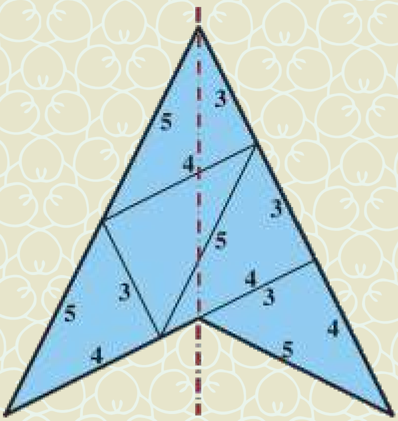
Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok

Informatika rovattal

KöMaL

Ábra a „Rejtvények, ördöglakatok” rovathoz



Kép a G.827-es feladathoz

IMO megoldások | Rátz László vándorgyűlés

Nyári fizika- és matematikatábor 2023

Beszámoló a 7. Európai Fizikai Diákolimpiáról

Októberi versenyfeladatok | Ceruza a gomblyukban

73. évfolyam
7. szám
2023.
október

A Bolyai János Matematikai Társulat és az Eötvös Loránd Fizikai Társulat folyóirata

KöMaL nyári tábor – 2023

A KöMaL támogatói

Nemzeti Tehetség Program

Nemzeti Kulturális Támogataskezelő

Kulturális és Innovációs Minisztérium

KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK
INFORMATIKA ROVATTAL BŐVÍTVE
ALAPÍTOTTA: **ARANY DÁNIEL** 1894-ben

73. évfolyam 7. szám — Budapest, 2023. október

Megjelenik évente 9 számban, januártól májusig és szeptembertől decemberig havonta 64 oldalon. ÁRA: 1250 Ft

TARTALOMJEGYZÉK

A 64. Nemzetközi Matematikai Diákolimpia feladatainak megoldása I. 386

Miklós Ildikó: 62. Rátz László Vándorgyűlés 391

A középiskolai tanárok versenyének feladatai 392

A 2023. évi Beke Manó Emlékdíjasok 396

A 2023. évi Reményi-díjasok 397

Németh László: Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire 397

Sáfár Lajos, Teleki Olivér: Megoldásvázlatok a 2023/6. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához 401

Kós Géza: Rejtvények, ördöglakatok – Pálcika a gomblyukban 411

A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok (779–783.) 413

A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (782–783., 1778–1782.) 414

A B pontversenyben kitűzött feladatok (5334–5341.) 415

Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (860–862.) 416

Informatikából kitűzött feladatok (599–602.) 417

Bényei Borisz, Lovas Márton: KöMaL nyári tábor 2023 422

Szász Krisztián, Vankó Péter: Beszámoló a 7. Európai Fizikai Diákolimpiáról 425

Ifjú Fizikusok Nemzetközi Versenye 431

Mérési feladat megoldása (423.) 434

Fizika gyakorlatok megoldása (816., 817.) 437

Fizika feladatok megoldása (5474., 5475.) 440

Fizikából kitűzött feladatok (425., 825–828., 5508–5516.) 442

Problems in Mathematics 445

Problems in Physics 447

A szerkesztőség címe: 1117 Budapest,
Pázmány Péter sétány 1/C III. emelet 3.405.
Telefon: +36 20 320-1143
A lap megrendelhető az Interneten:
`www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.h.shtml`.
Előfizetési díj egy évre: 10 400 Ft
Kéziratokat nem őrzünk meg és nem küldünk vissza. Minden jog a KöMaL tulajdonosaié.
E-mail: `szerk@komal.hu`
Internet: `http://www.komal.hu`
This journal can be ordered from
the Editorial office:
Pázmány Péter sétány 1/C III. emelet 3.405.
1117–Budapest, Hungary
telephone: +36 20 320-1143
or on the Postal address
H–1518 Budapest 112, P.O.B. 32, Hungary,
or on the Internet:
`www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.e.shtml`.
A Lapban megjelenő hirdetések tartalmáért felelősséget nem vállalunk.

A 64. Nemzetközi Matematikai Diákolimpia feladatainak megoldása I.

A hagyományoknak megfelelően közöljük a Nemzetközi Matematikai Diákolimpia feladatainak megoldásait. A megoldások leírására idén is a magyar csapat tagjait kértük meg. Közreműködésüket köszönjük, és ezúton is gratulálunk eredményeikhez.

A szerkesztőség

Első nap*

1. *Határozzuk meg az összes olyan $n > 1$ összetett egész számot, amely rendelkezik a következő tulajdonsággal: ha $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_k = n$ jelölik n pozitív osztóit, akkor $d_{i+1} + d_{i+2}$ osztható d_i-vel minden $1 \leqslant i \leqslant k-2$ esetén.*

Megoldás (Simon László Bence). Belátjuk, hogy n-nek nem lehet 1-nél több prímosztója, azaz hogy n prímhatvány. A prímhatványok nyilván teljesítik a feladat feltételeit, mivel ha $n = p^\alpha$, akkor $d_i = p^{i-1}$, és ekkor:

$$p^{i-1} = d_i \mid d_{i+1} + d_{i+2} = p^i + p^{i+1}.$$

Most vegyünk tetszőleges n-et, ami teljesíti a feladat feltételét, legyen a legkisebb valódi osztója $p = d_2$, minden szám legkisebb valódi osztója prím, ezért p prím. Mivel a legnagyobb osztónak az osztópárja nyilván a legkisebb osztó, ezért $d_1 d_k = n$, hasonlóan $d_2 d_{k-1} = n$ és $d_3 d_{k-2} = n$. A feltétel szerint:

$$\frac{n}{d_3} = d_{k-2} \mid d_{k-1} + d_k = \frac{n}{p} + n.$$

Egy felszorzás és leosztás után látszik, hogy ez ekvivalens azzal, hogy:

$$p \mid d_3 + p d_3,$$

azaz p osztja d_3-at. Most indukcióval belátjuk, hogy p osztja d_i-t minden $i \geqslant 2$-re. $i = 2, 3$-ra igaz az állítás, tegyük fel, hogy $i-1$-re és $i-2$-re igaz. Ekkor i-re is igaz, mivel:

$$p \mid d_{i-2} \mid d_{i-1} + d_i,$$

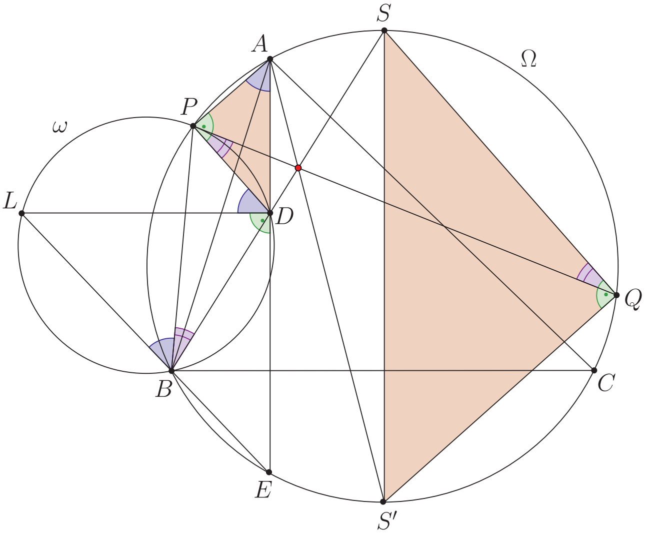
azaz mivel p osztja d_{i-1}-et, ezért p osztja d_i-t is. Tehát p osztja az összes osztót, kivéve az 1-et, azaz nem lehet másik prímosztó, tehát beláttuk amit akartunk, kész vagyunk.

2. *Legyen ABC egy hegyesszögű háromszög, amelyben $AB < AC$. Jelölje ABC körülírt körét Ω, melyen legyen S (az A pontot tartalmazó) CB ív felezőpontja.*

* A második nap feladatainak megoldását a novemberi számban közöljük.

Az A pontból BC-re bocsátott merőleges a BS egyenest D-ben, az Ω kört pedig az $E \neq A$ pontban metszi. Továbbá a BC-vel párhuzamos, D ponton átmenő egyenes az L pontban metszi a BE egyenest. Jelölje a BDL háromszög körülírt körét ω, és legyen P az ω és Ω körök B-től különböző metszéspontja. Bizonyítsuk be, hogy az ω-hoz P-ben húzott érintő és a BS egyenes a $BAC\sphericalangle$ belső szögfelezőjén metszik egymást.

1. megoldás. Legyen S' az Ω kör BC ívének felezőpontja, amely S-sel átellenes, ekkor SS' a kör BC-re merőleges átmérője, és az AS' húr felezi a BAC szöget. Messe az ω kör P-ben húzott érintője az Ω kört másodszor a $Q \neq P$ pontban; a Thalész-tétel miatt $SQS'\sphericalangle = 90°$.



A feladat állítása az, hogy az AS' szögfelező, a PQ érintő és a BDS egyenes egy ponton megy át.

Először megmutatjuk, hogy $AP \perp DP$. Az $APBE$ és $DPLB$ húrnégyszögek szögeiből

$$PAD\sphericalangle = PAE\sphericalangle = 180° - EBP\sphericalangle = PBL\sphericalangle = PDL\sphericalangle = 90° - ADP\sphericalangle;$$

az APD háromszögben $DPA\sphericalangle = 180° - PAD\sphericalangle - ADP\sphericalangle = 90°$.

Ezek után vegyük észre, hogy:

- Az ADE és az SS' egyenes is merőleges BC-re, tehát $AD \parallel SS'$.
- A PQ egyenes az ω kör P-ben húzott érintője, így

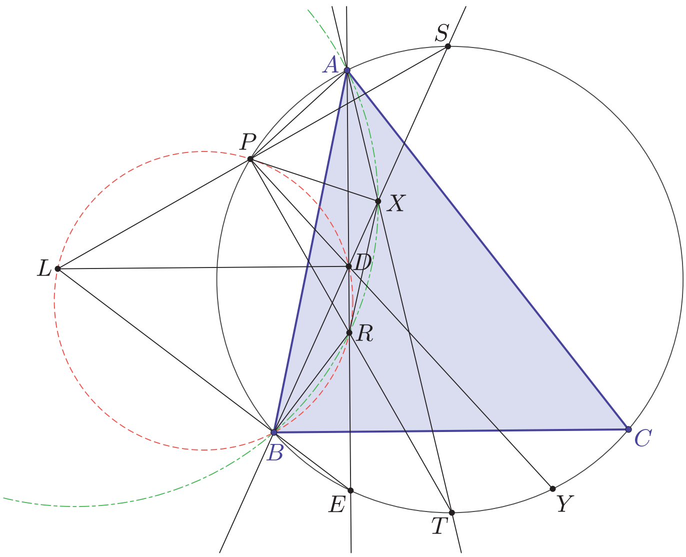
$$DPQ\sphericalangle = DBP\sphericalangle = SBP\sphericalangle = SQP\sphericalangle;$$

  ebből következik, hogy $PD \parallel QS$.
- Végül abból, hogy $AP \perp PD \parallel QS \perp S'Q$, kapjuk, hogy $AP \parallel S'Q$.

Ez a három együtt azt mondja, hogy az APD és $S'QS$ háromszögek megfelelő oldalai párhuzamosak. Ezért a két háromszög vagy egymás eltoltja, vagy pedig középpontosan hasonlók. De a két háromszög nem lehet egymás eltoltja, mert például az AD és $S'S$ oldalaik ellentétes irányúak.

Tehát, az APD és $S'QS$ háromszögek középpontosan hasonlók, a megfelelő csúcsaikat összekötő egyenesek, nevezetesen AS', PQ és DS egy ponton, a két háromszög hasonlósági pontján mennek át, és ez igazolja a feladat állítását.

2. megoldás (Lovas Márton). Lépésekben haladunk. Mindvégig irányított szögekkel dolgozunk.



Első lépés: L, P, S egy egyenesen vannak.

Bizonyítás: Vegyük észre, hogy

$$(LP, PB)\sphericalangle = (LD, DB)\sphericalangle = (BC, BD)\sphericalangle = (BC, BS)\sphericalangle,$$

és $(PS, PB)\sphericalangle = (CS, CB)\sphericalangle$. Mivel $SB = SC$, így $SBC\triangle$ egyenlő szárú, és ez a két szög egyenlő. Ekkor $(LP, PB)\sphericalangle = (PS, PB)\sphericalangle$-ből következik, hogy LP és PS ugyanaz az egyenes.

Második lépés: Legyen R ω és AE második metszéspontja, T pedig az A-t nem tartalmazó BC ív felezőpontja. Ekkor T, R, P egy egyenesen vannak.

Bizonyítás: $(LD, DR)\sphericalangle = 90°$, hiszen $LD \parallel BC \perp AE \parallel DR$. Ekkor

$$(LP, PR)\sphericalangle = (LD, DR)\sphericalangle = 90°,$$

tehát $LS \perp PR$. Mivel S és T átellenes pontok Ω-n, így a Thálész-tétel miatt $(TP, PS)\sphericalangle = 90°$, amiből $TP \perp LS$, vagyis R és T is rajta van az LS egyenesre P-ből állított merőlegesen.

Harmadik lépés: Legyen Y az az E-től különböző pont Ω-n, melyre $\widehat{ET} = \widehat{TY}$. Ekkor P, D, Y egy egyenesen vannak.

Bizonyítás: Számoljunk szögeket. Először is

$$(BP, PD)\sphericalangle = (BL, LD)\sphericalangle = (EB, BC)\sphericalangle = (EA, AC)\sphericalangle.$$

Szimmetria miatt $BY = EC$, és azonos húrhoz azonos kerületi szög tartozik, tehát $(EA, AC)\sphericalangle = (BP, PY)\sphericalangle$. Így $(BP, PD)\sphericalangle = (BP, PY)\sphericalangle$, vagyis P, D, Y kollineáris.

Negyedik lépés: Legyen X AT és BS metszéspontja. Ekkor $AXRB$ húrnégyszög.

Bizonyítás: Vegyük észre, hogy $(RA, AX)\sphericalangle = (EA, AT)\sphericalangle$. Mivel $ET = TY$, így

$$(EA, AT)\sphericalangle = (TP, PY)\sphericalangle = (RP, PD)\sphericalangle = (RB, BD)\sphericalangle = (RB, BX)\sphericalangle,$$

azaz $(RA, AX)\sphericalangle = (RB, BX)\sphericalangle$.

Ötödik lépés: $RX = XA$.

Bizonyítás: Tudjuk, hogy $AE \perp BC \perp ST$, vagyis $AE \parallel ST$, tehát

$$(EA, AT)\sphericalangle = (ST, TA)\sphericalangle.$$

A fentieket felhasználva

$$(RB, BX)\sphericalangle = (EA, AT)\sphericalangle = (ST, TA)\sphericalangle = (SB, BA)\sphericalangle = (XB, BA)\sphericalangle,$$

azaz RX-hez és XA-hoz ugyanakkora kerületi szög tartozik az $AXRB$ körben, ezért $RX = XA$.

Hatodik lépés: $PX = XR$.

Bizonyítás: Ehhez azt fogjuk belátni, hogy X az $APR\triangle$ köréírt körének középpontja. Először is vegyük észre, hogy

$$\begin{aligned}
2 \cdot (RP, PA)\sphericalangle &= 2 \cdot (RP, PS)\sphericalangle + 2 \cdot (SP, PA)\sphericalangle = 2 \cdot (SP, PA)\sphericalangle \\
&= 2 \cdot (SB, BA)\sphericalangle = 2 \cdot (XB, BA)\sphericalangle = (XB, BA)\sphericalangle + (RB, BX)\sphericalangle \\
&= (RB, BA)\sphericalangle = (RX, XA)\sphericalangle.
\end{aligned}$$

Ezt és az ötödik lépést figyelembe véve adódik a jelenlegi lépés állítása, hiszen X rajta van RA felezőmerőlegesén, és éppen kétszer akkora irányított szögből látszik RA-ból, mint P. Ez a két tulajdonság már egyértelműen meghatározza a köréírt kör középpontját.

Végezetül látható, hogy XR érinti ω-t, hiszen

$$(XR, RD)\sphericalangle = (XR, RA)\sphericalangle = (XB, BA)\sphericalangle = (RB, BX)\sphericalangle = (RB, BD)\sphericalangle,$$

vagyis érintőszárú kerületi szögről van szó. Adott pontból adott körhöz húzott érintők azonos hosszúak, és $PX = XR$, vagyis PX érinti ω-t, és készen vagyunk.

3. *Minden $k \geqslant 2$ egész számra határozzuk meg az összes olyan, pozitív egészekből álló $a_1, a_2, \ldots$ sorozatot, melyhez létezik olyan $P(x) = x^k + c_{k-1}x^{k-1} + \ldots + c_1x + c_0$ polinom, amelyre $c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}$ nemnegatív egész számok, és*

$$P(a_n) = a_{n+1}a_{n+2}\cdots a_{n+k}$$

fennáll minden $n \geqslant 1$ esetén.

Megoldás (Tarján Bernát). Ez pontosan akkor igaz, ha a_n számtani sorozat.

Ha a_n egy számtani sorozat $d \geqslant 0$ egész differenciával, akkor valóban van ilyen polinom, hiszen $a_{n+1}a_{n+2}\ldots a_{n+k} = (a_n+d)(a_n+2d)\ldots(a_n+kd)$, tehát a $P(x) = (x+d)(x+2d)\ldots(x+kd)$ polinom megfelelő.

Már csak azt kell belátni, hogy ha van ilyen polinom, akkor a_n számtani sorozat.

Tekintsük egy olyan a_n sorozatot, amire igaz a feladat állítása. Először belátjuk, hogy a_n konstans, vagy szigorúan monoton növő. Mivel $c_i \geqslant 0$ minden $0 \leqslant i \leqslant k-1$-re, $P(x) \geqslant x^k$, tehát minden n-re $\max\{a_i \mid n+1 \leqslant i \leqslant n+k\} \geqslant a_n$, és ha egyenlőség van, akkor $P(x) = x^k$, és indukcióval $a_m = a_n$ adódik minden m-re.

A továbbiakban feltesszük, hogy a_n nem konstans. Ekkor nincs egyenlőség, tehát minden n-re van $n < m \leqslant n+k$, amire $a_n < a_m$, tehát az a sorozat nem korlátos, hiszen találhatunk egy végtelen hosszú szigorúan monoton növő sorozatot, és $a_i \in \mathbb{Z}$. Tehát tetszőleges A korlátra létezik N úgy, hogy ha $n \geqslant N$, akkor $\max(a_{n+1}, \ldots, a_{n+k}) \geqslant A$.

Tehát $A \leqslant \max(a_{n+1}, \ldots, a_{n+k}) < a_{n+1}a_{n+2}\ldots a_{n+k} = P(a_n) \leqslant c \cdot a_n^k$ valamilyen alkalmas c konstansra, tehát minden A-ra létezik N úgy, hogy ha $n \geqslant N$, akkor $a_n \geqslant \sqrt[k]{\frac{A}{c}}$, tehát a_n tart a végtelenbe.

Tegyük fel, hogy a_n nem szigorúan monoton növő. Tekintsük a legkisebb a_n értéket, ha több ilyen van, akkor azt, amire n maximális. A végtelenbe tartás és az egész számok miatt mindenképpen van minimális elem, és ezek közül legnagyobb indexű. Ha ez a_1, akkor a_1-et elhagyva a sorozat továbbra sem lesz szigorúan monoton növő, és az új sorozatban kereshetjük meg az utolsó minimális elemet. Ha az első néhány elem elhagyása után mindig az első elem lesz az utolsó minimális elem, akkor a sorozat szigorúan monoton növekvő, egyébként pedig lesz, amikor ez nem igaz.

Legyen a $b_n = a_{n+m}$ sorozat egy olyan sorozat, amiben ez már nem igaz, és legyen b_n az utolsó minimális elem. Ekkor $b_n < b_{n+k}$, tehát

$$P(b_{n-1}) = b_nb_{n+1}\ldots b_{n+k-1} < b_{n+1}b_{n+2}\ldots b_{n+k} = P(b_n),$$

és $b_{n-1} \geqslant b_n$, de $P(x)$ monoton nő, hiszen minden együtthatója nemnegatív, tehát ez ellentmondás, így az a_n sorozat szigorúan monoton nő.

Legyen $d_{n;i} = a_{n+i} - a_n$. Ekkor $P(a_n) = (a_n + d_{n;1})(a_n + d_{n;2})\ldots(a_n + d_{n;k})$ minden n-re. $d_{n;1}$ korlátos, mert alkalmas c konstansra $P(x) \leqslant (x+c)^k$, tehát $a_{n+1}^k < a_{n+1}a_{n+2}\ldots a_{n+k} = P(n) \leqslant (a_n+c)^k$, vagyis $a_{n+1} < a_n + c$, így $d_{n;1} < c$. Ekkor $d_{n;i} = d_{n;1} + d_{n+1;1} + \ldots + d_{n+i-1;1} < c \cdot i$, tehát korlátos.

Legyen $S_n = \sum_{i=1}^{k} d_{n;i}$. Belátjuk, hogy kellően nagy n-re $S_n = c_{k-1}$. Ehhez elég egy adott $(d_1, d_2; \ldots; d_k)$ szám k-asra megmutatni, hogy ez igaz, mert ilyenből csak véges sok különböző van a d számok korlátossága miatt. Tehát ha minden ilyen szám k-asra, amire $\sum\limits_{i=1}^{k} d_i \neq c_{k-1}$ van olyan A, amire $x > A$-ból következik $(x+d_1)(x+d_2)\ldots(x+d_k) \neq P(x)$, akkor ezek maximumát véve kapunk egy olyan K korlátot, amire igaz, hogy ha $a_n > K$, akkor $S_n = c_{k-1}$.

Tegyük fel, hogy $d_1, d_2, \ldots, d_k$ olyan pozitív egészek, amikre $\sum\limits_{i=1}^{k} d_i \neq c_i$. Ekkor ha $Q(x) = (x+d_1)(x+d_2)\ldots(x+d_k)$, akkor $P(x) - Q(x)$ egy $k-1$-edfokú polinom, hiszen $Q(x)$-ben x^{k-1} együtthatója $\sum\limits_{i=1}^{k} d_i \neq c_{k-1}$. Ennek a $k-1$-edfokú polinomnak legfeljebb $k-1$ gyöke van, tehát kellően nagy x-re nem 0, így valóban igaz, hogy ha a_n elég nagy, akkor $S_n = c_{k-1}$.

Legyen N olyan, hogy ha $n \geqslant N$, akkor $S_n = c_{k-1}$. Ekkor tetszőleges $n \geqslant N$-re $S_{n+1} = S_n$, tehát

$$d_{n+1;1} + d_{n+1;2} + \ldots + d_{n+1;k} = d_{n;1} + d_{n;2} + \ldots + d_{n;k}, \quad \text{és} \quad d_{n+1;i-1} = d_{n;i} - d_{n;1},$$

tehát $d_{n+1;k} = kd_{n;1}$.

Legyen $d_{n;1} = \min\{d_{i;1} \mid i \geqslant N\}$.

$$k \cdot d_{n;1} = d_{n+1;k} = \sum_{i=1}^{k} d_{n+i;1} \geqslant d_{n;1} \cdot k,$$

tehát $d_{n+i;1} = d_{n;1}$ minden $0 \leqslant i \leqslant k$-ra, és innentől ugyanezt elmondhatjuk $(n+1)$-re is, tehát minden $m > n$-re $d_{m;1} = d_{n;1}$. Tehát a sorozat valahonnan kezdve egy számtani sorozat, így $P(x) = (x+d)(x+2d)\ldots(x+kd)$ adott d-re és végtelen sok x-re, vagyis az összesre, így csak ez lehet a polinom.

Innentől visszafelé indukcióval látszik, hogy a_n valóban egy számtani sorozat.

62. Rátz László Vándorgyűlés

Budapest, 2023. július 4–7.

A vándorgyűlést még soha nem rendezték Budapesten, mert ezidáig nem sikerült megfelelő helyszínt találni hozzá. Az idei vándorgyűlés helyszínének a Graphisoft Park jelentkezett, ami kellemes környezetet biztosított: a fővárosban egy csendes, zöldövezeti, folyóparti helyszínt.

A Bolyai János Matematikai Társulat oktatási bizottsága a tavalyi siker után idén is egy pályázattal segítette a fiatalok és az „elsőbálozók”, azaz először jelenlevők részvételi díjának kifizetését. Ennek, valamint valószínűleg a budapesti helyszínnek is köszönhetően sokkal többen jöttek el, mint azt az utóbbi években megszoktuk.

A megnyitón hagyományosan átadták a Beke Manó-emlékdíjakat és a Rényi-díjakat is. Ezután *Bojár Gábortól,* a Graphisoft alapítójától hallhattunk érdekes előadást arról, miért a matematika az ország egyetlen gazdasági kitörési pontja. Ezt hagyományosan a 2022. évi Rátz Tanár Úr Életműdíjas tanárok előadása követte, majd kulturális műsor következett óbudai diákok előadásában.

Ugyan a helyszín a főváros volt, mégis a nyári estéket kisvárosias hangulatban, a Graphisoft Park zöld területén elhelyezett asztaloknál kártyázva, beszélgetve, vagy a Római parton sétálva tölthettük, az utóbbi helyszínen már megszokottan újra és újra vándorgyűlési résztvevőkkel találkozva. A csütörtök délutáni kirándulások közeli helyekre vezettek minket: Aquincumba, a Vasarely Múzeumba, egy óbudai sétára, illetve a Hármashatár-hegyre.

A vándorgyűlésről hosszú beszámoló olvasható az Érintő Elektronikus Matematikai Lapok szeptemberi számában[1]. Az előadások anyagai és a legérdekesebb előadásokról készült videók megtekinthetők a vándorgyűlés honlapján[2].

A 2024. évi vándorgyűlésre ismét várja a matematikatanárokat a Bolyai János Matematikai Társulat.

Miklós Ildikó

A középiskolai tanárok versenyének feladatai

⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋰
L	V	R	L	V	...
R	L	V	R	L	...
V	R	L	V	R	...
L	V	R	L	V	...
R	L	V	R	L	...

1. Az R, L, V betűket az *ábra* szerint beírtuk egy 20×20-as táblázat mezőibe. Hány R, L és V betű került a teljesen kitöltött ábrába? (A) 132 R, 134 L, 134 V; (B) 133 R, 133 L, 134 V; (C) 133 R, 134 L, 133 V; (D) 134 R, 132 L, 134 V; (E) 134 R, 133 L, 133 V.

2. A 3, 3, 8, 11, 28 számokat két egész számmal kiegészítve a minta terjedelme kétszeresére nő, módusza és mediánja viszont nem változik. Mekkora lehet a kiegészített mintában a két ismeretlen szám összegének maximuma? (A) 56; (B) 57; (C) 58; (D) 60; (E) 61.

3. Valamely n egész számra $\sin\alpha = \frac{n-3}{n+5}$ és $\cos\alpha = \frac{4-2n}{n+5}$. Mennyi $16\,\mathrm{tg}^2\,\alpha$ maximális értéke? (A) 8; (B) 9; (C) 10; (D) 12; (E) Az előzők közül egyik sem.

4. Pozitív egész számok egy sorozatában a harmadik tagtól kezdve mindegyik az előző kettő szorzata. A hatodik tag értéke 4000. Melyik számmal kezdődik a sorozat? (A) 1; (B) 2; (C) 4; (D) 5; (E) 10.

5. Hány területegység annak a háromszögnek a területe, amely oldalainak hossza $\sqrt{6^2+7^2}$, $\sqrt{7^2+12^2}$ és $\sqrt{6^2+14^2}$? (A) $\sqrt{12^2+14^2}$; (B) 42; (C) $\frac{\sqrt{6^2+7^2}\cdot\sqrt{6^2+14^2}}{2}$; (D) 63; (E) 84.

[1] `https://ematlap.hu/tanora-szakkor-2023-3/1326-rlv-vandorgyules-a-graphisoft-parkban`.

[2] `https://www.bolyai.hu/62-ratz-laszlo-vandorgyules-budapest`.

6. Mennyi $\log_2^2 x$, ha $x > 1$, és $\log_2(\log_8 x) = \log_8(\log_2 x)$? (A) 9; (B) 12; (C) 16; (D) 18; (E) 27.

7. Kiss tanár úr azt a feladatot adta tanítványainak, hogy számolják ki az 1125, 2925, n számok legkisebb közös többszörösét. Róza tévedésből az 1725, 2925, n számok legkisebb közös többszörösét határozta meg, és ugyanazt az eredményt kapta, mint a társai. Mennyi n legkisebb lehetséges értékének prímtényezős felbontásában a kitevők összege? (A) 3; (B) 4; (C) 5; (D) 6; (E) 7.

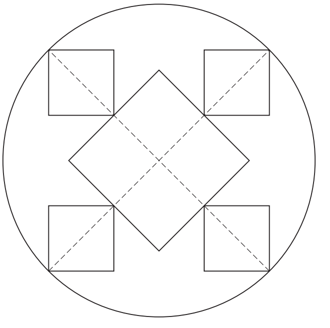
8. A nem elfajuló ABC háromszögben a C csúcshoz tartozó belső szögfelező a D pontban metszi az AB oldalt. $AD = 3$, $DB = 8$, továbbá az ABC háromszög oldalai és a CD szögfelező is egész hosszúságúak. Mekkora a háromszög kerülete? (A) 30; (B) 33; (C) 35; (D) 36; (E) 37.

9. Az a, b, c és d nullától különböző valós számokra teljesül a $\frac{b+c+d}{a} = \frac{a+c+d}{b} = \frac{a+b+d}{c} = \frac{a+b+c}{d} = r$ egyenlőség. Mennyi r lehetséges értékeinek összege? (A) 0; (B) 1; (C) 2; (D) 3; (E) 4.

10. A $k \in \mathbb{R}$ paraméter hány értékére lesz az $x^2 + kx + 36 = 0$ egyenletnek két különböző egész megoldása? (A) 6; (B) 8; (C) 9; (D) 14; (E) 16.

11. A pozitív egész számokból álló (a_n) számtani sorozat tagjaira teljesül, hogy $1 \leqslant a_1 \leqslant 10$, $13 \leqslant a_2 \leqslant 20$ és $241 \leqslant a_{15} \leqslant 250$. Mennyi a_{14} jegyeinek összege? (A) 8; (B) 9; (C) 10; (D) 11; (E) 12.

12. Az alábbi *ábra* szerint elhelyezünk 5 négyzetet egy 60 egység átmérőjű körben. Hány területegység az 5 négyzet területösszegének minimuma? (A) 900; (B) 1080; (C) 1200; (D) 1260; (E) 1350.



13. Egy élelmiszerboltban a tojást csak 10, 12 vagy 30 darabot tartalmazó dobozokban árulják. Így lehetetlen a boltban 14 vagy páratlan számú tojást vásárolni. Lehet viszont pl. 78 darabot $30 + 4 \cdot 12$ megoszlásban. Ha m darab a boltban be nem szerezhető páros számú tojások maximális mennyisége, akkor mennyi m számjegyeinek összege? (A) 8; (B) 9; (C) 10; (D) 11; (E) 12.

14. Egy háromszög területe 30 cm^2, egyik oldalának hossza 10 cm és ezen oldalához tartozó súlyvonalának nagysága 9 cm. Mennyi ennek a súlyvonalnak a háromszög hozzá tartozó oldalával bezárt szögének szinusza? (A) $\frac{3}{10}$; (B) $\frac{1}{3}$; (C) $\frac{9}{20}$; (D) $\frac{2}{3}$; (E) $\frac{9}{10}$.

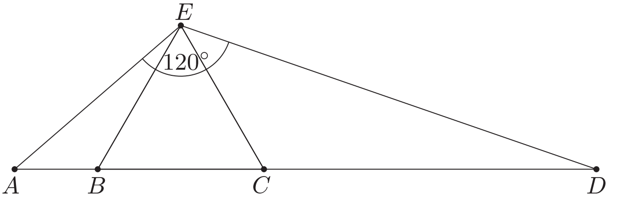
15. Petra és Réka egy kör alakú futópálya két átellenes pontjáról indulva egymással szemben futott. Első találkozásukig Petra 100 métert tett meg. Az első találkozásuk után Rékának még 150 métert kellett futnia ahhoz, hogy ismét egymás mellett haladjanak el. Ha a két lány sebessége végig állandó, akkor hány méter a pálya hossza? (A) 250; (B) 300; (C) 350; (D) 400; (E) 500.

16. Bea, Évi és Vera egy 6 fordulóból álló játékot játszik. Minden fordulóban egy győztes van, és a játék végeredménye véletlenszerűen alakul ki. Minden körben Bea $\frac{1}{2}$ valószínűséggel nyer, míg Évi kétszer akkora eséllyel nyer, mint Vera. Mi a valószínűsége annak, hogy a játék során Bea 3, Évi 2, Vera pedig 1 kört nyer meg? (A) $\frac{1}{432}$; (B) $\frac{5}{72}$; (C) $\frac{5}{36}$; (D) $\frac{1}{6}$; (E) $\frac{1}{3}$.

17. Mennyi az $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{4}{b}\right)$ kifejezés minimális értéke, ha a és b pozitív valós számok? (A) 3; (B) 6; (C) 9; (D) 10; (E) 12.

18. Ha x egy háromjegyű szám, akkor jelölje $M(x)$ és $m(x)$ rendre az x jegyeiből álló legnagyobb és legkisebb számot. Például $M(231)=321$ és $m(231)=123$, valamint $M(600)=600$ és $m(600)=006=6$. Hány olyan x valódi háromjegyű, pozitív egész szám van, amelyre teljesül az $x=M(x)-m(x)$ egyenlőség? (A) 0; (B) 1; (C) 2; (D) 3; (E) 4.

19. Az *ábra* szerint az ADE háromszögben $DEA\sphericalangle=120^\circ$ és B, C az AD oldal azon pontjai, melyekre a BCE háromszög szabályos. Ha $AB=4$, $CD=16$, akkor milyen hosszú a BC szakasz? (A) 8; (B) 8,5; (C) 9; (D) 9,5; (E) 10.

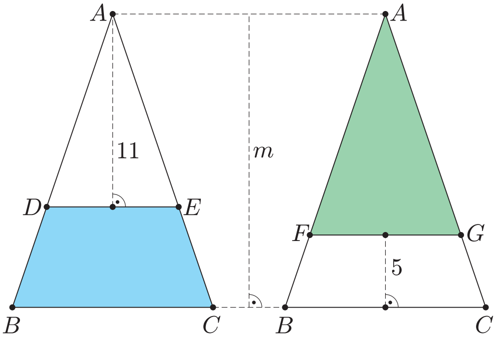


20. Egy 6 fős társaságban néhányan ismerik egymást, de vannak olyan személyek is, akik még soha nem találkoztak egymással. Ha a társaságból mindenki azonos számú ismerőssel rendelkezik, akkor hányféleképpen valósulhat ez meg? (Az ismeretséget két személy között kölcsönösnek tekintjük.) (A) 60; (B) 85; (C) 170; (D) 320; (E) 660.

21. Ha az a, b, c és d pozitív valós számokra teljesül, hogy $ab+2a+b+1=bc+3b+2c+5=ca+c+3a+2=24$, akkor mennyi az $(a+1)(b+2)(c+3)$ szorzat értéke? (A) 64; (B) 100; (C) 125; (D) 216; (E) 576.

22. Dia véletlenszerűen kiválaszt 3 különböző számot az $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ halmazból, és csökkenő sorrendben egymás mellé leírva egy háromjegyű számot alkot. Ugyanezt teszi Viki is, csak ő az $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ halmazból választja ki véletlenszerűen a számokat. Mennyi annak a valószínűsége, hogy Dia kap nagyobb számot? (A) $\frac{47}{72}$; (B) $\frac{37}{56}$; (C) $\frac{2}{3}$; (D) $\frac{49}{72}$; (E) $\frac{39}{56}$.

23. Az ABC egyenlő szárú háromszögben $AB=AC$. A mellékelt két *ábra* szerint a DE és FG szakaszok párhuzamosak a BC oldallal, a besatírozott részek azonos területűek, az ADE háromszög és a $BCGF$ trapéz jelölt magassága 11, illetve 5 egység hosszúságú. Hány egység az ABC háromszög m magassága? (A) 14,6; (B) 14,8; (C) 15; (D) 15,2; (E) 15,4.

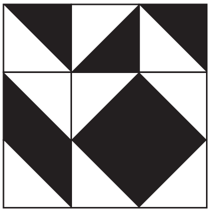


24. Egy 3×3-as négyzetrács minden mezőjét véletlenszerűen kiszínezzük az alábbi minták valamelyike szerint:

Mi a valószínűsége annak, hogy a négyzetrácson belül keletkezik olyan 2×2-es rész, amely közepén egy fekete négyzet alakul ki?

Az ábra egy ilyen lehetőséget mutat be:

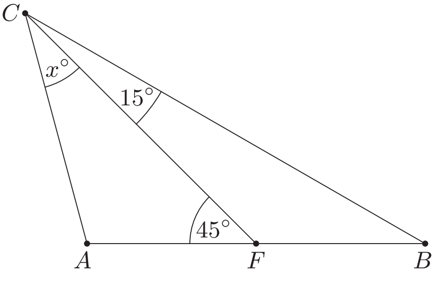
(A) $\frac{1}{1024}$; (B) $\frac{1}{256}$; (C) $\frac{1}{64}$; (D) $\frac{1}{16}$; (E) $\frac{1}{4}$.



25. A $H = \{1; 2; 3; \ldots; 19; 20\}$ halmaznak hány olyan $R = \{a; b; c\}$ részhalmaza van, amelyekre teljesül, hogy $a < b - 1 < c - 3$? (A) 680; (B) 816; (C) 969; (D) 1140; (E) 4080.

26. Legyen $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \ldots + \frac{2022}{2023!} = a - \frac{1}{b!}$, ahol a és b pozitív egész számok. Mennyi az $a + b$ összeg értéke? (A) 2021; (B) 2022; (C) 2023; (D) 2024; (E) 2025.

27. Az *ábra* szerinti ABC háromszögben $AF = FB$, $AFC\sphericalangle = 45^\circ$ és $BCF\sphericalangle = 15^\circ$. Ha $FCA\sphericalangle = x^\circ$, akkor mekkora x értéke? (A) 24; (B) 25; (C) 27; (D) 30; (E) 36.



28. Legyenek $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ olyan egész számok, melyekre

$$(1 - 3x) + (1 - 3x)^2 + \ldots + (1 - 3x)^{10} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{10}x^{10}.$$

Mennyi az $\left|\frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \ldots + \frac{a_{10}}{3^{10}}\right|$ kifejezés értéke? (A) 0; (B) 1; (C) 3; (D) 9; (E) 10.

29. Egy 3×3-as táblázat mezőit kitöltjük az 1–9 számokkal. Egy elrendezést „szépen rendezettnek” nevezünk, ha a táblázat soraiban balról jobbra, az oszlopaiban pedig felülről lefelé a számok növekvő sorrendben követik egymást. Az *ábra* egy ilyen elrendezést mutat be. Hány különböző „szépen rendezett” kitöltése van a táblázatnak? (A) 20; (B) 36; (C) 40; (D) 42; (E) 44.

1	2	6
3	5	8
4	7	9

30. Mennyi az $(x+7)^2+(y+2)^2$ kifejezés minimális értéke, ha $(x-5)^2+(y-7)^2 = 4$? (A) 144; (B) 169; (C) $229-24\sqrt{2}$; (D) 181; (E) 193.

A feladatsort **Fonyóné Németh Ildikó** és **Fonyó Lajos** állították össze, és **Kiss Géza** lektorálta.

A középiskolai tanárok versenyének eredménye

1. Fridrik Richárd (Szeged, magántanár),
2. Károlyi Gergely (Budapest, Berzsenyi Dániel Gimn.),
3. Vértes Judit (Budapest, VI. Kerületi Kölcsey Ferenc Gimn.),
4. Ujházy Márton (Budapest, ELTE Trefort Ágoston Gyak. Gimn.),
5. Magyar Zsolt (Budapest, Szent István Gimn.),
6. Beringer Dorottya (Budapesti Corvinus Egyetem),
7. Kovács Ildikó (Budapest, Veres Pálné Gimnázium),
8. Zádori Ferencné (Budapest, Bornemisza Péter Gimn.),
9. Bambi (jelige),
10. Veres Réka (Szeged, SZTE Gyak. Gimn. és Ált. Isk.).

Az általános iskolai tanárok versenyének eredménye

1. Nagy Tibor (Kecskemét, Petőfi Sándor Kat. Ált. Isk. és Óvoda),
2. Móróné Pálos Zsuzsanna (Budapest. Újbudai Teleki Blanka Ált. Isk.),
3. Tóth Gabriella (Csantavér, Hunyadi János Ált. Isk.),
4. Egyed László (Bajai III. Béla Gimn.),
5. Rózsáné Motkó Edit (Ócsai Bolyai János Gimnázium).

A 2023. évi Beke Manó Emlékdíjasok

A Beke Manó Emlékdíj Bizottság döntése alapján 2023-ban a díj második fokozatában részesült **Aszódiné Pálfi Edit** (Kecskeméti Kodály Zoltán Ének-zenei Ált. Isk., Gimn., Szakgimn. és Alapfokú Művészeti Isk.), **Garbaczné Olasz Andrea** (Eger, Eszterházy Károly Katolikus Egyetem Gyak. Ált. Isk., Gimn., Alapfokú Művészeti Isk. és Techn.), **Farkasházi Csilla** (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn.), **Kovács Gabriella** (Budapest, Jedlik Ányos Gimn.), **Kovács Béla** (Szatmárnémeti, Hám János Római Katolikus Teológiai Líceum), **Matyuska Ferenc** (Békéscsabai SZC Széchenyi István Két Tanítási Nyelvű Közgazdasági Techn. és Koll.) és **Nádháziné Borbola Éva** (Kecskeméti Katona József Gimn.).

A részletes indoklás a Bolyai János Matematika Társulat honlapján[3] olvasható.

[3] `https://www.bolyai.hu/dijak-beke-mano-emlekdij`

A 2023. évi Rényi-díjasok

Ákoshegyi Gerda Mária (Paks, Energetikai Techn. és Koll.), **Darabánt Emese** (Kőbányai Szent László Gimn.), **Dobos Sándor** (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn.), **Fazakas Tünde** (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn.), **Fonyóné Németh Ildikó** (Keszthelyi Vajda János Gimn.), **Halász Alexandra** (Kecskeméti Bányai Júlia Gimn.), **Horváthné Bujtás Anna** (Budapest V. kerületi Eötvös József Gimn.), **Hujter Bálint** (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn.), **Izsa Éva** (Budapest, Fasori Evangélikus Gimn.), **Kántorné Kovács Csilla Yvett** (Veszprém, Lovassy László Gimn.), **Kokaveczné Bánki Judit** (Szeged, Dugonics András Piarista Gimnázium, AMI és Koll.), **Márffy Katalin** (Veszprém, Lovassy László Gimn.), **Reiterné Makra Zsuzsanna** (Kecskeméti Bányai Júlia Gimn.), **Remeténé Orvos Viola** (Debreceni Fazekas Mihály Gimn.), **Simon János** (Budapest, Békásmegyeri Veres Péter Gimn.), **Szaszkó-Bogárné Eckert Bernadett** (Szegedi Radnóti Miklós Kís. Gimn.), **Szász Csilla** (Váci SZC Boronkay György Műszaki Szakgimn. és Gimn.), **Szeibert Janka** (Szegedi Radnóti Miklós Kís. Gimn.), **Tóth Marianna** (Debreceni Fazekas Mihály Gimn.).

Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire

Kedves Olvasók!

Ezek a feladatsorok azért készülnek, hogy felkészülési lehetőséget biztosítsanak az írásbeli érettségire azoknak, akik emelt szintű vizsgát kívánnak tenni. A feladatsorokat tapasztalt tanárok állítják össze, köztük olyanok is, akik maguk is részt vesznek az érettségi feladatok összeállításában.

Az idei tanévtől lehetőségetek van beküldeni a megoldásotokat az

`emeltkomal@gmail.com`

címre. A beérkezett dolgozatokat kijavítjuk és visszaküldjük, így is segítve a felkészüléseteket. (A beküldéssel kapcsolatos technikai tudnivalókat a feladatsor végén találod meg.)

A legszorgalmasabb, illetve legeredményesebb beküldők között a tanév végén KöMaL ajándéktárgyakat sorsolunk ki.

Sikeres felkészülést kívánunk!

I. rész

1. *a*) Oldjuk meg a valós számok halmazán a $3\sqrt{x}+|x-13|=15$ egyenletet.

b) Határozzuk meg azt a legkisebb n természetes számot, amelyre

$$\lg\left[(n-2)^2-(n-1)(n-3)\right]+\lg\frac{9n^2+18n+9}{n^2-1}<1. \qquad (\textit{14 pont})$$

2. Egy nyolcfős társaság egy kör alakú asztal mellett úgy foglal helyet, hogy a szomszédok egymástól mért távolsága egyenlő. Mindenkinek a két közvetlen mellette, és a vele pontosan szemben ülő az ismerőse, a többiek nem. (Az ismeretség kölcsönös.) Rajzoljuk meg az ismeretségi gráfot.

a) Az ismeretségi gráfot hány éllel kell kiegészíteni, hogy az teljes gráf legyen, illetve hány él elhagyásával kaphatunk fagráfot?

A társaságból kisorsolunk két embert, majd megállapítjuk, hogy ismerik-e egymást, vagy sem. Ezt az eljárást összesen hatszor végezzük el.

b) Mennyi a valószínűsége annak, hogy legalább kétszer ismerős személyeket sorsolunk ki?

c) Az előbbi hat sorsolás esetén mennyi az ismerős párok számának várható értéke? (*12 pont*)

3. Adott az $f(x)=2\cos x$, $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ függvény, és a $P(0;y)$, $y\in[2;\pi]$ pont.

a) Számítsuk ki y pontos értékét, ha P-ből az $f(x)$ grafikonjához húzott érintők merőlegesek egymásra.

b) Milyen x esetén lesz az $f(x)$ függvény első és második deriváltjának értéke egyenlő? (*12 pont*)

4. Egy vállalati rendezvény szervezői az étrend tervezése előtt felmérték az igényeket, amelynek során a következő adatokat kapták. A résztvevők 12,5%-a vegetáriánus, a férfiak között 1-gyel kevesebb vegetáriánus van, mint a nők között. A nők hetedrésze vegetáriánus.

a) Hányan vettek részt a rendezvényen, ha 2-vel több nő volt, mint férfi?

Az est folyamán 16 nő és 12 férfi vetélkedőn vett részt, ahol a hétfős csapatok mindegyike 4 nőből és 3 férfiból állt.

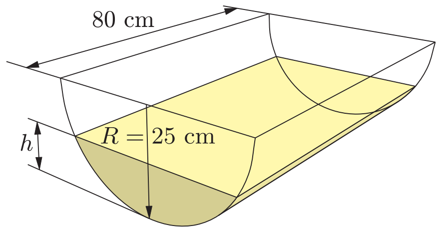
b) Hányféleképpen lehet a négy csapatot összeállítani, ha a csapatokat nem különböztetjük meg?

A csapatok tagjai később egyéni versenyben is összemérték tudásukat. Itt háromféle díjat lehetett nyerni, mozijegyet, serleget vagy festményt. Egy személy több díjat is kaphatott, de minden fajtából legfeljebb egyet. Mozijegyet 12-en, serleget 10-en, festményt 7-en kaptak. Csak mozijegyet 6, csak serleget szintén 6 személy vehetett át, míg pontosan két díjat öten vihettek haza.

c) Hányan kaptak csak festményt az esten, ha összesen 20-an kaptak díjat? (*13 pont*)

II. rész

5. Egy gépjármű zárt üzemanyag tartálya olyan félhenger, amelynek a tengelyén átfektetett határolósíkja vízszintes, a körhenger palástja a sík alatt van, a henger sugara 25 cm, hossza 80 cm (lásd az *ábrát*).



A gépjármű műszerfalán az üzemanyagszint-jelző a tartályban levő folyadékszintnek a teljes magassághoz viszonyított arányát jelzi.

a) Hány liter üzemanyag van a tartályban, ha a szintjelző az 1/2-en áll?

b) Hány négyzetméter lemezre van szükség a tartály elkészítéséhez, ha az illesztések kialakítására a felhasznált teljes mennyiség 5%-át kell fordítani?

Egy autó 100 km-re jutó átlagfogyasztását az $F(v)=\frac{(v-50)^2}{1600}+5$ képlet határozza meg, ahol v a jármű km/h-ban mért sebességének nagysága ($v\geqslant 50$), a kapott eredmény az elfogyasztott üzemanyag literben mért mennyisége.

c) Mennyi utat tud megtenni ez az autó 36 liter üzemanyag felhasználásával, ha az út harmadán 90 km/h-s, a többin pedig 130 km/h-s sebességgel halad? (*16 pont*)

6. Aranka és Bálint három egyforma szabályos dobókockával játszik a gyerekszoba parkettáján. Egymásra rakják ezeket úgy, hogy egy négyzet alapú egyenes hasáb (torony) keletkezik, majd megszámolják, hány pöttyöt látnak a tornyon összesen. (Ezeken a dobókockákon az 1 pöttyel szemközti lapon 6, a 2-vel szemköztin 5, a 3-mal szemköztin 4 pötty található.)

a) Milyen értékeket kaphattak eredményül?

Ötször egymás után építettek egy-egy tornyot úgy, hogy a dobókockákat véletlenszerűen rakták egymásra. Mindegyik tornyon megszámolták a pöttyöket, és azt kapták, hogy az adatok egyetlen módusza 43, mediánja 44, átlaga 44,4.

b) Határozzuk meg az adathalmaz alsó és felső kvartilisét.

Aranka és Bálint elhatározták, hogy ledöntik az egyik ilyen kockatornyot, de előtte megtippelik, hogy a parkettára eső kockákon hány pötty látszik majd összesen. Aranka azt mondta, hogy a pöttyök száma legalább 57 lesz, Bálint pedig azt, hogy legfeljebb 49.

c) Mekkora a valószínűsége annak, hogy Arankának igaza lesz, és mekkora annak, hogy Bálintnak? (*16 pont*)

7. *a*) Határozzuk meg annak a körnek az egyenletét, amelynek középpontja az y tengely pozitív részén helyezkedik el, átmegy az origón és érinti az $x^2=4y+4$ egyenletű parabolát.

b) Rajzoljuk meg az $f(x)=\frac{1}{4}x^2-1$; $x\in[-3;2]$ és a $g(x)=-\frac{1}{4}x^2+2x-3$; $x\in[2;7]$ függvény grafikonját, majd igazoljuk, hogy a görbék szimmetrikusak a $P(2;0)$ pontra. (*16 pont*)

8. Egy négyzet alapú egyenes csonkagúla a alapéle 11 cm, b fedőéle 2 cm, magassága 10,8 cm. Mellette áll egy ugyanakkora térfogatú és magasságú négyzetes oszlop.

a) Mekkora a két test felszínének különbsége?

Legyen az a és b valós számok „nevenincs" közepe $\sqrt{\frac{a^2+ab+b^2}{3}}$.

b) Igazoljuk, hogy két valós szám „nevenincs" közepe nem kisebb a számtani közepüknél.

c) Két különböző pozitív egész szám „nevenincs" közepe 13. Melyek ezek a számok? (*16 pont*)

9. Egy szabályos dobókockával kétszer dobunk, az elsőnek dobott értéket m, a másodiknak dobottat n jelöli.

a) Mennyi volt m és n értéke, ha az $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-mx^2+n$ függvénynek a lokális minimumhelyén 1 az értéke?

A két dobás alapján elkészítünk egy a és egy b számot, ahol

$$a=\begin{cases}1, & \text{ha } m=1,\\ 2, & \text{ha } m \text{ összetett szám,}\\ 3, & \text{ha } m \text{ prímszám,}\end{cases}\qquad b=\begin{cases}2, & \text{ha } n \text{ prímszám,}\\ 4, & \text{ha } n=1,\\ 6, & \text{ha } n \text{ összetett szám.}\end{cases}$$

Ez az a és b meghatároz egy g függvényt a következő módon:

$$g:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R},\quad g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-a^2}{x-a}, & \text{ha } x\neq a,\\ b, & \text{ha } x=a.\end{cases}$$

b) Mennyi a valószínűsége annak, hogy a két dobás alapján olyan a és b számokat kapunk, amelyek esetén a $g(x)$ függvény folytonos lesz az a helyen? (*16 pont*)

Németh László
Fonyód

Technikai tudnivalók a beküldéshez

A megoldásodat az emeltkomal@gmail.com címre küldheted be, a határidő a feladatsor megjelenését követő hónap 7. napja.

A megoldást szkennelve vagy fényképezve, lehetőség szerint egyetlen pdf fileban mellékeld a leveledhez. A megoldás leírásakor és szkennelésekor/fényképezésekor is ügyelj a jól olvashatóságra! Ha a kép felbontása 200 dpi, akkor az általában megfelelő.

A dolgozatból egyértelműen derüljön ki, hogy ki készítette, tehát tüntesd fel az elején a nevedet, iskoládat, osztályodat!

A kijavított dolgozatot arra a címre küldjük vissza, ahonnan az eredeti érkezett.

Megoldásvázlatok a 2023/6. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához

I. rész

1. *Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán:*

a) $\binom{n}{2}^2 - 7 \cdot \binom{n}{n-2} = 30;$ (*5 pont*)

b) $\cos x - \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}.$ (*7 pont*)

Megoldás. *a)* Felhasználva az $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ azonosságot adódik, hogy

$$\binom{n}{2}^2 - 7 \cdot \binom{n}{2} = 30,$$

ahol $n \geqslant 2$ és $n \in \mathbb{Z}$. Legyen $\binom{n}{2} = y$ $(y > 0)$. Ekkor: $y^2 - 7y - 30 = 0$. Ennek a másodfokú egyenletnek a gyökei: $y_1 = 10$ és $y_2 = -3$, melyekből az $y = 10$ az egyetlen jó megoldás. Ekkor $\binom{n}{2} = 10$, amiből következik, hogy

$$\frac{n!}{2! \cdot (n-2)!} = 10,$$

amit $(n-2)!$-sal egyszerűsítve az $n^2 - n - 20 = 0$ egyenlethez jutunk, melynek gyökei $n_1 = 5$, valamint $n_2 = -4$. Mivel $n \geqslant 2$, ezért az egyenlet egyetlen megoldása az $n = 5$, és ez valóban jó is.

b) Az egyenlet mindkét oldalát négyzetre emelve:

$$\cos^2 x - 2 \cdot \cos x \cdot \sin x + \sin^2 x = \frac{1}{2}.$$

Mivel $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, ezért

$$1 - 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2}.$$

Továbbá $2 \cdot \sin x \cdot \cos x = \sin 2x$, tehát $1 - \sin 2x = \frac{1}{2}$, amiből $\sin 2x = \frac{1}{2}$ adódik. Ennek az egyenletnek a gyökei: $x_1 = \frac{\pi}{12} + k \cdot \pi$, illetve $x_2 = \frac{5\pi}{12} + l \cdot \pi$, ahol $k, l \in \mathbb{Z}$. Az egyenlet négyzetre emelése nem ekvivalens lépés, így ellenőrzés után a felsoroltak közül a megoldás a következő: $x_1 = \frac{\pi}{12} + k \cdot 2\pi$, illetve $x_2 = -\frac{7\pi}{12} + l \cdot 2\pi$, ahol $k, l \in \mathbb{Z}$. (Egy lehetséges másik megoldás, ahol nem jönnek be hamis gyökök: az egyenlet mindkét oldalát beszorozva $\frac{\sqrt{2}}{2}$-vel és alkalmazva az ismert addíciós tételt, a $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$ egyenlethez jutunk, ami rögtön a fenti eredményhez vezet.)

2. *Attila elment a barkácsüzletbe* M8*-as menetes szárat (ez egy csavarfajta) vásárolni. Ha* 3 *darabbal kevesebbet vásárolna, mint amennyire szüksége van, de darabja* 8 *forinttal drágább lenne, akkor* 1188 *forintot kellene fizetnie. Ha* 2 *darabbal többet vásárolna a szükségesnél, de darabja* 2 *forinttal olcsóbb lenne, akkor* 2583 *forintot kellene fizetnie.*

a) Pontosan hány forintért vásárolt Attila a barkácsüzletben? *(7 pont)*

Attila a menetes száron kívül vásárolt még DIN acél hatszöglapú csavart is, melynek képe az alábbi ábrán látható. A csavar végén egy hasáb található, melynek alapja olyan nem szabályos hatszög, amelynek minden szöge 120°*-os, továbbá oldalai felváltva* 2*, illetve* 7 *milliméter hosszúak.*

b) Számítsuk ki a hatszög területének pontos értékét. *(4 pont)*

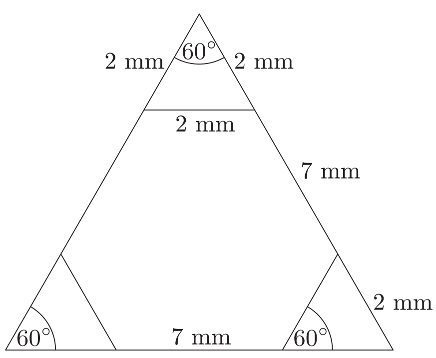
Megoldás. *a*) Jelölje x a csavar darabszámát, y pedig az egységárat. Ekkor az alábbi egyenletrendszert lehet felírni:

$$(x-3)(y+8)=1188,$$
$$(x+2)(y-2)=2583.$$

A zárójelek felbontása és rendezés után:

$$xy+8x-3y=1212,$$
$$xy-2x+2y=2587.$$

A felső egyenlet megfelelő oldalaiból kivonva az alsó egyenlet megfelelő oldalait: $10x-5y=-1375$, ahonnan $y=2x+275$. Ezt behelyettesítve a felső egyenletbe: $(x-3)\cdot(2x+275+8)=1188$. A zárójelek felbontása, összevonás és rendezés után a $2x^2+277x-2037=0$ másodfokú egyenlet adódik, melynek gyökei $x_1=7$ és $x_2=-145{,}5$, ezért Attila 7 darab csavart vásárolt az üzletben. Ezt visszahelyettesítve kapjuk meg, hogy $y=289$, vagyis a csavar egységára 289 forint. Attila $7\cdot 289=2023$ forintért vásárolt az üzletben.



b) A hatszöget kiegészítjük szabályos háromszöggé az *ábrán* látható módon.

A kiegészítő háromszögek oldalai 2 milliméteresek, ezért a nagy szabályos háromszög minden oldala $2+7+2=$ $=11$ mm hosszú. A nagy háromszög területe:

$$T=\frac{11^2\cdot\sin 60°}{2}=\frac{121\cdot\sqrt{3}}{4}\ \mathrm{mm}^2,$$

amelyből ki kell vonni a hatszöget háromszöggé kiegészítő kisebb szabályos háromszögek területét. Egy ilyen kisebb szabályos háromszög területe:

$$T = \frac{2^2 \cdot \sin 60^\circ}{2} = \sqrt{3}\ \mathrm{mm}^2.$$

A hatszög területe $T = \frac{121}{4} \cdot \sqrt{3} - 3 \cdot \sqrt{3} = \frac{109}{4} \cdot \sqrt{3}\ \mathrm{mm}^2$.

3. *Adott egy* $\sqrt{2}$ *cm oldalhosszúságú szabályos sokszög, amelynek összesen* 252 *darab átlója van.*

a) Igazoljuk (például addíciós tételek segítségével), hogy:

$$\cos 165^\circ = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}. \qquad \textit{(3 pont)}$$

b) A sokszög csúcsai közül véletlenszerűen kiválasztunk hármat. Mekkora annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott csúcsok által meghatározott háromszög derékszögű? *(6 pont)*

Tamás azt állítja, hogy ennek a sokszögnek a legrövidebb átlója éppen olyan hosszú, mint annak a téglatestnek a testátlója, melynek élei 2, $\sqrt[4]{2}$ *és* $\sqrt[4]{6}$ *cm hosszúságúak.*

c) Igaza van-e Tamásnak? *(5 pont)*

Megoldás. *a)*

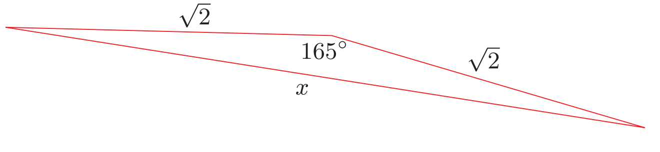
$$\cos 165^\circ = \cos(120^\circ + 45^\circ) = \cos 120^\circ \cdot \cos 45^\circ - \sin 120^\circ \cdot \sin 45^\circ =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{-\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}.$$

b) Jelölje n a sokszög oldalainak a számát. Az átlók számának ismeretében felírható az $\frac{n\cdot(n-3)}{2} = 252$ egyenlet, amiből az $n^2 - 3n - 504 = 0$ másodfokú egyenlet adódik. Ennek a gyökei $n_1 = 24$ és $n_2 = -21$, vagyis a sokszögnek 24 oldala van. A 24 csúcsból hármat $\binom{24}{3} = 2024$-féleképpen lehet kiválasztani (összes eset). A Thalész-tétel megfordítása miatt akkor kapunk derékszögű háromszöget, ha a három kiválasztott csúcs közül kettő a sokszög köré írt kör egyik átmérőjének (másképp: a sokszög leghosszabb átlójának) két végpontja. A leghosszabb átlóból 12 darab van, így $\binom{12}{1} = 12$-féleképpen tudjuk kiválasztani a háromszög átfogóját. A harmadik csúcs a maradék 22 csúcs közül bármelyik lehet, így a kedvező esetek száma: $12 \cdot 22 = 264$.

A kérdéses valószínűség $p = \frac{264}{2024} \approx 0{,}13$.

c) A szabályos n-szög belső szögeinek összege $(n-2) \cdot 180^\circ$, így a 24-szögben $(24-2) \cdot 180^\circ = 3960^\circ$, vagyis a sokszög belső szögei $\frac{3960^\circ}{24} = 165^\circ$-osak.



A koszinusztételt alkalmazva:

$$x^2 = \sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^2 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \cos 165^\circ = 2 + 2 - 4 \cdot \cos 165^\circ = 4 + \sqrt{2} + \sqrt{6}\,,$$

így $x = \sqrt{4+\sqrt{2}+\sqrt{6}}$. Az a, b, c élhosszúságú téglatest testátlójának hossza: $D = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$, ezért a Tamás által említett téglatest testátlójának hossza éppen $\sqrt{4+\sqrt{2}+\sqrt{6}}$ cm, vagyis igaza volt Tamásnak.

4. *Fürge Feri vállalkozó az egyik hónapban harmincszor ment el a lakóhelye határában lévő sebességellenőrző rendszer (VÉDA) előtt. A megengedett maximális sebesség itt* $50\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$*, ám a sebességellenőrző rendszer csak* $55\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$*, vagy e sebesség felett küld büntetőfeljelentést. Feri autójának átlagsebessége a harminc mért alkalommal* $53\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ *volt és tudjuk, hogy soha nem ment* $50\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$*-nál kevesebbel.*

a) Legfeljebb hány büntetést kaphatott Feri vállalkozó? (*4 pont*)

régi

új

Magyarországon 2022. július 1-től újfajta rendszámtáblákat vezettek be. Ezeken 4 betű és 3 szám szerepel. A táblákhoz 26-féle betűt (A, B, C, ...) *és 10-féle számjegyet* (0, 1, 2, ...) *használnak fel. Az utolsó betű azonban – hasonlóan a régi típusú rendszámokhoz – nem lehet O betű, mert az nagyon hasonlítana a nullára. (A tényleges szabályok ennél bonyolultabbak, de a feladat kedvéért most egy egyszerűbb változatot adtunk meg.)*

b) Határozzuk meg, hogy ha az összes régi és új típusú rendszámtábla forgalomba kerül a fenti feltételekkel, akkor mennyi lesz annak a valószínűsége, hogy idén júliusban vásárolt új autónkkal közlekedve, egy szembejövő jármű rendszáma régi típusú. (*4 pont*)

Egy szállítmányozási cég üzemanyagszállító teherautójának tartálya 10 méter hosszú fekvő körhengernek tekinthető, melynek alapköre 2 méter átmérőjű. Legfeljebb a fekvőhenger 148 centiméteres magasságáig tölthető üzemanyag.

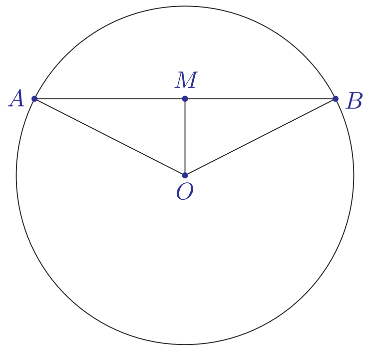
c) Hány köbméter üzemanyagot tud szállítani a teherautó? (*6 pont*)

Megoldás. *a*) Feri akkor kapja a legtöbb feljelentést, ha mindig a lehető legkevesebbel lépi túl a megengedett sebességet, azaz maximum $55\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$-val megy. Ahhoz, hogy ezt a lehető legtöbbször tehesse meg, a többi esetben $50\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$-val kell menjen. Tegyük fel, hogy a büntetett esetek száma x, ahol $0 < x < 30$. Ekkor a mért sebességek átlaga: $\frac{50\cdot(30-x)+55x}{30} = 53$. Ebből $5x = 90$, vagyis $x = 18$, tehát Feri legfeljebb 18 feljelentést kaphatott.

b) A 3 betű – 3 szám rendszámtáblák száma: $26^2 \cdot 25 \cdot 10^3 (= 16\,900\,000)$. A 4 betű – 3 szám rendszámtáblák száma: $26^3 \cdot 25 \cdot 10^3 (= 439\,400\,000)$. A keresett valószínűség:

$$p = \frac{26^2 \cdot 25 \cdot 10^3}{26^2 \cdot 25 \cdot 10^3 + 26^3 \cdot 25 \cdot 10^3} = \frac{1}{27}.$$

c) A töltési térfogatot egy körszelet alapú hengerdarab térfogataként kapjuk meg.



$V_{\text{töltési}} = T_{\text{szelet}} \cdot 10$ méter. Ha az üzemanyag 148 centiméter magasan áll, akkor $OM = 48$ cm $= 0{,}48$ méter, továbbá $OB = 1$ méter. Legyen $MOB\sphericalangle = \alpha$, ekkor

$$\cos\alpha = \frac{OM}{OB} = \frac{0{,}48}{1},$$

amiből $\alpha = 61{,}3°$. Az $AOB\sphericalangle = 2\alpha = 122{,}6°$, a szürke cikkhez így $360° - 122{,}6° = 237{,}4°$ középponti szög tartozik, így

$$T_{\text{szelet}} = \frac{237{,}4}{360} \cdot \pi + \frac{1 \cdot 1 \cdot \sin 122{,}6°}{2} \approx 2{,}49 \text{ m}^2.$$

A töltési térfogat

$$V_{\text{töltési}} = 2{,}49 \cdot 10 = 24{,}9 \text{ m}^3.$$

II. rész

5. *A professzionális teniszezők átlagosan* 40–45 *éves korukig versenyszerűen sportolnak. Novak Djokovic bejutott a wimbledoni bajnokság negyeddöntőjébe. Ellenfele egy* 28 *éves versenyző, aki fiatalabb Djokovicnál. A két versenyző életkorának legkisebb közös többszöröse* 140. *Tudjuk, hogy Djokovic még nem töltötte be a* 45. *életévét.*

a) *Hány éves lehet Djokovic?* (*3 pont*)

Az egyik legjobb magyar teniszező Fucsovics Márton, aki 0,72 *valószínűséggel szervál érvényesen. Az egyik mérkőzésén egy szetten belül pontosan ötöt szervált Fucsovics, ahol az első néhány szervája mind érvénytelen volt, ám az ezt követő szervái mind érvényesek voltak. Ennek az eseménynek a valószínűsége kerekítve* 0,0293.

b) *Hány érvénytelen szervája volt Fucsovicsnak ebben a szettben?* (*5 pont*)

A teniszező javítana adogató játékán, így gyakorolja a szervákat. Mivel 2024-*ben tölti be* 32. *életévét, ezért elhatározta, hogy az első nap* 32-*t szervál, majd minden további nap* 32-*vel többet, mint az azt megelőző napon.*

c) *Legalább hány napig kell gyakorolnia, hogy* 2024-*nél több gyakorolt szervája legyen összesen?* (*4 pont*)

Egy 28 fős teniszakadémián mindenkinek van legalább 14 ismerőse. Anna Balázzsal szeretne edzeni, de személyesen nem ismeri őt, ezért ismerősein keresztül üzenetet küld neki.

d) Bizonyítsuk be, hogy az ismerősök hálózatán keresztül biztosan eljut az üzenete Balázshoz. *(4 pont)*

Megoldás. *a)* Legyen Djokovics most k éves. Mivel $28 = 2^2 \cdot 7$ és $140 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7$, ezért a legkisebb közös többszörös definíciója alapján $k = 2^a \cdot 5 \cdot 7^b$ alakban írható fel, ahol $a \in \{0; 1; 2\}$ és $b \in \{0; 1\}$. Djokovics lehetséges életkorai: 5; 10; 20; 35; 70; 140. Ezek közül csak a 35 felel meg a feladat feltételeinek, tehát Djokovics most 35 éves.

b) Ha $p_{\text{érvényes}} = 0{,}72$, akkor $p_{\text{érvénytelen}} = 0{,}28$. Mivel az érvényes és érvénytelen szervák sorrendje ismert, ezért ha x érvénytelen szervája volt a teniszezőnek, akkor felírható az alábbi egyenlet:

$$0{,}28^x \cdot 0{,}72^{5-x} \approx 0{,}0293.$$

Ebből adódik:

$$0{,}28^x \cdot \frac{0{,}72^5}{0,72^x} \approx 0{,}0293.$$

Ebből következik, hogy $0{,}3889^x \approx 0{,}1514$. Innen:

$$\log_{0{,}3889} 0{,}1514 = x,$$

vagyis $x = 2$. Tehát pontosan két darab érvénytelen szervája volt Fucsovicsnak.

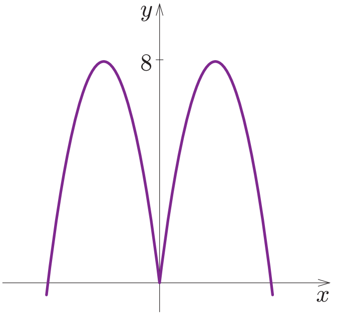
c) A szervák száma egy olyan számtani sorozatot alkot, melynek első tagja és differenciája is 32. Jelölje n a legkevesebb napot. Ekkor a

$$2024 \leqslant \frac{\big(2 \cdot 32 + (n-1) \cdot 32\big) \cdot n}{2}$$

egyenlőtlenséget kell megoldani, azaz $0 \leqslant 32n^2 + 32n - 4048$. Ebből $n_1 \geqslant 10{,}76$ és $n_2 \leqslant -11{,}76$ közelítő eredmények adódnak. A feladat feltételeinek az $n_1 \geqslant 10{,}76$ felel meg, azaz legalább 11 napig kell gyakorolnia a teniszezőnek.

d) A feladat modellezhető egy olyan egyszerű gráffal, amelynek 28 csúcspontja (teniszakadémiai tagok) van, és minden csúcspont fokszáma legalább 14 (ismeretség). Be kell látnunk, hogy ez a gráf összefüggő. Ha a gráf nem lenne összefüggő, akkor legalább két diszjunkt komponensből állna. Ezen komponensek között lenne olyan, amely legfeljebb 14 csúcspontból áll. Ekkor azonban ebben a komponensben nem teljesülhet az a feltétel, mely szerint minden csúcspont fokszáma legalább 14, ezért a gráf összefüggő, így szükségszerűen bármely csúcsból eljuthatunk bármely csúcsba, azaz ismerősök hálózatán biztosan eljut Anna üzenete Balázshoz.

6. *A McRonald's cég éppen logót tervez magának. A könnyebben tervezhetőség miatt a logót ábrázolták koordináta-rendszerben. A függvény hozzárendelési szabálya: $f(x)=-2x^2+8|x|$, amely az* ábrán *látható.*



a) Bizonyítsuk be, hogy az $f(x)$ függvény páros. *(2 pont)*

b) Határozzuk meg az $f(x)$ függvény és az $y=d$ egyenletű egyenes által közrezárt korlátos síkidom területét, ahol d az f függvény maximumértékét jelöli. *(7 pont)*

Az $f(x)$ függvénynek három zérushelye van: a; b és c $(a<b<c)$.

c) Mutassuk meg, hogy ezek egy számtani sorozat egymást követő elemei. *(4 pont)*

d) Mekkora az a; b; c adathalmaz szórásának pontos értéke? *(3 pont)*

Megoldás. *a)* Az $f(x)$ függvény akkor páros, ha $f(x)=f(-x)$. Mivel

$$f(-x)=-2(-x)^2+8|-x|=-2x^2+8|x|,$$

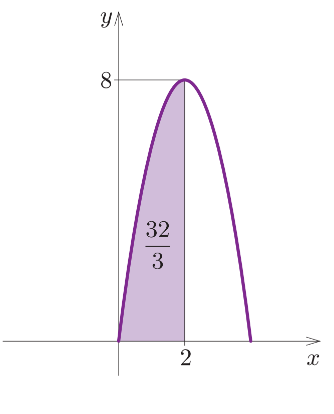
ezért a függvény valóban páros.

b) Először meg kell határoznunk, hogy mely intervallumon keressük a területet. Mivel a függvény az y-tengelyre szimmetrikus (páros), ezért elegendő az $x\geqslant 0$ esetnél megkeresni a függvény szélsőértékét. Teljes négyzetté alakítással $f(x)=-2\cdot(x^2-4x)=-2\cdot(x-2)^2+8$, tehát $d=8$, amit az $x=2$ helyen vesz fel a függvény. Számoljuk ki az alábbi határozott integrál értékét:

$$\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^2(-2x^2+8x)\,\mathrm{d}x=\left[-2\cdot\frac{x^3}{3}+8\cdot\frac{x^2}{2}\right]_0^2=$$

$$=\left(-2\cdot\frac{2^3}{3}+8\cdot\frac{2^2}{2}\right)-\left(-2\cdot\frac{0^3}{3}+8\cdot\frac{0^2}{2}\right)=-\frac{16}{3}+16=\frac{32}{3}.$$

Mivel az *ábrán* jelölt téglalap területe 16, ezért a téglalapból kimaradó rész területe $\frac{16}{3}$. Mivel az $f(x)$ függvény páros, ezért a kérdéses terület nagysága $\frac{32}{3}$.



c) Határozzuk meg az $f(x)$ függvény zérushelyeit. Mivel a függvény az y tengelyre szimmetrikus (páros), ezért elegendő az $x \geqslant 0$ esetnél megkeresni a függvény zérushelyeit: $f(x) = -2x^2 + 8x$ $(x \geqslant 0)$. Az $f(x) = 0$ egyenletet kell megoldani, vagyis $-2x^2 + 8x = 0$, amiből $x_1 = 4$ és $x_2 = 0$ adódik. Az $f(x)$ függvény zérushelyei tehát: -4; 0; 4. Mivel $4 - 0 = 0 - (-4)(= 4)$, ezért ezek valóban egy számtani sorozat egymást követő elemei.

d) Az a, b, c adathalmaz átlaga: $\frac{-4+0+4}{3} = 0$. A szórás:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(0+4)^2 + (0-0)^2 + (0-4)^2}{3}} = \sqrt{\frac{32}{3}} = \frac{4\sqrt{6}}{3}\,.$$

7. *Adott az ABC háromszög, ahol* $A\big(-1; 4^f\big)$, $B\big(3; -2^{f+1}\big)$ *és* $C(h; 4)$, *továbbá a háromszög S súlypontjának ordinátája* 1.

a) *Határozzuk meg* $f(\in \mathbb{R})$ *értékét.* (*6 pont*)

Tudjuk, hogy a háromszög oldalainak négyzetösszege minimális.

b) *Számítsuk ki* $h(\in \mathbb{R})$ *értékét.* (*5 pont*)

Elizabet egy-egy pozitív számjegyet helyettesít be véletlenszerűen az $ax^2 + bx + {}$ $+ c = 0$ *egyenletbe az* a; b; c *együtthatók helyére.*

c) *Mekkora annak a valószínűsége, hogy az egyenletnek pontosan egy valós gyöke lesz?* (*5 pont*)

Megoldás. *a*) A megoldandó egyenlet a következő: $\frac{4^f + (-2^{f+1}) + 4}{3} = 1$, ahonnan $4^f - 2 \cdot 2^f + 1 = 0$ adódik. Legyen $2^f = y$. Ekkor az $y^2 - 2y + 1 = 0$ másodfokú egyenlethez jutunk, ahonnan $y = 1$ adódik. $2^f = 2^0$. Az exponenciális függvény szigorú monotonitása miatt $f = 0$, ami valóban megoldása az egyenletnek.

b) A háromszög csúcsainak koordinátái: $A(-1; 1), B(3; -2), C(h; 4)$. A háromszög oldalainak a hosszai: $|AB| = 5$, $|AC| = \sqrt{h^2 + 2h + 10}$, $|BC| = \sqrt{h^2 - 6h + 45}$. Az oldalak négyzetösszege tehát: $2h^2 - 4h + 80$. Ennek a kifejezésnek keressük a minimumát. Legyen $t(h) = 2h^2 - 4h + 80 = 2 \cdot (h-1)^2 + 78$. A $t(h)$ függvénynek a $h = 1$-ben van minimuma.

c) Összesen $9^3 = 729$-féle egyenlet írható fel (összes eset száma). A másodfokú egyenletnek akkor van pontosan egy valós gyöke, ha a diszkriminánsa nulla, tehát $b^2 - 4ac = 0$, amiből $b^2 = 4ac$ adódik. Mivel az egyenlet jobb oldala osztható 4-gyel, így a bal oldal is, amiből az következik, hogy b páros számot jelöl. A kedvező eseteket az alábbi táblázat mutatja:

a	1	1	4	2	9	1	3	8	2	4
b	2	4	4	4	6	6	6	8	8	8
c	1	4	1	2	1	9	3	2	8	4

A keresett valószínűség: $p = \frac{10}{729} \approx 0{,}0137$.

8. *A* $\mathrm{lo}_{\mathrm{ga}}$ttó *szelvényén a* $\log_2 a$ *alakú számok szerepelnek, ahol az a egyjegyű pozitív egész számot jelöl. Egy szelvényen három különböző számot kell bejelölni.*

a) A $\log_a$ttó *szelvényen egy számot véletlenszerűen kiválasztva mekkora annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott szám értéke egész?* *(3 pont)*

b) A szelvényen szereplő pozitív egész számok legyenek az A halmaz elemei. Egészítsük ki a halmaz elemeit három, különböző (nem feltétlenül $\log_2 a$ *alakú) számmal úgy, hogy az A halmazban szereplő adatsokaság felső kvartilise* 2023 *legyen.* *(4 pont)*

c) Igazoljuk, hogy a $\log_2 7$ *irracionális szám.* *(5 pont)*

A nekeresdi középiskola végzős diákjai közül 42*-en töltöttek ki egy-egy szelvényt a* $\log_a$ttón. *A diákok mindegyike eltalált legalább egy számot a kisorsolt számok közül. Kéttalálatos szelvénye* 9 *diáknak volt. A nyeremény n találat esetén találatonként* $6n$ *euró. A találatok számát az alábbi táblázat mutatja:*

A kisorsolt számok	Első szám	Második szám	Harmadik szám
Találatok száma	24	19	18

d) Hány eurót nyertek összesen a diákok? *(4 pont)*

Megoldás. *a)* Mivel az a egyjegyű pozitív egész számot jelöl, ezért a szelvényen összesen 9 szám található. Ezek közül az egész értékek az alábbiak: $\log_2 1 = 0$, $\log_2 2 = 1$, $\log_2 4 = 2$, $\log_2 8 = 3$, vagyis a kedvező esetek száma 4. A kérdéses valószínűség így $\frac{4}{9}$.

b) A szelvényen szereplő pozitív egész számok: $\log_2 2 = 1$, $\log_2 4 = 2$, $\log_2 8 = 3$. Mivel három különböző valós számmal kell kiegészíteni az A halmazt, így az adatsokaság összesen 6 elemből fog állni. Ismert, hogy egy N elemű adatsokaság felső kvartilise a növekvő sorrend szerinti $\frac{3}{4}\cdot(N+1)$-edik eleme az adatsokaságnak, tehát $N=6$ esetén $\frac{3}{4}\cdot(6+1) = 5{,}25$. Ebből következően az 5. elem a felső kvartilis, azaz a 2023. Ezen kívül kell egy 3-nál nagyobb, de 2023-nál kisebb valós szám, illetve egy 2023-nál nagyobb szám, például a π, 2023, 2024 megfelel az összes feltételnek.

c) Indirekt módon tegyük fel, hogy a $\log_2 7$ racionális szám, vagyis felírható két egész szám hányadosaként. Legyen $\log_2 7 = \frac{p}{q}$, ahol $(p;q) = 1$, illetve $p, q \in \mathbb{Z}$, de $q \neq 0$. Mivel $\log_2 7 > 0 = \log_2 1$ (a logaritmusfüggvény szigorú monotonitása miatt $7 > 0$, ami nyilvánvalóan igaz), ezért $p, q \in \mathbb{N}$. Az egyenlet mindkét oldalát q-val beszorozva: $q \cdot \log_2 7 = p$, amiből $\log_2 7^q = p$ adódik. A logaritmus definícióját felhasználva: $2^p = 7^q$. A számelmélet alaptétele miatt a két oldal csak úgy lehet egyenlő, ha $p = q = 0$, ami ellentmond az eredeti feltételeknek, így megdőlt a feltevés, vagyis a $\log_2 7$ irracionális szám.

d) Jelöljük h-val azon versenyzők számát, akik mindhárom számot eltalálták. A logikai szita formulát alkalmazva: $24 + 19 + 18 - 9 - 3h + h = 42$. Ebből $h = 5$, azaz 5 fő találta el mindhárom számot. 5 fő mindhárom számot, 9 fő pontosan kettőt és 28 fő csak egyet talált el, így a nyeremény összesen: $28 \cdot 6 + 9 \cdot 24 + 5 \cdot 54 = 654$ euró.

9. *Egy futballbajnokságban a győzelem* 3*, a döntetlen* 1 *pontot ér (a vereségért nem adnak pontot). Egy idényben minden csapat játszik minden csapattal pontosan egyszer.*

a) Hány csapat vesz részt a bajnokságban, ha tudjuk, hogy minden idényben ugyanannyi csapat vesz részt, minden mérkőzést lejátszottak a csapatok, 4 idény alatt összesen 2024 pontot szereztek a csapatok és 504 mérkőzésen nem született döntetlen? *(6 pont)*

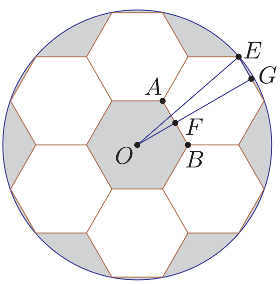
A futballbajnokság emblémája az ábrán látható rajz, amelyen 7 darab egybevágó szabályos hatszög (1 fekete és 6 darab fehér) köré írtunk egy kört úgy, hogy a fehér hatszögek 2-2 csúcsa érinti a körvonalat. A hatszögek oldalhossza 1 cm.

b) Határozzuk meg, hogy mekkora a kör azon részének területe, amely nincs hatszögekkel fedve. *(7 pont)*

A labdán lévő egyik egységnyi oldalú szabályos hatszög egyik csúcsának a másik öt csúcstól mért távolságait növekvő sorrendbe rendeztük (az azonos távolságokat csak egyszer írtuk fel).

c) Egy tanuló azt állítja, hogy a felírt távolságok (valamilyen sorrendben) egy számtani sorozat egymást követő tagjai. Döntsük el, igaza van-e. *(3 pont)*

Megoldás. *a)* 504 mérkőzésen nem volt döntetlen, így ezeken összesen $504\cdot 3 = 1512$ pontot osztottak ki. A maradék $2024-1512=512$ pontot a döntetlenekre osztották ki, így ez $\frac{512}{2}=256$ mérkőzést jelent. Összesen tehát $504+256=760$ mérkőzés volt, amely idényenként $\frac{760}{4}=190$ mérkőzést jelent, így az $\frac{n\cdot(n-1)}{2}=190$ egyenlethez jutunk. Ebből adódik, hogy $n^2-n-380=0$, amelynek a gyökei 20 és -19. A csapatok száma 20.



b) Az *ábrán* az E pont az egyik fehér szabályos hatszög olyan pontját jelöli, amely illeszkedik az O középpontú körre; A és B a szürke és az E pontot tartalmazó fehér hatszög közös oldalának két végpontja; F és G pedig oldalfelezőpontok. Ekkor az OAB szabályos háromszögben az OF magasság hossza:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot AB=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

hiszen $AB=1$ cm. $FG=2OF$ miatt $OG=3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$. $EG=\frac{1}{2}$ cm, hiszen G felezőpont. Az $OE=R$ jelölést használva az OEG háromszögre alkalmazzuk a Pitagorasz-tételt:

$$R^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2,$$

amiből $R^2=7$, azaz $R=\sqrt{7}\approx 2{,}6458$ cm. A kör területe: $21{,}991\ \mathrm{cm}^2$. A hét darab hatszög területe:

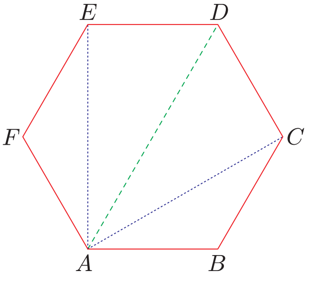
$$7\cdot\left(6\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\ \mathrm{cm}^2\approx 18{,}187\ \mathrm{cm}^2.$$

Így a keresett – hatszögekkel nem fedett – rész területe:

$$21{,}991-18{,}187\approx 3{,}804\ \mathrm{cm}^2.$$

c) A szabályos hatszög egyik csúcsa A.

Ettől a B és F csúcs $1-1$ egységre, a D csúcs pedig 2 egységnyire van. Az AC és AE távolságok a szimmetria viszonyok miatt egyenlők. Az ABC szög nagysága $120°$, így a koszinusztételt alkalmazva az ABC háromszögben:

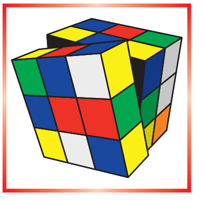


$$AC^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 120°,$$

azaz $AC^2 = 3$, amiből $AC = \sqrt{3}$. Az 1; $\sqrt{3}$; 2 nem számtani sorozat, hiszen $\sqrt{3} > \frac{1+2}{2}$, így nincs igaza a tanulónak.

Sáfár Lajos Ráckeve

Teleki Olivér Tököl



Rejtvények, ördöglakatok

Pálcika a gomblyukban

Rovatunkban minden hónapban valamilyen szórakoztató matematikai fejtörőt fogunk bemutatni. Ezek között fontos helyet foglalnak el a különböző kirakós játékok, topológiai feladványok, ördöglakatok és a matematikát felhasználó bűvészmutatványok.

Manapság szinte mindent meg lehet találni az interneten, de az igazi élményt az adja, ha a feladatokat magunk oldjuk meg, a bűvészmutatványok trükkjeit mi találjuk ki, és a szükséges kellékeket is mi tervezzük meg és készítjük el. Próbáljuk meg a feladatokat továbbgondolni, általánosítani, igyekezzünk új feladatokat kitalálni.

A megoldásokat, továbbgondolásokat, általánosításokat a

`rejtveny.komal@gmail.com`

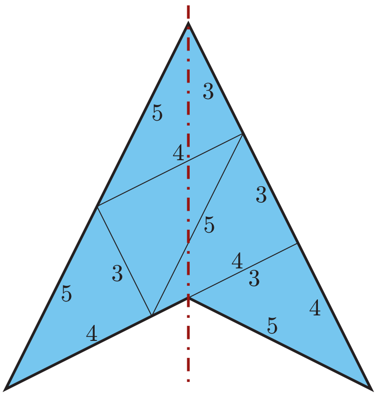
címre lehet beküldeni. Ezek a pontversenyekbe nem számítanak bele, de a legjobbakat – akár cikk vagy videó formájában – a honlapunkon vagy itt a Lapban örömmel közöljük.

E havi rejtvényünk egy vicces ördöglakat, amely *Sam Loydtól,* a híres amerikai rejtvénykészítő zsenitől származik. Ahogy a bal oldali ábrákon látható, a játék egy 5–20 centiméter hosszú pálcikából és a végére erősített hurokból áll. A zsinór olyan hosszú, hogy még éppen nem ér el a pálcika másik végéig. Alapanyagnak barkácsboltban kapható hengeres rúd vagy akár a vége közelében keresztben átfúrt ceruza vagy ceruzacsonk is megfelel. Ha valaki megkérdezi, hogy mi az a madzag a ceruzánk végén, az máris lehetőséget ad a tréfára.

Sam Loyd
(1841–1911)
Forrás: Wikipédia

A játék lényege, hogy gyanútlan ismerősünk gomblyukába befűzzük a pálcikát a jobb oldali ábra szerint, ezután neki kell a pálcikát onnan eltávolítani. Egyszerűsége ellenére a feladat meglepően nehéz, a gyakorlatlan áldozatok nem szoktak boldogulni ezzel a kihívással.

Az Olvasóra bízzuk annak kitalálását, hogy a pálcikát hogyan lehet néhány másodperc alatt befűzni a gomblyukba, és hogyan lehet leszedni. A megoldást következő havi számunkban közöljük.



A szeptemberi számunkban közölt feladat megoldása

Az volt a feladat, hogy öt darab 3–4–5 oldalú derékszögű háromszögből állítsunk össze egy tengelyesen szimmetrikus síkidomot. A megoldás az *ábrán* látható konkáv deltoid.

Országos Ördöglakat Találkozó

2023. november 11-én, 10^{30}-tól 17^{30}-ig lesz a XVI. Országos Ördöglakat Találkozó a Magyar Kereskedelmi és Vendéglátóipari Múzeumban (1036 Budapest, Korona tér 1.)

A találkozón találkozhattok játéktervezőkkel, -készítőkkel és -gyűjtőkkel, és persze rengeteg játékot lehet kipróbálni, köztük olyan darabokat is, amik most először láthatók Magyarországon. Délelőtt rövid előadásokat hallgathattok, délután ördöglakatmegoldó verseny is lesz. Kötetlen beszélgetésekre, a játékok kipróbálására, barkácsolásra egész nap lehetőség nyílik.

A belépés ingyenes.

További információ: `https://www.facebook.com/Ordoglakat`

Kós Géza

A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok
ABACUS-szal közös pontverseny
9. osztályosoknak
(779–783.)

K. 779. Induljunk ki egy négyjegyű számból. Egy lépésben az alábbi változtatásokat hajthatjuk végre a számon:

1. Tetszőlegesen felcseréljük a számjegyeit.
2. Az első két számjegy mindegyikét növeljük 1-gyel.

A kezdő számunk legyen a 2024. Mennyi az a legkevesebb lépésszám, amellyel el tudjuk érni, hogy a számunk 7654 legyen?

K. 780. *a*) Két pozitív prímszám szorzatához hozzáadjuk a két prímszámot. Kaphatunk-e így prímszámot? Ha kaphatunk, adjunk rá legalább három példát, ha nem, indokoljuk meg, hogy miért nem.

b) Két pozitív prímszám szorzatához hozzáadjuk a két prímszámot és még 1-et. Kaphatunk-e így prímszámot? Ha kaphatunk, adjunk rá legalább három példát, ha nem, indokoljuk meg, hogy miért nem.

K. 781. Egy piros és egy zöld 2×3-as táblázat mezőibe beírjuk az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számokat úgy, hogy egy táblázaton belül minden szám pontosan egyszer szerepel. Összeadjuk a táblázatok megfelelő mezőiben álló számokat, így kapjuk a harmadik táblázatot. Az alábbiakban látunk egy *példát.*

1	2	3
4	5	6

3	6	1
5	2	4

4	8	4
9	7	10

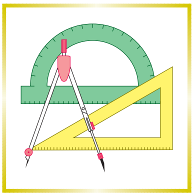
Az alábbi *ábrán* látható piros és zöld üres táblázatot töltsük ki úgy, hogy az összeadás után a jobb oldali táblázatot kapjuk, amelynek jobb alsó sarkát letakartuk. Adjuk meg az összes megoldást.

11	9	4
9	3	

K/C. 782. Archibald rosszul emlékezett a törtek összeadásának szabályára, és így adta össze az $\frac{a}{b}$ és $\frac{c}{d}$ törteket: $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$. Lehetséges-e, hogy helyes végeredményt kapott, ha a, b, c, d pozitív számok?

K/C. 783. A pilóták a mutatós óra számlapjának segítségével határozzák meg az irányokat, pl. észak helyett 12 órát, kelet helyett 3 órát mondanak. Kövessük egy felderítő repülő útját, amely a földön levő bázisról nézve 1 percet repült 1 óra irányába, 2 percet 2 óra irányába, 3 percet 3 óra irányába, 10 percet 4 óra irányába, 5 percet 5 óra irányába, 6 percet 6 óra irányába, 7 percet 7 óra irányába, 8 percet 8 óra irányába, 9 percet 9 óra irányába, 4 percet 10 óra irányába, 11 percet 11 óra irányába és 12 percet 12 óra irányába. A repülő sebessége a földhöz képest végig ugyanakkora nagyságú volt. Milyen útvonalon repülhetett volna el a legrövidebb idő alatt a kiindulási helytől a célállomáshoz?

Beküldési határidő: 2023. november 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`



A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (782–783., 1778–1782.)

Feladatok 10. évfolyamig

K/C. 782. A szövegét lásd a **K** feladatoknál.

K/C. 783. A szövegét lásd a **K** feladatoknál.

Feladatok mindenkinek

C. 1778. Határozzuk meg az összes olyan n egész számot, amelyre $1+2+3+ +\ldots+n$ egy azonos számjegyekből álló háromjegyű, tízes számrendszerbeli számmal egyenlő.

(*Vietnami feladat*)

C. 1779. Igazoljuk, hogy végtelen sok olyan háromszög létezik, amelynek oldalhosszúságait a

$$\frac{3x}{2}; \quad 2x-1; \quad 3x+1$$

számok adják meg, ahol x pozitív egész. Határozzuk meg a legkisebb kerületű ilyen háromszög oldalainak hosszát.

Javasolta: *Bíró Bálint* (Eger)

C. 1780. Vannak-e olyan pozitív egész számokból álló $(a;b)$ rendezett párok, amelyekre az a^2-2b és b^2-2a is négyzetszám?

(*Német versenyfeladat*)

Feladatok 11. évfolyamtól

C. 1781. Oldjuk meg a valós számpárok halmazán a

$$3x+\sqrt{y^2-21y}=2x^2,$$
$$x^2-x-\sqrt{y^2-21y}=x^3$$

egyenletrendszert.

Javasolta: *Bíró Bálint* (Eger)

C. 1782. Az $ABCD$ négyzet D csúcsából érintőt húzunk az AB átmérőjű, a négyzet belsejébe rajzolt félkörhöz, az érintési pont (az A-tól különböző) E pont, az AB szakasz felezőpontja F. Az érintő a BC egyenest a G, az AB egyenest a H, valamint az EF egyenes a DA egyenest a K pontban metszi. Bizonyítsuk be, hogy az FHE, DGC és DKE háromszögek beírt köreinek sugarai ebben a sorrendben egy növekvő számtani sorozat közvetlen egymás utáni tagjai.

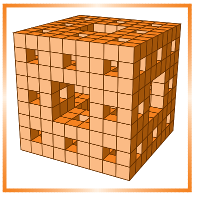
Javasolta: *Bíró Bálint* (Eger)

❄

Beküldési határidő: 2023. november 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄

A B pontversenyben kitűzött feladatok (5334–5341.)



B. 5334. Melyik az a legkisebb n, amelyre minden konvex n-szögnek van két szomszédos tompaszöge?

(*3 pont*) *Erdős Pál* (1913–1996) feladata

B. 5335. Az x, y, z pozitív számok szorzata 1. Mennyi lehet az

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(y+\frac{1}{y}\right)^2+\left(z+\frac{1}{z}\right)^2-\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(y+\frac{1}{y}\right)\left(z+\frac{1}{z}\right)$$

kifejezés értéke?

(*3 pont*) Javasolta: *Kiss Géza* (Csömör)

B. 5336. Egy iskolai sorverseny díjazásához négyféle édességet vásároltunk. Volt közöttük 1300 Ft-os, 3000 Ft-os, 3300 Ft-os, továbbá a közönségnek feltett villámkérdések díjazásához nagyobb számban 50 Ft-os is.

Az édességekért 41 300 Ft-ot fizettünk, az átlagár pontosan 100 Ft volt. Mennyit vettünk az egyes fajtákból?

(*4 pont*) Javasolta: *Kiss Géza* (Csömör)

B. 5337. Egy szabályos n-szög minden oldalára megrajzoltam kifelé egy szabályos háromszöget. A háromszögek harmadik csúcsai egy nagyobb szabályos n-szöget alkotnak. Mennyi lehet n, ha a két sokszög területének aránya egész szám?

(*4 pont*) Javasolta: *Hujter Bálint* (Budapest)

B. 5338. Egy színház nézőterének egyik sorában 10 számozott szék van. A székek a sor mindkét széléről megközelíthetők. Az egyik előadásra a sorba jegyet váltó 10 néző véletlenszerű sorrendben érkezik meg és foglalja el a helyét. A nézők nem szeretnek „átmászni” az előttük megérkezett és korábban a helyét már elfoglalt többi nézőn, ezért ha tehetik, akkor a sornak annak a széléről közelítik meg a helyüket, ahonnan erre nincs szükség. Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy lesz legalább egy olyan néző a 10 között, aki nem tudja „átmászás” nélkül elfoglalni a helyét.

(*5 pont*) Javasolta: *Koncz Levente* (Budapest)

B. 5339. A k_1 kör belülről érinti a k_2 kört a P pontban. Legyen M a k_1 körvonal egy tetszőleges pontja, és messe a k_1-hez M-ben húzott érintő k_2-t az A és B pontokban. Mutassuk meg, hogy PM felezi az APB szöget.

(*4 pont*)

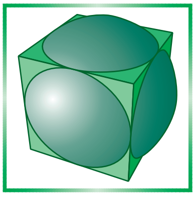
B. 5340. Legyen n pozitív egész szám. Tegyük fel, hogy f, g és h legfeljebb n-edfokú, valós együtthatós polinomok. Legfeljebb hány valós x számra lehet $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ egy nemkonstans három hosszú számtani sorozat három eleme valamilyen sorrendben, feltéve, hogy ez csak véges sok x-re teljesül?

(*6 pont*) Javasolta: *Pach Péter Pál* (Budapest)

B. 5341. A szabályos $ABCD$ tetraéder súlypontja S, egy tetszőleges belső pontja P. Tükrözzük a P pontot a tetraéder négy lapsíkjára, így kapjuk az $XYZW$ tetraédert. Mutassuk meg, hogy $XYZW$ súlypontja a PS szakasz S-hez közelebbi harmadolópontja.

(*6 pont*) (*Monthly feladat alapján*)

Beküldési határidő: 2023. november 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`



Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (860–862.)

A. 860. Adott egy 2^k darab tagból álló $0-1$ sorozat. Alíz megkapja ezt a sorozatot, majd elárulhatja a sorozat egyik tagját (a tag helyét és értékét) Bobnak. Határozzuk meg azt a legnagyobb s számot, melyre Bob biztosan tud választani s darab tagot a sorozatból, és mindegyiknek meg tudja állapítani helyesen az értékét, akármilyen sorozatot is kapott Alíz.

Alíz és Bob a játék előtt összebeszélhetnek azzal a céllal, hogy Bob minél több jegyet biztosan meg tudjon mondani a sorozatból. Bob semmi más információt nem tud a $0-1$ sorozatról a hosszán és az Alíz által választott tagon kívül.

Javasolta: *Szűcs Gábor* (Szikszó)

A. 861. Legyen $f(x)=x^2-2$. Jelölje $f^{(n)}(x)$ a függvény n-szeres iteráltját, azaz legyen $f^{(1)}(x)=f(x)$ és $f^{(k+1)}(x)=f\big(f^{(k)}(x)\big)$.

Legyen $H=\big\{x:\, f^{(100)}(x)\leqslant -1\big\}$. Határozzuk meg a H halmaz hosszát (a H-t alkotó intervallumok hosszainak összegét).

Javasolta: *Matolcsi Dávid* (Budapest)

A. 862. Az ω körbe írt $ABCD$ húrnégyszögben F_A, F_B, F_C és F_D rendre az ω kör AB, BC, CD, illetve DA íveinek felezőpontja, továbbá I_A, I_B, I_C és I_D a DAB, ABC, BCD, illetve CDA háromszögekbe írt kör középpontja. Legyen ω_A az a kör, amely az F_A pontban belülről érinti ω-t és érinti a CD szakaszt, továbbá legyen ω_C az a kör, amely az F_C pontban belülről érinti ω-t és érinti az AB szakaszt. Végül legyen T_B az ω kör és az $F_BI_BI_C$ kör második, F_B-től különböző metszéspontja, és legyen T_D az ω kör és az $F_DI_DI_A$ kör második, F_D-től különböző metszéspontja.

Mutassuk meg, hogy az ω_A és ω_C körök hatványvonala átmegy a T_B és a T_D ponton.

Javasolta: *Kós Géza* (Budapest)

Beküldési határidő: 2023. november 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄

Informatikából kitűzött feladatok

I. 599. Egy számsorozatot akkor nevezzünk Fibonacci-típusúnak, ha a harmadiktól kezdve mindegyik eleme az előző kettő összege. A sorozat legismertebb formája, ha az első két szám 0 és 1.

A sorozatot rekurzióval definiáljuk, amit iteratív módon is könnyen kódolni tudunk.

$$F_0=0,\qquad F_1=1; \tag{1}$$

$$F_{n+1}=F_{n-1}+F_n\quad (n\geqslant 1). \tag{2}$$

A sorozat elemei gyorsan növekednek. Változtassuk meg a 2. képletet.

$$F_{n+1}=(F_{n-1}+F_n)\mod m\quad (n\geqslant 1). \tag{3}$$

A képletben szereplő m ($m>1$) egész szám, amellyel a sorozat új elemét maradékosan osztjuk. A sorozat periodikus, előbb-utóbb újra szerepel benne 0 és 1, így ismétlődni kezdenek az értékek.

Készítsünk programot, amely m értékét beolvassa és a képernyőre kiírja a periódus hosszát, valamint egy új sorba a periódus elemeit.

Példa bemenet	**Kimenet**
`5`	`20` `0 1 1 2 3 0 3 3 1 4 0 4 4 3 2 0 2 2 4 1`

Beküldendő egy tömörített `i599.zip` állományban a program forráskódja és rövid dokumentációja, amely megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben fordítható.

I. 600. Egy asztalon egyforma méretű korongok találhatók, mely(ek)re számokat írtak 1-től 25-ig. Mindegyik szám csak egyszer szerepel egy korongon, tehát 25 korong van. A korongok egymásra helyezhetők, de csak akkor, ha a feljebb lévő korong száma osztója az alatta lévő korong számának. Például építhető a korongokból egy 4 magasságú oszlop, ha a korongok száma 1, 3, 12, 24.

Valaki épített már néhány oszlopot az asztalon lévő korongokból, de egyelőre elakadt az építkezésben. Készítsünk programot, amely az asztalon látható oszlopok ismeretében segít a további korongokat a korábbi oszlopokba elhelyezni.

A program először kérje be az eddigi oszlopok N számát, majd kérje be az N darab oszlopban található számokat egy oszlopon belül felülről lefelé haladva. Ezután írja ki a még szabadon lévő korongok számát növekvő sorrendben, valamint azon szabadon lévő korongokon lévő számokat, amely korongokat nem lehet az eddigi oszlopok egyikéhez sem hozzátenni.

Egy lehetséges kommunikáció a felhasználóval:

```
Az oszlopok száma: 4
1. oszlop: 6 12 24
2. oszlop: 2 20
3. oszlop: 1 5
4. oszlop: 9 18
Szabad korongok: 3 4 7 8 10 11 13 14 15 16 17 19 21 22 23 25
Nem hozzátehető korongok: 7 8 11 13 14 16 17 19 21 22 23
```

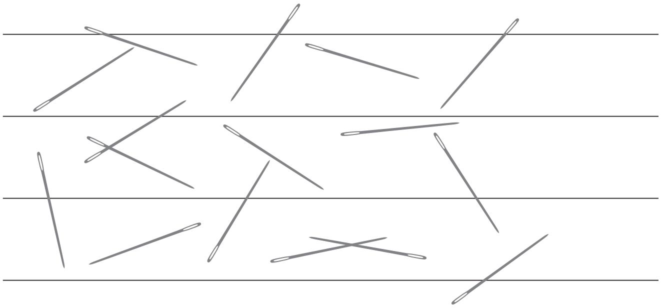
Beküldendő egy tömörített `i600.zip` állományban a program forráskódja és rövid dokumentációja, amely megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben fordítható.

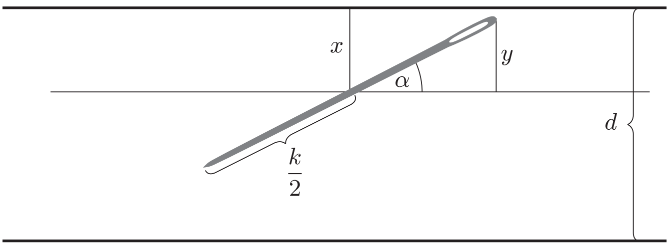
I. 601. 1777-ben *George Louis Leclerc,* Buffon grófja vetette fel a „tűprobléma” néven ismert feladatot: Mekkora a valószínűsége annak, hogy k hosszúságú tűt dobva a d szélességű lapokból álló padlóra, a leeső tű metszi a padlólapok közti egyik vonalat?

Nézzük ennek a matematikai megközelítését!

Jelölje x a tű középpontjának a legközelebbi vonaltól mért távolságát $\left(0 \leqslant x \leqslant \frac{d}{2}\right)$.

Legyen a tű és a padló vonalainak szöge α $(0^\circ \leqslant \alpha < 180^\circ)$.





Ekkor a tű vége y értékkel kerül magasabbra a tű középpontjánál $\left(\sin\alpha = \frac{y}{\frac{k}{2}}\right.$, vagyis $\left.y = \frac{k}{2} \cdot \sin\alpha\right)$. Ha $y < x$, akkor nem metszi a tű a vonalat.

Annak az esélye, hogy metszi a tű a padlóvonalat: $p = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{k}{d}$, ezért a kísérlet a π meghatározására is használható.

Az előző képletből π-t kifejezve: $\pi = \frac{2k}{pd}$.

Szimuláljuk a kísérletet számítógéppel. Hat különböző k és d értékre végeztessünk a táblázatkezelővel $10\,000-10\,000$ dobáskísérletet, majd mindegyiknél határozzuk meg a p relatív gyakoriságát. Ezekből kapunk hat becslést a π értékére, majd ezeket átlagoljuk.

1. Nyissunk meg egy üres táblázatkezelő munkafüzetet, majd mentsük buffontu néven.
2. Hozzuk létre és formázzuk a minták szerinti elrendezést.
3. Gépeljük be a szöveges adatokat az A1:A4 és a B5:S5 tartományokba, alkalmazzunk ezekre a cellákra félkövér betűstílust. Az A6:A1005 tartományba kerüljenek az $1, 2, \ldots, 999, 1000$ értékek. A C, az F, az I, az L, az O és az R oszlopok első két sorába gépeljük be a mintákon látható, k és d aktuális értékére vonatkozó adatokat.
4. Szegélyezzük a táblázat celláit a minta szerint, a rácsozás az 1005. sorig tartson.
5. A B, az E, a H, a K, az N és a P oszlopok $6-1005$. sorába kerüljön olyan képlet, amely a véletlenszám generátor segítségével megad egy 0 és $\frac{d}{2}$ közötti értéket. Az adat négy tizedesjegy pontossággal jelenjen meg.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	**k**		35			25			39	
2	**d**		42			28			47	
3	**p**		0,5195			0,5682			0,5305	
4	**π**		3,208213			3,142757			3,128321	
5		**x**	**α**	**metszi**	**x**	**α**	**metszi**	**x**	**α**	**metszi**
6	1	16,7998	82,2798	1	5,3852	149,2525	1	17,1438	127,0300	0
7	2	15,6780	135,8457	0	1,0064	72,1373	1	0,9689	57,1320	1
8	3	8,2621	13,4579	0	3,3395	77,4478	1	20,1211	111,9435	0
9	4	5,1619	118,1755	1	10,4801	88,6493	1	3,6113	141,2104	1
10	5	3,5612	65,1099	1	13,6165	129,1611	0	15,4909	75,2836	1
11	6	11,3654	18,9238	0	5,7713	49,4846	1	10,8561	137,5507	1
12	7	20,4358	164,2396	0	1,7951	48,3134	1	20,7591	53,3826	0
13	8	19,1296	104,6462	0	4,0231	168,0176	0	11,0647	91,1145	1
14	9	19,0624	65,1091	0	5,4710	45,1630	1	5,9445	106,3637	1
15	10	10,0954	1,3482	0	10,4503	113,0078	1	21,5912	12,1085	0

J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
		20			20			35		
		24			30			46		
		0,532			0,4204			0,4915		
		3,132832			3,171583			3,096112		**3,146636**
metszi	**x**	**α**	**metszi**	**x**	**α**	**metszi**	**x**	**α**	**metszi**	
0	2,8583	27,1020	1	6,4767	36,2750	0	17,3056	121,1732	0	
1	9,0152	16,9091	0	2,6363	69,2419	1	7,8562	6,1557	0	
0	1,7859	107,3037	1	10,6265	117,2657	0	11,8636	48,3689	1	
1	4,4992	19,4314	0	0,1801	7,9036	1	16,7637	102,8964	1	
1	3,5754	140,2688	1	4,2146	137,1033	1	18,6223	147,3055	0	
1	10,2542	4,2830	0	1,4272	65,0362	1	15,2580	134,3725	0	
0	2,9580	43,7260	1	0,7262	126,9023	1	22,5401	121,9106	0	
1	0,4164	76,8938	1	13,3030	28,2974	0	11,1707	151,9486	0	
1	0,1248	143,1224	1	7,9587	135,4711	0	8,4067	162,9435	0	
0	8,7391	67,2817	1	2,1519	40,0552	1	1,7242	160,9964	1	

6. A C, az F, az I, az L, az O és az R oszlopok $6-1005$. sorába kerüljön olyan képlet, amely véletlenszám generátor segítségével megad egy $0°$ és $180°$ közötti szögértéket. Az adat két tizedesjegy pontossággal jelenjen meg.
7. A D, a G, a J, az M, a P és az S oszlopok $6-1005$. sorába kerüljön 0, ha a tű nem metszi a vonalat, vagyis $y < x$; ellenkező esetben a cella értéke legyen 1.
8. A C3, az F3, az I3, az L3, az O3 és az R3 cellákban szerepeljen olyan képlet, amely megadja a „metszés" adott tesztben mért relatív gyakoriságát $\left(\frac{\text{jó esetek száma}}{\text{kísérletek száma}}\right)$.
9. A C4, az F4, az I4, az L4, az O4 és az R4 cellákban az a képlet szerepeljen, amely megadja a π értékére kapott becslést az adott tesztben.
10. Végül átlagoljuk ezek értékét a T4 cellában. Állítsuk be a cella jellemzőit a mintán láthatóra.

Segédszámításokat az U oszloptól jobbra végezhetünk. A megoldásban saját függvény vagy makró nem használható.

Beküldendő egy tömörített `i601.zip` állományban a táblázatkezelő munkafüzet, illetve egy rövid dokumentáció, amelyben szerepel a megoldáskor alkalmazott táblázatkezelő neve, verziószáma.

I. 602. Az európai **Az év autója** szavazást 1964 óta tartják meg minden évben a bemutatott új autókról. A jelölésben és a szavazásban autós magazinok szakújságírói vesznek részt.

A rendelkezésre álló és letölthető adatbázisban az 1964 – 2023 időszak első három helyezettjének adatai állnak rendelkezésre.

Az adatbázis a következő táblát tartalmazza:

Táblák:

auto (azon, ev, helyezes, gyar, modell, pont)

azon	a rekordok azonosítója (számláló), ez a kulcs;
ev	a szavazás éve (szám);
helyezes	A díjazott autó helyezése (szám);
gyar	az autó gyártójának neve (szöveg);
modell	az autómodell neve (szöveg);
pont	az autó versenyben elért pontszáma (szám).

A következő feladatokat megoldó SQL parancsokat rögzítsük az `evautoja_lekerdezesek.sql` nevű állományban a feladatok végén zárójelben megadott névvel. A javítás során csak ennek az állománynak a tartalma lesz értékelve. Ügyeljünk arra, hogy a lekérdezésekben pontosan a kívánt mezők szerepeljenek, felesleges mezőt ne jelenítsünk meg. A feladat megoldásához a digitális kultúra emelt szintű érettségin használható XAMPP használatát javasoljuk.

1. Az `evautoja.sql` állomány tartalmazza az adatbázist és a táblát létrehozó, valamint az adatokat a táblába beszúró SQL parancsokat! Futtassuk a lokális SQL szerveren az `evautoja.sql` parancsfájlt.
2. Készítsünk listát lekérdezés segítségével azokról az autókról (ev, gyar, modell, pont), amelyek 200 pontnál többel lettek harmadik helyezettek. (`2harmadik`)
3. A díjazott autók gyárai között 4 japán van: a Honda, a Mazda, a Nissan és a Toyota. Listázzuk ki az összes modelljüket (ev, gyar, modell, helyezes) helyezés szerinti sorrendben. (`3japan`)
4. Adjuk meg lekérdezés segítségével, hogy melyek azok a gyárak, amelyek csak egyszer szerepelnek a táblában. (`4Egyszer`)
5. Adjuk meg lekérdezés segítségével, hogy melyik az első három autógyár, amelyik legtöbbször volt a valamelyik modelljével első helyezett. (`5Elsok`)
6. Írassuk ki lekérdezés segítségével, hogy mely években nyerte díjait az az autó, amely legtöbbször szerepelt a díjazottak között. (`6Evek`)
7. A Fiesta nevű autó gyártójának milyen más modellje van még a táblázatban? Jelenítsük meg a gyár és a modellek nevét (mindegyiket egyszer). (`7Fiesta`)
8. Melyek azok az autómodellek, amelyek első és második díjat is nyertek? Adjuk meg lekérdezés segítségével a gyártó, valamint a modell nevét és a díjak évét. (`8Elsomasodik`)

9. Adjuk meg azokat az éveket és autóknak az adatait, amikor az első és második helyezett pontszáma legfeljebb 5 ponttal tért el. (`9Szorosnyeres`)
10. Készítsük el lekérdezés segítségével gyáranként az éremtáblázatot (gyáranként az első, a második és a harmadik helyezések száma) a nevük szerinti sorrendben, a mintához hasonlóan. (`10Eremtabla`)

gyar ▲ 1	1. helyezés	2. helyezés	3. helyezés
Alfa Romeo	2	2	3
Alpine	0	1	0
Audi	2	2	4
Austin	1	0	1
Autobianchi	0	2	0
BMW	0	5	2

Beküldendő egy tömörített `i602.zip` állományban az `evautoja_lekerdezesek.sql` nevű állomány, amely a feladatok megoldását tartalmazza.

Letölthető állomány: `evautoja.sql`.

A feladatok megoldásai regisztráció után a következő címen tölthetők fel:
`https://www.komal.hu/munkafuzet`
Beküldési határidő: 2023. november 15.

❄

KöMaL nyári tábor 2023

Június 23. és 29. között került sor az idei, több évtizedes hagyománnyal rendelkező fizikatáborra Dombóvár–Gunaras Üdülőfaluban.

A tábororozáson elsősorban a KöMaL feladatmegoldói vettek részt, de mellettük még néhány, a fizika iránt határozottan érdeklődő diák is.

Velük együtt ott volt még – külön tanárokkal és programmal – a nemzetközi matematikai diákolimpiára készülő csapat is.

A tábor az NTP–TSZM–22–0116 pályázat keretében valósult meg. A résztvevők számára a tábor – a szállás, az étkezések, a fürdőbelépők, a jutalmak és az előadások – ingyenes volt, ami a Nemzeti Tehetség Program támogatásán kívül az Aquincum Institute of Technology és a Hotel Európa-Gunaras nagylelkű adományának volt köszönhető.

Részletek két táborozó beszámolójából:

Nekem nagyon tetszett a tábor, és nem hiszem, hogy ezzel egyedül vagyok. A két szobatársammal többször is beszéltünk arról, hogy túl gyorsan telnek a napok, és a tábor vége felé is olyan volt, mintha csak tegnap jöttünk volna. Élveztem „vegyesen” gondolkodni – csapatban és egyedül is –, mert így a számomra nehezebb témakörökből való feladatokon is tudtam dolgozni, mert ha valahol elakadtam, akkor bevontam a csapattársaimat. Ennek köszönhetően láthattam, hogy az én gondolatmenetemben felmerülő, számomra nehezebbnek tűnő problémákat mások hogyan tudják megoldani, viszont önállóan is tudtam dolgozni. Továbbá segített az is, hogy ha valamikor elfáradt az agyam, akkor felfrissülés gyanánt mindig volt lehetőségem mozogni egyet, vagy akár csak felmenni a szobámba, és pihenni egy keveset.

A napokon belül a matek és a közösségi szórakozás aránya is ideális volt, ezáltal lehetővé téve, hogy az ott töltött időm alatt végig ugyanolyan intenzitással tudjak matekozni, és hogy ez rendkívül élvezetes is legyen.

Sajnos nekem korábban haza kellett mennem a táborból, így nem tudtam kiélvezni a teljes egészét.

Bényei Borisz

Az idei táborba pár nap késéssel érkeztem az elhúzódó érettségi időszak miatt. Már az úton eljutott hozzám az aznapi feladatsor, így a délutáni matematikafoglalkozásra már felkészülten érkeztem. Itt találkoztam sok régi barátommal, de új arcokat is láttam.

Innentől a napok matematikával és szórakozással teltek. A reggeli után rögtön belevetettük magunkat az adott témakör feladataiba, legyen az geometria, számelmélet, vagy akár a Frobenius-számok. Ezeken kisebb megszakításokkal ebédig gondolkodtunk, majd délután megbeszéltük néhány feladat megoldását. Estére mindenki kifáradt szellemileg, a szakmai program után általában pingponggal, billiárddal vagy Tichuzással kapcsolódtunk ki.

A tábor során sok különleges programra került sor, melyek sokszínűbbé tették a tábori élményt. Ide tartozik a MEMO-gyakorlóverseny, ahol csapatokba osztva mérhettük össze tudásunkat, vagy a fizikaelőadás. Utóbbi segítségével példákon keresztül betekintést nyerhettünk a dimenzióanalízis világába. A strandoláson sajnos nem tudtam részt venni (de elmondások alapján ez is minden bizonnyal nagyon élvezetes volt), de a tábort lezáró tábortűz körüli éneklésen annál inkább, ukulelén kísértem azt.

A szokásos módon tőlünk száz méterre került megrendezésre a KöMaL nyári fizikatábora, így a fizikásokkal minden étkezésnél találkoztunk. Ilyenkor gyakran elbeszélgettünk velük, és részt vettünk a fizika-totón is. Ők is becsatlakoztak a mi programjainkba, például csapatot indítottak a gyakorlóversenyen, de a tábortűz előkészítésében, majd az éneklésben is szerepet vállaltak.

A tábor alatt felfedeztük a hotel környékét. Reggelente néhányan elmentünk futni, és közben megtekintettük a Dombóvár-Gunarast körülvevő réteket és mezőgazdasági területeket. Nagy látogatottságot élvezett a közelben található kisbolt is, ahol beszereztük a hatékony gondolkodáshoz elengedhetetlen rágcsákat.

Elmondható, hogy a dombóvári matematikatábor a nyaram egyik csúcspontja volt, és sokat segített a Nemzetközi Matematikai Diákolimpiára való felkészülésben.

Lovas Márton

A 2024-es nyári táborban való részvételre a felhívás várhatóan a KöMaL jövő májusi számában jelenik meg.

Támogatók:

AIT-BUDAPEST

Kulturális és Innovációs Minisztérium

Nemzeti Tehetség Program

Emberi Erőforrás Támogatáskezelő

HOTEL EURÓPA***

Beszámoló a 7. Európai Fizikai Diákolimpiáról

Idén 2023. június 16. és 20. között Hannoverben, Németországban rendezték meg az Európai Fizikai Diákolimpiát (EuPhO). A versenyen 28 európai és 9 Európán kívüli ország összesen 173 diákja vett részt. A versenyen 18 aranyérmet osztottak ki, amelyből az egyiket egy magyar diák, *Molnár-Szabó Vilmos* szerezte meg, aki az abszolút 11. helyen végzett.

A csapat és eredményeik:

Molnár-Szabó Vilmos (Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium, 12. oszt.) *aranyérem* (27,8 pont), felkészítő tanára: *Nagy Piroska Mária;*

Fey Dávid (Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium, 12. oszt.) *bronzérem* (19,3 pont), felkészítő tanára: *Nagy Piroska Mária;*

Bencz Benedek (Baár-Madas Református Gimnázium, Általános Iskola és Diákotthon, 10. oszt.) *bronzérem* (18,3 pont), felkészítő tanára: *Horváth Norbert;*

Budai Csanád Gyula (Deák Téri Evangélikus Gimnázium, 12. oszt.) *bronzérem* (16,0 pont), felkészítő tanára: *Horváth Gabriella;*

Molnár Barnabás (Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium, 12. oszt.) (11,1 pont), felkészítő tanára: *Nagy Piroska Mária.*

A magyar csapat vezetői *Szász Krisztián* és *Vankó Péter* voltak, *Vigh Máté* pedig a zsűriben, a harmadik elméleti feladat szerzőjeként képviselte hazánkat. Az alábbiakban közöljük a verseny feladatait, a megoldások a verseny honlapján érhetők el: `https://eupho.ee/eupho-2023/`.

Kísérleti feladatok

1. Mágneses inga (10 pont)

Egy inga rezgési frekvenciája módosítható az inga és a tartója közötti mágneses erőkkel. Ebben a kísérletben egy olyan ingamozgást fogsz vizsgálni, amely gravitációs és mágneses kölcsönhatások együttes potenciáljában történik, a 3. ábrán látható mérési elrendezésben.

Eszközök (lásd a *3. ábrát* is)

A – Ingatest pontszerű támaszokkal és tükörrel a szögméréshez.
B – Ingatorony az inga alátámasztására szolgáló rögzített pontokkal és lézermodullal a szögméréshez.
C – A külső mágneseket tartó sín.
D – 2 kis dipólmágnes, amit az ingatestre lehet rögzíteni (lehet **zöld, piros, fehér** vagy **sárga**).
E – 2 egyforma külső dipólmágnes (**fekete**).

F – 2 ismeretlen külső mágnes, F1 és F2 (F1 **kék**, F2 **fehér** pöttyel van megjelölve a végein).
G – Ernyő a lézerfoltnak a szögmérésnél.
H – Stopper.
I – Ragasztószalag, az ingatorony asztalhoz rögzítéséhez.
J – Ceruza és vonalzó.

1.1 Tömegek (1 pont)

Az ingatest (pendulum) és a rá rögzített két kis dipólmágnes teljes tömege $M_{\text{pen}} + M_{\text{mag}} = 52{,}3 \pm 0{,}2$ g.

Határozd meg M_{pen} és M_{mag} értékét a lehető legpontosabban!

1.2 Mágneses dipólmomentumok (4 pont)

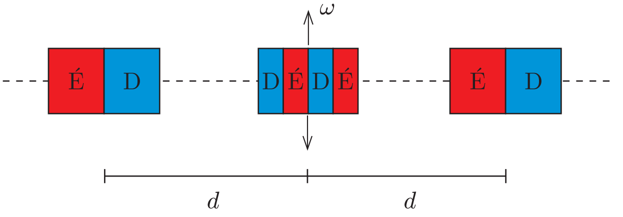
Ha külső mágnesek vannak a közelben, a mágneses inga a gravitációs és mágneses kölcsönhatás együttes potenciáljában mozog. Az inga ilyenkor kialakuló ω frekvenciája felírható az ω_1 sajátfrekvencia és az ω_{mag} „mágneses frekvenciaeltolódás" függvényeként:

$$\omega^2 = \omega_1^2 \pm \omega_{\text{mag}}^2. \tag{1}$$

Abban az esetben, ha a két **fekete** külső dipólmágnes szimmetrikusan van elhelyezve az inga egyensúlyi helyzetétől d távolságra (lásd az *1. ábrát*) és a rezgés amplitúdója kicsi, a frekvenciaeltolódás:

$$\omega_{\text{mag}}^2 = \frac{6\mu_0}{I\pi} \cdot j_1 \cdot j_2 \cdot \frac{\ell^2}{d^5}, \tag{2}$$

ahol $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ N/A^2 a vákuum permeabilitása, I a mágneses inga tehetetlenségi nyomatéka a forgástengelyre vonatkoztatva, j_1 az ingán lévő mágnesek összesített mágneses momentuma, j_2 az egyes külső mágnesek mágneses momentuma és ℓ az ingán lévő mágnes távolsága a forgástengelytől. A dipólusmomentumok relatív erősségére vonatkozóan felteheted, hogy $j_2 = 2{,}4 \cdot j_1$. A nehézségi gyorsulás $g = 9{,}81$ m/s^2.



1. ábra. Frekvenciaeltolódás külső mágnesek segítségével (felülnézet). A külső mágnesek iránya megfordítható

a) Mérd meg az inga frekvenciáját a mágnesek közötti d távolság függvényében! Használj nagyon kis amplitúdót. Mérd végig a teljes lehetséges frekvenciatartományt.

b) Határozd meg az ingamágnesek és a külső mágnesek anyagának „átlagos mágnesezettségét” (egységnyi tömegre vonatkoztatott mágneses momentumát)! Ehhez készíts egy megfelelő grafikont. További mérésekre is szükséged lehet, hogy minden ismeretlent meghatározzál. A mágnesek nem-mágneses burkolatának vastagságát és tömegét elhanyagolhatod.

1.3 Ismeretlen külső mágnesek (3 pont)

Mindkét **kék,** ismeretlen külső mágnes (F1 és F2) több mágneses dipólusból van összeállítva. F1 belsejében minden dipólus pont fordítva van, mint F2 belsejében. A mágneses frekvenciaeltolódás az 1. ábrának megfelelő elrendezés esetén hatványfüggést követ:

$$\omega^2_{\mathrm{mag,F}} \sim d^\alpha. \tag{3}$$

a) Mérd meg az inga frekvenciáját d függvényében! Használj nagyon kis amplitúdót. Olyan elrendezést használj, hogy a mágneses frekvenciaeltolódást a lehető legpontosabban tudjad meghatározni.

b) Határozd meg az α kitevőt!

c) Vázold fel a mágneses dipólusok egy lehetséges elrendezését az F1 és F2 belsejében, és indokold meg a választásod!

1.4 Nemlineáris inga (2 pont)

Térj vissza az 1.2 részben használt elrendezéshez a **fekete** külső dipólmágnesekkel, az 1. ábrának megfelelő elrendezésben! Az (1) képlet alapján a kis amplitúdójú inga frekvenciája teljesen eltüntethető, $\omega \to 0$.

a) Határozd meg a lehető legpontosabban azt a mágnesek közötti d távolságot, amely a teljes eltüntetéshez szükséges!

b) Vizsgáljad az inga periódusidejének amplitúdótól való függését abban az esetben, amikor az előbbi eltüntetést a lehető legjobban sikerült beállítanod!

Javasolj egy függvényt a kapcsolatra, és igazold ezt a mért adataiddal. Diszkutáld az esetleges eltérések okát.

2. Optikai feketetdoboz (10 pont)

Feladatod, hogy meghatározd egy optikai feketedoboz tartalmát anélkül, hogy kinyitnád azt.

A feketedoboz négy optikai nyílással (A, B, C és D) rendelkezik a megvilágításhoz, és két optikai tengelye van (*2. ábra*). Az optikai tengelyek merőlegesek egymásra. Mindegyik nyílás mögött legfeljebb egy optikai elem van, valamint egy a doboz közepén is. Egy lézert és egy kerékkel ellátott lézertartót (amire ceruzával jelöléseket tehetsz) használhatsz; a lézert a kerékkel tudod forgatni.

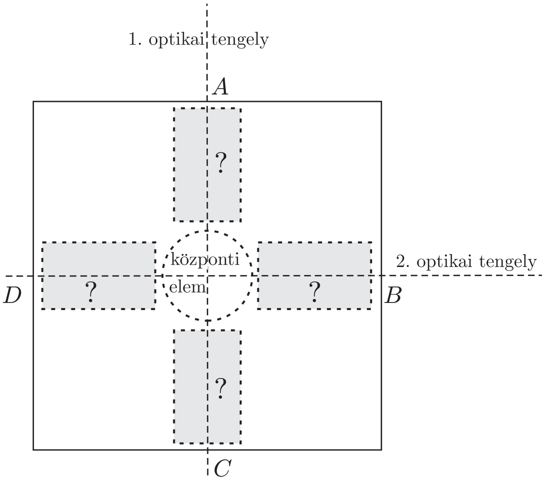
Eszközök (lásd a *4. ábrát*)

A – Feketedoboz.
B – Lézeregység kerékkel ellátott tartóban (mindkét feladathoz használd ugyanazt a lézeregységet, amit az asztalra kell tenni).
C – Átlátszó elem.
D – Ragasztószalag, ceruza, vonalzó, papírdarab átlós skálával (diagonal scale).

2.1 A középső elem (0,3 pont)

A két optikai tengely a feketedoboz közepén metszi egymást. A metszéspontban lehet: egy teljesen fényvisszaverő tükör (mindkét oldalon), egy féligáteresztő tükör vagy egy szabályos háromszög alakú prizma, esetleg nincs ott semmi.

Határozd meg, melyik elem helyezkedik el a feketedoboz közepén! Add meg az optikai nyílásokhoz (A, B, C és D) képesti elhelyezkedését – például egy vázlatos ábrával. Választásodat indokold.



2. ábra. A feketedoboz elrendezése és az ismeretlen elemek helyei

2.2 A többi helyen lévő elemek (2,2 pont)

Az A, B, C, D nyílások mögötti négy helyen az *1. táblázatban* felsorolt elemek közül külön-külön van egy.

Határozd meg az egyes helyeken lévő elemek típusát! Választásaidat indokold.

2.3 Tulajdonságok (7,5 pont) A *Táblázatban* egy második oszlop is található, ami a lehetséges elemeket jellemző tulajdonságokat tartalmazza.

Határozd meg ezeket a jellemző tulajdonságokat azokra az optikai elemekre, amelyek a feketedoboz A, B, C és D helyein vannak **olyan pontosan, amennyire lehetséges**!

Táblázat. Lehetséges elemek a feketedobozban

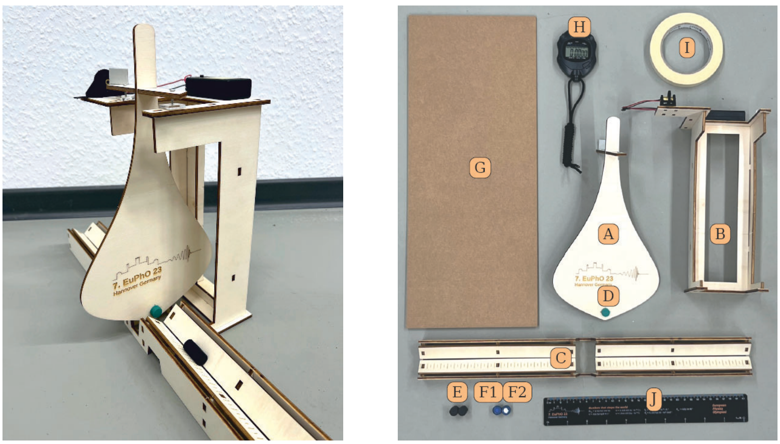
nincs elem	csak levegő van ezen a helyen
tükör	a tükör tengelye és az egyik optikai tengely közötti szög
prizma	a prizma egyik oldala és a feketedoboz egyik optikai tengelye közötti szög, az alakja szabályos háromszög

gyűjtő- vagy szórólencse *Megjegyzés:* A lencsék tengelyei mindig az optikai tengelyek mentén helyezkednek el.	doboz közepétől mért távolság, fókusztávolságának nagysága és előjele
polarizátor	a feketedoboz függőleges tengelyéhez képesti polarizáció szöge
egyetlen keskeny rés	a doboz közepétől mért távolság, rés szélessége
optikai rács	a doboz közepétől mért távolság, a csíkok iránya, a csíkok távolsága
tűlyuk	a doboz közepétől mért távolság, lyukátmérő

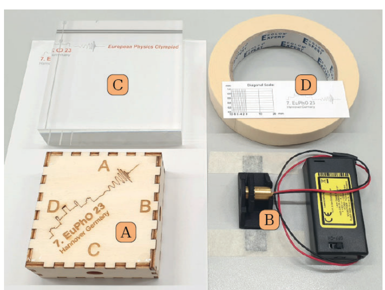
Fontos útmutatások:

- A lézer hullámhossza 650 nm.
- Tegyük fel, hogy az átlátszó elem törésmutatója 1,5.

Képek a mérési elrendezésről és az eszközökről



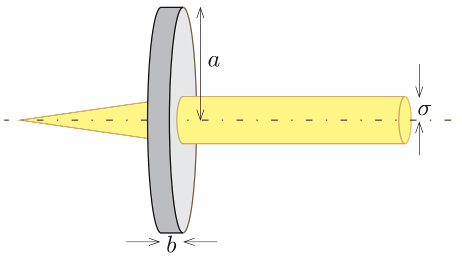
3. ábra. Mérési összeállítás és eszközök az 1. kísérleti feladathoz



4. ábra. A 2. kísérleti feladat eszközei.
Megjegyzés: A lézeregységet a ragasztószalaggal rögzítheted az asztalhoz – lásd a B-t.

1. Termikus lencsék (10 pont)

Ha egy féligáteresztő lapra erős lézersugár esik, lehetséges, hogy az anyag inhomogén melegedése miatt az áthaladó fény önmagától fókuszálódik (self-focus) egy pontra a lemez mögött. Ez a jelenség (thermal lensing) olyan anyagokban figyelhető meg, amelyek törésmutatója a hőmérséklet növekedésével növekszik, amit egy pozitív $\gamma = \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}T}$ termo-optikai együttható jellemez.



5. ábra

Egy $a = 15{,}0$ mm sugarú, $b = 0{,}2$ mm vastagságú és $A = 0{,}1$ optikai abszorpciós együtthatójú, féligáteresztő korong olyan anyagból készült, melynek hővezetési együtthatója $k = 0{,}3\ \mathrm{Wm^{-1}K^{-1}}$ és termo-optikai együtthatója $\gamma = 2{,}5 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{K^{-1}}$. A korong külső pereme termikusan csatlakozik egy kör alakú fémtartóhoz (az ábrán nincs feltüntetve), amely a peremen konstans $T_\mathrm{h} = 20\ {}^\circ\mathrm{C}$ hőmérsékletet biztosít. Egy párhuzamos, $\sigma = 0{,}5$ mm sugarú és $P_\mathrm{L} = 20$ mW teljesítményű lézersugár merőlegesen esik a korong közepére. Az intenzitáseloszlás a sugár teljes keresztmetszetén homogén.

a) Készíts egy kvalitatív grafikont a $T(r)$ hőmérséklet-eloszlásról, ahol r a nyaláb tengelyétől mért távolság! A grafikonon egyértelműen jelöld be a $0 \leqslant r \leqslant \sigma$ megvilágított és a $\sigma \leqslant r \leqslant a$ külső tartományt. (2 pont)

b) A korong középpontjának környezetében a hőmérséklet-eloszlást egy $T(r) = T_\mathrm{c} + mr^2$ alakú másodfokú függvénnyel lehet leírni. Határozd meg a T_c és m paramétereket! (4 pont)

c) Mutasd meg, hogy a nyaláb valóban egy pontba fókuszálódik, és határozd meg ennek a pontnak a korongtól mért f távolságát! Ha a *b*) részben nem sikerült meghatároznod T_c és m értékét, használhatod őket paraméterként ebben a részben. (4 pont)

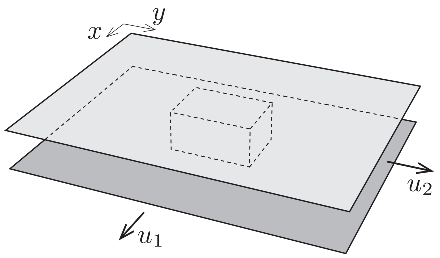
Ne vedd figyelembe a korong hőtágulását. A hősugárzást, valamint a korong és a környező levegő közötti hőcserét hanyagold el. A környező levegő törésmutatója legyen $n = 1$.

2. Tégla két sík között (10 pont)

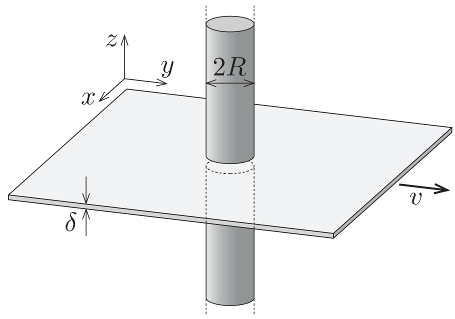
Egy kis méretű tégla két, párhuzamos sík közé van beszorítva a súlytalanság állapotában. A síkok merőlegesek a z tengelyre. Az alsó sík az x tengely irányába mozog állandó u_1 sebességgel, míg a felső az y tengely irányába állandó u_2 sebességgel (lásd a *6. ábrát*).

A tégla kezdetben nyugalomban van. A tégla és az egyes síkok közötti csúszási súrlódási együttható megegyezik.

a) Határozd meg a tégla hosszú idő után kialakuló v_∞ sebességét, ha $u_1 = u_2$ (4 pont) *b*) Határozd meg a tégla hosszú idő után kialakuló v_∞ sebességét, ha $u_1 \neq u_2$! (6 pont)



6. ábra



7. ábra

3. Lemez mágnesek között (10 pont)

Két, egyforma hosszúságú, hengeres, R sugarú rúdmágnes közel van egymáshoz, és a függőleges szimmetriatengelyeik egybeesnek. A mágnesek polaritása megegyezik. Emiatt a mágnesek közötti légrésben a mágneses mező iránya a $+z$ tengely irányába mutat (lásd a *7. ábrát*), és homogén B indukcióval jellemezhető. A légrésen kívül nincs mágneses tér. A légrésbe egy nagy kiterjedésű, vízszintes, nem-mágneses fémlemezt helyezünk, és állandó v sebességgel mozgatjuk vízszintesen a $+y$ tengely irányába. A fémlemez vastagsága δ, a fajlagos ellenállása ϱ.

a) Vázold fel az áramvonalak alakját a fémlemezben egy adott időpillanatban! Tüntesd fel a tengelyeket a rajzon. (3 pont)

b) Határozd meg és ábrázold a fémlemezbeli áramsűrűséget a mágnesek szimmetriatengelyét metsző, az y tengellyel párhuzamos egyenes mentén! (5 pont)

c) Mekkora vízszintes irányú erő szükséges a lemez mozgatásához? (2 pont)

Szász Krisztián, Vankó Péter

Ifjú Fizikusok Nemzetközi Versenye

Versenyfelhívás és beszámoló

Ha szereted a fizikát, a kísérletezést, jól beszélsz angolul, és egy életre szóló élményre vágysz, akkor itt a helyed!

A Fizika Világbajnokságnak is nevezett IYPT (Ifjú Fizikusok Nemzetközi Versenye, angolul International Young Physicists' Tournament) egy angol nyelvű, kísérleti fizikai csapatverseny, ahova a világ minden tájáról (több mint 30 országból) érkeznek középiskolások, hogy összemérjék tudásukat. Az IYPT a XXI. század kihívásainak megfelelő készségeket vár el az indulóktól: nemcsak a fizikában kell jártasnak lenni, hanem az eredményeket prezentálni és megvédeni is tudni kell. A résztvevő diákok a versenyt megelőzően elvégzett fizikai méréseiket és kutatásaikat egy – angol nyelven előadott – tudományos prezentáció formájában mutatják be a rivális csapatoknak.

Az IYPT verseny magyarországi első fordulójára (Hungarian Young Physicists' Tournament, HYPT) az `hypt.elte.hu` oldalon való regisztráció határideje:

2023. október 31. éjfél.

A jelentkező diákoknak egy tetszőlegesen választott IYPT problémáról (elérhetőek itt: `https://www.iypt.org/problems/problems-iypt-2024/`) egy legfeljebb 8 oldalas, magyar nyelvű dolgozatot kell beküldeniük. Beküldési határidő 2023. november 28. Ezek alapján a legjobbak az ELTE TTK-n december közepén megrendezésre kerülő szóbeli fordulón vehetnek részt. Az induló diákoknak itt az általuk beküldött előadást élőben kell előadniuk 10 percben, majd kutatásukat megvédeniük.

A decemberi szóbeli fordulót követően a 10 legmagasabb pontszámot elérő diák az ELTE TTK Anyagfizikai Tanszékén végezheti a további kutatásait. A felkészülés során nyújtott teljesítmény alapján 3 diák indulhat az osztrák AYPT versenyen, az 5 legjobb diák pedig bekerül a Magyarországon megrendezésre kerülő 37. IYPT magyar csapatába.

Jelentkezés, a feladatok szövege és további információk az `hypt.elte.hu` weboldalon, illetve az `hypt@ttk.elte.hu` email címen.

Néhány példa a 2024-re kitűzött IYPT problémák közül:

1. Találd fel magad. Vegyél egy dobozt (pl. egy gyufásdobozt), és töltsd meg azonos tárgyakkal (pl. gyufa, labda, ...)! Találj ki egy módszert, amellyel kizárólag a doboz rázása közben keletkező hang alapján meghatározható a dobozban lévő tárgyak száma. Hogyan függ a mérési módszer pontossága a tárgyak és a doboz tulajdonságaitól, valamint a pakolás sűrűségétől?

10. Mágneses fogaskerék. Vegyél több egyforma „fidget spinner"-t, és rögzíts a végükre neodímium mágneseket. Ha egymás mellé helyezzük őket egy síkban, és az egyiket elforgatjuk, a többi a mágneses mező hatására kezd el forogni. Vizsgáld meg és magyarázd a jelenséget!

14. Vonalzótrükk. Helyezz egy vonalzót az asztal szélére, és dobj egy labdát a szabad végére. A vonalzó le fog esni. Ha azonban a vonalzó egy részét letakarod egy papírdarabbal, és megismétled a dobást, akkor a vonalzó az asztalon marad, míg a labda lepattan róla. Magyarázd meg a jelenséget, és vizsgáld meg a fontos paramétereket!

Ezüstérmesek lettek az ifjú fizikusaink Pakisztánban

2023. július 18–25. között került megrendezésre 36. alkalommal az Ifjú Fizikusok Nemzetközi Versenye (IYPT – International Young Physicists' Tournament, `https://www.iypt.org`). A pakisztáni vízumszerzés nehézségei miatt idén kevesebb csapat indult. A magyarok 14 ország közül végül 7. helyen végeztek, ezzel ezüstérmet szerezve.

A felkészülési időszak során a hallgatók kutatásaik folytatása mellett a verseny körülményeit szimulálva próbálták el előadásaikat. Az ELTE TTK IYPT laborja az év folyamán megtelt a kísérletekhez és mérésekhez szükséges eszközökkel. Ezen komplex alkotói munka során a diákok a fizikáról sokat tanulva megismerték a valódi kutatómunka örömeit és nehézségeit is. A felkészülés fontos pillanata a fizikusi edzőtábor, ahol a kutatói munkát és előadások gyakorlását közösségi programok és játékok váltották egy idilli balatoni környezetben.

Sajnos csapatunkat az 5 helyett csak 4 diák tudta képviselni, így hátrányból indultunk. 9 kutatási témával érkeztünk a pakisztáni Murree városába, melyből 4-et mutattunk be a versenyen. A megmérettetésen a saját kutatási eredmények prezentálása mellett a többi ország eredményeinek opponálása és értékelése (review) is a verseny része.

Idén is sikerült a „fizikázás" mellett jobban megismerni a fogadó országot, jelen esetben Pakisztánt. Egy teljesen új világot és kultúrát fedezhettünk fel. Körbenéztünk Murree városában, kirándultunk a Himalája aljában, megismerhettük és „kitanultuk" a helyi népzenét és táncot is. Mindeközben különleges ételeket fogyasztottunk, amelyek, habár sokszor csípősek voltak, de a helyi mangók ízét azóta is emlegetjük. A helyiek egyedülálló vendégszeretete megalapozta, hogy igazán jól érezzük magunkat.

További információkért látogasd meg és kövesd Facebook oldalunkat: `www.facebook.com/hypt.elte.hu`, ahol a csapat részletes élménybeszámolóját, képeit és eseményeit találod, amik többet mondanak minden szónál!

A magyar csapat tagjai:

Czehlár Gergely (Budapest, Békásmegyeri Veres Péter Gimnázium, 12. évf.);

Grosser Dániel (Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium, 11. évf.);

Szederkényi Kincső (Budapesti Német Iskola, 10. évf.);

Vári Gergely Péter (Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium, 11. évf.).

A versenyzők felkészítése az ELTE Anyagfizikai Tanszékén folyt egyetemi hallgatók, oktatók és középiskolai tanárok vezetésével.

– Egyetemi és középiskolai oktatók: *Hömöstrei Mihály* (Budapesti Német Iskola, ELTE), *Ispánovity Péter* (ELTE), *Jenei Péter* (ELTE), *Szeidemann Ákos* (Eötvös József Gimnázium, Tata), Sz*échenyi Gábor* (ELTE), *Vincze Miklós* (ELTE-MTA).

– Egyetemi hallgatók és doktoranduszok: *Bánóczki Tímea* (BME), *Beregi Ábel* (University of Oxford), *Jéhn Zoltán* (ELTE, TU Wien) *Kadlecsik Ádám* (ELTE), *Lipovics Dániel* (University College London), *Somogyi Boglárka* (King's College London), *Penc Patrik* (BME), *Simon Tamás* (ETH Zürich), *Vavrik Márton* (BME).

A sok nevetéssel és kemény munkával töltött év után most indul a felkészülés a 2024-es megmérettetésre, mely Budapesten kerül megrendezésre.

az HYPT szervezők csapata

Mérési feladat megoldása

M. 423. *Ütköztessünk vízszintes asztallapon egyenesen és centrálisan egy nyugvó* 100 *forintos pénzérmének egy másik* 100 *forintos érmét. Mérjük le az ütközés után a megállásáig megtett utakat. Határozzuk meg ezekből az ütközés rugalmatlansági fokát jellemző* ütközési számot! *Függ-e az ütközési szám az ütköző testek relatív sebességétől?*

(*6 pont*) *Varga István* (1952–2007) feladata nyomán

Megoldás.

1. A mérés megtervezése

A kísérletet egy fa asztalon végeztem el, melyre húztam egy vonalat. A vonalat érintve elhelyeztem az egyik érmét, a másikat pedig a vonalra merőleges irányból nekilőttem az álló pénznek. A érmék ütközési pontja éppen a vonalra esett. Megmértem, hogy az ütközési ponttól milyen távol álltak meg az asztalon csúszó pénzérmék. Néha nem sikerült pontosan egyenes ütközést előidézni. Amikor az érmék ütközés utáni sebességének iránya (ami közelítőleg az ütközési ponttól a megálló érme felé húzott egyenes iránya) 5°-nál jobban eltért a „lövedék” haladási irányától, azt az eseményt figyelmen kívül hagytam.

Az eredetileg álló érme csúszásának hosszát (mm-ben mérve) d_2-vel, a kezdetben mozgó érme ütközés utáni elmozdulását d_1-gyel jelöltem. (Nyilván $d_2 > d_1$.) Ezeket a távolságokat mértem viszonylag sok ütközésnél.

2. Elméleti megfontolások

Az ütközés után a súrlódás miatt egyenletesen lassuló mozgást végeznek, így tudjuk, hogy a megtett út arányos a kezdősebesség négyzetével, tehát a kezdősebesség arányos a távolság négyzetgyökével:

$$v = K\sqrt{s}\,.$$

Megjegyzés. A K arányossági tényező konkrét értékére nem lesz szükségünk, de akár ki is számíthatjuk, ha ismerjük az érmék és az asztal közötti μ csúszási súrlódási együtthatót: $K = \sqrt{2\mu g}$. Feltételezzük, hogy K nagysága mindkét pénzérmére ugyanakkora.

Az ütközés utáni sebességek ezek szerint

$$u_1 = K\sqrt{d_1}, \qquad \text{illetve} \qquad u_2 = K\sqrt{d_2}.$$

Az ütközés előtt az egyik érme sebessége nyilván nulla ($v_2 = 0$), a másik, kezdetben mozgó test sebességét pedig az impulzusmegmaradás tétele segítségével ki tudjuk számítani. Mivel az érmék tömege megegyezik, a megmaradási tétel így alkalmazható:

$$v_1 = u_1 + u_2 = K\big(\sqrt{d_1} + \sqrt{d_2}\,\big).$$

Az ütközés rugalmatlanságát jellemző *k ütközési szám* a két test egymáshoz viszonyított (relatív) sebességéből kapható meg, nevezetesen k az ütközés utáni és az ütközés előtt sebességkülönbségek hányadosa (lásd pl. a Négyjegyű függvénytáblázatokban a „Pontszerű testek ütközései” szakaszt):

$$k=\left|\frac{u_1-u_2}{v_1-v_2}\right|=\left|\frac{\sqrt{d_1}-\sqrt{d_2}}{\sqrt{d_1}+\sqrt{d_2}}\right|.$$

Minden ütközésre mérhetjük a csúszási távolságokat és azokból k-t kiszámíthatjuk. Az ütközési szám esetleges v_1 függését úgy vizsgálhatjuk meg, hogy ábrázoljuk a mért távolságokból számított k értékeket a v_1-gyel arányos $\sqrt{d_1}+\sqrt{d_2}$ mennyiség függvényében.

3. Mérési eredmények

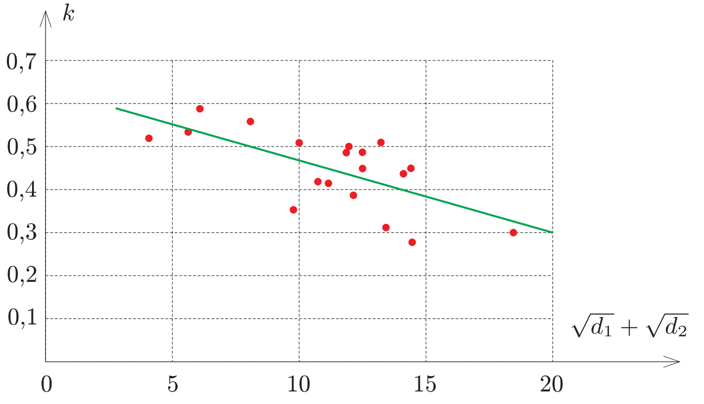
Az alábbi táblázat a (mm egységekben) mért csúszási úthosszakat és a v_1-gyel arányos $\sqrt{d_1}+\sqrt{d_2}$ mennyiséget, valamint a kiszámított k értékeket tartalmazza.

d_1	d_2	$\sqrt{d_1}+\sqrt{d_2}$	k
11	65	11,4	0,42
21	76	13,3	0,31
41	143	18,4	0,30
2	21	6,0	0,53
29	89	14,8	0,27
11	62	11,2	0,41
3	38	7.9	0,56
14	73	12,3	0,39
10	43	9,7	0,35
12	84	12,6	0,45
5	42	8,7	0,49
6	57	10,0	0,51
1	10	4,2	0,52
11	105	13,6	0,51
9	82	12,1	0,50
17	110	14,6	0,44
1,5	22	5,9	0,59
10	85	12,4	0,49
16	102	14,1	0,43

A mérési adatokat grafikonon is ábrázoltam. A zöld vonal a mérési pontokra legjobban illeszkedő egyenes.

4. Mérési eredmények kiértékelése

Az összes mért/kiszámított ütközési szám átlaga $\overline{k}=0{,}45$, az adatok statisztikus szórása (az átlagtól való négyzetes eltérés): $\sigma_k=0{,}09$. Az illesztett (zöld)



egyenes olyan tendenciát mutat, hogy nagyobb relatív sebességgel történő ütközéseknél az ütközési szám lecsökken. Ez a megállapítás azonban az adatok erős szórása miatt fenntartással fogadható, hiszen a mérési pontokra akár vízszintes egyenest is lehetne illeszteni. Ha biztosabban szeretnénk tudni, hogy van-e ilyen sebességfüggés, további méréseket kellene végezzünk.

Megjegyzés. Acél korongok esetében kb. 0,7 lenne az ütközési szám, azonban a 100 Ft-os pénzérme külső része nikkellel bevont acél, és a bevonat befolyásolhatja az ütközés rugalmasságát. Ráadásul 2020 óta változott az összetétel, de én régi érméket használtam.

5. A mérés pontossága

A közvetlenül mért adatok (távolságok) mm-re pontosak voltak. Hasonlóképpen a kezdeti pozíció beállításánál is lehetett egy mm-es pontatlanság. Ezek kis távolságoknál számottevő, nagyokra elenyésző mérési hibát okoztak. A mérés pontosságát elsősorban az ismeretlen okból származó nagy statisztikus szórás határozza meg. Ha az összes mért értéket egyetlen számmal akarjuk jellemezni, azt mondhatjuk, hogy

$$k = 0{,}5 \pm 0{,}2,$$

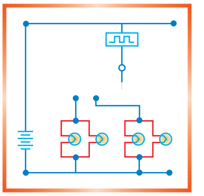
mert a statisztikus okokból származó hibát a szórás 2-szeresének (esetleg 3-szorosának) szokták tekinteni. Ez meglehetősen nagy, mintegy 40%-os relatív hibának felel meg.

A mérést befolyásoló egyéb tényezők: Az asztal lapján a súrlódás esetleg nem mindenhol ugyanakkora. Megfigyelhetjük még, hogy a 100 Ft-os pénzérme pereme nem sima, hanem recés; ez is befolyásolhatja a mérést.

Csilling Dániel (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.)
mérési jegyzőkönyve alapján

8 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott Csóka Péter és Schäffer Donát mérőpár, Kiss Benedek és Sós Ádám mérőpár, Herczeg Viktória és Ollé Sarolta mérőpár, valamint Csilling Dániel és Farkas Dorka Hanna megoldás. Kicsit hiányos (5 pont) 1, hiányos (3 pont) 2 dolgozat.

Fizika gyakorlatok megoldása



G. 816. *Van három ohmos ellenállásunk, melyek értéke* 1 kΩ, 2 kΩ *és* 4 kΩ. *Ezek közül kettőt vagy hármat sorba kötünk, és* 230 V*-ra kapcsolunk. Hányféle feszültséget mérhetünk az egyes áramkörökben két tetszőleges pont között, és mekkorák ezek az értékek?*

(*4 pont*)

Megoldás. Az ellenállások nagyságát jelöljük R_1-gyel, R_2-vel és R_4-gyel (ahol az index mutatja, hogy hány kΩ-os ellenállásról van szó), a tápfeszültség effektív értékét pedig U-val.

A sorba kapcsolt ellenállások értékeit összeadjuk, így kapjuk az eredő ellenállást. A mérhető feszültségeket feszültségosztással kapjuk: az U feszültséget egy olyan törttel szorozzuk, amelynek a számlálója a mért ellenállás, illetve a mért ellenállások eredője, a nevezője pedig a sorba kapcsolt ellenállások eredője.

Ha három ellenállást kapcsolunk sorba, és egy-egy ellenállás két végére csatlakoztatjuk a feszültségmérőt, akkor a következő feszültségeket mérhetjük:

$$U_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_4} U = \frac{1}{7} \cdot 230 \text{ V} \approx 33 \text{ V},$$

$$U_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2 + R_4} U = \frac{2}{7} \cdot 230 \text{ V} \approx 66 \text{ V},$$

$$U_3 = \frac{R_4}{R_1 + R_2 + R_4} U = \frac{4}{7} \cdot 230 \text{ V} \approx 131 \text{ V}.$$

Ha három ellenállást kapcsolunk sorba, és két egymás melletti ellenállás feszültségét mérjük, akkor a következő feszültségeket mérhetjük:

$$U_4 = \frac{R_1 + R_2}{R_1 + R_2 + R_4} U = \frac{3}{7} \cdot 230 \text{ V} \approx 99 \text{ V},$$

$$U_5 = \frac{R_1 + R_4}{R_1 + R_2 + R_4} U = \frac{5}{7} \cdot 230 \text{ V} \approx 164 \text{ V},$$

$$U_6 = \frac{R_2 + R_4}{R_1 + R_2 + R_4} U = \frac{6}{7} \cdot 230 \text{ V} \approx 197 \text{ V}.$$

(A három ellenállás bármelyik soros kapcsolásában a fenti három eset közül csak kettő mérhető. A harmadik méréshez más sorrendben kell összekapcsolnunk az ellenállásokat.)

Ha három ellenállást kapcsolunk sorba, és a három ellenálláson mérjük a feszültséget, akkor nyilván a tápfeszültséget kapjuk:

$$U_7 = \frac{R_1 + R_2 + R_4}{R_1 + R_2 + R_4} U = 230 \text{ V}.$$

(Megállapodás kérdése, hogy ezt a nyilvánvaló (triviális) mérést külön esetnek tekintjük, vagy sem.)

Ha kettő ellenállást kapcsolunk sorba, és valamelyikük két végére csatlakoztatjuk a feszültségmérőt, akkor ilyen értékeket mérhetünk:

$$U_8 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} U = \frac{1}{3} \cdot 230 \text{ V} \approx 77 \text{ V},$$

$$U_9 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U = \frac{2}{3} \cdot 230 \text{ V} \approx 153 \text{ V}.$$

Ugyanezeket az értékeket kapjuk az R_2 és R_4 ellenállásoknál is, így ezek nem adnak új eredményt.

Végül az R_1 és R_4 ellenállás összekapcsolásakor

$$U_{10} = \frac{R_1}{R_1 + R_4} U = \frac{1}{5} \cdot 230 \text{ V} = 46 \text{ V},$$

illetve

$$U_{11} = \frac{R_4}{R_1 + R_4} U = \frac{4}{5} \cdot 230 \text{ V} = 184 \text{ V}$$

értéket mutathat a feszültségmérő.

Összefoglalva: a feszültségmérő 11-féle (ha a triviális esetet nem számítjuk, akkor 10-féle) értéket mutathat, ezek nagysága növekvő sorrendben 33, 46, 66, 77, 99, 131, 153, 164, 184, 197 és 230 volt.

Blaskovics Ádám (Budapest, Csillaghegyi Ált. Isk., 8. évf.)

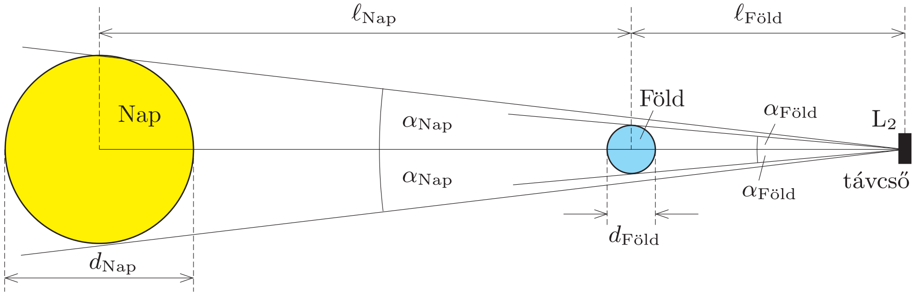
40 dolgozat érkezett. Helyes 14 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 8, hiányos (1–2 pont) 14, hibás 1, nem versenyszerű 3 dolgozat.

G. 817. *A James Webb űrtávcső a Nap-Föld rendszer úgynevezett* L_2 *Lagrange-pontja körül mozog. Ez a pont* 1,5 millió km *távolságra van a Földtől a Nap és a Föld középpontját összekötő egyenesen úgy, hogy a Föld a Nap és az* L_2 *Lagrange-pont között van. Képzeljük el, hogy pontosan az* L_2 *Lagrange-pontban vagyunk, és a Nap felé nézünk. Szükségünk van-e védőszemüvegre? Mit látunk?*

(*4 pont*)

Megoldás. Táblázati adatok szerint a *nem* méretarányos *1. ábrán* látható távolságok:

$$d_{\mathrm{Nap}} = 1{,}392 \cdot 10^6\ \mathrm{km},$$
$$d_{\mathrm{Föld}} = 12\,742\ \mathrm{km},$$
$$\ell_{\mathrm{Nap}} = 149{,}6 \cdot 10^6\ \mathrm{km},$$
$$\ell_{\mathrm{Föld}} = \frac{1}{100}\ell_{\mathrm{Nap}} = 1{,}5 \cdot 10^6\ \mathrm{km}.$$



1. ábra

Ennek megfelelően az űrtávcsőtől nézve a Föld látószögének fele:

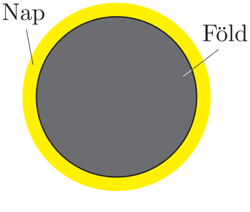
$$\alpha_{\mathrm{Föld}} = \arcsin\frac{d_{\mathrm{Föld}}}{2\ell_{\mathrm{Föld}}} = 0{,}243^\circ,$$

a Nap fél látószöge pedig

$$\alpha_{\mathrm{Nap}} = \arcsin\frac{d_{\mathrm{Nap}}}{2(\ell_{\mathrm{Nap}} + \ell_{\mathrm{Föld}})} = 0{,}264^\circ.$$

Mivel $\alpha_{\mathrm{Nap}} > \alpha_{\mathrm{Föld}}$, a Föld nem tudja teljesen eltakarni a Napot, így az L_2 pontból nézve gyűrűs napfogyatkozást látunk (*2. ábra*). A gyűrű területének és a napkorong teljes területének aránya

$$\frac{\alpha_{\mathrm{Nap}}^2 - \alpha_{\mathrm{Föld}}^2}{\alpha_{\mathrm{Nap}}^2} \approx 0{,}15,$$



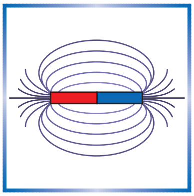
2. ábra

vagyis a teljes napsugárzás kb. 15%-a jutna a szemünkbe.

Ez nagyon erős sugárzás, tehát feltétlenül szükségünk lenne védőszemüvegre.

A fizikások csapat: Herczeg Viktória és *Ollé Sarolta*
(Hódmezővásárhely, Bethlen G. Ref. Gimn., 9. évf.)

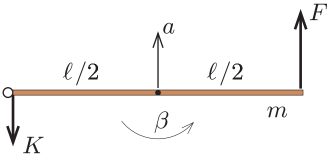
30 dolgozat érkezett. Helyes 14 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 3, hiányos (1–2 pont) 6, hibás 4, nem versenyszerű 3 dolgozat.



Fizika feladatok megoldása

P. 5474. *Vízszintes síkon egy homogén, vékony, m tömegű, ℓ hosszúságú pálca egyik végét csuklóval rögzítjük. A másik végét egy rövid ideig ható, a rúdra merőleges, vízszintes, F nagyságú erővel megütjük. Mekkora ebben a pillanatban a pálca közepének gyorsulása, szöggyorsulása és a másik végére ható csuklóerő?*

(*4 pont*) Közli: *Gelencsér Jenő,* Kaposvár



Megoldás. Vegyük fel a keresett K csuklóerőt, a pálca középpontjának a gyorsulását és β szöggyorsulását az *ábrán* látható módon.

Megjegyzés. Nem biztos, hogy a fenti mennyiségek az ábrán bejelölt irányításúak, ez csak a számolás végén derül majd ki. Ha valamelyikük előjeles nagyságára negatív szám adódik, az azt jelenti, hogy a tényleges iránya éppen ellentétes, mint amit az ábra mutat.

A rúd (mint merev test) mozgásegyenlete:

$$F - K = ma, \tag{1}$$

a tömegközéppont körüli forgásának egyenlete pedig

$$F\frac{\ell}{2} + K\frac{\ell}{2} = \left(\frac{1}{12}m\ell^2\right)\beta. \tag{2}$$

(Kihasználtuk, hogy egy vékony, homogén pálca középpontjára vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatéka $\frac{1}{12}m\ell^2$.) Tudjuk még, hogy a rúdnak a csuklóhoz rögzített vége nem tud elmozdulni, a gyorsulása tehát nulla:

$$a - \frac{\ell}{2}\beta = 0. \tag{3}$$

Ha kifejezzük (3)-ból β-t, és azt (2)-be helyettesítjük, ezt kapjuk:

$$F + K = \frac{1}{3}ma. \tag{4}$$

(1)-et és (4)-et összeadva

$$2F = \frac{4}{3}ma, \qquad \text{vagyis} \qquad a = \frac{3F}{2m},$$

(3)-ból pedig

$$\beta = \frac{3F}{m\ell}$$

adódik. A csuklóerőt (1) alapján határozhatjuk meg:

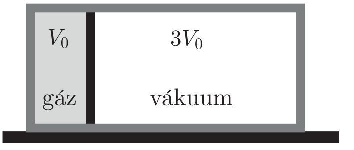
$$K=F-ma=F-\frac{3}{2}F=-\frac{1}{2}F.$$

A negatív előjel azt fejezi ki, hogy K iránya az ábrán jelölt iránnyal ellentétes, vagyis F irányával megegyező.

Nemeskéri Dániel (Bp., ELTE Apáczai Csere J. Gyak. Gimn., 12. évf.)

32 dolgozat érkezett. Helyes 12 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 5, hiányos (1–2 pont) 11, hibás 2, nem versenyszerű 2 dolgozat.

P. 5475. *Egy $M=32$ kg tömegű, $V=$ $=4\ \mathrm{dm}^3$ térfogatú tartály súrlódásmentesen mozoghat egy vízszintes asztallapon. A tartályt egy $m=16$ kg tömegű dugattyú két részre osztja, a bal oldalon $V_0=1\ \mathrm{dm}^3$ térfogatú, $p_0=0{,}3$ MPa nyomású és $\kappa=1{,}5$ adiabatikus kitevőjű gázkeverék található. A jobb oldalon vákuum van. Mekkora relatív sebességgel ütközik a dugattyú a henger falának, ha a dugattyú rögzítését feloldjuk? Tételezzük fel, hogy a gáz minden időpillanatban termikus egyensúlyban van!*



(*5 pont*) Példatári feladat nyomán

Megoldás. A bal oldali térfélben lévő gáz adiabatikusan tágul V_0 térfogatról $V_1=V=4V_0$ térfogatra, miközben a nyomása p_0-ról valamekkora p_1-re csökken. Az adiabatikus állapotegyenlet szerint

$$p_0V_0^{1,5}=p_1(4V_0)^{1,5},$$

vagyis a lecsökkent nyomás

$$p_1=\left(\frac{1}{4}\right)^{1,5}p_0=\frac{1}{8}p_0=37{,}5\ \mathrm{kPa}.$$

Az adiabatikus tágulás során végzett munka (ami a belső energia csökkenésével egyezik meg)

$$W=\frac{p_0V_0-p_1V_1}{\kappa-1}=\frac{1-\frac{1}{8}\cdot 4}{1{,}5-1}p_0V_0=p_0V_0=300\ \mathrm{J}.$$

Ez a munka – mivel hőleadás nincsen – egyrészt az M tömegű tartály v_M sebességre történő gyorsítására, másrészt az m tömegű dugattyú v_m sebességre történő gyorsítására fordítódik:

$$W=\frac{1}{2}Mv_M^2+\frac{1}{2}mv_m^2.$$

A rendszerre (súrlódás hiányában) nem hat vízszintes irányú külső erő, így az összimpulzus a kezdeti nulla érték marad:

$$MV_M-mv_m=0,\qquad \text{vagyis}\qquad v_M=\frac{m}{M}v_m=\frac{1}{2}v_m.$$

A munkatétel ennek megfelelően így írható:

$$W=\frac{1}{2}mv_m^2\left(1+\frac{M}{m}\cdot\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{4}mv_m^2,$$

ahonnan a dugattyú legnagyobb sebessége

$$v_m=\sqrt{\frac{4W}{3m}}=\sqrt{\frac{4\cdot 300\ \mathrm{J}}{3\cdot 16\ \mathrm{kg}}}=5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}},$$

a tartály végsebessége pedig

$$v_M=\frac{1}{2}v_m=2{,}5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

A dugattyú tehát a folyamat végén

$$v_{\text{relatív}}=v_m+v_M=7{,}5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

sebességgel csapódik neki a henger falának.

Dercsényi Bence (Budapest, Városmajori Gimn., 12. évf.)

43 dolgozat érkezett. Helyes 27 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 8, hiányos (1–3 pont) 6, hibás 1, nem versenyszerű 1 dolgozat.

Fizikából kitűzött feladatok

M. 425. Mérjük meg minél pontosabban egy talpaspohár vagy másféle üvegpohár anyagának sűrűségét!

(*6 pont*) Közli: *Gnädig Péter,* Vácduka

G. 825. Van egy kerek falióránk, amelynek „számlapján” nincsenek számok és beosztások, csak mutatók.

A kis- és nagymutató csak a hátoldalán található gombbal állítható. Hátul kialakítottak egy körbefutó peremet, aminek segítségével az óra bármilyen helyzetben falra akasztható. A gomb megfelelő beállítása után hányféle helyzetben helyezhetjük az órát a falra úgy, hogy helyesen mutassa az időt?

(*4 pont*) Közli: *Vladár Károly*, Kiskunhalas

G. 826. Egy autó a reggeli csúcsforgalomban fél óra hosszat halad a megengedett városi sebesség felével, majd az autópályát elérve 4 óra hosszan a megengedett legnagyobb sebesség háromnegyedével, végül 2 óra hosszat országúton a megengedett sebesség 80 százalékával mozog. Mekkora az autó átlagsebessége?

(*3 pont*)

G. 827. A képsorozat egy vízcsepp leszakadásának fázisait mutatja egy csöpögő csapról. Írjuk le, hogy mi történik az egyes képeken!

(*4 pont*)

G. 828. Tételezzük fel, hogy a Föld tökéletesen gömb alakú, tömegeloszlása gömbszimmetrikus, sugara 6400 km, tömege és tengely körüli forgásideje megegyezik az igazi Föld adataival. Egy jól megtermett fizikus az Északi-sarkon dekagramm pontos fürdőszobamérlegével éppen 100,00 kg-osnak méri magát. Mennyit mutatna ugyanez a mérleg, ha az Egyenlítőn végezné a mérést?

(*3 pont*)

P. 5508. Egy autó álló helyzetből indulva egyenletesen felgyorsul v_0 sebességre. A gyorsítási pályaszakaszon sűrűn, egyenletes távolságokra sebességmérőket telepítettek. Mekkora a sebességmérők által mutatott értékek átlaga?

(*5 pont*) Közli: *Széchenyi Gábor*, Budapest

P. 5509. Vízszintes talaj közelében lévő játékpuskából kilőtt kicsiny gumilövedék röppályájának emelkedési magassága megegyezik a lőtávolsággal.

a) A vízszintestől mérve milyen szögben lőttük ki a lövedéket?

b) Mekkorák ezek a távolságok, ha a test kezdősebessége 10 m/s volt?

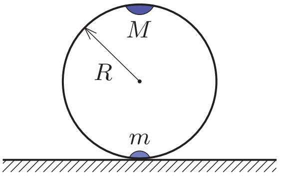
c) Mekkora a pálya görbületi sugara a kilövés utáni pillanatban, illetve a pálya legmagasabb pontjában?

(A közegellenállást elhanyagolhatjuk.)

(*5 pont*) Közli: *Holics László,* Budapest

P. 5510. Egy trolibusz 1 m/s^2 gyorsulással indul a megállóból. Egy féllábon álló diák 1,5 m magasan kapaszkodik a menetirányban előtte lévő függőleges rúdba. Mekkora vízszintes irányú erővel húzza a 75 kg tömegű ember a rudat, hogy megtartsa függőleges testhelyzetét? Az ember súlypontja a busz padlója felett 1 m magasan van.

(*4 pont*) Közli: *Honyek Gyula,* Veresegyház



P. 5511. Egy elhanyagolható tömegű, R sugarú abroncs egyik átmérőjének két végpontjába egy m, illetve egy $M = 2m$ tömegű, pontszerű nehezéket erősítettünk. A függőleges síkú abroncsot asztallapra helyezzük úgy, hogy kezdetben a két nehezék azonos függőleges egyenesen helyezkedik el (a nehezebb van felül). Az abroncsot ebből az instabil egyensúlyi állapotból elengedjük. Az abroncs és az asztallap közötti súrlódás elegendően nagy ahhoz, hogy az abroncs csúszásmentesen gördüljön az asztallapon.

a) Mekkora az abroncs középpontjának sebessége, amikor az M tömegű nehezék eléri pályájának legalsó pontját?

b) Mekkora az *a*) esetben az asztalra ható nyomóerő?

(*5 pont*) Közli: *Vigh Máté,* Biatorbágy

P. 5512. Bizonyos mennyiségű vizet egy 800 W teljesítményű merülőforralóval melegítünk fel 20 °C-ról 40 °C-ra. Azt várjuk, hogy a vizet 210 másodperc alatt tudjuk felmelegíteni, viszont ehelyett azt tapasztaljuk, hogy a melegítés 230 másodpercet vesz igénybe. Határozzuk meg az edény hőkapacitását! (Más hőveszteségtől tekintsünk el.)

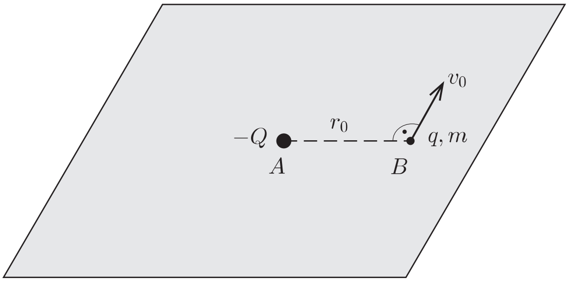
(*3 pont*) Közli: *Szász Krisztián*, Budapest

P. 5513. Két domború lencsével készíthetünk (Kepler-) távcsövet. Egy domború és egy homorú lencsével is készíthető (Galilei-) távcső. Lehet-e két homorú lencse felhasználásával távcsövet készíteni?

(*3 pont*) Tankönyvi feladat nyomán

P. 5514. Vízszintes, sík felület egyik, A pontjában egy pontszerűnek tekinthető, $-Q < 0$ töltésű test van rögzítve. A síkon egy szintén pontszerűnek tekinthető, m tömegű, $q > 0$ töltésű test súrlódásmentesen tud mozogni. Kezdetben az m tömegű test a B pontban van, ekkor a töltések távolsága r_0, és az m tömegű testnek az AB szakaszra merőlegesen, a síkkal párhuzamosan $v_0 = \sqrt{\frac{kqQ}{mr_0}}$ nagyságú sebessége van.

(A mozgás közben a töltések nagysága nem változik.)



a) A mozgó test mennyi idő múlva jut ismét az AB pontok által meghatározott egyenesre?

b) Most a mozgó test kezdősebességének nagyságát felére csökkentjük. Az előbbi esetbeli időnek hányszorosa a kiindulási helytől a legtávolabbi helyig való legkorábbi eljutás ideje?

(*5 pont*) Közli: *Zsigri Ferenc,* Budapest

P. 5515. A fénysebesség hányad részével mozog az elektron a Bohr-modell szerint a hidrogénatom alapállapotában?

(*4 pont*) Közli: *Gnädig Péter,* Vácduka

P. 5516. Egy vízszintes tengely körül megpörgetett pingponglabda függőlegesen az asztallapra esik. A vékony gömbhéjnak tekinthető labda tömege m, sugara R, sebessége a leérkezéskor v_0, szögsebessége $\omega_0 = v_0/r$, tehetetlenségi nyomatéka $\Theta = \frac{2}{3}mR^2$. A csúszási és a tapadási súrlódási együttható egyaránt μ. Tekintsük az ütközést pillanatszerűnek és tökéletesen rugalmasnak (azaz legyen a labda tömegközépponti sebességének asztalra merőleges vetülete ütközés előtt és után azonos nagyságú).

Mekkora és milyen irányú lesz a labda sebessége az ütközés után? Mekkora lesz a szögsebessége?

(*6 pont*) Közli: *Balogh Péter,* Gödöllő

Beküldési határidő: 2023. november 15.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL FOR SECONDARY SCHOOLS (Volume 73. No. 7. October 2023)

Problems in Mathematics

New exercises for practice – competition K (see page 413): **K. 779.** Given a four-digit number, the following transformations are allowed in each step: 1. We may change the order of the digits as we wish. 2. We may increase each of the first two digits by 1. Starting out from 2024, what is the least number of steps needed to obtain the number 7654? **K. 780.** *a*) Is it possible to obtain a prime number as a result if two prime numbers are both added to their product? If so, give at least three examples. If not, explain why it is not possible. *b*) Is it possible to obtain a prime number as a result if two prime numbers are both added to their product, and then 1 is added to the sum? If so, give at least three examples. If not, explain why it is not possible. **K. 781.** The numbers 1, 2, 3, 4, 5, 6 are entered in the fields of each of two 2×3 tables, one red and one green. Within each table, every number occurs exactly once. Then the numbers in the corresponding fields of the two tables are added, and a third table is formed with them. See the *example* below. Fill in the given red and green tables so that the table on the right, with the lower right corner hidden, should be obtained by performing the addition. Find all possible solutions.

K/C. 782. Archibald did not remember the correct way of adding fractions, and added the fractions $\frac{a}{b}$ and $\frac{c}{d}$ as follows: $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$. Is it possible that he obtained a correct answer if a, b, c, d are positive numbers? **K/C. 783.** Pilots refer to directions by using the face of a clock. For example, they say 12 o'clock instead of north, 3 o'clock instead of east. Follow the flight of a reconnaissance aeroplane that started from the army base on the ground, flew 1 minute in the direction of 1 o'clock, 2 minutes in the direction of 2 o'clock, 3 minutes in the direction of 3 o'clock, 10 minutes in the direction of 4 o'clock, 5 minutes in the direction of 5 o'clock, 6 minutes in the direction of 6 o'clock, 7 minutes in the direction of 7 o'clock, 8 minutes in the direction of 8 o'clock, 9 minutes in the direction of 9 o'clock, 4 minutes in the direction of 10 o'clock, 11 minutes in the direction of 11 o'clock, and 12 minutes in the direction of 12 o'clock. The speed of the plane relative to the ground remained the same throughout. What path would have been the shortest from the starting point to the final destination?

New exercises for practice – competition C (see page 414): **Exercises up to grade 10: K/C. 782.** See the text at Exercises **K. K/C. 783.** See the text at Exercises **K. Exercises for everyone: C. 1778.** Find all integers n for which $1+2+3+\cdots+n$, in decimal notation, equals a three digit number of identical digits. (*Vietnamese problem*) **C. 1779.** Prove that there exist infinitely many triangles in which the lengths of the sides are $\frac{3x}{2}$; $2x-1$; $3x+1$, where x is a positive integer. Determine the length of the sides in the triangle of the smallest perimeter. (Proposed by *B. Bíró,* Eger) **C. 1780.** Are there ordered pairs $(a;b)$ of positive integers for which both a^2-2b and b^2-2a are perfect squares? (*German competition problem*) **Exercises upwards of grade 11: C. 1781.** Solve the simultaneous equations $3x+\sqrt{y^2-21y}=2x^2$, $x^2-x-\sqrt{y^2-21y}=x^3$ over the set of real number pairs. (Proposed by *B. Bíró,* Eger) **C. 1782.** From vertex D of a square $ABCD$, a tangent is drawn to the semicircle of diameter AB lying inside the square. The point of tangency (different from point A) is E, and the midpoint of line segment AB is F. The tangent intersects line BC at point G and line AB at point H. Line EF intersects line DA at point K. Prove that the radii of the inscribed circles of triangles FHE, DGC and DKE, in this order, form three consecutive terms of an increasing arithmetic sequence. (Proposed by *B. Bíró,* Eger)

New exercises – competition B (see page 415): **B. 5334.** What is the smallest n for which every convex n-gon has two adjacent obtuse angles? (*3 points*) (*Paul Erdős,* 1913–1996) **B. 5335.** The product of the positive numbers x, y, z is 1. What may be the value of the expression $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(y+\frac{1}{y}\right)^2+\left(z+\frac{1}{z}\right)^2-\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(y+\frac{1}{y}\right)\left(z+\frac{1}{z}\right)$? (*3 points*) (Proposed by *G. Kiss,* Csömör) **B. 5336.** The organizers of a school event bought four kinds of sweets to use them as awards for correct answers. The prices paid for them were 1300 forints (HUF, Hungarian currency), 3000 forints, 3300 forints and (for questions for the audience) a large number of sweets for 50 forints a piece. The total was 41 300 forints, and the mean price per item was exactly 100 forints. How many of each kind did they buy? (*4 points*) (Proposed by *G. Kiss,* Csömör) **B. 5337.** A regular triangle is drawn over each side of a regular n-gon, on the outside. The third vertices of the triangles form a larger n-gon. What may the number n be if the ratio of the areas of the two polygons is an integer? (*4 points*) (Proposed by *B. Hujter,* Budapest) **B. 5338.** There are 10 numbered seats in a particular row of an auditorium. The seats are accessible from each end of the row. The 10 spectators holding tickets for that row arrive in a random order and they take their seats. Since the spectators do not like passing others already seated, they will approach their seats from the direction where that can be avoided, if possible. Determine the probability that at least one of the 10 ticket holders will not be able to access their seat without passing a seated spectator. (*5 points*) (Proposed by *L. Koncz,* Budapest) **B. 5339.** A circle k_1 touches another circle k_2 from the inside at point P. Let M denote an arbitrary point on the circumference of k_1, and let the tangent drawn to k_1 at M intersect k_2 at points A and B. Show that PM bisects the angle APB. (*4 points*) **B. 5340.** Let n be a positive integer, and let f, g and h denote polynomials with real coefficients whose degrees are at most n. What is the largest possible number of real numbers x for which $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$, in some order, are consecutive terms of a non-constant arithmetic sequence, assuming that there are only a finite number of such x? (*6 points*) (Proposed by *P. P. Pach,* Budapest) **B. 5341.** The centroid of a tetrahedron $ABCD$ is S, and an arbitrary interior point is P. Reflect point P in the planes of the four faces of the tetrahedron to obtain tetrahedron $XYZW$. Show that the centroid of $XYZW$ is the point that divides line segment PS in the ratio $2:1$, with the shorter piece next to S. (*6 points*) (*Based on a problem from Monthly*)

New problems – competition A (see page 416): **A. 860.** A $0-1$ sequence of length 2^k is given. Alice can pick a member from the sequence, and reveal it (its place and its value) to Bob. Find the largest number s for which Bob can always pick s members of the sequence, and guess all their values correctly. Alice and Bob can discuss a strategy before the game with the aim of maximizing the number of correct guesses of Bob. The only information Bob has is the length of the sequence and the member of the sequence picked by Alice. (Submitted by *Gábor Szűcs,* Szikszó) **A. 861.** Let $f(x)=x^2-2$. Let $f^{(n)}(x)$ denote the n^{th} iterate of f (i.e. $f^{(1)}(x)=f(x)$ and $f^{(k+1)}(x)=f\big(f^{(k)}(x)\big)$). Let $H=\big\{x: f^{(100)}(x)\leqslant -1\big\}$. Find the length of H (the sum of the lengths of the intervals in H). (Submitted by *Dávid Matolcsi,* Budapest) **A. 862.** Let $ABCD$ be a cyclic quadrilateral inscribed in circle ω. Let F_A, F_B, F_C and F_D be the midpoints of arcs AB, BC, CD and DA of ω. Let I_A, I_B, I_C and I_D be the incenters of triangles DAB, ABC, BCD and CDA, respectively. Let ω_A denote the circle that is tangent to *omega* at F_A and also tangent to line segment CD. Similarly, let ω_C denote the circle that is tangent to ω at F_C and tangent to line segment AB. Finally, let T_B denote the second intersection of ω and circle $F_BI_BI_C$ different from F_B, and let T_D denote the second intersection of ω and circle $F_DI_DI_A$. Prove that the radical axis of circles ω_A and ω_C passes through points T_B and T_D. (Submitted by *Géza Kós,* Budapest)

Problems in Physics

(see page 442)

M. 425. Measure as accurately as possible the density of the material of a footed glass or any other type of drinking glass.

G. 825. We have a round wall clock with no numbers or graduations on the "dial", just hands. The hour and the minute hands can only be adjusted by a knob at the back. At the back there is a circular rim which allows the clock to be hung on the wall in any position. How many different positions can it be placed on the wall so that it will keep good time when properly adjusted? **G. 826.** In the morning rush hour a car travels at half of the urban speed limit for half an hour (the urban speed limit in Hungary is 50 km/h), then reaching the motorway it travels at three quarters of the speed limit on the motorway for 4 hours (speed limit on motorways: 130 km/h). Finally it travels for two hours on a single carriageway at 80% of the speed limit there (the speed limit on a single carriageway is 90 km/h). What is the average speed of the car? **G. 827.** The sequence of images shows the stages of a water droplet falling from a dripping tap. Describe what is happening in each picture. (See the attached *figure.*) **G. 828.** Assume that the Earth is a perfect sphere, with a spherically symmetric mass distribution, and with a radius of 6400 km. Its mass is the same as that of the real Earth and the period of its rotation about its axis is also the same as the period of the Earth. A stout physicist at the North Pole measures his mass with a bathroom scale, which is accurate to 10 grams, and reads 100.00 kg. How much would the same scale read if he measured himself at the equator?

P. 5508. Starting from rest, a car accelerates uniformly to a speed of v_0. Along the acceleration track, a lot of speedometers were installed, at equal distances between two neighbouring ones. What is the average of readings of the speedometers? **P. 5509.** A small rubber bullet was fired with a toy rifle, from a point close to the horizontal ground, such that the greatest height that the bullet reached was equal to the horizontal range of its path. *a*) At what angle, measured from the horizontal, was the bullet fired? *b*) What are these distances if the initial speed of the bullet was 10 m/s? *c*) What is the radius of curvature of the trajectory at the moment right after the launch and at the highest point of the trajectory? (Neglect air resistance.) **P. 5510.** A trolleybus leaves the stop with an acceleration of 1 $\mathrm{m/s^2}$. A student standing on one leg is holding the vertical bus handle at a height of 1.5 m in front of him, in the direction of travel. With what horizontal force does the 75 kg person pull the handle to maintain his vertical position? The centre of gravity of the man is 1 m above the floor of the bus. **P. 5511.** Point-like weights of masses m and $M = 2m$ are attached to the two endpoints of the diameter of a circular ring of radius R and of negligible mass. The ring is placed on a tabletop so that it lies in a vertical plane and the weights are along the same vertical line, initially the heavier is above the other, as shown in the *figure.* The ring is released from this unstable equilibrium state. The friction between the ring and the tabletop is sufficiently high to allow the ring to roll on the tabletop without slipping. *a*) What is the speed of the centre of the ring when the weight of M reaches the lowest point of its trajectory? *b*) What is the downward force exerted on the table in case *a*)? **P. 5512.** A certain amount of water is heated from 20 °C to 40 °C using an 800 W immersion heater. We expect to heat the water in 210 seconds, but instead we find that it takes 230 seconds. Determine the heat capacity of the vessel. (Ignore other heat losses.) **P. 5513.** Using two convex lenses we can build a (Keplerian) telescope. We can also build a (Galilean) telescope with using one convex and one concave lens. Can we build a telescope with two concave lenses? **P. 5514.** A point-like body with a charge $-Q < 0$ is fixed at point A, which lies in a horizontal plane. In this plane, there is another point-like body of mass m, and with charge $q > 0$ which can move without friction. Initially, the body of mass m is at point B, and at this moment the initial distance of the charges is r_0, and the body of mass m has a velocity of magnitude $v_0 = \sqrt{\frac{kqQ}{mr_0}}$, perpendicular to the line segment AB and parallel to the plane, as shown in the *figure.* (The magnitude of the charges does not change during the motion.) *a*) How much time elapses until the moving body returns to the line defined by the points AB? *b*) Now the initial velocity of the moving body is halved. By what factor should the previously determined time be multiplied in order to get the time during which the moving body first reaches its furthest point from its initial position? **P. 5515.** According to the Bohr model, at what fraction of the speed of light does the electron move in the ground state of the hydrogen atom? **P. 5516.** A ping-pong ball, spinning around a horizontal axis, falls vertically onto the tabletop. The ball, which can be considered as a thin spherical shell, has a mass of m, a radius of R, its speed at the impact is v_0, its angular speed is $\omega_0 = v_0/r$, and its moment of inertia is $\Theta = \frac{2}{3}mR^2$. Both the coefficients of kinetic and static friction are μ. Consider the collision to be instantaneous and perfectly elastic (i.e. right before and after the collision the components of the velocity of the ball, which are perpendicular to the table, should be equal in magnitude.) What will be the magnitude and the direction of the velocity of the ball after the collision? What will be its the angular speed?

KöMaL nyári tábor – 2023

COGNEX ERICSSON Morgan Stanley hiflylabs E·L·T·E

Versenynaptár 2023-2024

	VERSENYEK	Fordulók		
		Iskolai	Megyei/Fővárosi	Országos
MATEMATIKA	Kürschák József Matematikai Tanulóverseny	–	–	2023. október 6. 14:00
	Bolyai Csapatverseny, matematika 3–8. osztály / 9–12. osztály	2023. október 13. 14:30 / 2024. január 16. 13:30	–	2023. nov. 17. 14:30 (írásbeli) és 2023. dec. 2. 10:00 (szóbeli) / 2024. március 09. 11:00
	Dürer Verseny, matematika 9–12. osztály / 5–8. osztály	2023. november 24. / 2023. november 10.	–	2024. február 9–11. / 2024. január 12–13.
	OKTV I. és II. kategória	2023. november 14.	2024. január 24.	2024. március 18.
	Varga Tamás Országos Matematikaverseny 7–8. osztály	2023. november 28. 14:00	2024. január 23. 14:00	2024. március 5. 14:00
	OKTV III. kategória	2023. dec. 5.	–	2024. március 7.
	Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny Kezdők és Haladók, I. és II. kategória	2023. november 16. 14–18.	2024. január 25.14–18	2024. április 11. 11–15
	Matematika Határok Nélkül			https://msf.berzsenyi.hu/
	Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny Kezdők és Haladók, III. kategória	2024. január 25. 14–18.		2024. április 11. 11–15
	Zrínyi Ilona Matematikaverseny 2–12. osztály	2023. nov. 20. 14:30	2024. február 16. 14:30	2024. április 12–14.
	Nemzetközi Kenguru Matematikaverseny 2–12. osztály	–	–	2024. március 21. 10:00
	TIT Kalmár László Matematikaverseny 3–8. osztály	2024. március 22. 16:00	–	2024. május 24–25.
INFORMATIKA	OKTV II. kategória (programozási)	2023. nov. 15.	2024. január 13.	2024. február 24.
	OKTV I. kategória (alkalmazási)	2023. nov. 22	2024. január 27.	2024. március 23.
	Nemes Tihamér Nemzetközi Informatikai Tanulmányi Verseny Programozási kategória: 1. korcsoport: 5–8. osztály 2. korcsoport: 9–10. osztály 3. korcsoport: 11–12. osztály	2023. november 15. 1. korcsoport: 14:00–16:00 2–3. korcsoport: 14:00–17:00	2024. január 13. 1. korcsoport: 8:30–11:30, 2–3. korcsoport: 8:30–12:30	2024. február 24. 1. korcsoport: 10:00–13:00, 2–3. korcsoport: 10:00–15:00
	Alkalmazás kategória: 1. korcsoport: 7–8. osztály 2. korcsoport: 9–10. osztály	1. korcsop.: 2023. dec. 6. 14:00–16:00 2. korcsop.: 2023. dec. 7. 14:00–17:00	2024. január 27. 1. korcsoport: 8:30–11:30, 2. korcsoport: 8:30–13:30	2024. március 23. 1. korcsoport: 10:00–14:00, 2. korcsoport: 10:00–16:00
	Országos Grafikus Programozási Verseny	2024. jan. 24. 14:00–16:00	2024. márc. 8. 14:00–16:00	2024. ápr. 13. 10:00–13:00
FIZIKA	Eötvös Lóránd Fizikaverseny	–	–	2023. október 13. 15:00–20:00
	OKTV	2023. november 9.	2024. február 1.	2024. április 6.
	Öveges József Kárpát–medencei Fizikaverseny 7–8. osztály	https://ovegesfizikaverseny.samfules.hu/oveges		
	Mikola Sándor Országos tehetségkutató Fizikaverseny 9–10. osztály	2024. február 13. 14:00–17:00	2024. március 12. 14:00–17:00	2024. május 5–7.
	Országos Szilárd Leó Fizikaverseny	2024. február 19. 14–17.	–	2024. április 19–21.

Petőfi Kulturális Ügynökség
Nemzeti Együttműködési Alap
Nemzeti Kulturális Alap
Bethlen Gábor Alapkezelő Zrt.
Miniszterelnökség