \mathrm{V}}{20\ \Omega}=0{,}6\ \mathrm{A}$$

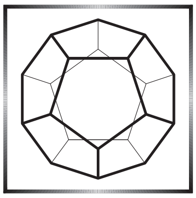
erősségű áram folyik.

Közvetlenül a kapcsoló kinyitása után a tekercsen átfolyó áram erőssége még mindig 0,6 A lesz. (Ha az áramerősség nagyon rövid idő alatt véges értékkel megváltozna, akkor az áramerősséggel arányos mágneses fluxus változási sebessége nagyon nagy lenne, ami nagyon nagy feszültséget indukálna a tekercsben.)

Az I erősségű áram most csak a 30 Ω-os ellenálláson folyik keresztül, azon tehát $0{,}6\ \mathrm{A}\cdot 30\ \Omega=18\ \mathrm{V}$ lesz a feszültség. Ez nagyobb, mint az áramforrás kapocsfeszültsége, a „hiányzó” 6 V feszültség tehát a tekercsben fog indukálódni.

Josepovits Gábor (Budapest, Szerb Antal Gimn., 11. évf.)

22 dolgozat érkezett. Helyes 15 megoldás. Hiányos (1–2 pont) 6, hibás 1 dolgozat.



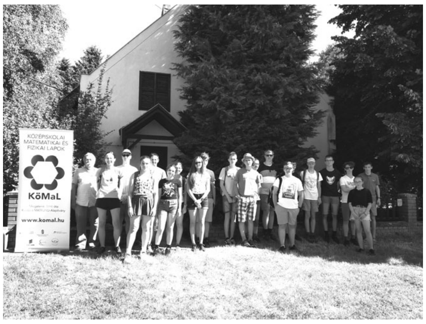
Nyári fizikatábor

2022. június 24. és június 30. között

Ismét megrendezzük a több évtizedes hagyományokkal rendelkező fizikatábort Dombóvár-Gunaras Üdülőfaluban, az apartman házakban és a hozzájuk tartozó zöldterületen. A táborba várjuk olyan fizika iránt nyitott tanulók jelentkezését a 9–11. évfolyamokról, akik tudnák vállalni az aktív tábori részvételt a vele járó utazási viszontagságokkal együtt. Elsősorban a KöMaL feladatmegoldóit várjuk, de korlátozott számban más – a fizika iránt határozottan érdeklődő – diák is részt vehet a táborban, ha valamilyen versenyeredménye, vagy a fizikatanárának ajánlása ezt alátámasztja.

A táborban (külön tanárokkal és programmal) részt vesz a nemzetközi matematikai diákolimpiára készülő „matematikus csapat” is, és az esti előadásokat (nemzetközileg is ismert előadókkal) közösen hallgathatjátok meg. A táborba olyan határon túli magyar középiskolásokat is várunk, akik aktív KöMaL versenyzők, vagy a fizika iránt elkötelezett, más versenyeken eredményesen szereplő diákok.

A Nemzeti Tehetségprogram keretében pályázott és elnyert összeg 2 860 000 Ft, mely pályázati forrásból biztosítja a MATFUND Alapítvány a tábor költségének egy részét (szállás + napi háromszori étkezés, fürdőbelépő, jutalmak, előadók tiszteletdíja stb.).



Május közepén email-ben küldjük el a diákoknak a tábori felhívást és a jelentkezési lapot, melyet azoknak kell elektronikusan visszaküldeniük, akik a nyári KöMaL Fizikatábor résztvevői akarnak lenni. A jelentkezési határidő: május 31.

Túljelentkezés esetén a pontverseny pillanatnyi állása, illetve a beérkezett jelentkezések sorrendje lesz a mérvadó.

Fizikából kitűzött feladatok

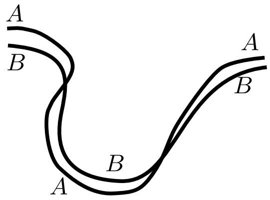
M. 413. Mérjük meg az étolaj törésmutatóját!

(*6 pont*) Közli: *Gnädig Péter,* Vácduka

G. 777. Szobahőmérsékletű presszókávét „felgőzöléssel” szeretnénk felmelegíteni. Becsüljük meg, hogy mennyit romlik eközben a kávé „minősége”, vagyis a töménysége!

(*4 pont*)

G. 778. Az *ábra* pocsolyán áthaladó biciklikerekek vizes nyomának egy részletét mutatja a száraz aszfalton. Balról jobbra vagy jobbról balra mozgott a bicikli? Melyik az első kerekének a nyoma, és melyik a hátsóé?



(*3 pont*)

G. 779. Ha a Hold felszínét óceánok és szárazulatok borítanák, akkor lenne-e a Holdon apály és dagály?

(*3 pont*)

G. 780. Zavarja-e a halakat, ha a parttól 2 méter távolságban beszélgetnek a horgászok? (A hang terjedési sebessége levegőben 340 m/s, vízben pedig 1500 m/s.)

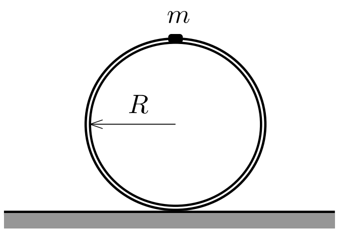
(*4 pont*)

P. 5400. A kis herceg egyik gömb alakú bolygója olyan gyorsan forog a tengelye körül, hogy az egyenlítőjén nulla a nehézségi gyorsulás. Milyen irányban nőnek a fák a bolygón?

(*4 pont*)

P. 5401. Egy kicsiny (pontszerűnek tekinthető), de nehéz testet két egyforma hosszú, közel azonos teherbírású fonálon tartunk. A fonalak felső végét egy vízszintes egyenes mentén lassan eltávolítjuk egymástól. Amikor a fonalak 2α szöget zárnak be egymással, az egyik fonál elszakad, és a test a másik fonál rögzítettnek tekinthető vége körül ingaként lengeni kezd. Mekkora lehetett α, ha a másik fonál a lengések során nem szakad el?

(*5 pont*) Közli: *Gnädig Péter,* Vácduka

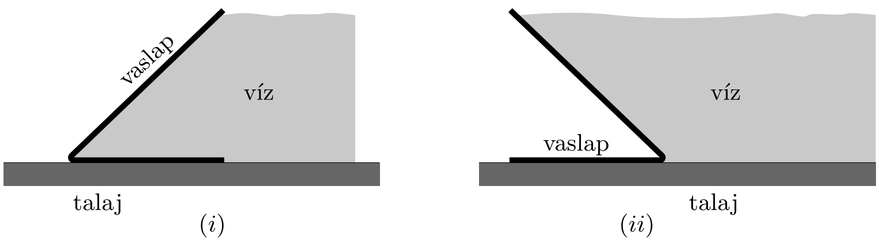


P. 5402. Egy R sugarú, elhanyagolható tömegű, vékony hengeres abroncsra egy m tömegű, pontszerű nehezéket erősítettünk. Az abroncs az *ábrán* látható labilis egyensúlyi helyzetéből kimozdul, és akkor csúszik meg a talajon, amikor középpontjának elmozdulása éppen R. Mekkora a tapadási súrlódási együttható az abroncs és a vízszintes talaj között?

(*5 pont*) Közli: *Balogh Péter,* Gödöllő

P. 5403. Valaki egy olyan mobilgát építését javasolta, ami egy vízszintes és hozzá 45°-os szögben csatlakozó vaslapból áll. A két fémlapnak a közös élre merőleges mérete 1 méter, illetve $\sqrt{2}$ méter, a fémlapok vastagsága 2 cm. *„Ezt a szerkezetet nemcsak a vaslapok súlya, de még a víz nyomása is a talajhoz szorítja”* – érvelt a feltaláló.

a) Legalább mekkora (tapadási) súrlódási együtthatóra van szükség a mobilgát és a talaj között, hogy a védelem még a maximális vízmagasság esetén is biztonságos legyen?



b) Hol lehet az ilyen alakú mobilgátakon a talaj által kifejtett függőleges nyomóerő támadáspontja, ha 2 cm-nél vastagabb, vagy vékonyabb vaslapot alkalmazunk? Felborulhat-e a mobilgát a legmagasabb vízállásnál (vagyis amikor a víz éppen a ferde vaslap tetejéig ér)?

Vizsgáljuk meg a mobilgát elhelyezésének kétféle lehetőségét:

(*i*) a ferde felület a víz felé dől;

(*ii*) a ferde felület a védendő terület felé dől.

(*5 pont*) Közli: *Simon Péter,* Pécs

P. 5404. Egy ideális Carnot-gép T_1 és T_2 ($T_2 < T_1$) hőmérsékletű hőtartályok segítségével (izotermikus és adiabatikus állapotváltozásokon keresztül) ciklusonként W hasznos munkát tud végezni. Hogyan módosul a hőerőgép hatásfoka, ha a munkahenger dugattyújának kicsiny súrlódása miatt ciklusonként $2q$ hő fejlődik ($q \ll W$), és ez a hő fele-fele arányban megosztva visszakerül a hőtartályokba?

(*5 pont*) Közli: *Wiedemann László,* Budapest

P. 5405. Két különálló ellenálláson összesen I erősségű áram folyik át. Igazoljuk, hogy a két ellenállásra eső összteljesítmény akkor minimális, ha a két ellenállásra eső feszültség megegyezik!

(*4 pont*) Közli: *Holics László,* Budapest

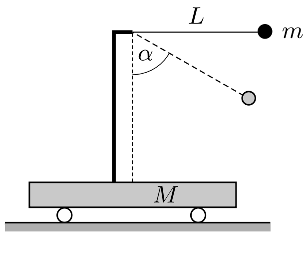
P. 5406. Maximálisan mekkora potenciálkülönbség hozható létre egy U feszültségű telep és két egyforma kondenzátor segítségével? A kondenzátorok feltöltésük után szabadon átrendezhetők és újra beköthetők egy hálózatba.

(*5 pont*) Példatári feladat nyomán

P. 5407. A CERN egyik lineáris gyorsítójában kezdetben állónak tekinthető protonokat gyorsítanak $L = 30{,}0$ m hosszú úton $U = 500$ MV feszültséggel. Feltehetjük, hogy a gyorsítóban az elektromos tér homogén. Mennyi idő alatt teszik meg a protonok az L távolságot?

(*5 pont*) Svájci versenyfeladat

P. 5408. A vízszintes felületen lévő, tartóoszloppal rendelkező, $M = 3m$ tömegű kiskocsira egy fonálingát szerelünk. Az inga hossza $L = 50$ cm, a végén lévő, pontszerűnek tekinthető golyó tömege $m = 0{,}15$ kg. Kezdetben a testek nyugalomban vannak. Az ingát a fonál feszes állapotában vízszintes helyzetéig kitérítjük, és kezdősebesség nélkül elengedjük. A súrlódás mindenhol elhanyagolható.



a) Mekkora a kocsi sebessége, amikor a fonál $\alpha = 60°$-os szöget zár be a függőleges iránnyal?

b) Mekkora erő feszíti ekkor a fonalat?

(*6 pont*) Közli: *Kotek László,* Pécs

Áprilisi pótfeladat.* A KöMaL minden számát a nyomdába adás előtt ketten is elolvassák. A mostani számban az egyik lektor 60, a másik 40 hibát talált, és ezek között 35 volt olyan, amelyet mindketten észrevettek. Becsüljük meg, hogy hány hiba maradhatott ezek után a kéziratban!

❄

Beküldési határidő: 2022. május 15.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄

MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL FOR SECONDARY SCHOOLS
(Volume 72. No. 4. April 2022)

Problems in Mathematics

New exercises for practice – competition C (see page 226): **Exercises up to grade 10: C. 1714.** The integers 1 to 22 are written on a blackboard. In each move, a pair of numbers is selected, erased and replaced with the absolute value of their difference. Prove that the last number added to the board is odd. (*German problem*) **C. 1715.** A circle k_1 of radius 8 cm lies in the interior of a circle k. Both circles intersect the circle k_2 of radius 15 cm, as shown in the *figure.* What is the radius of k if the shaded area inside k but outside k_1 is equal to the total area of the shaded regions in the interior of k_2? **Exercises for everyone: C. 1716.** In factorial representation, the place values of the digits are not the powers of a base: the nth place value is n factorial. Thus the digit in the first place is to be multiplied by 1, the digit in the second place is multiplied by 2, that in the third place is multiplied by 6, and so on. For example, the number $3310_!$ in factorial representation corresponds to the number $3\cdot 4!+3\cdot 3!+1\cdot 2!=92$ in decimal notation. (If there is a number of more than one decimal digits in a certain place then it is indicated by using brackets.)† It is observed that one third of $111_!$ is $11_!$, one third of $111\,111_!$ is $22\,011_!$, and one third of $111\,111\,111_!$ is $33\,022\,011_!$. Determine the factorial representation of one third of the number that consists of $3n$ digits of 1, also given in factorial representation. (Based on the idea of *I. Lénárt,* Budapest) **C. 1717.** Let x_1 and x_2 denote the two real roots of the equation $15x^2-21x+7=0$. Find the exact value of the expression $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}+\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$. **C. 1718.** Eight unit cubes are placed on a plane, and five further unit cubes are placed on top of them as shown in the *figure.* Find the lengths of the sides of triangle ABC. **Exercises upwards of grade 11: C. 1719.** In the interior of a regular triangle ABC consider the points P where side AB subtends an angle of 135°. Prove that the line segments PA, PB, PC can always form a triangle, and one angle of such triangles is always the same, independently of the position of point P. **C. 1720.** The elements of a given set of 10 elements are all at most two-digit positive integers. Is it true that such a set will always have two disjoint subsets in which the sum of the elements is equal?

* A pótfeladat megoldása beküldhető a `szerk@komal.hu` címre, de nem számít bele a pontversenybe.

† It can be shown that the representation is unique, that is, every positive integer has a single factorial representation. See the Informatics problems **I. 553.** of the January issue.

New exercises – competition B (see page 227): **B. 5238.** Solve the following equation over the set of positive integers: $(k+n)! = k^3+n^3+(k+n)(3kn-1)$. (*3 points*) (Proposed by *M. Szalai,* Szeged) **B. 5239.** The sides a, b and c of a triangle, in this order, form an arithmetic sequence. Show that the centre of the inscribed circle divides the angle bisector drawn to side b in a $1:2$ ratio. (*3 points*) **B. 5240.** Show that every positive integer n has a multiple in which the sum of the digits is n. (*4 points*) (Proposed by *Cs. Sándor,* Budapest) **B. 5241.** In a triangle ABC, the centre of the circumscribed circle is O, and $\angle ABC > 90^\circ$. The tangent drawn to the circumscribed circle at C intersects line AB at point P, and the perpendicular drawn from P to BC intersects line OC at Q. Prove that AB is perpendicular to AQ. (*4 points*) (Proposed by *Z. L. Nagy,* Budapest) **B. 5242.** Let m and n denote arbitrary positive integers. Consider those lattice points $(x;y)$ in the Cartesian coordinate plane for which $1 \leqslant x \leqslant m$ and $1 \leqslant y \leqslant n$. What is the maximum possible number of points that can be selected out of these mn lattice points such that no four points selected should form a non-degenerate parallelogram? (*6 points*) (Proposed by *E. Füredi,* Budapest) **B. 5243.** In a triangle ABC, $\angle CAB = 48^\circ$ and $\angle ABC = 54^\circ$. D is an interior point of the triangle such that $\angle CDB = 132^\circ$ and $\angle BCD = 30^\circ$. Prove that the line segments forming the polygon $ACDB$ cannot form a triangle. (*5 points*) **B. 5244.** Determine all integers $n > 4$ such that $(k,n) > 1$ for all composite numbers k less than n. (*5 points*) (Proposed by *S. Róka,* Nyíregyháza) **B. 5245.** *a*) Prove that there exist infinitely many, pairwise non-similar triangles in which the lengths of the sides are integers, and one angle is 3 times as large as another. *b*) Is there a triangle with the above property in which the lengths of the sides are all at most 10? (*6 points*) (Based on the idea of *M. Hujter,* Budapest) **April puzzle*.** Place on a chessboard six white chess pieces selected from two chess sets such that however a black piece is placed on a vacant field, it can be eliminated immediately.

New problems – competition A (see page 229): **A. 824.** An infinite set S of positive numbers is called thick, if in every interval of the form $\big[1/(n+1), 1/n\big]$ (where n is an arbitrary positive integer) there is a number which is the difference of two elements from S. Does there exist a thick set such that the sum of its elements is finite? (Proposed by *Gábor Szűcs,* Szikszó) **A. 825.** Find all functions $f:\mathbb{Z}^+\to\mathbb{R}^+$ that satisfy $f(nk^2)=f(n)f^2(k)$ for all positive integers n and k, furthermore $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(n+1)}{f(n)}=1$. **A. 826.** An antelope is a chess piece which moves similarly to the knight: two cells (x_1,y_1) and (x_2,y_2) are joined by an antelope move if and only if $\big\{|x_1-x_2|, |y_1-y_2|\big\} = \{3,4\}$. The numbers from 1 to 10^{12} are placed in the cells of a $10^6\times10^6$ grid. Let D be the set of all absolute differences of the form $|a-b|$, where a and b are joined by an antelope move in the arrangement. How many arrangements are there such that D contains exactly four elements? (Proposed by *Nikolai Beluhov,* Bulgaria)

Problems in Physics

(see page 251)

M. 413. Measure the refractive index of cooking oil.

G. 777. We would like to heat room temperature espresso coffee by “steaming”. Estimate how much the “quality” of the coffee deteriorates, that is, how much the coffee concentration decreases. **G. 778.** The *figure* shows the wet track of a bicycle on a dry asphalt after the bicycle passed a puddle. Did the bike move from the left to the right or

* Out of competition. A possible solution will be shown on the cover of the May issue.

from the right to the left? Which trail was made by the front wheel and which one was made by the rear one? **G. 779.** Would there be tides on the Moon if its surface was covered by oceans and landmasses? **G. 780.** Are fish disturbed by fishermen talking 2 metres away from the shore? (The speed of sound is 340 m/s in air and 1500 m/s in water.)

P. 5400. One of the little prince's spherical planets is spinning so fast that the gravitational acceleration on its equator is zero. In which direction do the trees on the planet grow? **P. 5401.** A small (considered point-like) but heavy body is held by two ropes having the same length and approximately the same working load limit. The upper ends of the ropes are slowly moved apart along a horizontal line. When the angle between the ropes becomes 2α, one of the ropes breaks and the body begins to swing as a pendulum about the fixed end of the other rope. What could the value of α be if the other rope does not break during the motion? **P. 5402.** A point-like weight m is attached to a thin ring of radius R and of negligible mass The ring moves out of its unstable equilibrium position shown in the *figure,* and it starts slipping on the ground when the displacement of its centre is just R. What is the coefficient of friction between the ring and the horizontal ground? **P. 5403.** Someone suggested building a mobile dam from iron sheets: a horizontal one and another which is attached to it and is tilted at an angle of 45°. The length of the edges of the sheets which are perpendicular to the common intersection line of the two sheets are 1 metre and $\sqrt{2}$ metres, and the width of the iron sheets is 2 cm. *"This structure is pressed against the ground not only by the weight of the iron plates but also by the pressure of the water"* – argued the inventor. *a*) What is the least value of the coefficient of static friction between the mobile dam and the ground in order that the dam should be able to protect safely even if the water level is maximum (that is: the level of the water reaches the top edge of the slant iron sheet)? *b*) Where is the point of application of the vertical normal force exerted by the ground on the mobile barrier of this shape, if we use iron sheets having a thickness less than 2 cm or more than 2 cm? Can the mobile dam overturn in the case of the highest water level (i.e. when the water just to the top of the tilted iron plate)? Investigate the two options for installing the mobile dam: (*i*) the tilted surface slopes towards the water; (*ii*) the tilted surface slopes towards the area to be protected (see the *figure*). **P. 5404.** An ideal Carnot heat engine, with the help of heat reservoirs of temperatures T_1 and T_2 ($T_2 < T_1$), can perform W work in each cycle (through isothermal and adiabatic processes). How will the efficiency of the heat engine change if the small friction between the piston in the working cylinder causes that $2q$ heat in each cycle is released ($q \ll W$), and this heat is absorbed evenly by the two heat reservoirs? **P. 5405.** The sum of the currents through two resistors is I. Prove that the total dissipated power in the two resistors is minimum if the voltages across the two resistors are equal. **P. 5406.** What is the maximum potential difference that can be created with the help of two alike capacitors and a battery of electromotive force U? The capacitors can be rearranged and connected into a circuit again after they were charged. **P. 5407.** Protons initially considered stationary in a linear accelerator at CERN are accelerated along a path of $L = 30.0$ m through a voltage of $U = 500$ MV. The electric field in the accelerator can be considered uniform. How long does it take for the protons to travel the distance L? **P. 5408.** A simple pendulum is attached to the top of a rod mounted to a trolley of mass $M = 3m$. The trolley is on a horizontal surface. The length of the thread of the pendulum is $L = 50$ cm, and the mass of the point-like bob at its end is $m = 0.15$ kg. Initially the objects are at rest. Then the pendulum bob is displaced such that its thread is tight and horizontal, and then released without initial speed. Friction is negligible everywhere. *a*) What is the speed of the trolley, when the angle between the thread and the vertical is $\alpha = 60°$? *b*) What is the tension in the thread at this position?