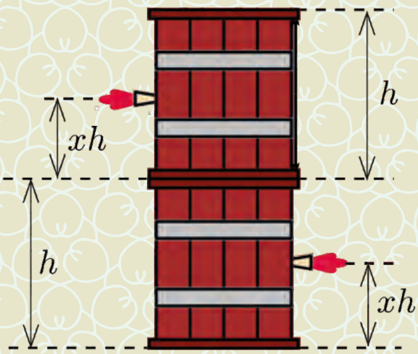
Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok

Informatika rovattal

Ábra a P. 5519-es feladathoz



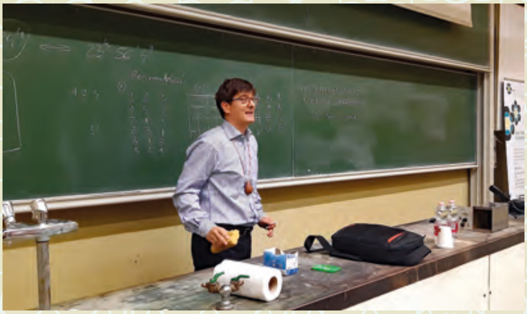
Képek a „Rejtvények, ördöglakatok” rovathoz

IMO feladatok megoldásai, 2. rész | Képek az idei KöMaL Ifjúsági Ankétról | Novemberi versenyfeladatok A pontverseny iskolánkénti eredménye | Matematika feladatok megoldásai | Dobozok egymásban

KöMaL

73. évfolyam
8. szám
2023.
november

Előadások az idei KöMaL Ifjúsági Ankéton



A KöMaL támogatói
Nemzeti Tehetség Program
Nemzeti Kulturális Támogatáskezelő
Kulturális és Innovációs Minisztérium

KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK
INFORMATIKA ROVATTAL BŐVÍTVE

ALAPÍTOTTA: **ARANY DÁNIEL** 1894-ben

73. évfolyam 8. szám — Budapest, 2023. november

Megjelenik évente 9 számban, januártól májusig és szeptembertől decemberig havonta 64 oldalon. ÁRA: 1250 Ft

TARTALOMJEGYZÉK

A szerkesztőség címe: 1117 Budapest,
Pázmány Péter sétány 1/C III. emelet 3.405.
Telefon: +36 20 320-1143
A lap megrendelhető az Interneten:
`www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.h.shtml`.
Előfizetési díj egy évre: 10 400 Ft

E-mail: `szerk@komal.hu`
Internet: `http://www.komal.hu`
This journal can be ordered from the Editorial office:
Pázmány Péter sétány 1/C III. emelet 3.405.
1117–Budapest, Hungary
telephone: +36 20 320-1143
or on the Postal address
H–1518 Budapest 112, P.O.B. 32, Hungary,
or on the Internet:
`www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.e.shtml`.

A 64. Nemzetközi Matematikai Diákolimpia feladatainak megoldása II.

A hagyományoknak megfelelően közöljük a Nemzetközi Matematikai Diákolimpia feladatainak megoldásait. A megoldások leírására idén is a magyar csapat tagjait kértük meg. Közreműködésüket köszönjük, és ezúton is gratulálunk eredményeikhez.

A szerkesztőség

Második nap[*]

4. *Legyenek $x_1, x_2, \ldots, x_{2023}$ páronként különböző pozitív valós számok, melyekre fennáll, hogy*

$$a_n = \sqrt{(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right)}$$

egész szám minden $n = 1, 2, \ldots, 2023$ esetén. Mutassuk meg, hogy $a_{2023} \geqslant 3034$.

Megoldás (Nádor Benedek). Belátjuk, hogy $a_{n+2} > a_n + 2$. Írjuk fel a Cauchy–Schwarz–Bunyakovszkij-egyenlőtlenséget a $\sqrt{x_1 + \ldots + x_n}$, $\sqrt{x_{n+1} + x_{n+2}}$ és $\sqrt{\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n}}$, $\sqrt{\frac{1}{x_{n+1}} + \frac{1}{x_{n+2}}}$ számpárokra:

$$a_{n+2} = \sqrt{(x_1 + \ldots + x_{n+2})\left(\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_{n+2}}\right)} =$$

$$= \sqrt{\big((x_1 + \ldots + x_n) + (x_{n+1} + x_{n+2})\big)\left(\left(\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right) + \left(\frac{1}{x_{n+1}} + \frac{1}{x_{n+2}}\right)\right)} \geqslant$$

$$\geqslant \sqrt{(x_1 + \ldots + x_{n+2})\left(\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_{n+2}}\right)} + \sqrt{(x_{n+1} + x_{n+2})\left(\frac{1}{x_{n+1}} + \frac{1}{x_{n+2}}\right)} =$$

$$= a_n + \sqrt{(x_{n+1} + x_{n+2})\left(\frac{1}{x_{n+1}} + \frac{1}{x_{n+2}}\right)}.$$

Ezután ismét alkalmazzuk a Cauchy–Schwarz–Bunyakovszkij-egyenlőtlenséget az utolsó négyzetgyökre:

$$\sqrt{(x_{n+1} + x_{n+2})\left(\frac{1}{x_{n+1}} + \frac{1}{x_{n+2}}\right)} \geqslant \sqrt{x_{n+1}\frac{1}{x_{n+1}}} + \sqrt{x_{n+2}\frac{1}{x_{n+2}}} = 2.$$

[*] Az első nap feladatainak megoldását az októberi számban közöltük.

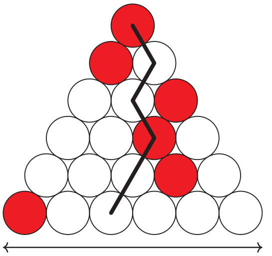
Itt egyenlőség akkor áll fenn, ha $\frac{1}{x_{n+1}} = cx_{n+1}$ és $\frac{1}{x_{n+2}} = cx_{n+2}$ egy alkalmas c-re. Ebből viszont következne $x_{n+1} = x_{n+2}$, ami nem lehet. Tehát az utolsó egyenlőtlenség szigorú, így $a_{n+2} > a_n + 2$.

Mivel a_n és a_{n+2} is egész, valamint a különbségük nagyobb, mint 2, ezért $a_{n+2} \geqslant a_n + 3$. Ekkor

$$a_{2023} \geqslant a_{2021} + 3 \geqslant a_{2019} + 6 \geqslant \ldots \geqslant a_1 + 3 \cdot \frac{2023-1}{2} = \sqrt{x_1 \frac{1}{x_1}} + 3033 = 3034.$$

Ezzel beláttuk a feladat állítását.

5. *Legyen n egy pozitív egész. Egy japán háromszög $1+2+\ldots+n$ körből áll, szabályos háromszög alakban elrendezve úgy, hogy minden $i = 1, 2, \ldots, n$ esetén az i-edik sor pontosan i kört tartalmaz, melyek közül pontosan egy piros színű. Nindzsa-útnak nevezünk egy n körből álló sorozatot, mely a legfelső sorból indul, egy kört a közvetlenül alatta lévő két kör valamelyike követ, és a legalsó sorban végződik. Az alábbi* ábrán *egy japán háromszög látható az $n=6$ esetben; a berajzolt nindzsa-út két piros kört tartalmaz.*



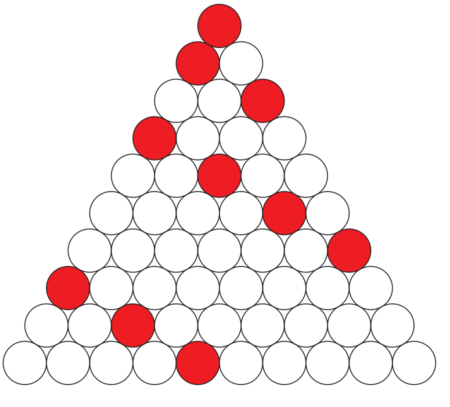
Határozzuk meg a legnagyobb k értéket (n függvényében), melyre fennáll, hogy minden japán háromszögben található olyan nindzsa-út, ami legalább k piros kört tartalmaz.

Megoldás (Fülöp Csilla).

Válasz: k maximális értéke: $1 + \lfloor \log_2 n \rfloor$.

Bizonyítás: Legyen $N = \lfloor \log_2 n \rfloor$, így $2^N \leqslant n < 2^{N+1}$.

1. lépés: olyan elrendezés, amelyben bármely nindzsa-út legfeljebb $1 + \lfloor \log_2 n \rfloor$ piros kört tartalmaz. Mivel egy nagyobb japán háromszög tartalmaz egy kisebbet, ezért elég belátni az $n = 2^{N+1} - 1$ esetben.



Legyen $i = 2^a + b$, ahol $0 \leqslant a \leqslant N$ és $0 \leqslant b < 2^a$. Ekkor az i-edik sorban legyen piros a $(2b+1)$-edik kör.

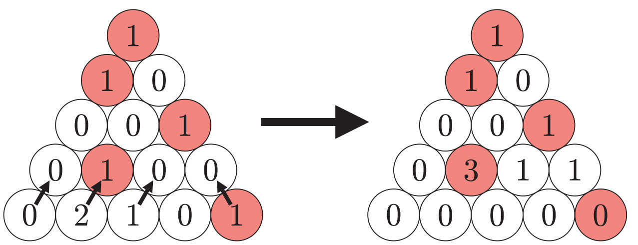
Van ennyi kör a sorban: $2b + 1 \leqslant$ $\leqslant 2^a + b$, hiszen $b < 2^a$.

Ekkor a $2^a, 2^a+1, \ldots, 2^{a+1}-1$ $(0 \leqslant a \leqslant N)$ sorok közül maximum az egyikben lévő piros kört tartalmazhatja egy nindzsa-út. Tehát összesen maximum $N+1$ piros kört tartalmazhat egy nindzsa-út.

2. lépés: belátjuk, hogy mindig van olyan nindzsa-út, ami legalább $N+1$ piros kört tartalmaz. Elég $n=2^N$ esetén belátni, hiszen ha $2^N \leqslant n < 2^N$, akkor az első 2^N sorból álló japán háromszög része az eredetinek, és az ottani nindzsa-utak kiegészíthetőek egy nindzsa-útra a nagyobb japán háromszögben is.

Minden körhöz rendeljünk hozzá egy számot: ha piros, akkor 1-et, egyébként 0-t. Így a körökben a számok összege 2^N. A kitöltés miatt minden körre van olyan (onnan induló) nindzsa-út, amely a legalsó sorban ér véget, és legalább annyi piros kört tartalmaz, mint amilyen szám bele van írva.

Módosítsuk a körökbe írt számokat a következő módon: vegyük a legalsó olyan sort, amiben van 0-nál nagyobb szám. Ha itt van 0-s kör: tüntessük ki az egyik ilyen kört. Az összes többi vele egy sorban lévő körre végezzük el a következőt: legyen a körben lévő szám l. A körben lévő számot változtassuk 0-ra. Ha a kitüntetettől balra van, akkor a jobbra felette lévő körben lévő számot növeljük l-lel, ha jobbra van, akkor a balra felette lévőjét növeljük l-lel.



A kitüntetett kör a 4.*, a legalsó* 3 *sor nincs feltüntetve az ábrán*

Így a számok összege nem változott, és továbbra is igaz, hogy ha veszünk egy körben lévő számot, akkor van olyan onnan induló nindzsa-út, ami legalább annyi piros kört tartalmaz. Bizonyítás: legyen a körben eredetileg lévő szám a (ez 1, ha piros, egyébként 0), amit hozzáadunk b. Ekkor a b-s körből indulva van b piros kört tartalmazó nindzsa-út, így erre lépve az a-s körből lesz $a+b$ piros kör a nindzsa-úton.

Ezt a lépést addig folytatjuk, amíg a legalsó olyan sorban, amiben van 0-nál nagyobb szám, van 0-s is. Ha legalább a 2^{N-1}-edik sorban vagyunk, akkor ez biztosan teljesül, hiszen addig a sorban lévő számok összege pontosan az alatta lévő sorok száma plusz 1, ami legfeljebb 2^{N-1}, és legalább $2^{N-1}+1$ kör van a sorban.

Amikor a legalsó nem csak 0-t tartalmazó sorban minden érték legalább 1: csökkentsünk minden számot ebben a sorban 1-gyel, így az összeg legfeljebb 2^{N-1}-nel csökkent. Egy piros kört elvettünk az összes ezen sor felett, vagy ebből a sorból induló nindzsa-útból. Ha így a számok összege több, mint 2^{N-1}, akkor néhány számot (ebből a sorból szabadon választva) csökkentsünk, hogy az összeg pontosan 2^{N-1} legyen. Továbbra is igaz, hogy ha egy mezőben (ebben a sorban vagy ezen sor feletti sorokban) van egy szám, akkor onnan indulva létezik legalább annyi piros kört tartalmazó nindzsa-út, sőt: ennél 1-gyel többet tartalmazó is van, mert abba a sorba biztosan belépünk, ahol minden számot csökkentettünk 1-gyel, és ott 1 piros kört elvettünk minden útból.

Ezt a gondolatot tovább folytathatjuk, hogy az összeg

$$2^{N-2}, \quad 2^{N-3}, \quad \ldots, \quad 2^1, \quad 2^0$$

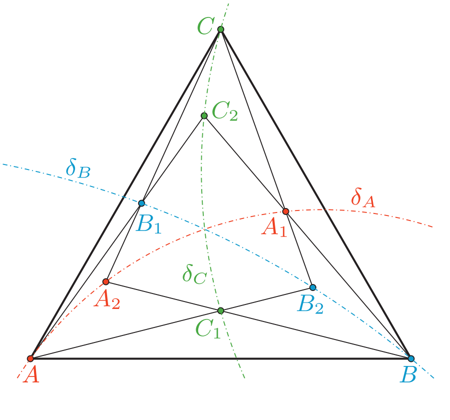
legyen. Így összesen N-szer csökkentettünk, továbbá az összeg 1, ami biztosan a legfelső sorban lesz, hiszen azt a sort változtatnánk utoljára. Onnan van olyan nindzsa-út, ami tartalmaz 1 piros kört, így az N csökkentéssel együtt van olyan nindzsa-út, ami tartalmaz legalább $N+1$ piros kört.

6. *Legyen ABC egy szabályos háromszög. Legyenek A_1, B_1, C_1 az ABC olyan belső pontjai, melyekre $BA_1 = A_1C$, $CB_1 = B_1A$, $AC_1 = C_1B$, valamint*

$$BA_1C\sphericalangle + CB_1A\sphericalangle + AC_1B\sphericalangle = 480^\circ.$$

Legyen továbbá BC_1 és CB_1 metszéspontja A_2, CA_1 és AC_1 metszéspontja B_2, valamint AB_1 és BA_1 metszéspontja C_2. Bizonyítsuk be, hogy ha az $A_1B_1C_1$ háromszög oldalai páronként különböző hosszúak, akkor az AA_1A_2, BB_1B_2 és CC_1C_2 háromszögek körülírt köreinek két közös pontja van.

Megoldás (Németh Márton Tamás). Legyenek δ_A, δ_B, δ_C az AA_1A_2, BB_1B_2 és a CC_1C_2 háromszögek körülírt körei. A megoldás során mutatunk két különböző pontot (P-t és Q-t), melyek hatványa megegyezik a δ_A, δ_B és δ_C körökre.



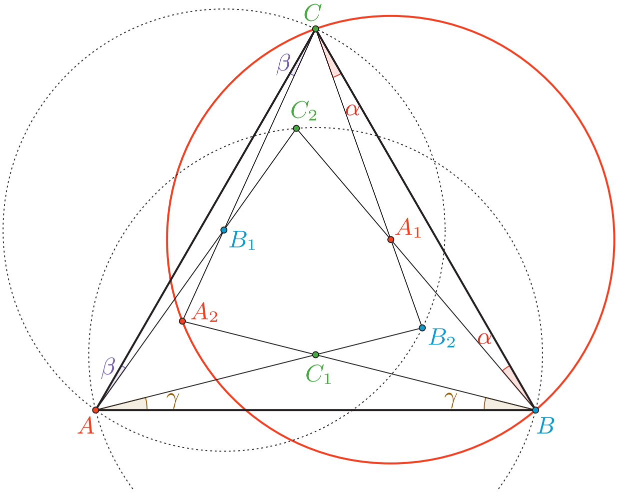
Állítás: A_1 a középpontja az A_2BC háromszög körülírt körének.

Bizonyítás: A_1 rajta van BC felezőmerőlegesén, és a BA_2C háromszög belsejében van, tehát elegendő belátni, hogy $BA_1C\sphericalangle = 2BA_2C\sphericalangle$. Ez következik abból, hogy:

$$BA_2C\sphericalangle = A_2BA\sphericalangle + BAC\sphericalangle + ACA_2\sphericalangle =$$

$$= \frac{1}{2}((180^\circ - AC_1B\sphericalangle) + (180^\circ - CB_1A\sphericalangle)) + 60^\circ =$$

$$= 240^\circ - \frac{1}{2}(480^\circ - BA_1C\sphericalangle) = \frac{1}{2}BA_1C.$$



Ekkor logikai szimmetria miatt B_1 a B_2AC, illetve C_1 a C_2AB háromszög körülírt körének középpontja. Ebből viszont következik, hogy

$$B_2B_1C_2\sphericalangle = 180^\circ - AB_1B_2\sphericalangle = 180^\circ - 2ACB_2\sphericalangle = 180^\circ - 2C_2BA\sphericalangle =$$
$$= 180^\circ - C_2C_1A\sphericalangle = B_2C_1C_2\sphericalangle,$$

vagyis $B_1C_1B_2C_2$ húrnégyszög. Hasonlóan $C_1A_1C_2A_2$ és $A_1B_1A_2B_2$ is húrnégyszög. Az $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ hatszög biztosan nem húrhatszög, mivel

$$C_2A_1B_2\sphericalangle + B_2C_1A_2\sphericalangle + A_2B_1C_2\sphericalangle = 480^\circ \neq 360^\circ,$$

ami viszont ismert tulajdonsága a húrhatszögeknek. Ekkor viszont a három kör hatványvonalai páronként, A_1A_2, B_1B_2 és C_1C_2 egy pontban metszik egymást. Legyen ez a pont P. Világos, hogy P hatánya megegyezik a δ_A, δ_B és δ_C körökre.

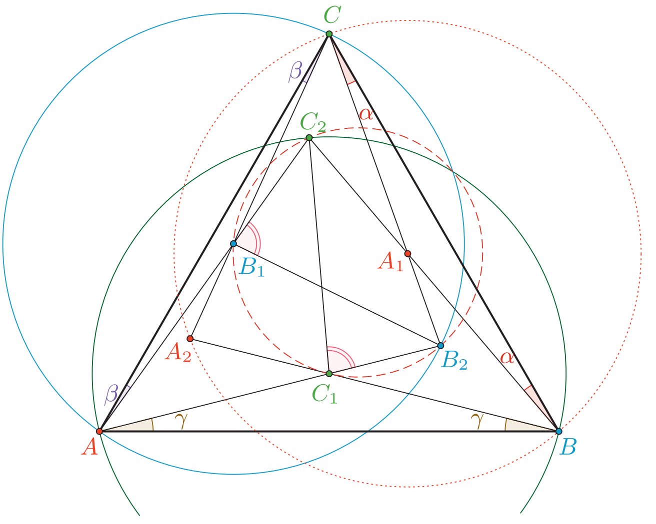
Legyen A_2BC körülírt körének és a δ_A körnek a második metszéspontja $A_3 \neq A_2$. Legyen továbbá AA_3 és A_2BC köréírt körének metszéspontja A_4. Definiáljuk a B_3, C_3, B_4, C_4 pontokat hasonlóan.

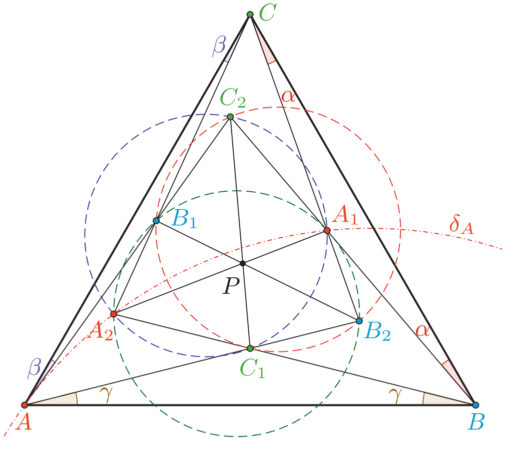
Állítás: BCB_3C_3 húrnégyszög.

Bizonyítás: B_2 és B_4 egymás tükörképei BB_1-re, hiszen $B_1B_2 = B_1B_3$, tehát BB_1 felezi a B_2BB_3 szöget. Hasonlóan C_2 és C_4 tükrösek CC_1-re. Irányított szögekkel számolva

$$BB_3C\sphericalangle = B_4B_3C\sphericalangle = B_4AC\sphericalangle = ACB_2\sphericalangle = C_2BA\sphericalangle =$$
$$= BAC_4\sphericalangle = BC_3C_4\sphericalangle = BC_3C\sphericalangle.$$

Hasonlóan CAC_3A_3 és ABA_3B_3 is húrnégyszög. $AC_3BA_3CB_3$ nem húrhatszög, mert akkor AB_2CB_3 húrnégyszögsége miatt B_2 az ABC köréírt körén volna,



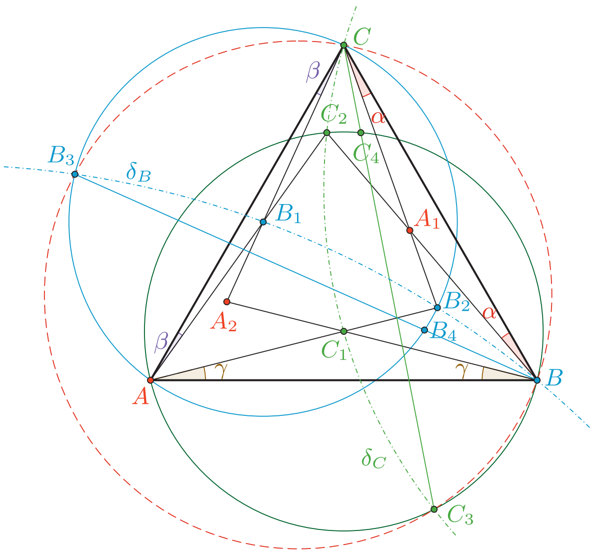


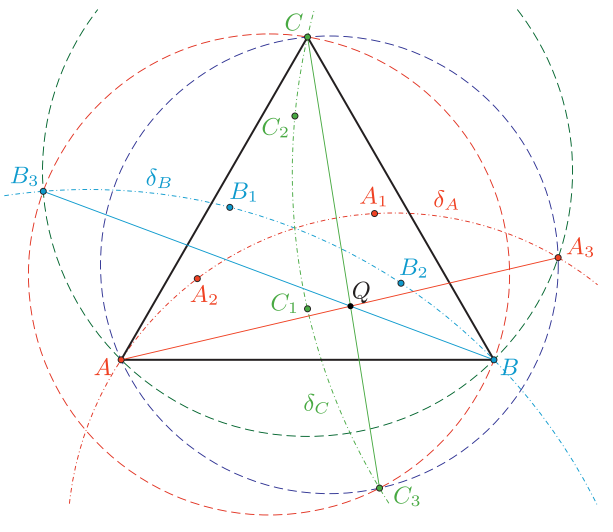
ami ellentmondás. Vagyis a három kör páronkénti hatványvonalai, AA_3, BB_3 és CC_3 egy pontban metszik egymást. Legyen ez a pont Q. Ekkor Q hatványa megegyezik δ_A, δ_B és δ_C körökre.

A megoldást diszkusszióval fejezzük be. Legyen O az ABC háromszög középpontja. Ekkor

$$BA_1C\sphericalangle = 480^\circ - CB_1A\sphericalangle - AC_1B\sphericalangle > 480^\circ - 180^\circ - 180^\circ = 120^\circ,$$

vagyis A_1 a BOC háromszög belsejében van. Hasonló igaz B_1-re és C_1-re, tehát a BA_1C, CB_1A és AC_1B háromszögek diszjunktak. Ebből következik, hogy az $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ hatszög konvex, azaz P az A_1A_2 szakaszon található, és emiatt δ_A belsejében van.





Vegyük észre továbbá, hogy mivel $A_1A_2 = A_1A_3$, $P \equiv Q$ csak akkor állhatna fenn, ha A_1 és A_2 is BC felezőmerőlegesén lenne, mivel P rajta van az A_1A_2 szakaszon. Ekkor viszont $A_1B_1 = A_1C_1$, mely ellentmond a feladat feltételének.

Ezzel megmutattuk, hogy P és Q különböző, és mindkettő rajta van a δ_A, δ_B, δ_C körök közös hatványvonalán. Mivel P a δ_A kör belsejében van, ez csak úgy lehetséges, hogy δ_A, δ_B és δ_C két közös ponton mennek át.

Gyakorló feladatsor
emelt szintű matematika érettségire

Kedves Olvasók!

Ezek a feladatsorok azért készülnek, hogy felkészülési lehetőséget biztosítsanak az írásbeli érettségire azoknak, akik emelt szintű vizsgát kívánnak tenni. A feladatsorokat tapasztalt tanárok állítják össze, köztük olyanok is, akik maguk is részt vesznek az érettségi feladatok összeállításában.

Az idei tanévtől lehetőségetek van beküldeni a megoldásotokat az

`emeltkomal@gmail.com`

címre. A beérkezett dolgozatokat kijavítjuk és visszaküldjük, így is segítve a felkészüléseteket. (A beküldéssel kapcsolatos technikai tudnivalókat a feladatsor végén találod meg.)

A legszorgalmasabb, illetve legeredményesebb beküldők között a tanév végén KöMaL ajándéktárgyakat sorsolunk ki.

Sikeres felkészülést kívánunk!

I. rész

1. Az őszi szünetben a Nagy család háromnapos kirándulást tervez. Az első napon a tervezett teljes túra harmadánál 2 km-rel többet tettek meg. A második napon a maradék táv harmadánál 3 km-rel többet túráztak. Az utolsó napra így a teljes táv harmadánál 1 km-rel kevesebb maradt hátra.

a) Hány kilométert tettek meg az egyes napokon? (*5 pont*)

A családot a nagyszülők is meglátogatták a hétvégén. Az autópályára való felhajtásukat követően az autójuk által megtett utat a másodpercben mért eltelt idő (x) függvényében a következőképpen írhatjuk le:

$$f(x)=\begin{cases} 2\,x+0{,}25\,x^2, & \text{ha } 0\leqslant x\leqslant 4{,}5;\\ 4{,}25\,x-5{,}0625, & \text{ha } 4{,}5< x\leqslant 20.\end{cases}$$

b) Mennyi utat tett meg az autó a felhajtást követő ötödik másodpercben, ha $f(x)$ azt adja meg, hogy hányszor 10 métert tett meg az autó? (*3 pont*)

c) Igazoljuk, hogy a $2x+0{,}25x^2$ függvény $x_0=4{,}5$ abszcisszájú pontjában a parabolához húzott érintő tartalmazza az $f(x)$ függvény lineáris részét. (*4 pont*)

2. Egy *felül nyitott,* fából készült, kocka alakú asztali tolltartó külső élei 10,5 cm hosszúságúak, a doboz falvastagsága az alján és az oldalain egyaránt 8 mm.

a) Számítsuk ki a doboz faanyagának térfogatát. (*5 pont*) *b*) Legfeljebb milyen hosszúságú lehet az a ceruza, amely beletehető a tolltartóba úgy, hogy nem lóg ki belőle? (A ceruza vastagságát elhanyagoljuk.) (*2 pont*)

A dobozban 8 darab kék toll, 5 darab piros toll és 2 darab zöld toll van, amelyek közül egyszerre 3-at csukott szemmel kiveszek.

c) Mekkora a valószínűsége, hogy lesz piros toll is a kiválasztottak között? (*4 pont*)

3. Az alábbi táblázat egy iskola tíz osztályában mutatja a lányok és fiúk létszámát.

Osztály	8.A	8.B	9.A	9.B	10.A	10.B	11.A	11.B	12.A	12.B
lány	15	8	15	13	9	18	15	10	13	11
fiú	11	17	12	13	16	9	14	17	14	17

Ezekben az osztályokban a fiúk körében felmérést készítettek, hogy ki szereti a kosárlabdát, a kézilabdát, illetve a focit, a kérdésekre mindenki válaszolt. Kiderült, hogy a megkérdezett fiúk 5%-a egyiket sem szereti, 28-an viszont mindhármat nagyon kedvelik. 103 olyan választ találtak az elemzéskor, amelyben legalább két sportot megneveztek a fiúk.

a) Hány diák válaszában szerepelt egy vagy két sport a kedvencek között? (*4 pont*)

b) Határozzuk meg a lányok számának terjedelmét, átlagát és szórását. (*4 pont*)

c) Számítsuk ki osztályonként a lányok és fiúk száma közötti különbség abszolút értékét. Készítsünk box-plot (doboz)diagramot a kapott értékek alapján. (*5 pont*)

4. *a*) Igazoljuk, hogy a $2x^3+3x^2-1=0$ egyenletnek az $\frac{1}{2}$ egyszeres, míg a -1 kétszeres gyöke. (*4 pont*)

b) Oldjuk meg a $2\cos^3 x+3\cos^2 x-1=0$ egyenletet a valós számok halmazán. (*4 pont*)

c) Jellemezzük monotonitás és konvexitás szempontjából az

$$f(x)=2x^3+3x^2-1$$

függvényt. (*7 pont*)

II. rész

5. Egyenlő szárú háromszöget készítünk 56 darab 1 cm hosszú pálcikából azok eltörése nélkül, majd az oldalaira kifelé négyzeteket rajzolunk, melyek területének összege 1056 cm^2.

a) Igazoljuk, hogy a háromszög szárai 20 cm hosszúságúak. (*6 pont*)

b) Számítsuk ki a háromszög beírható körének sugarát. (*3 pont*)

c) A súlypontból mekkora szögben látszik a háromszög 16 cm-es alapja? (*4 pont*)

Tekintsük a háromszög csúcsait és súlypontját, ezek mindegyikét összekötve egymással egy egyszerű gráfot kapunk.

d) Van-e ebben a gráfban zárt Euler-vonal? (*3 pont*)

6. Az újfajta magyar rendszámok a latin ábécé 5 magánhangzóját és 21 mássalhangzóját, illetve a 10 számjegyet használják a következő feltételek mellett:

– Vagy mindkét első betű magánhangzó, vagy mindkét első betű mássalhangzó, de nem használhatóak a CS, GY, LY, NY, SZ, TY, ZS párosítások.

– Ezt követi még két tetszőleges betű.

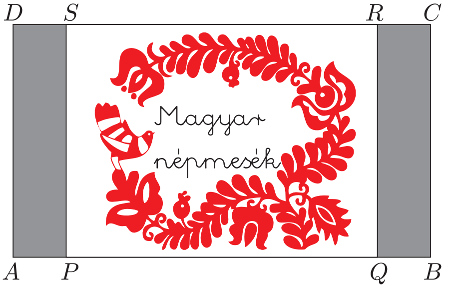
– Végül három számjeggyel fejeződik be a rendszám, ami nem lehet 000. (A rendszámokra még számos egyéb szabály is vonatkozik, de mi most csak ezeket vesszük figyelembe.)

a) Hány százalékkal több olyan rendszám lehetséges e szabályok szerint, amelyekben a számokon kívül csak mássalhangzók vannak, mint amelyekben szerepel magánhangzó is? A választ egészre kerekítve adjuk meg. (*6 pont*)

Elektromos autónkat egy 50 kilowatt teljesítményű töltőoszlopnál szeretnénk feltölteni. A díjszabási táblázatban az olvasható, hogy kilowattóránként 210 forintot kell fizetnünk a töltéskor. Ez az autó 15 kilowattóra energiát használ el 100 km-es távolságon. A Diesel-motoros autó üzemanyag-fogyasztása 100 km-enként 4,6 liter, amit a benzinkúton literenként 720 forintért vásárolhatunk meg.

b) Hasonlítsuk össze a két autó esetén a 140 km-es távolságú utazás energia-, illetve üzemanyagköltségét. Van-e olyan távolság, amikor az elektromos autó energiaköltsége magasabb, mint a Diesel-motoros autó üzemanyagköltsége? (Feltételezzük, hogy az elektromos autó veszteség nélkül fel tudja használni a töltéskor kifizetett energiát.) (*4 pont*)

Az utazás alatt a gyerekek mesefilmet néztek egy olyan tableten, melynél a szélesség és magasság aránya 16 : 9, képátlójának hossza 29 cm. A mesefilm már régi, képaránya 4 : 3, ezért a tablet két oldalán egy-egy fekete sáv látható.



c) A képernyő maximális kihasználtsága mellett határozzuk meg a fekete sávok összterületét. (*6 pont*)

7. Tekintsük a következő állítást: *Ha egy szám osztható* 3*-mal és* 6*-tal is, akkor osztható* 18*-cal.*

a) Fogalmazzuk meg az állítás megfordítását, és adjuk meg az így kapott állítás logikai értékét, indoklással együtt. (*3 pont*)

b) Fogalmazzunk meg egy-egy olyan kijelentést, amelyek a 24-gyel való oszthatósághoz kapcsolódóan:

(*i*) szükséges, de nem elégséges

(*ii*) elégséges, de nem szükséges

(iii) szükséges és elégséges feltételt adnak meg. (*3 pont*)

c) Bizonyítsuk be, hogy a $4n^3 + 20n$ kifejezés minden pozitív egész n esetén osztható 24-gyel. (*5 pont*)

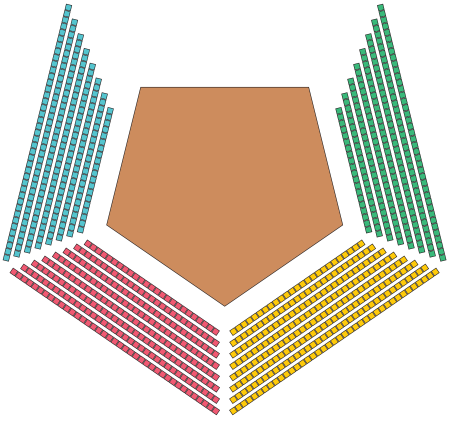
d) Létezik-e olyan n pontú teljes gráf, amelynek $4n^3 + 20n$ éle van? (*5 pont*)

8. Zsolt a nyáron 6 hét alatt diákmunkával kereste meg új telefonjának árát. Az első héten bemelegítésként 20 órát dolgozott, majd minden héten az előző hetinél 4 órával többet.

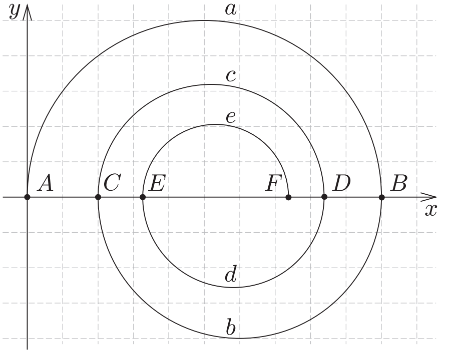
a) Mennyi pénzt keresett összesen Zsolt, ha a munkájáért 1790 forintot kapott óránként? (*2 pont*)

A nyár végén Zsolt megnézett egy szabadtéri előadást, ahol a nézőtér 4 szektorból állt. A két szélső szektor első sorában szektoronként $20-20$ ülőhely van, majd hátrafelé minden sorban szektoronként 3-mal több, a középső két szektor első sorában szektoronként $25-25$ néző foglalhat helyet, majd minden sorban szektoronként 2-vel több. A sorokat elölről teljesen feltöltötték 3 210 nézővel (kivéve az utolsó megkezdett sort).

b) Hányan ültek az utolsó megkezdett sorban? (*5 pont*)



b)



c)

Zsolt a telefonjára letöltötte a *GeoGebra* alkalmazást és csigavonalat rajzolt úgy, hogy a koordinátarendszer origójából indulva megrajzolt egy 5 egység sugarú a félkörívet, amelynek átmérője az x-tengelyre illeszkedik. A B pontból folytatta a rajzolást a b körívvel, amelynek sugara az első kör sugarának 80%-a, majd ezen eljárást követve folytatta tovább a rajzot.

c) Hányadik körív után lesz a csigavonal 65 egységnél hosszabb? (*5 pont*)

d) Melyik az a pontja a koordinátarendszernek, amelyik mindegyik félkörív két végpontja között helyezkedik el, akármeddig folytatja is Zsolt a rajzolgatást? (*4 pont*)

9. Tekintsük a k_1 kört, amelynek egyenlete $(x-2)^2+(y-2)^2=25$, illetve a k_2 kört, amelynek egyenlete $x^2+y^2-16x-4y+55=0$.

a) Igazoljuk, hogy a két körlap közös részének területe egy tizedesjegyre kerekítve 10,9 területegység. (*8 pont*)

b) Mekkora a valószínűsége annak, hogy ha véletlenszerűen kiválasztunk egy pontot a két körlap által összesen lefedett részen, akkor az a két körlap közös részébe esik? (*2 pont*)

A k_1 körvonal által határolt zárt körlap 81 rácspontot tartalmaz, melyek közül nagyon rövid időre egy-egy pont véletlenszerűen felvillan.

c) Hány felvillanás után mondhatjuk, hogy 95%-nál nagyobb a valószínűsége, hogy volt olyan felvillanó pont, amely a körvonalra esett? (*6 pont*)

Jócsik Csilla
Győr

Technikai tudnivalók a beküldéshez

A megoldásodat az `emeltkomal@gmail.com` címre küldheted be, a határidő a feladatsor megjelenését követő hónap 7. napja.

A megoldást szkennelve vagy fényképezve, lehetőség szerint egyetlen pdf fileban mellékeld a leveledhez. A megoldás leírásakor és szkennelésekor/fényképezésekor is ügyelj a jól olvashatóságra! Ha a kép felbontása 200 dpi, akkor az általában megfelelő.

A dolgozatból egyértelműen derüljön ki, hogy ki készítette, tehát tüntesd fel az elején a nevedet, iskoládat, osztályodat!

A kijavított dolgozatot arra a címre küldjük vissza, ahonnan az eredeti érkezett.

Megoldásvázlatok a 2023/7. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához

I. rész

1. *a*) *Oldjuk meg a valós számok halmazán a* $3\sqrt{x}+|x-13|=15$ *egyenletet.*

b) *Határozzuk meg azt a legkisebb* n *természetes számot, amelyre*

$$\lg\left[(n-2)^2-(n-1)(n-3)\right]+\lg\frac{9n^2+18n+9}{n^2-1}<1. \qquad (14\ pont)$$

Megoldás. *a*) A négyzetgyök miatt $0\leqslant x$. Legyen $0\leqslant x<13$, ekkor az egyenlet: $3\sqrt{x}-x+13=15$, $3\sqrt{x}=x+2$. Négyzetre emelés után: $9x=x^2+4x+4$. Rendezve: $x^2-5x+4=0$. Ennek gyökei: $x_1=1$, $x_2=4$, mindkettő megoldása az egyenletnek.

Legyen $13 \leqslant x$, most az egyenlet: $3\sqrt{x} + x - 13 = 15$, $3\sqrt{x} = 28 - x$ $(x \leqslant 28)$, $9x = 784 - 56x + x^2$. Rendezés után: $x^2 - 65x + 784 = 0$. A gyökök: $x_3 = 16$, $(x_4 = 49)$.

Az egyenletnek három valós megoldása van: $x_1 = 1$, $x_2 = 4$, $x_3 = 16$.

Megjegyzés: A feladat grafikusan is megoldható.

b) $n \in \mathbb{N}$;

$$\lg\left[n^2 - 4n + 4 - (n^2 - n - 3n + 3)\right] + \lg\frac{9(n+1)^2}{(n-1)(n+1)} < 1,$$

tehát $n \neq \pm 1$.

$$\lg 1 + \lg\frac{9(n+1)}{n-1} < 1, \quad \text{ahol} \quad 0 < \frac{9n+9}{n-1},$$

azaz $n > 1$, $0 + \lg\frac{9n+9}{n-1} < \lg 10$.

A tízes alapú logaritmusfüggvény szigorúan monoton növő, tehát

$$\frac{9n+9}{n-1} < 10 \qquad / \cdot (n-1) > 0,$$

amiből $9n + 9 < 10n - 10$, így $19 < n$.

A 20 a legkisebb természetes szám, amelyre igaz az egyenlőtlenség.

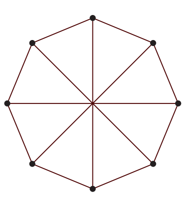
2. *Egy nyolcfős társaság egy kör alakú asztal mellett úgy foglal helyet, hogy a szomszédok egymástól mért távolsága egyenlő. Mindenkinek a két közvetlen mellette, és a vele pontosan szemben ülő az ismerőse, a többiek nem. (Az ismeretség kölcsönös.) Rajzoljuk meg az ismeretségi gráfot.*

a) Az ismeretségi gráfot hány éllel kell kiegészíteni, hogy az teljes gráf legyen, illetve hány él elhagyásával kaphatunk fagráfot?

A társaságból kisorsolunk két embert, majd megállapítjuk, hogy ismerik-e egymást, vagy sem. Ezt az eljárást összesen hatszor végezzük el.

b) Mennyi a valószínűsége annak, hogy legalább kétszer ismerős személyeket sorsolunk ki?

c) Az előbbi hat sorsolás esetén mennyi az ismerős párok számának várható értéke? (*12 pont*)



Megoldás. *a*) Mindenkinek 3 ismerőse van, ezért $\frac{8 \cdot 3}{2} = 12$ ismerős pár van a társaságban, így a gráfnak 12 éle van. (Ezt az élek megszámolásával is megkaphatjuk, illetve ellenőrizhetjük.) A teljes gráfnak $\binom{8}{2} = 28$ éle van, tehát ezt a gráfot 16 éllel kell kiegészíteni a cél érdekében. A nyolc csúcsú fagráfnak 7 éle van, ezért 5 élet kell elhagyni ahhoz, hogy ebből a gráfból fagráf legyen. Ez megoldható pl. úgy, hogy elhagyjuk a szabályos nyolcszögből a négy átlót, és az egyik oldalt.

b) Annak az esélye, hogy a kisorsolt személyek ismerik egymást: $p = \frac{12}{28} = \frac{3}{7}$, hogy nem ismerik egymást: $q = \frac{4}{7}$. Jelöljük ξ-vel azt, hogy a 6 sorsolásból hányszor lett ismerős pár.

$$P(\xi = 0) = \binom{6}{0}\left(\frac{3}{7}\right)^0\left(\frac{4}{7}\right)^6 = \frac{4096}{117\,649}, \quad P(\xi = 1) = \binom{6}{1}\left(\frac{3}{7}\right)^1\left(\frac{4}{7}\right)^5 = \frac{18\,432}{117\,649}.$$

A komplementer esemény valószínűsége: $P(\xi = 0) + P(\xi = 1) = \frac{22\,528}{117\,649}$, így az adott eseményé:

$$P(C) = 1 - \frac{22\,528}{117\,649} = \frac{95\,121}{117\,649} \approx 0{,}8085.$$

c) A binomiális eloszlás várható értéke: $M(\xi) = n \cdot p = 6 \cdot \frac{3}{7} \approx 2{,}57$ esetben kapunk ismerős párt.

3. *Adott az* $f(x) = 2\cos x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ *függvény, és a* $P(0; y)$, $y \in [2; \pi]$ *pont.*

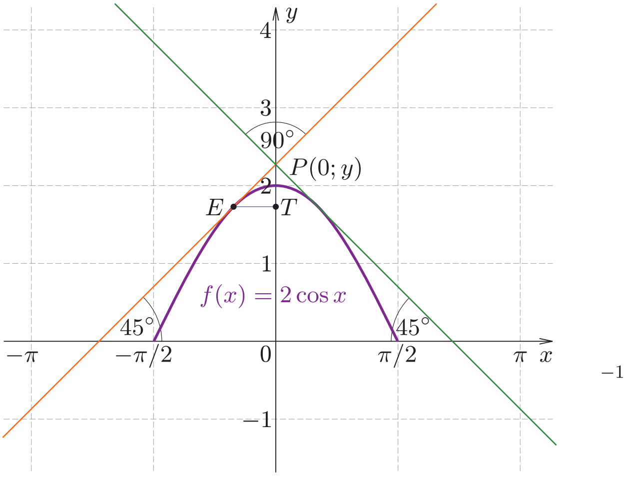
a) Számítsuk ki y *pontos értékét, ha* P*-ből az* $f(x)$ *grafikonjához húzott érintők merőlegesek egymásra.*

b) Milyen x *esetén lesz az* $f(x)$ *függvény első és második deriváltjának értéke egyenlő?* *(12 pont)*

Megoldás. *a*) Az $f(x)$ függvény grafikonjának az y tengely szimmetriatengelye, P rajta van az y tengelyen, ezért az érintőknek ezzel az egyenessel $45° - 45°$-os szöget kell bezárniuk, amiből adódik, hogy az x tengellyel is ekkora szöget zárnak be. Az egyik érintő meredeksége $+1$ (a másiké -1), ebből az első derivált segítségével az egyik érintési pont (E) helye meghatározható. $f'(x) = -2\sin x$, $-2\sin x = 1$, $\sin x = -\frac{1}{2}$, amiből $x = -\frac{\pi}{6}$, így

$$y = f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\,.$$

Az E érintési pont: $E\left(-\frac{\pi}{6}; \sqrt{3}\right)$.



Elemi geometriai ismereteket használ az (1.) befejezés: a 45°-os hegyesszögű derékszögű háromszög befogóinak hossza megegyezik, tehát $0-\left(-\frac{\pi}{6}\right)=y-\sqrt{3}$, innen $y=\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}$, amely eleme az adott intervallumnak. Ezzel y pontos értékét meghatároztuk.

(2.) befejezés: felírjuk az E-n átmenő $+1$ meredekségű egyenes egyenletét:

$$y-\sqrt{3}=1\cdot\left(x+\frac{\pi}{6}\right),$$

majd az $x=0$ helyen vesszük a helyettesítési értéket: $y-\sqrt{3}=\frac{\pi}{6}$, ebből y-ra az előbbi érték adódik.

b) $f'(x)=-2\sin x$, $f''(x)=-2\cos x$, $-2\sin x=-2\cos x$, $\sin x=\cos x$. Az egyenlet mindkét oldalát oszthatjuk $\cos x$-szel, mert ez nem 0 (ha 0 volna, akkor az x szinusza $+1$, vagy -1 lenne, tehát az egyenlőség nem állhatna fenn). Így $\frac{\sin x}{\cos x}=\operatorname{tg} x=1$, ahonnan – az értelmezési tartományt is figyelembe véve – $x=\frac{\pi}{4}$.

4. *Egy vállalati rendezvény szervezői az étrend tervezése előtt felmérték az igényeket, amelynek során a következő adatokat kapták. A résztvevők* 12,5%*-a vegetáriánus, a férfiak között* 1*-gyel kevesebb vegetáriánus van, mint a nők között. A nők hetedrésze vegetáriánus.*

a) *Hányan vettek részt a rendezvényen, ha* 2*-vel több nő volt, mint férfi?*

Az est folyamán 16 *nő és* 12 *férfi vetélkedőn vett részt, ahol a hétfős csapatok mindegyike* 4 *nőből és* 3 *férfiból állt.*

b) *Hányféleképpen lehet a négy csapatot összeállítani, ha a csapatokat nem különböztetjük meg?*

A csapatok tagjai később egyéni versenyben is összemérték tudásukat. Itt háromféle díjat lehetett nyerni, mozijegyet, serleget vagy festményt. Egy személy több díjat is kaphatott, de minden fajtából legfeljebb egyet. Mozijegyet 12*-en, serleget* 10*-en, festményt* 7*-en kaptak. Csak mozijegyet* 6*, csak serleget szintén* 6 *személy vehetett át, míg pontosan két díjat öten vihettek haza.*

c) *Hányan kaptak csak festményt az esten, ha összesen* 20*-an kaptak díjat?*

(*13 pont*)

Megoldás. *a*) Egy ismeretlen bevezetésével is megoldható a feladat, ha a résztvevő nők közül a vegetáriánusok számát jelöljük x-szel, akkor a nem vegetáriánus nők száma $6x$, a vegetáriánus férfiaké pedig $x-1$.

	nő	férfi	összesen
vegetáriánus	x	$x-1$	$2x-1$
nem vegetáriánus	$6x$	$8x-7$	$7(2x-1)$

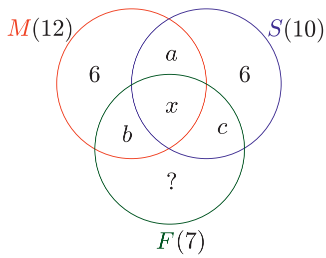
Mivel az összes résztvevő 12,5%-a, azaz nyolcadrésze vegetáriánus, hétszer annyian vannak a nem vegetáriánusok, mint a vegetáriánusok, akik $2x-1$-en vannak. Ha ebből a $7(2x-1)$-ből kivonjuk a nem vegetáriánus nők számát, akkor megkapjuk a nem vegetáriánus férfiak számát $(8x-7)$. A teljes létszámban 2-vel több nő van, mint férfi, közülük az egyik vegetáriánus, ezért a nem vegetáriánus nők száma 1-gyel nagyobb a nem vegetáriánus férfiak számánál, azaz $6x-1=8x-7$, ahonnan $x=3$, amelyből a rendezvény létszámára 40 fő adódik.

Megjegyzés: egyenletrendszerrel is megoldható a feladat.

b) Az első csapat összeállításakor 16 nő közül négyet kell kiválasztani a sorrend figyelembevétele nélkül, majd a 12 férfi közül hármat, ezt $\binom{16}{4}\cdot\binom{12}{3}$-féleképpen tehetjük meg. A második csoportot hasonló módon $\binom{12}{4}\cdot\binom{9}{3}$-féleképpen állíthatjuk össze, és így tovább. Mivel a csapatok sorrendje egymás között nem számít, az összes lehetőség:

$$\left[\binom{16}{4}\binom{12}{3}\right]\cdot\left[\binom{12}{4}\binom{9}{3}\right]\cdot\left[\binom{8}{4}\binom{6}{3}\right]\cdot\left[\binom{4}{4}\binom{3}{3}\right]:4!=9{,}71\cdot 10^{11}.$$

c) Készítsük el, majd az adatok alapján töltsük ki az egyes halmazokat jelképező *ábrát.*



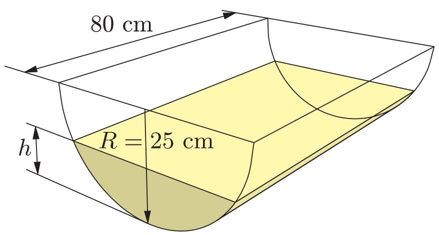
Felírhatjuk az alábbi egyenletet:

$$7+6+a+6=20,$$

amiből $a=1\Rightarrow b+c=4$. Továbbá: $b+x=5$, $c+x=3$, $b+c=4$, amiből $x=2$, $b=3$, $c=1$, azaz csak festményt egy személy kapott.

II. rész

5. *Egy gépjármű zárt üzemanyag tartálya olyan félhenger, amelynek a tengelyén átfektetett határolósíkja vízszintes, a körhenger palástja a sík alatt van, a henger sugara* 25 cm, *hossza* 80 cm (*lásd az* ábrát).



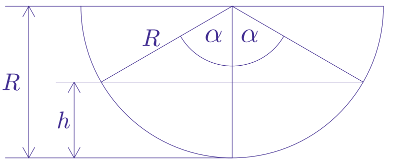
A gépjármű műszerfalán az üzemanyagszint-jelző a tartályban levő folyadékszintnek a teljes magassághoz viszonyított arányát jelzi.

a) *Hány liter üzemanyag van a tartályban, ha a szintjelző az* 1/2*-en áll?*

b) *Hány négyzetméter lemezre van szükség a tartály elkészítéséhez, ha az illesztések kialakítására a felhasznált teljes mennyiség* 5%*-át kell fordítani?*

Egy autó 100 km-re jutó átlagfogyasztását az $F(v)=\frac{(v-50)^2}{1600}+5$ *képlet határozza meg, ahol* v *a jármű km/h-ban mért sebességének nagysága* $(v\geqslant 50)$, *a kapott eredmény az elfogyasztott üzemanyag literben mért mennyisége.*

c) *Mennyi utat tud megtenni ez az autó* 36 liter *üzemanyag felhasználásával, ha az út harmadán* 90 km/h-*s, a többin pedig* 130 km/h-*s sebességgel halad?* (*16 pont*)



Megoldás. a) A körszelet területe: $T = t_{\text{körcikk}} - t_{\text{háromszög}}$, a körcikk középponti szöge legyen 2α.

$$\cos\alpha = \frac{R-h}{R} = 1 - \frac{h}{R} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ.$$

A körcikk középponti szöge tehát a teljesszög harmada, így $t_{\text{körcikk}} = \frac{R^2\pi}{3}$,

$$t_{\text{háromszög}} = \frac{R^2\sin 120^\circ}{2} = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}; \qquad T = R^2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) \approx 3{,}84\ \text{dm}^2.$$

Az üzemanyag térfogata: $V = 3{,}84 \cdot 8 = 30{,}7\ \text{dm}^3 \approx 30{,}7$ liter.

b) A teljes felszín két félkörből, egy téglalapból és egy félhenger palástjából áll:

$$A = 0{,}25^2\pi + 0{,}5 \cdot 0{,}8 + 0{,}25\pi \cdot 0{,}8 \approx 1{,}225\ \text{m}^2.$$

Mivel ez a szükséges mennyiség 95%-a, ezért a keresett mennyiség: $\frac{1{,}225}{0{,}95} \approx 1{,}29\ \text{m}^2$.

c) $F(90) = 6$ liter, $F(130) = 9$ liter. Legyen az út harmada x kilométer, ekkor a maradék út $2x$ kilométer, ezeken a szakaszokon a fogyasztás literben $\frac{x \cdot 6}{100}$, illetve $\frac{2x \cdot 9}{100}$, tehát: $\frac{x \cdot 6}{100} + \frac{2x \cdot 9}{100} = 36$, ebből $x = 150$, azaz a jármű $3x = 450$ km-t tud megtenni.

6. *Aranka és Bálint három egyforma szabályos dobókockával játszik a gyerekszoba parkettáján. Egymásra rakják ezeket úgy, hogy egy négyzet alapú egyenes hasáb (torony) keletkezik, majd megszámolják, hány pöttyöt látnak a tornyon összesen. (Ezeken a dobókockákon az* 1 *pöttyel szemközti lapon* 6*, a* 2*-vel szemköztin* 5*, a* 3*-mal szemköztin* 4 *pötty található.)*

a) *Milyen értékeket kaphattak eredményül?*

Ötször egymás után építettek egy-egy tornyot úgy, hogy a dobókockákat véletlenszerűen rakták egymásra. Mindegyik tornyon megszámolták a pöttyöket, és azt kapták, hogy az adatok egyetlen módusza 43*, mediánja* 44*, átlaga* 44,4*.*

b) *Határozzuk meg az adathalmaz alsó és felső kvartilisét.*

Aranka és Bálint elhatározták, hogy ledöntik az egyik ilyen kockatornyot, de előtte megtippelik, hogy a parkettára eső kockákon hány pötty látszik majd összesen. Aranka azt mondta, hogy a pöttyök száma legalább 57 *lesz, Bálint pedig azt, hogy legfeljebb* 49*.*

c) *Mekkora a valószínűsége annak, hogy Arankának igaza lesz, és mekkora annak, hogy Bálintnak?* (*16 pont*)

Megoldás. a) Az eredmény attól függ, mi van a legfelső kocka felső lapján, ugyanis egy-egy szinten 2-szer 7 pötty látható, így a pöttyök összege $3 \cdot 14 + x$, ahol $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, tehát Aranka és Bálint a 43, 44, 45, 46, 47, 48 egész számokat kaphatta eredményül.

b) Nemcsökkenő sorrendbe rakva a számokat, a középső 44, előtte két 43 van, az utána következő két számot nem ismerjük. Az átlag ismeretében ezek összegét kiszámíthatjuk: $5\cdot 44{,}4=222$, $222-(43+43+44)=92$, ami csak úgy adódhat, ha az egyik a 45, a másik a 47. Ennek az öt adatból álló sokaságnak az alsó kvartilise $\frac{43+43}{2}=43$, felső kvartilise pedig $\frac{45+47}{2}=46$.

c) Az összes látható pötty száma $3\cdot 14+(a+b+c)$, ahol a, b, c jelöli a felső lapokon levő pöttyök számát.

Aranka szerint: $3\cdot 14+(a+b+c)\geqslant 57\Rightarrow a+b+c\geqslant 15$. Legyen $a\leqslant b\leqslant c$, majd vesszük az alapmegoldás permutációinak számát, ezek adják az összes esetet: $6+6+6=18$ (1 eset), $5+6+6=17$ (3 eset), $4+6+6=16$ (3 eset), $5+5+6=16$ (3 eset), $3+6+6=15$ (3 eset), $4+5+6=15$ (6 eset), $5+5+5=15$ (1 eset); összesen 20 eset.

Az Aranka által jósolt esemény valószínűsége:

$$P(A)=\frac{20}{6^3}=\frac{20}{216}=\frac{5}{54}\approx 0{,}0926.$$

Bálint állította, hogy $42+(a+b+c)\leqslant 49\Rightarrow a+b+c\leqslant 7$.

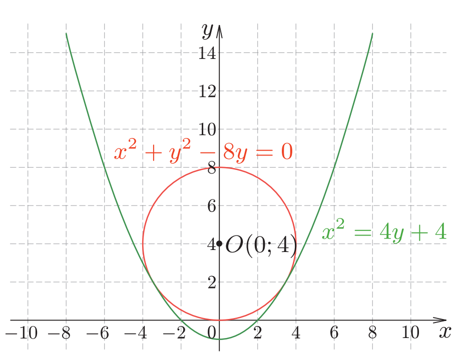
$1+1+5=7$ (3 eset), $1+2+4=7$ (6 eset), $1+3+3=7$ (3 eset), $2+2+3=7$ (3 eset), összesen 15 eset. A többi összegre (3, 4, 5, 6) ugyanazok az értékek adódnak, mint a 15, 16, 17, 18-ra, mert a kocka szemközti lapjain levő pöttyök összege 7, ezért a $(7-a)+(7-b)+(7-c)=21-(a+b+c)$ esetek száma ugyanannyi, mint az $a+b+c$ esetek száma. Ebből következik, hogy Bálint tippjének valószínűsége: $P(B)=\frac{15+20}{216}\approx 0{,}1620$.

Megjegyzés: a három kockán legnagyobb eséllyel összesen 52 vagy 53 pötty lesz látható.

7. *a*) *Határozzuk meg annak a körnek az egyenletét, amelynek középpontja az y tengely pozitív részén helyezkedik el, átmegy az origón és érinti az* $x^2=4y+4$ *egyenletű parabolát.*

b) *Rajzoljuk meg az* $f(x)=\frac{1}{4}x^2-1$; $x\in[-3;2]$ *és a* $g(x)=-\frac{1}{4}x^2+2x-3$; $x\in[2;7]$ *függvény grafikonját, majd igazoljuk, hogy a görbék szimmetrikusak a* $P(2;0)$ *pontra.* (*16 pont*)

Megoldás. *a*) A kör középpontja $O(0;R)$, ahol R $(R>0)$ a kör sugara, így a kör egyenlete: $x^2+(y-R)^2=R^2$. Az x^2 helyére írjuk be a parabola egyenletének jobb oldalát:

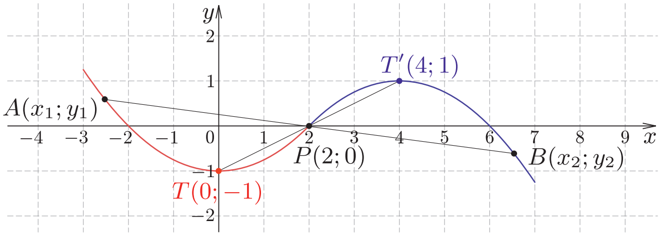


$$4y+4+y^2-2yR+R^2=R^2,$$

Rendezés után egy olyan R paramétert tartalmazó másodfokú egyenletet kaptunk $(y^2+(4-2R)y+4=0)$, amelynek az alakzatok y tengelyre vonatkozó szimmetriája miatt egy megoldása van, tehát diszkriminánsa 0. $(4-2R)^2-16=0$; $4R(R-4)=0$; $R_1=0$ (ez nem megoldás); $R_2=4$.

A kör egyenlete: $x^2+(y-4)^2=16$, más alakban: $x^2+y^2-8y=0$.

b) A $g(x)=-\frac{1}{4}x^2+2x-3=-\frac{1}{4}(x-4)^2+1$ alapján könnyen megrajzolható az *ábra.*



I. megoldás: leolvasható, hogy mindkét parabola paramétere 2, tehát a két görbe egybevágó, mert a parabola alakját paramétere egyértelműen meghatározza. Az $f(x)$ grafikonjának tengelypontja $T(0;-1)$, a $g(x)$ grafikonjának tengelypontja $T'(4;1)$, ami éppen $T(0;-1)$-nek a $P(2;0)$ pontra vonatkozó tükörképe, a két parabola nyílása (görbülete) ellentétes, tehát egymás tükörképei.

II. megoldás: vegyünk egy $A(x_1;y_1)$ pontot az $f(x)$, és egy $B(x_2;y_2)$-t a $g(x)$ grafikonjáról. Ha ezek egymás tükörképei a $P(2;0)$ pontra nézve, akkor fennállnak az $\frac{x_1+x_2}{2}=2$; $\frac{y_1+y_2}{2}=0$ összefüggések. Az elsőből: $x_1=4-x_2$, a másodikból $y_2=-y_1$; alkalmazzuk a függvénykapcsolatból adódó összefüggéseket:

$$-\frac{1}{4}x_2^2+2x_2-3\overset{?}{=}-\left[\frac{1}{4}(4-x_2)^2-1\right]=-\left[\frac{1}{4}\left(16-8x_2+x_2^2\right)-1\right]=$$
$$=-\frac{1}{4}x_2^2+2x_2-3.$$

Ekvivalens átalakításokkal azonosságot kaptunk, ezzel beláttuk az állítást.

8. *Egy négyzet alapú egyenes csonkagúla a alapéle* 11 cm, *b fedőéle* 2 cm, *magassága* 10,8 cm. *Mellette áll egy ugyanakkora térfogatú és magasságú négyzetes oszlop.*

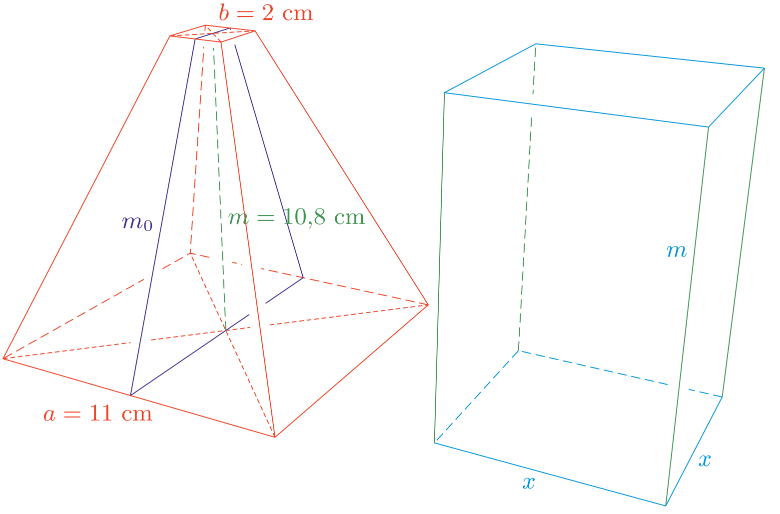
a) *Mekkora a két test felszínének különbsége?*

Legyen az a és b valós számok „nevenincs” közepe $\sqrt{\frac{a^2+ab+b^2}{3}}$.

b) *Igazoljuk, hogy két valós szám „nevenincs” közepe nem kisebb a számtani közepüknél.*

c) *Két különböző pozitív egész szám „nevenincs” közepe* 13. *Melyek ezek a számok?* (*16 pont*)

Megoldás. *a*) Az a alapélű és b fedőélű, m magasságú négyzet alapú egyenes csonkagúla térfogata: $V_1=\frac{m(a^2+ab+b^2)}{3}$, az x alapélű, m magasságú négyzetes oszlopé: $V_2=x^2m$.



Mivel $V_1 = V_2$, ezért $x^2 = \frac{a^2+ab+b^2}{3}$, ahonnan $x = \sqrt{\frac{a^2+ab+b^2}{3}}$. Behelyettesítve az adatokat: $x = 7$ cm. A négyzetes oszlop felszíne:

$$A_1 = 2x^2 + 4xm = 2x(x + 2m) = 14(7 + 2 \cdot 10,8) = 400{,}4 \text{ cm}^2.$$

A csonkagúla oldallapjának magassága m_0, ami egy olyan derékszögű háromszög átfogója, amelynek vízszintes befogója $\frac{11-2}{2} = 4{,}5$ cm, függőleges befogója pedig 10,8 cm, így $m_0^2 = 4{,}5^2 + 10{,}8^2$, amelyből $m_0 = 11{,}7$ cm. A csonkagúla felszíne:

$$A_2 = 11^2 + 2^2 + 4 \cdot \frac{(11+2) \cdot 11,7}{2} = 429{,}2 \text{ cm}^2,$$

tehát a két felszín különbsége: $A_2 - A_1 = 28{,}8 \text{ cm}^2$.

b) Két valós szám „nevenincs” közepe mindig létezik, mert

$$a^2 + ab + b^2 = \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 \geqslant 0,$$

tehát a négyzetgyökvonás mindig elvégezhető.

Ha $\frac{a+b}{2} < 0$, akkor az állítás triviális. Legyen $\frac{a+b}{2} \geqslant 0$, ekkor belátjuk, hogy

$$\frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+ab+b^2}{3}}.$$

A négyzetre emelés után (ami most ekvivalens művelet) kapjuk, hogy

$$\frac{a^2+2ab+b^2}{4} \leqslant \frac{a^2+ab+b^2}{3},$$

$$3a^2 + 6ab + 3b^2 \leqslant 4a^2 + 4ab + 4b^2, \quad 0 \leqslant a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2,$$

ez mindig igaz. Ide ekvivalens átalakításokon át jutottunk, ezért a kiinduló állítás is mindig igaz, a bizonyítást ezzel befejeztük.

c) $\sqrt{\frac{a^2+ab+b^2}{3}} = 13$, ahol $a, b \in \mathbb{Z}^+$. Négyzetre emelés és rendezés után: $a^2 + ab + b^2 = 507$. A szimmetria miatt feltehető, hogy $b < a$, ekkor $3b^2 < 507 \Rightarrow b < 13$. Tekintsük az egyenletet egy a ismeretlenű, b paraméterű másodfokú egyenletnek, ekkor

$$a^2 + b \cdot a + (b^2 - 507) = 0, \tag{1}$$

mely egyenlet diszkriminánsának négyzetszámnak kell lennie ahhoz, hogy a megoldások egészek lehessenek. $D = b^2 - 4(b^2 - 507) = m^2$ $(m \in \mathbb{Z})$, $2028 - 3b^2 = m^2$,

$$3(676 - b^2) = m^2.$$

Mivel a bal oldal osztható 3-mal, így az m is, $m = 3n$, $(n \in \mathbb{Z})$, így a

$$676 - b^2 = 3n^2 \tag{2}$$

egyenlethez jutottunk. Tudjuk, hogy $1 \leqslant b < 13$, ezért $532 \leqslant 676 - b^2 \leqslant 675$; azaz $532 \leqslant 3n^2 \leqslant 675$. Ebből $177{,}\dot{3} \leqslant n^2 \leqslant 225$, vagyis $13 < n \leqslant 15$. Az n lehetséges értékei 14, 15. Helyettesítsük ezeket rendre a (2) egyenletbe. $n = 14$ esetén b-re irracionális szám $\left(\sqrt{88}\right)$ adódik; $n = 15$-re pedig $b = 1$. A b helyére írjunk (1)-be 1-et: $a^2 + a - 506 = 0 \Rightarrow a_1 = 22$, $(a_2 = -23)$, így a keresett két különböző pozitív egész szám az 1 és a 22.

Ellenőrzés: $\sqrt{\frac{22^2+22+1^2}{3}} = 13$.

9. *Egy szabályos dobókockával kétszer dobunk, az elsőnek dobott értéket m, a másodiknak dobottat n jelöli.*

a) Mennyi volt m és n értéke, ha az $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - mx^2 + n$ függvénynek a lokális minimumhelyén 1 az értéke?

A két dobás alapján elkészítünk egy a és egy b számot, ahol

$$a = \begin{cases} 1, & \textit{ha } m = 1, \\ 2, & \textit{ha } m \textit{ összetett szám}, \\ 3, & \textit{ha } m \textit{ prímszám}, \end{cases} \qquad b = \begin{cases} 2, & \textit{ha } n \textit{ prímszám}, \\ 4, & \textit{ha } n = 1, \\ 6, & \textit{ha } n \textit{ összetett szám}. \end{cases}$$

Ez az a és b meghatároz egy g függvényt a következő módon:

$$g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - a^2}{x - a}, & \textit{ha } x \neq a, \\ b, & \textit{ha } x = a. \end{cases}$$

b) Mennyi a valószínűsége annak, hogy a két dobás alapján olyan a és b számokat kapunk, amelyek esetén a $g(x)$ függvény folytonos lesz az a helyen?

(*16 pont*)

Megoldás. *a)* $f'(x) = 3x^2 - 2mx$, $0 = x(3x - 2m)$, $x_1 = 0$ és $x_2 = \frac{2m}{3}$. $f''(x) = 6x - 2m$, $f''(0) = -2m < 0$, az x_1 helyen maximuma van a függvénynek.

$$f''\left(\frac{2m}{3}\right) = 6 \cdot \frac{2m}{3} - 2m = 2m > 0;$$

az x_2-nél pedig lokális minimuma van, amelynek értéke:

$$f\left(\frac{2m}{3}\right) = \left(\frac{2m}{3}\right)^3 - m \cdot \left(\frac{2m}{3}\right)^2 + n = \frac{8m^3}{27} - \frac{4m^3}{9} + n = n - \frac{4m^3}{27}.$$

$n - \frac{4m^3}{27} = 1 \Rightarrow m = 3$ vagy $m = 6$ lehet, mert m-nek 3-mal oszthatónak kell lennie. Ha $m = 3$, akkor $n = 5$, ha $m = 6$, akkor $n = 33$, ezt azonban dobókockával nem dobhatjuk. Tehát a megoldás: $m = 3$, $n = 5$.

b)
$$\frac{x^2 - a^2}{x - a} = \frac{(x - a)(x + a)}{x - a} = x + a, \quad \text{ha} \quad x \neq a.$$

Mivel $x + a$ mindenhol folytonos, az a helyen vett határértéke $2a$, tehát b-nek kétszer akkorának kell lennie, mint a, hogy a $g(x)$ függvény az $x = a$-ban folytonos legyen. Egy szabályos dobókockával $\frac{1}{6}$ valószínűséggel dobhatunk 1-et, $\frac{1}{3}$-dal összetett számot $(4, 6)$, és $\frac{1}{2}$-del prímszámot $(2, 3, 5)$, ezért az egyes esetek valószínűsége:

$$P(a = 1; b = 2) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}, \qquad P(a = 2; b = 4) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{18},$$

$$P(a = 3; b = 6) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Ezek összege lesz a megoldás.

A $g(x)$ függvény a helyen vett folytonosságának $p = \frac{1}{12} + \frac{1}{18} + \frac{1}{6} = \frac{11}{36}$ a valószínűsége.

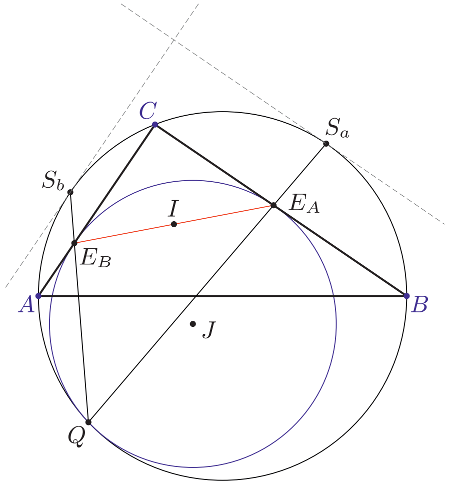
Németh László
Fonyód

Matematika feladat megoldása

B. 5265. *Nagyítsuk kétszeresére egy derékszögű háromszög beírt körét a derékszögű csúcsból. Mutassuk meg, hogy a kapott kör érinti a háromszög körülírt körét.*

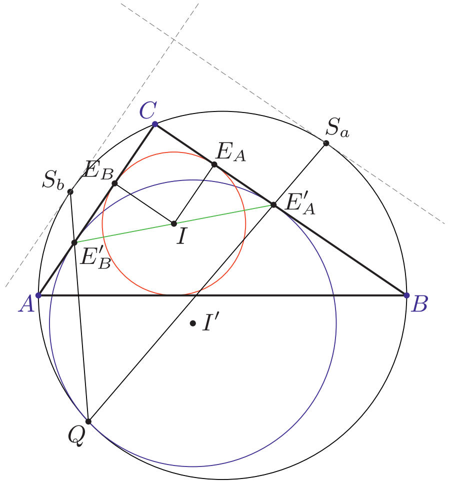
(*4 pont*) Javasolta: *Vígh Viktor* (Szeged)

I. megoldás. Először egy önmagában is érdekes állítást igazolunk.



Lemma: *Vegyük azt a J középpontú kört, amely a Q pontban érinti az ABC derékszögű háromszög körülírt körét, továbbá az AC és BC befogóit az E_B, illetve E_A pontokban. Mutassuk meg, hogy az E_BE_A szakasz felezőpontja az ABC háromszög beírt körének középpontja.*

Bizonyítás: Legyen a QE_A félegyenes és a körülírt kör metszéspontja S_a, valamint a QE_B félegyenes és a körülírt kör metszéspontja az S_b pont. Az AS_a és BS_b egyenesek metszéspontját jelölje I. Tekintsük azt a Q középpontú nagyítást, amely E_A-t S_a-ba viszi. Ez a középpontos hasonlóság a BC egyenesét a körülírt kör érintőjébe viszi, tehát ez az érintő párhuzamos BC-vel, így S_a a BC ív felezőpontja. Az A-ból induló belső szögfelező átmegy a BC ív felezőpontján, az A, I és S_a pontok egy egyenesre illeszkednek. Ugyanezzel a megfontolással B, I és S_b is egy egyenesre illeszkednek. Vagyis I az ABC háromszög két belső szögfelezőjének metszéspontja, tehát a beírt kör középpontja. Azt kell még belátnunk, hogy I az E_AE_B szakasz felezőpontja. Alkalmazzuk Pascal tételét az AS_aQS_bBC hatszögre. Mivel az AS_a és BS_b metszéspontja I, S_aQ és BC metszéspontja E_A, QS_b és CA metszéspontja E_B, ezért Pascal tétele alapján ez a három metszéspont egy egyenesre illeszkedik. Ezen kívül az $ICE_A\triangle \cong ICE_B\triangle$, mert két-két oldal és a közbezárt szög megegyezik. Az I pont az E_AE_B szakasz felezőpontja.



A most bizonyított lemmából már következik a feladat állítása.

Legyenek ismét a háromszög csúcsai A, B, C, $BCA\sphericalangle = 90°$, a beírt kör érintési pontjai az AC-n, illetve a BC-n E_B és E_A, a középpontja I. A C középpontú kétszeres nagyítás után az érintési pontok képei E'_B és E'_A.

CE_AIE_B négyzet, ennek megfelelően a kétszeres nagyítás után az I pont felezi az $E'_AE'_B$ szakaszt. Eszerint a kétszeresre nagyított kör éppen az a kör, amely a lemmában szerepelt: érinti a körülírt kört (az ott szereplő Q pontban).

Virág Rudolf (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.) megoldása

Megjegyzés. Versenyfeladatokban gyakran találkozhatunk olyan körökkel, amelyek érintenek egy másik kört és két egyenest. A leggyakoribb eset az, amikor egy háromszög két oldalát és a körülírt körét belülről érinti egy kör – mint a **B. 5265.** feladatban is; az angol nyelvű szakirodalomban az ilyen érintő köröket *mixtilinear incircle*-nek hívják. Versenyzőink például a

`https://en.wikipedia.org/wiki/Mixtilinear_incircles_of_a_triangle`.

wikipédia-oldalon olvashatnak bővebben ezekről az érintő körökről.

II. megoldás. A Feuerbach-tételre hivatkozva röviden és elegánsan oldható meg a feladat.

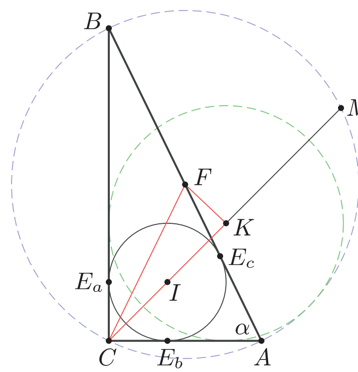
Kicsinyítsük a körülírt kört a derékszögű csúcsból felére, azt kell megmutatnunk, hogy ez a kör érinti a beírt kört. (A hasonlóság megtartja az érintkezést, ezért a két állítás ekvivalens.) Mivel a derékszögű háromszög magasságpontja éppen a derékszögű csúcs, és a körülírt kört a magasságpontból felére kicsinyítve a Feuerbach-kört kapjuk, ezért a körülírt kör képe a derékszögű háromszög Feuerbach-köre. Ez pedig a Feuerbach-tétel szerint érinti a beírt kört, és éppen ezt akartuk megmutatni.

Varga Boldizsár (Budapest, Békásmegyeri Veres Péter Gimn., 10. évf.) dolgozata

III. megoldás. Legyen a beírt kör középpontja I, sugara r, a körülírt kör középpontja F, sugara R, továbbá a kétszeresre nagyított kör középpontja K, sugara $2r$.

Az ABC háromszög oldalai a, b, c, az A-nál fekvő hegyesszöge α.

A megoldás során azt fogjuk megmutatni, hogy a körülírt kör és a kétszeresre nagyított kör középpontjának a távolsága pontosan sugaraik különbsége, vagyis a K középpontú kör belülről érinti az R sugarú kört.



A Thalész-tétel alapján a körülírt kör F középpontja az átfogó felezőpontja, $R=\frac{c}{2}$ és $FCA\sphericalangle=CAB\sphericalangle=\alpha$. CK belső szögfelező, így $FCK\sphericalangle=|\alpha-45^\circ|$. Az IE_ACE_B négyzet átlója $r\sqrt{2}$, emiatt $CK=2r\sqrt{2}$. Derékszögű háromszög esetén a beírt kör sugara $r=s-c=\frac{a+b-c}{2}$. Ez az α szög szögfüggvényeivel kifejezve:

$$r=\frac{a+b-c}{2}=\frac{2R\sin\alpha+2R\cos\alpha-2R}{2}=R(\sin\alpha+\cos\alpha-1).$$

A szögfüggvényértékek összege ebből kifejezhető:

$$\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{r+R}{R}. \tag{1}$$

Írjuk fel az FKC háromszög FK oldalára a koszinusztételt:

$$FK^2=\left(2r\sqrt{2}\right)^2+R^2-4rR\sqrt{2}\cos(\alpha-45^\circ)=$$

$$= 8r^2 + R^2 - 4\sqrt{2}Rr(\cos 45^\circ \cdot \cos\alpha + \sin 45^\circ \cdot \sin\alpha) =$$

$$= 8r^2 + R^2 - 4\sqrt{2}Rr\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha + \sin\alpha).$$

Az (1)-ben a szögfüggvényértékek összegét kifejeztük a sugarakkal, így az FK távolság négyzete:

$$FK^2 = 8r^2 + R^2 - 4Rr\frac{r+R}{R} = 8r^2 + R^2 - 4r(R+r) = 4r^2 + R^2 - 4Rr = (2r-R)^2.$$

A két középpont távolsága $|R-2r|$ éppen a két sugár különbsége, vagyis a kisebbik kör belülről érinti a nagyobb kört.

Horváth Mihály (Budapest, Szent Gellért Katolikus Ált. Isk. és Gimn., 12. évf.) megoldása

IV. megoldás. A két kör érintéséhez elegendő azt belátni, hogy középpontjaik távolsága a sugaraik távolságának különbsége.

Legyenek a háromszög csúcsai A, B és C, $ACB\sphericalangle = 90^\circ$, a beírt kör középpontja I, sugara r, a középpont képe K, a körülírt kör középpontja F, sugara R, ahogyan az első megoldásban.

A két kör középpontjának távolsága $KF = d$.

Legyen továbbá a CI egyenes és a körülírt kör C-től különböző metszéspontja M.

A K pont ABC körre vonatkozó hatványából

$$d^2 - R^2 = KM \cdot KC = (IM - IK) \cdot (IC + IK).$$

Legyen a beírt kör érintési pontja a BC oldalon E_A.

A hasonlóság miatt $IK = IC$, valamint $ACB\sphericalangle = 90^\circ$, az IE_ACE_B négyzet, az IE_AC egyenlő szárú derékszögű háromszög, azaz $IC = IK = \sqrt{2}r$. Euler tétele szerint $IF^2 = R^2 - 2Rr$, tehát az I pontnak a körülírt körre vonatkozó hatványából

$$IM \cdot IC = (R - IF) \cdot (R + IF) = R^2 - IF^2 = 2Rr,$$

így

$$IM = \frac{2Rr}{IC} = \frac{2Rr}{\sqrt{2}r} = \sqrt{2}R.$$

Az eddigieket összefoglalva kapjuk, hogy

$$(IM - IK)(IC + IK) = \left(\sqrt{2}R - \sqrt{2}r\right)2\sqrt{2}r = 4r(R - r),$$

$$R^2 - d^2 = 4r(R - r),$$

$$d^2 = R^2 - 4rR + 4r^2 = (R - 2r)^2.$$

A sugáregyenlőtlenség alapján $R > 2r$, tehát $d = R - 2r$.

A beírt kör nagyított képének sugara $2r$, d pedig éppen a két kör sugarának különbsége, a körök valóban érintik egymást.

Tarján Bernát (Budapest, Békásmegyeri Veres Péter Gimn., 11. évf.) megoldása

V. megoldás. Legyenek a háromszög csúcsai A, B, és C, ahol C a derékszögű csúcs. A beírt kör középpontja I, a C-hez tartozó hozzáírt kör középpontja I_c. Legyen a beírt kör kétszeresre nagyított képe g. A bizonyítást inverzió segítségével fogjuk végezni. Legyen a C középpontú

$$\sqrt{AC \cdot BC} = \sqrt{ab}$$

sugarú k kör az inverzió alapköre.

Először invertáljunk a k körre, majd végezzünk el egy tengelyes tükrözést az $ACB\sphericalangle$ szögfelezőjére. A transzformációkat követően a B csúcs az A helyére, az A csúcs a B helyére kerül, ennek megfelelően az ABC körülírt köre a AB egyenesbe megy át.

A g kör képe egy kör lesz, amely érinti az AC és BC egyenest, mivel az inverziónál ezek helyben maradnak, a tükrözés hatására pedig helyet cserélnek.

Azt állítjuk, hogy a g kör képe a C-hez tartozó hozzáírt kör lesz.

Ehhez elegendő belátni, hogy az AC-hez és BC-hez tartozó érintési pont képének távolsága a C csúcstól a félkerület (s).

Legyen a g kör érintési pontja a BC egyenesen E_A, inverz képe H_a. Ez az E_A éppen kétszer akkora távolságra van a derékszögű csúcstól, mint a beírt kör érintési pontja, tehát az első megoldásban is ismertetett eredmény alapján $CE_A = a+b-c$. Az inverzió alapköre sugarának ismeretében tudjuk, hogy

$$CE_A \cdot CH_a = AC \cdot BC = ab.$$

Azt kell tehát megmutatni, hogy

$$CH_a = s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{ab}{a+b-c}.$$

Ekvivalens átalakításokkal a Pitagorasz-tételt is felhasználva látjuk, hogy valóban teljesül az egyenlőség:

$$(a+b+c)(a+b-c) = (a+b)^2 - c^2 = a^2 + b^2 + 2ab - c^2 = 2ab.$$

Az E_B pont inverzére ugyanez a számítás elmondható, hiszen $CE_A = CE_B$.

Tehát a g kör inverze a hozzáírt kör, amely érinti az AB egyenest. Az AB átfogó egyenese éppen a körülírt kör inverze, így ezzel be is láttuk a feladat állítását.

Fülöp Csilla (Szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimn., 12. évf.) megoldása

Összesen 95 dolgozat érkezett. 4 pontot kapott 75, 3 pontot 7 versenyző. 2 pontos 1, 1 pontos 2, 0 pontos 4 versenyző dolgozata. Nem versenyszerű 6 dolgozat.

Helyesbítés

A szeptemberi számunkban a versenyeredmények közül sajnálatos módon kimaradtak a C csapatverseny 11–12. osztályosok eredményei. Ezt a hiányt most pótoljuk, a későbbi megjelentetés miatt olvasóinktól elnézést kérünk.

C-jelű matematika gyakorlatok csapatversenye, 11–12. osztályosok

1. díj: **Nyerő Páros 2.0:**
Kepenyes Fanni 11. o. t. (Szolnok, Varga Katalin Gimn.);
Gulyás Janka 11. o. t. (Szolnok, Varga Katalin Gimn.) .... 203 pont

2. díj: **Πtagoraszi hármas:**
Veres Benedek Zoltán 11. o. t. (Szlovákia, Révkomárom, Selye János Gimn.);
Kovács Kristóf 11. o. t. (Szlovákia, Révkomárom, Selye János Gimn.);
Slezák Dóra 11. o. t. (Szlovákia, Révkomárom, Selye János Gimn.) 201 pont

Dicséretben részesül: **3. Virtuális Triumvirátus:** 158 pont; *Beke Gellért* 12. o. t. (Veszprém, Lovassy László Gimn.); *Antal László* 12. o. t. (Veszprém, Lovassy László Gimn.); *Kőmíves Norbert* 12. o. t. (Veszprém, Lovassy László Gimn.); **4. Mind1:** 135 pont; *Streng Márkó* 11. o. t. (Budapest, Városmajori Gimn.); *Ye Zhenghao* 11. o. t. (Budapest, Városmajori Gimn.); *Chen En Lei* 11. o. t. (Budapest, Teleki Blanka Gimn.); **5. Komor Kos 3.0:** 98 pont; *Csontos Domonkos* 11. o. t. (Budapest I. Ker. Toldy Ferenc Gimn.); *Komorjai Zsigmond László* 11. o. t. (Budapest I. Ker. Toldy Ferenc Gimn.).

Következik: **6. Bélák:** 37 pont; *Papdi Krisztián László* 12. o. t. (Pécsi Leőwey Klára Gimn.); *Jávor Miklós* 12. o. t. (Pécsi Leőwey Klára Gimn.); *Papp László Györk* 12. o. t. (Pécsi Leőwey Klára Gimn.).

Rejtvények, ördöglakatok

Doboz a dobozban

Rovatunkban minden hónapban valamilyen szórakoztató matematikai fejtörőt mutatunk be. Ezek között fontos helyet foglalnak el a különböző kirakós játékok, topológiai feladványok, ördöglakatok és a matematikát felhasználó bűvészmutatványok.

Manapság szinte mindent meg lehet találni az interneten, de az igazi élményt az adja, ha a feladatokat magunk oldjuk meg, a bűvészmutatványok trükkjeit mi találjuk ki, és a szükséges kellékeket is mi tervezzük meg és készítjük el. Próbáljuk meg a feladatokat továbbgondolni, általánosítani, igyekezzünk új feladatokat kitalálni.

A megoldásokat, továbbgondolásokat, általánosításokat a

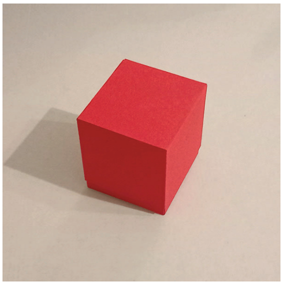
`rejtveny.komal@gmail.com`

címre lehet beküldeni. Ezek a pontversenyekbe nem számítanak bele, de a legjobbakat – akár cikk vagy videó formájában – a honlapunkon vagy itt a Lapban örömmel közöljük.

Bűvészmutatvány

Ezt a mutatványt több helyen láttam már, nem tudom, kitől származik.

A bűvész előhúz a cilinderéből egy kocka alakú, piros papírdobozt.



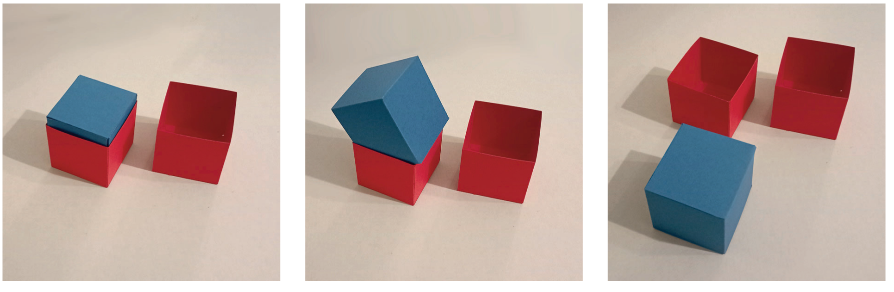
– *Látjátok, mi ez?*

– *Doboz.*

– *Így van, ez egy piros papírdoboz. De ebben a dobozban valami nagyon érdekes dolog van. Kitaláljátok, mi az?*

– *Egér? Galamb? Elefánt?*

– *Hát, egyik sem. Lássuk csak!* – kinyitja a dobozt – *A piros dobozban egy kék papírdoboz van.*



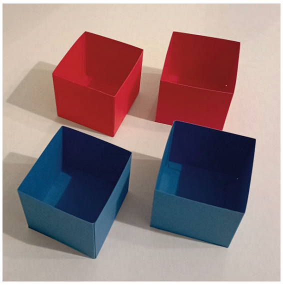
Kiveszi a pirosból a kék dobozt, és forgatja.

– *Vajon mi lehet a kék dobozban?*

– *Biztos egy újabb doboz. Sárga? Netán zöld? Lila?*

Kinyitja a kék dobozt, és a közönség felé fordítja: üres.

– *Nincs benne semmi. Ugye, milyen érdekes?*

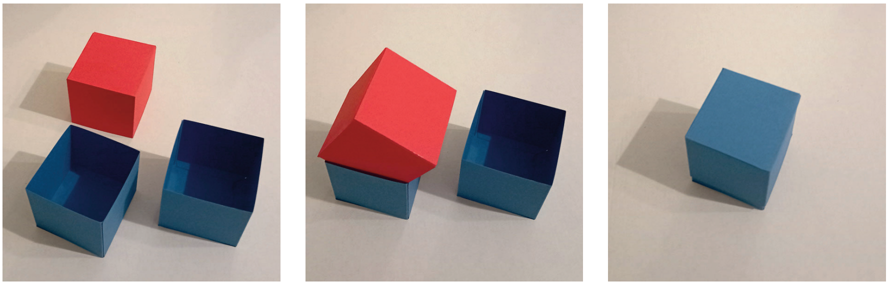


– *Azt mondtad, valami érdekes dolog lesz benne! Mióta érdekes a semmi?*

– *Igazatok van, a kék dobozban tényleg nem volt semmi érdekes. Inkább el is csomagolom.*

Becsukja a piros dobozt, és beleteszi a kék dobozba.

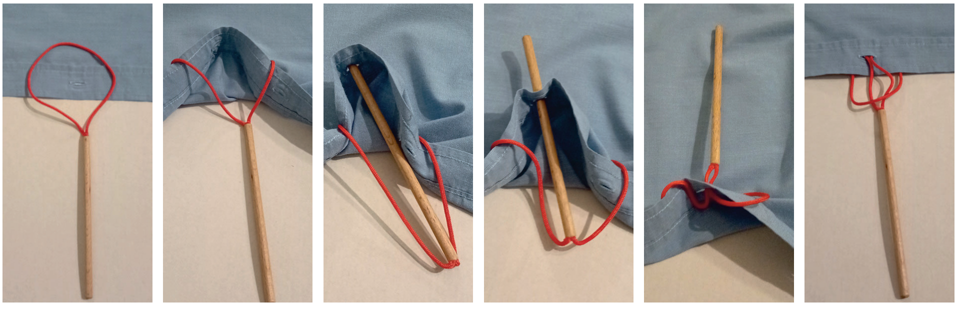
– *Most már tényleg van valami érdekes dolog a kék dobozban.*



Feladat: *Fejtsük meg, hogy működik a mutatvány, tervezzük meg és készítsük el a dobozokat. De ezzel még nincs vége, a megoldást gondoljuk tovább: lehetséges-e hasonló mutatványt előadni három dobozzal?*

A megoldást a decemberi számunkban közöljük.

Az októberi számunkban közölt feladat (pálcika a gomblyukban) megoldása



Kós Géza

A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok ABACUS-szal közös pontverseny 9. osztályosoknak (784–788.)

K. 784. Helyettesítsük be a 0–9-ig terjedő számjegyeket egy kivételével az alábbi betűk helyére úgy, hogy a kialakuló, két háromjegyű szám különbségeként kapott eredmény a lehető legközelebb legyen a 300-hoz:

$$ABC - DEF = GHJ.$$

Mutassuk meg, hogy a 300-tól lehető legkisebb különbséggel eltérő eredmény csak egyféleképpen hozható létre. (Különböző betűk különböző számjegyeket jelölnek.)

K. 785. Három kereskedő, Ali, Szelim és Kháfim boltjában egy hordó olajbogyót ugyanazon az áron lehetett kapni június elején. Ali felemelte az árat 10%-kal, majd ismét 10%-kal, majd szeptember elejére 20%-kal csökkentette. Szelim felemelte az árat 20%-kal, majd 10%-kal csökkentette, és szeptember elejére ismét 10%-kal csökkentette. Kháfim felemelte az árat 20%-kal, majd szeptember elejére csökkentette 20%-kal. Tudjuk, hogy Ali szeptember elején 4 dénárral olcsóbban adott egy hordó olajbogyót, mint Szelim. Mennyibe került Kháfim boltjában szeptember elején egy hordó olajbogyó?

K. 786. Jelölje X az első 50 pozitív egész szám négyzetének összegét. Adjuk meg X segítségével az első 50 pozitív páros szám négyzetének összegét.

K/C. 787. Hány metszéspontja lehet egy konvex tizenhatszög átlóinak, ha a metszéspontok mind különbözőek?

K/C. 788. Egy sorozatban $a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n + 2n$. Határozzuk meg a_{100} értékét.

Beküldési határidő: 2023. december 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄

A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (787–788., 1783–1787.)

Feladatok 10. évfolyamig

K/C. 787. A szövegét lásd a **K** feladatoknál.

K/C. 788. A szövegét lásd a **K** feladatoknál.

Feladatok mindenkinek

C. 1783. Legyenek a, b, c, d olyan pozitív egész számok, amelyekre az $\left]\frac{a}{b};\frac{c}{d}\right[$ intervallum tartalmazza a 1-et. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{a}{b}<\frac{a+c+1}{b+d+1}<\frac{c}{d}.$$

Javasolta: *Bíró Bálint* (Eger)

C. 1784. Az ABC derékszögű háromszög rövidebbik befogója egységnyi hosszúságú. A derékszögű csúcsból az AB átfogóra bocsátott magasság a hegyesszögek szögfelezőivel olyan φ és ε szögeket zár be, amelyekre

$$\frac{\varphi}{\varepsilon}=\frac{4}{5}.$$

Határozzuk meg a háromszög szögeit és az átfogóhoz tartozó magasság hosszát.

Javasolta: *Bíró Bálint* (Eger)

C. 1785. Határozzuk meg az összes olyan $(x;y)$ valós számpárt, amely megoldása a

$$\frac{10}{1+|x|}+y=4;\qquad \frac{10}{1+|y|}+x=4$$

egyenletrendszernek.

(*Német versenyfeladat*)

Feladatok 11. évfolyamtól

C. 1786. Mennyi annak a valószínűsége, hogy öt szabályos dobótetraédert egyszerre dobva, a dobott számok lehetnének egy ötcsúcsú fagráf fokszámai?

Javasolta: *Kovács Bence* (Szombathely)

C. 1787. Az ABC hegyesszögű háromszögben az M magasságponton keresztül párhuzamost húzunk az AB oldallal, amely az AC, illetve BC oldalakat a D, illetve E pontban metszi. Az ABC háromszög körülírt körének egyik átmérője a CC_1 szakasz. Számítsuk ki a DEC_1 háromszög kerületét, ha $AB=14$.

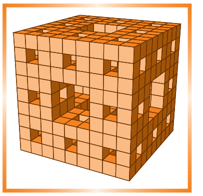
(*A Kvant nyomán*)

❄

Beküldési határidő: 2023. december 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄

A B pontversenyben kitűzött feladatok (5342–5349.)



B. 5342. Vegyünk négy másodszomszédos egész számot és képezzük összes lehetséges módon a páronkénti szorzataikat. Mutassuk meg, hogy ezek összege nem lehet négyzetszám.

(*3 pont*) Javasolta: *Kiss Géza* (Csömör)

B. 5343. Határozzuk meg, hogy az

$$A = 1! - 2! + 3! - 4! + \ldots + 2021! - 2022! + 2023! \quad \text{és}$$

$$B = (1 - 2 + 3 - 4 + \ldots + 2021 - 2022 + 2023)!$$

számok közül melyik a nagyobb.

(*3 pont*) Javasolta: *Hujter Bálint* (Budapest)

B. 5344. Anti és Bandi Balatonmáriafürdőről szeretnének az onnan 30 km-re lévő Balatonlellére eljutni részben futva, részben biciklizve. Egyszerre indulnak, csak egyetlen biciklijük van. Anti 30 km/h sebességgel biciklizik és 15 km/h sebességgel fut. Bandi 20 km/h sebességgel biciklizik és 12 km/h sebességgel fut. Legalább hány percre van szükségük ahhoz, hogy mindketten odaérjenek? (Az út során akárhányszor cserélhetik, ki ül a biciklin, amely az út bármely pontján le is tehető.)

(*5 pont*) Javasolta: *Pach Péter Pál* (Budapest)

B. 5345. Bizonyítsuk be, hogy ha egy háromszögben a beírt kör és a Feuerbach-kör koncentrikus, akkor a háromszög szabályos.

(*4 pont*) Javasolta: *Kiss Géza* (Csömör)

B. 5346. Mely n-ekre létezik olyan n-szög, amelynek oldalai egyenlő hosszúak, és minden oldala pontosan két másik oldalával párhuzamos?

(*5 pont*) Javasolta: *Hujter Bálint* (Budapest)

B. 5347. Igazoljuk, hogy ha egy pozitív racionális r számra r^r is racionális, akkor r egész.

(*5 pont*) Javasolta: *Sándor Csaba* (Budapest)

B. 5348. Legyenek b, c és n nemnegatív egészek, melyekre $0 \leqslant c \leqslant b - 2n$ teljesül. Mutassuk meg, hogy

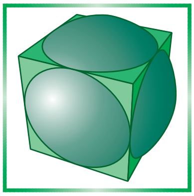
$$\sum_{a=0}^{n} \binom{2a}{a}\binom{b-2a}{n-a} = \sum_{a=0}^{n} \binom{2a+c}{a}\binom{b-c-2a}{n-a}.$$

(*6 pont*) Javasolta: *Tóthmérész Lilla* (Budapest)

B. 5349. A P paralelepipedon minden éle legfeljebb egységnyi. Legyen X a P egy tetszőleges pontja. Mutassuk meg, hogy van olyan csúcsa P-nek, ami X-től legfeljebb $\sqrt{3}/2$ távolságra van.

(*6 pont*) Javasolta: *Vígh Viktor* (Sándorfalva)

Beküldési határidő: 2023. december 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`



Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (863–865.)

A. 863. Legyen adott egy $n \geqslant 2$ egész szám. Legfeljebb mekkora lehet N, ha tudjuk, hogy végtelen sokféleképpen választható ki N egymást követő egész szám úgy, hogy egyiknek se legyen 1-nél nagyobb n-edik hatvány osztója?

Javasolta: *Pach Péter Pál* (Budapest)

A. 864. Legyen ABC egy tetszőleges háromszög, O pedig a körülírt körének a középpontja. Legyen D, E, illetve F az ABC háromszög beírt körének érintési pontja a BC, a CA, illetve az AB oldalon. Legyen M, illetve N az AB, illetve az AC oldal felezőpontja. Legyen M', illetve N' az M, illetve az N tükörképe a DE, illetve a DF egyenesre. A CM', illetve a BN' egyenes a DE, illetve a DF egyenest messe a H, illetve a J pontban.

Bizonyítandó, hogy H, J és O egy egyenesre esik.

Javasolta: *Luu Dong* (Vietnám)

A. 865. Keresztrejtvénynek nevezünk egy fekete és fehér négyzetekből álló négyzetrácsot, melyben minden fehér mezőhöz található egy őt tartalmazó 2×2-es része a táblázatnak, amely csak fehér mezőkből áll. Szónak nevezzük a táblázat egy sorában vagy oszlopában található, csak fehér mezőkből (legalább kettőből) álló részét a táblázatnak, melyet mindkét végén fekete mező vagy a tábla széle határol.

Bizonyítsuk be, hogy egy $n \times n$-es keresztrejtvényben nem lehet több szó, mint $\frac{(n+1)^2}{2}$.

Javasolta: *Nikolai Beluhov* (Bulgária)

Beküldési határidő: 2023. december 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

Informatikából kitűzött feladatok

I. 603. A pozitív egész számok közötti szimpátia mértékét a számok egyes részei közötti oszthatósági kapcsolatok alapján vizsgálják. Két egyjegyű szám esetében a szimpátia mértéke azon múlik, hogy a számjegyek osztói-e egymásnak. Például a 4 és 7 esetén a szimpátia mértéke nulla, míg 4 és 8 esetén a szimpátia mértéke 1, de 5 és 5 esetén a szimpátia mértéke 2. Ha a számok többjegyűek, akkor figyelembe veszik az egyik szám számjegyeinek a szám kétjegyű, háromjegyű stb. részeivel vett oszthatóságát. Például a 6 és 349 esetén a szimpátia mértéke 1, mivel a 3 osztója a 6-nak, de más oszthatósági kapcsolat nincs. De példaként a 36 és 120 esetében a szimpátia mértékét a következő módon kapjuk:

- a 3 és a 6 osztója a 0-nak, az 1 osztója a 3-nak és a 6-nak, a 2 osztója a 6-nak, tehát a szimpátia mértéke az egyjegyű részeknél 5;
- a 3 és a 6 is osztója a 12-nek, de nem osztója 20-nak, ezért a szimpátia mértéke 2-vel nő;
- az 1 és a 2 osztója a 36-nak, a 0 nem, ezért a szimpátia mértéke ismét 2-vel nő;
- a 3 és a 6 is osztója a 120-nak, ezért a szimpátia mértéke ismét 2-vel nő.

Így a két szám szimpátiájának mértéke $5+2+2+2=11$.

Ha egy többjegyű számrész 0-kal kezdődik, akkor nem tekintjük valódi számrésznek, tehát a 102 és 2 számok esetén a szimpátia mértéke 6, mivel a 02-t nem tekintjük kétjegyű résznek.

Készítsünk programot `i603` néven, amely a megadja a bemeneten kapott két pozitív egész szám szimpátiájának mértékét.

Példák:

Bemenet	**Kimenet**
`11 1`	`5`
`1212 24`	`22`
`10 10`	`8`
`100 10`	`12`

Beküldendő egy tömörített `i603.zip` állományban a program forráskódja és rövid dokumentációja, amely megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben fordítható.

I. 604. Egy N sorból és M oszlopból álló karaktertömbben határozzuk meg azt a $H \times H$ karakterszámú négyzetet, amelyben a legtöbb olyan betű van, amely minden oldalszomszédjánál előbbre van az ábécében. A tömb elemei kizárólag az angol ábécé kisbetűi.

Készítsünk programot `i604` néven, amely a megadja a $H \times H$ karakterszámú négyzet bal felső sarkának sor és oszlop indexét.

A program standard bemenetének első sorában a karaktertömb N sorának és M oszlopának száma ($1 \leqslant N, M \leqslant 100$) és H a keresett négyzet oldalhossza ($1 \leqslant H \leqslant \min(N, M)$) található. Az ezt követő N sorban soronként M karakter következik.

A program a standard kimenetre írja ki a $H \times H$ karakterszámú négyzet bal felső sarkának koordinátáit. Ha több megoldás lenne, akkor a legkisebb sor-, azon belül oszlopindexű négyzetet adjuk meg.

Példa a bemenetre:	**Kimenet:**
`6 5 3`	`3 2`
`e e e d e`	
`e f e b e`	
`c b c d e`	
`e e b d b`	
`e a e a e`	
`f e d c f`	

Beküldendő egy tömörített `i604.zip` állományban a program forráskódja és rövid dokumentációja, amely megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben fordítható.

I. 605. Adott egy 500 mm oldalhosszú négyzet alakú terület 1000 mm magas kerettel körülvéve. A területen létrehoztak egy felszínt, amelyik sehol nem haladja meg a keret magasságát. A terület rácspontjaiban pici csapágygolyót tehetünk a felületre és vizsgálhatjuk, hogy mi történik vele. Lehet, hogy nem mozdul, de az is lehet, hogy a kiindulási helyéről legurul.

A golyó akkor marad egy rácspontban, ha a helyét körülvevő nyolc rácspont egyikében sem kisebb a felszín magassága az aktuálisnál. A golyó akkor gurul át valamelyik szomszéd rácspontba, ha ott a felszín magassága kisebb, mint az eredeti pontban. Ha több irányba is gurulhatna, akkor a legnagyobb meredekségű irányt választja, vagyis azt a szomszéd mezőt, ahol a legkisebb magasságérték van. Ha több ilyen magasságú szomszéd van, akkor a *táblázat* szerint a legkisebb sorszámú szomszéd irányt választja.

1	2	3
4	●	5
6	7	8

Készítsük el a golyó mozgását szimuláló táblázatkezelő munkafüzetet.

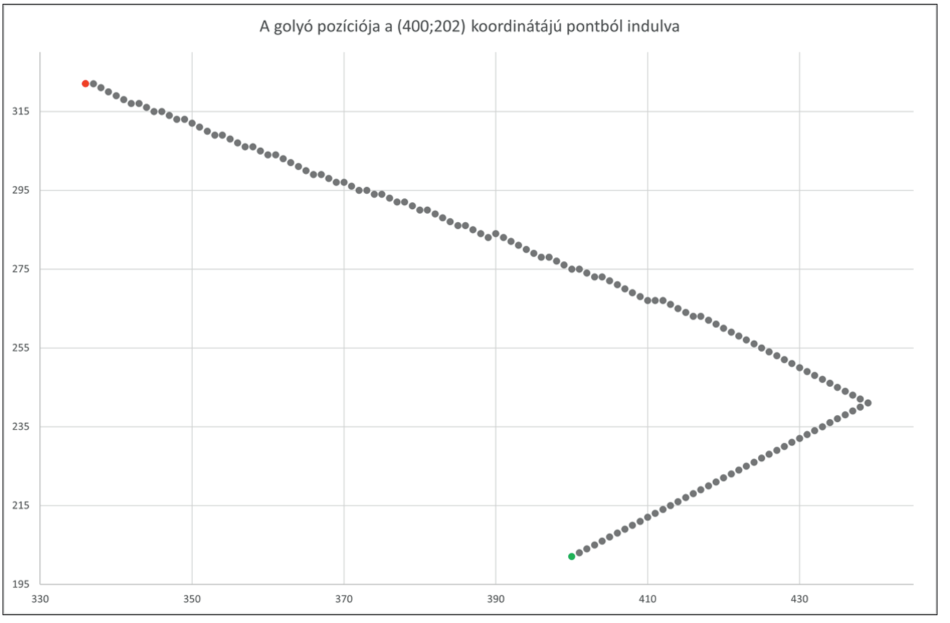
1. Nyissunk meg egy üres munkafüzetet és mentsük `golyo` néven a program alapértelmezett formátumában. Legyen a munkalap neve **Terep**.
2. Illesszük be a munkalapra a B2 cellától kezdődően a tabulátorokkal tagolt, UTF-8 kódolású `terep.txt` fájl tartalmát.
3. Gépeljük be az A1 cellába a mintán látható szöveget, a minta szerint illesszük be a sorszámokat 1-től 502-ig az első sor és oszlop megfelelő celláiba, majd formázzuk meg ezeket a *minta* szerint.

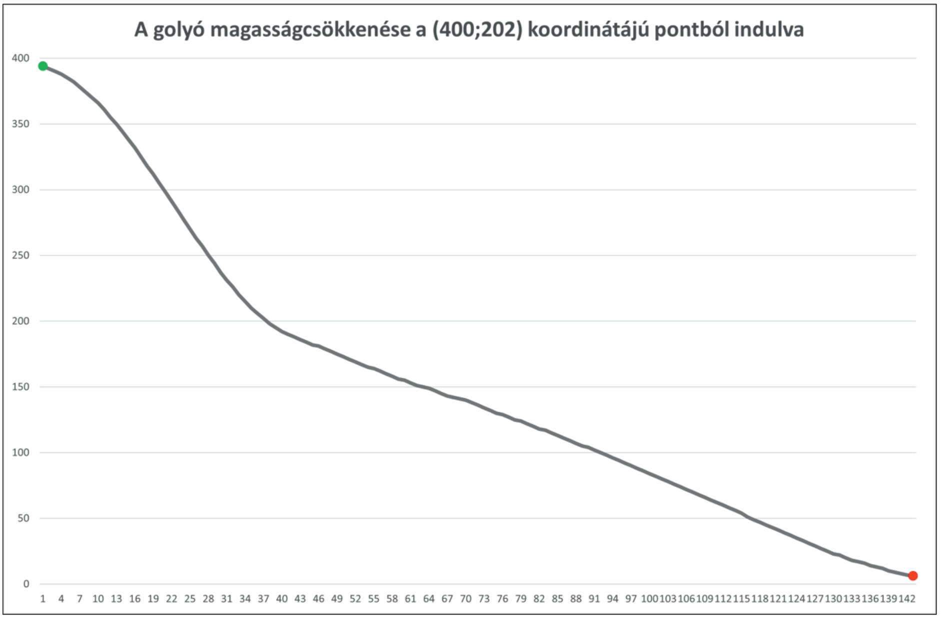
	A	B	C	D	E	F	G
1	y↓ x→	1	2	3	4	5	6
2	1	1000	1000	1000	1000	1000	1000
3	2	1000	280	280	280	280	280
4	3	1000	280	280	280	280	280
5	4	1000	280	280	280	280	280
6	5	1000	280	280	280	280	280
7	6	1000	280	280	280	280	280

4. Hozzuk létre a munkafüzetben a **Mozgás** nevű munkalapot, majd végezzük el a következőket:
   a. Gépeljük be és formázzuk meg a minta szerint az első két sor celláit.
   b. Állítsuk be, hogy a C1 és az E1 cellába csak 2 és 501 közötti egész számokat lehessen begépelni, ha más adatot próbálunk meg ezekbe a cellákba írni, hibaüzenet figyelmeztessen.
   c. Az A3 cellától kezdődően jelenjen meg a sorszám 0-tól indítva, mellettük a B, C és D oszlopban jelenjen meg a golyó aktuális helyzete (x, y) és a terep magassága (h) ebben a rácspontban.
   d. A következő sorban jelenjenek meg annak a szomszédos pontnak az adatai, ahová a golyó átgurul, ha van ilyen, és maradjanak üresek a cellák, ha a golyó megáll.
   e. Készítsük fel a táblát 1000 lépés vizsgálatára, de adatok csak addig a sorig jelenjenek meg, amíg a golyó mozog.

	A	B	C	D	E
1	Kezdőpont	x	100	y	100
2	lépés	x	y	h	
3	0	100	100	627	
4	1	99	99	617	
5	2	98	98	608	
6	3	97	97	599	
7	4	96	96	590	
8	5	95	95	581	
9	6	94	94	572	
10	7	93	93	563	
11	8	92	92	555	

5. Készítsük el a terep (400; 202) pontjára kerülő golyó útjáról a *mintákon* látható ponttípusú diagramot és grafikont.





a. A diagramok kerüljenek a **Pozíció** és **Magasság** nevű, új munkalapokra.

b. Formázzuk a diagramokat a minták szerint. A kezdőpont és a végpont jelölése mindkettőn legyen zöld, illetve piros.

Segédszámításokat a **Mozgás** munkalap E oszlopától jobbra végezhetünk. A megoldásban saját függvény vagy makró nem használható.

Beküldendő egy tömörített `i605.zip` állományban a táblázatkezelő munkafüzet (`golyo.xlsx`, `golyo.ods`, ...), illetve egy rövid dokumentáció (`golyo.txt`, `golyo.pdf`, ...), amelyben szerepel a megoldáskor alkalmazott táblázatkezelő neve, verziószáma.

A megoldáshoz szükséges letölthető állomány: `terep.txt`.

I. 606. A színházi közönségszervezők a színházak jegyeladásával és a nézők előadásjegy-igényeinek párosításával foglalkoznak. Érdemes nekik a színházi előadásokat hirdetniük. A nagyforgalmú árusítási és hirdetési rendszerüket adatbázis használatával segítik.

A feladatunk a szervező munkáját segítő hirdetési (marketing) adatbázis létrehozása és a működés kipróbálásához fiktív adatokkal való feltöltése. A `szervezo.sql` állományt hozzuk létre, amely tartalmazza az adatbázist és a táblát létrehozó, valamint az adatokat a táblába beszúró SQL parancsokat. Ha az elkészült `szervezo.sql` parancsfájlt futtatjuk a lokális SQL szerveren, akkor az az adatbázist, a táblákat és az adatfelvitelt elvégzi és készen áll a lekérdezések futtatására.

A feladat megoldásához a digitális kultúra emelt szintű érettségin használható XAMPP használatát javasoljuk.

1. Készítsünk új adatbázist `szervezo` néven.
2. A táblák kialakításához vegyük figyelembe az alábbi táblaleírásokat és kapcsolatokat:

Tábla:

szemely (id, nev, email, fizetesimod)

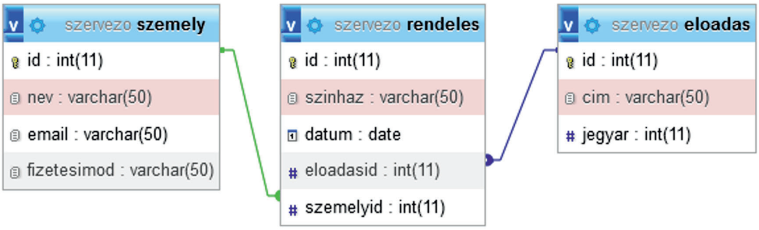
id	A rendelést leadó személy azonosítója (szám), ez a kulcs.
nev	A megrendelő neve (szöveg).
email	A megrendelő emailcíme (szöveg) – nem minden esetben van megadva.
fizetesimod	A megrendelő által rendszeresen választott fizetési mód (szöveg), értéke például bankkártya, átutalás, készpénz.

rendeles (id, szinhaz, datum, eloadasid, szemelyid)

id	A rendelés azonosítója (szám), ez a kulcs.
szinhaz	A színház neve (szöveg).
datum	A rendelés időpontja (dátum).
eloadasid	Az előadás azonosítója (szám).
szemelyid	A rendelést leadó személy azonosítója (szám).

eloadas (id, nev, jegyar)

id	Az előadás azonosítója (szám), ez a kulcs.
cim	Az előadás címe (szöveg).
jegyar	Az előadás jegyára (egész).



Az adatbázis tartalmazza a táblák elsődleges kulcs és az idegen kulcsok beállítását, hogy azok helyes kapcsolatot mutassanak.

3. A táblákban helyezzünk el adatokat tetszőleges forrásból. Személy- és színházneveket például az interneten találunk, a többi adatot pedig generálhatjuk. A rekordok száma minimum 50 legyen a szemely, 25 az eloadas és 100 a rendeles táblában.
4. Az adatbázist a táblákkal és az adatokkal együtt elkészítő parancsokat mentsük a `szervezo.sql` parancsfájlba.

A következő feladatokat megoldó SQL parancsokat rögzítsük a `lekerdezesek.sql` nevű állományban a feladatok végén zárójelben megadott névvel. Ügyeljünk arra, hogy a lekérdezésekben pontosan a kívánt mezők szerepeljenek, felesleges mezőt ne jelenítsünk meg.

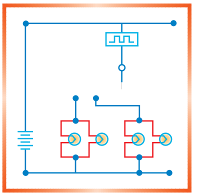
5. Készítsünk lekérdezést, amely személyenként ábécérendben felsorolja, hogy hány színházi előadás hirdetését érdemes emailben elküldeni a megrendelőnek. A listában a személy neve, emailcíme és az előadások száma jelenjen meg. (`5Mennyiseg`)
6. Adjuk meg lekérdezés segítségével, hogy melyik színház melyik előadását játsszák kettőnél többször az adatbázis adatai szerint. (`6Sokszor`)
7. Írassuk ki lekérdezés segítségével, hogy kik rendeltek jegyet a legdrágább jegyárú előadásokra. A listában minden név egyszer jelenjen meg névsorban. (`7Evek`)
8. Adjuk meg lekérdezés segítségével azoknak a nevét, akik legalább 3 különböző színház előadásaira rendeltek jegyet. (`8torzsvevo`)

Beküldendő egy tömörített `i606.zip` állományban a `szervezo.sql` parancsfájl és a `lekerdezesek.sql` nevű szöveges állomány.

❄

A feladatok megoldásai regisztráció után a következő címen tölthetők fel:
`https://www.komal.hu/munkafuzet`
Beküldési határidő: 2023. december 15.

❄



Fizika gyakorlatok megoldása

G. 818. *Egy nyitott vasúti kocsi vízszintes, egyenes pályán halad v sebességgel. A sínpár közvetlen közelében lévő ágyúval $2v$ sebességű lövedéket lövünk ki éppen akkor, amikor a vasúti kocsi vége az ágyú mellett halad el. A vízszinteshez képest milyen szögben lője ki az ágyú a lövedékét, hogy az a vasúti kocsi végére essen? A kilövés után mennyi idővel esik vissza a lövedék? (A légellenállástól tekintsünk el.)*

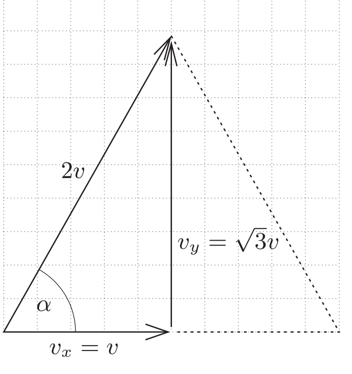
(4 pont)

Megoldás. A lövedék sebességének nagysága a kilövés pillanatában $2v$, vízszintes komponense v_x, a függőleges komponense pedig közvetlenül az ágyú elsütése után legyen v_y.

A feladat szövege szerint a légellenállástól eltekinthetünk, ezért a lövedék vízszintes irányú sebessége állandó, és a vonat sebességével egyezik meg, vagyis $v_x = v$.

Írjuk fel a lövedék kezdősebességére és annak vízszintes és függőleges komponensére a Pitagorasz-tételt:

$$v_x^2 + v_y^2 = (2v)^2, \quad \text{vagyis} \quad v_y = \sqrt{3}v.$$



A kilövési sebesség és annak komponensei egy félszabályos háromszög (azaz egy szabályos háromszög felének) oldalaiként adható meg (lásd az *ábrát*).

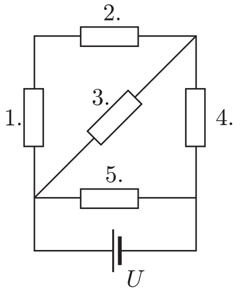
Ennek megfelelően a kilövésnek a vízszintestől mért szöge $\alpha = 60°$.

A kilövés után a lövedékre a nehézségi erő hat, emiatt függőlegesen lefelé mutató g gyorsulással mozog. A függőleges sebességkomponense egyenletesen változva $t/2$ idő alatt v_y-ról nullára csökken, majd további $t/2$ idő múlva, amikor a lövedék visszaesik a talajra, a függőleges irányú sebesség $-v_y$ lesz. A lövedék mozgásának teljes ideje

$$t = 2\frac{v_y}{g} = 2\sqrt{3}\frac{v}{g}.$$

Blaskovics Ádám (Budapest, Csillaghegyi Ált. Isk., 8. évf.)

27 dolgozat érkezett. Helyes 14 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 2, hiányos (1–2 pont) 4, hibás 6, nem versenyszerű 1 dolgozat.



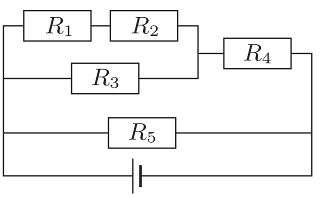
G. 820. *Az* ábrán *látható áramkör mindegyik ellenállása* 6 kΩ*-os, a telep feszültsége* $U = 60$ V*. Hányszor több hő fejlődik a legjobban melegedő ellenálláson, mint a legkevésbé melegedőn?*

(4 pont)

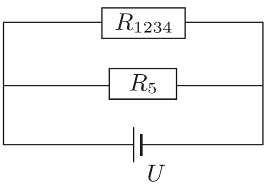
Megoldás. Első lépésként átrajzoljuk a feladatban szereplő áramkört egy jobban áttekinthető változatra (*1. ábra*). Tudjuk, hogy

$$R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 \equiv R = 6\ \text{k}\Omega, \qquad \text{továbbá} \qquad U = 60\ \text{V}.$$

Ezen a kapcsolási rajzon már jól látszik, hogy R_1 és R_2 sorosan, az eredőjük (továbbiakban R_{12}) az R_3-mal párhuzamosan, ezek eredője (R_{123}) az R_4 ellenállással szintén sorosan, és végül az első négy ellenállás eredője (R_{1234}) az R_5 ellenállással ismét párhuzamosan van kötve.



1. ábra



2. ábra

Az egyes ellenállásokon egységnyi idő alatt fejlődő hő (vagyis a hőteljesítmény)

$$P_i = \frac{U_i^2}{R},$$

ahol U_i az i-edik ellenállásra jutó feszültség. A megoldáshoz (az egyes ellenállások hőteljesítményének arányához) tehát elég lesz csak az ellenállásokra jutó feszültségeket kiszámolni. Ahhoz, hogy meg tudjuk határozni az egyes feszültségeket, egy egyszerűbb kapcsolástól indulunk el (*2. ábra*), majd pedig onnan „bontjuk” tovább az áramkört.

A párhuzamosan kapcsolt R_{1234} és R_5 ellenállásokra jutó U_5 feszültség megegyezik a teljes $U = 60$ V feszültséggel. A következő lépésben meghatározzuk az 1., 2. és 3. ellenállás eredőjét:

$$\frac{1}{R_{123}} = \frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{R_1 + R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{12\ \text{k}\Omega} + \frac{1}{6\ \text{k}\Omega} = \frac{3}{12\ \text{k}\Omega},$$

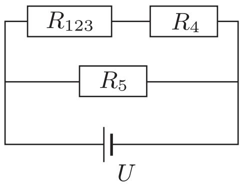
vagyis

$$R_{123} = 4\ \text{k}\Omega.$$

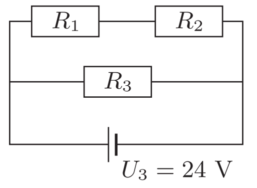
A *3. ábra* felső ágában a 60 voltos feszültség az ellenállások nagyságával arányosan, vagyis 4 : 6 arányban oszlik meg. Így tehát

$$U_4 = 36\ \mathrm{V} \qquad \text{és} \qquad U_{123} = U_{12} = U_1 + U_2 = U_3 = 24\ \mathrm{V}$$

lesz. Mivel $R_1 = R_2$ és $U_1 + U_2 = 24$ V (*4. ábra*), nyilván $U_1 = U_2 = 12$ V.



3. ábra



4. ábra

Összefoglalva az egyes ellenállások feszültsége:

$$U_1 = U_2 = 12\ \mathrm{V}, \quad U_3 = 24\ \mathrm{V}, \quad U_4 = 36\ \mathrm{V}, \quad U_5 = 60\ \mathrm{V},$$

és a megfelelő $P_i = U_i^2/R$ teljesítmények:

$$P_1 = P_2 = 24\ \mathrm{mW}, \quad P_3 = 96\ \mathrm{mW}, \quad P_4 = 216\ \mathrm{mW} \quad \text{és} \quad P_5 = 600\ \mathrm{mW}.$$

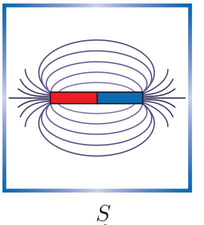
Látjuk, hogy az 5. ellenállás melegszik a legjobban, az 1. és 2. pedig a legkevésbé, és a hőteljesítmények aránya:

$$\frac{P_5}{P_1} = \frac{P_5}{P_2} = 25.$$

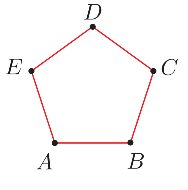
Sós Ádám (Sopron, Berzsenyi D. Ev. Gimn., 10. évf.)

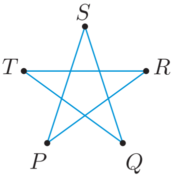
23 dolgozat érkezett. Helyes 15 megoldás. Hiányos (1–2 pont) 1, hibás 5, nem versenyszerű 2 dolgozat.

Fizika feladatok megoldása



P. 5485. *Egy szabályos ötszög csúcsait az oldalak mentén az ábrán látható módon egyforma ellenálláshuzalokkal összekötjük. Egy másik szabályos ötszögbe az átlók mentén helyezünk el ellenálláshuzalokat, így azok egy ötágú csillagot képeznek. (Az ellenálláshuzalok szigeteltek és csak az ötszög csúcsaiban érintkeznek.)*





Az ötszögek szomszédos csúcsai között mérhető eredő ellenállás (R_{AB}, illetve R_{PQ}) a két kapcsolásban ugyanakkora. Melyik kapcsolásban és hányszor nagyobb az átlók végpontjai között mérhető eredő (R_{AC}, illetve R_{PR}) ellenállás?

(*4 pont*) Közli: *Bertalan Zoltán,* Békéscsaba

Megoldás. Az ellenálláshuzalok ellenállásának nagyságát az ötszögben jelöljük R-rel, a csillagban: R'-vel. Az eredőkre felírható:

$$\frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{4R} + \frac{1}{R}, \qquad \text{illetve} \qquad \frac{1}{R_{PQ}} = \frac{1}{3R'} + \frac{1}{2R'}.$$

vagyis

$$R_{AB} = \frac{4R^2}{5R} = \frac{4}{5}R \qquad \text{és} \qquad R_{PQ} = \frac{6R'^2}{5R'} = \frac{6}{5}R'.$$

Mivel $R_{AB} = R_{PQ}$, megállapíthatjuk, hogy

$$\frac{4}{5}R = \frac{6}{5}R', \qquad \text{vagyis} \qquad \frac{R}{R'} = \frac{3}{2}.$$

Az átlók végpontjai között mérhető ellenállásokra érvényes

$$\frac{1}{R_{AC}} = \frac{1}{2R} + \frac{1}{3R}, \qquad \text{vagyis} \qquad R_{AC} = \frac{6}{5}R,$$

továbbá

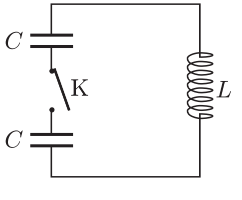
$$\frac{1}{R_{PR}} = \frac{1}{R'} + \frac{1}{4R'}, \qquad \text{tehát} \qquad R_{PQ} = \frac{4}{5}R'.$$

Ennek megfelelően a keresett arány:

$$\frac{R_{AC}}{R_{PQ}} = \frac{\frac{6}{5}R}{\frac{4}{5}R'} = \frac{3}{2}\,\frac{R}{R'} = \frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2} = \frac{9}{4}.$$

Éger Viktória (Budapest, ELTE Apáczai Csere J. Gyak. Gimn., 11. évf.)

42 dolgozat érkezett. Helyes 27 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 7, hiányos (1–2 pont) 4, hibás 3, nem versenyszerű 1 dolgozat.



P. 5486. *Az ábrán látható áramkör alkotóelemei ideálisak. Kezdetben az egyik kondenzátor töltése q_0, a másik kondenzátor töltetlen.*

a) Mekkora az áramerősség maximuma a K *kapcsoló zárását követően?*

b) A kapcsoló zárása után mennyi idővel éri el először a maximumát az áramerősség?

(*5 pont*) Közli: *Kovács Zoltán,* Kolozsvár

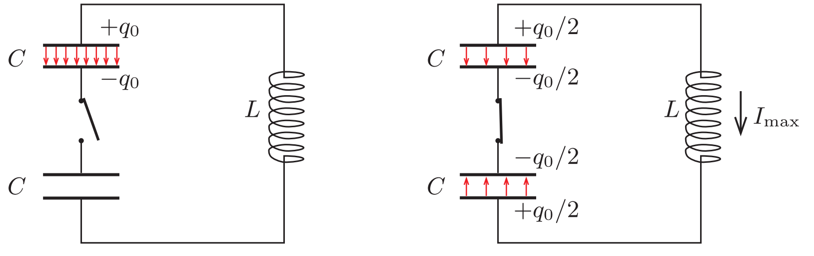
Megoldás. *a*) A kapcsoló zárását követően a kezdetben töltött kondenzátor elkezd kisülni, a másik kondenzátor pedig kezd feltöltődni, miközben fokozatosan felépül a tekercs mágneses tere.

A tekercs feszültsége az indukciótörvény szerint

$$U(t) = L\frac{\Delta I}{\Delta t}. \tag{1}$$

Amikor az áramerősség eléri a maximumát, akkor a tekercsben indukált feszültség (1) szerint nulla lesz.

Ebben a pillanatban a kondenzátorok feszültsége azonos nagyságú, tehát a kondenzátorok töltésének nagysága is megegyezik, mindkettő $\pm q_0/2$ lesz (lásd az *ábrát*).



A kiindulási és a maximális áramerősség helyzetre írjuk fel az energiamegmaradás törvényét:

$$\frac{q_0^2}{2C} = \frac{(q_0/2)^2}{2C} + \frac{(q_0/2)^2}{2C} + \frac{1}{2}LI_{\max}^2,$$

ahonnan

$$I_{\max} = \frac{q_0}{\sqrt{2LC}}.$$

b) A két kondenzátor (amelyek sorba vannak kapcsolva, így az eredő kapacitásuk $C' = C/2$), valamint az L induktivitású tekercs rezgőkört alkot. A rezgőkör periódusidejét a Thomson-képlet adja meg:

$$T = 2\pi\sqrt{LC'} = 2\pi\sqrt{L\frac{C}{2}}.$$

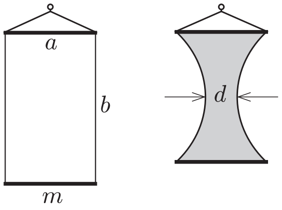
Az áramerősség maximuma a periódusidő negyede, vagyis

$$t = \frac{T}{4} = \pi\sqrt{\frac{LC}{8}}$$

idő alatt alakul ki.

Klement Tamás (Pécs, Leőwey Klára Gimn., 10. évf.)
dolgozata alapján

7 dolgozat érkezett. Helyes Bencz Benedek, Halász Henrik, Klement Tamás, Papp Marcell Imre és Szabó Zsombor megoldása. Kicsit hiányos (2–3 pont) 2 dolgozat.



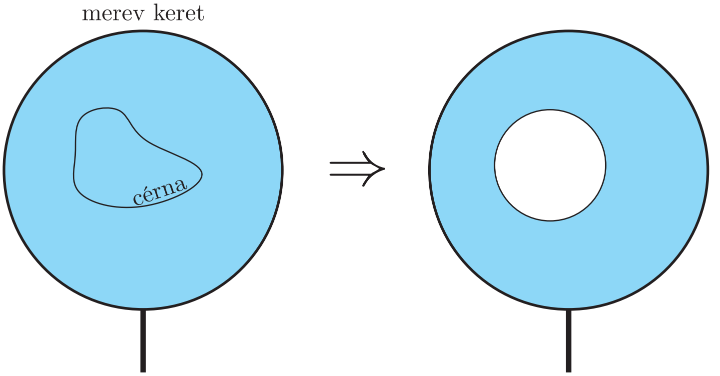
P. 5489. *Egy olyan téglalap alakú keretet készítettünk, amelynek a hosszúságú vízszintes oldalai merev, egyenes, m tömegű drótszálak, b hosszúságú függőleges oldalai pedig vékony, elhanyagolható tömegű cérnaszálak.*

A keretet az egyik drótszálnál fogva mosogatószeres oldatba mártottuk, majd kiemeltük. A kialakuló hártya mérete a közepénél d értékre csökkent. Mekkora a folyadék felületi feszültsége?

Adatok: $a=5$ cm, $b=8$ cm, $d=3{,}6$ cm, $m=2{,}6$ g.

(*6 pont*) *Varga István* (1952–2007) feladata

Megoldás. Először belátjuk, hogy a cérnaszálak körív alakúak lesznek. Ehhez képzeljünk el a síkban egy merev keretet és benne egy zárt cérnahurkot (*1. ábra*). A kéken jelölt részen mosószeres oldatból készített vékony hártyát hozunk létre. (Ezt úgy tehetjük meg, hogy a merev keretet cérnaszál nélkül a mosószeres oldatba merítjük, majd kiemeljük onnan, utána a kialakult hártyára óvatosan ráhelyezzük a cérnahurkot, majd a hurok belsejében lévő hártyát „kipukkasztjuk”.) A hártya felületi feszültsége széthúzza a cérnahurkot, amelynek alakja a szimmetria miatt kör lesz. A cérna egyensúlyi alakja nem függ a hártya távolabbi részeitől, tehát a feladatban szereplő elrendezésben is kör (pontosabban a körnek b hosszúságú darabja, vagyis körív) lesz.



1. ábra

Jelöljük a folyadék felületi feszültségét (vagyis a felület határgörbéjének egységnyi hosszúságú darabjára ható erőt) α-val. A hártya határának kicsiny (jó közelítéssel egyenesnek tekinthető) $\Delta\ell$ hosszúságú szakaszára

$$F=2\alpha\Delta\ell \tag{1}$$

nagyságú erőt fejt ki a folyadék. (A 2-es szorzó azt veszi figyelembe, hogy a hártyának két oldala van.) Ezzel az erővel a cérnaszálban kialakuló, K nagyságú húzóerők eredője tart egyensúlyt (*2. ábra*).

Ha a kicsiny körív nyílásszöge 2φ ($\varphi \ll 1$), görbületi sugara pedig R, akkor a cérnadarab hossza

$$\Delta\ell = 2\varphi \cdot R. \tag{2}$$

A cérnaszál végeinél ható erők eredője $2K \sin\varphi \approx 2K\varphi$. A mechanikai egyensúly feltétele:

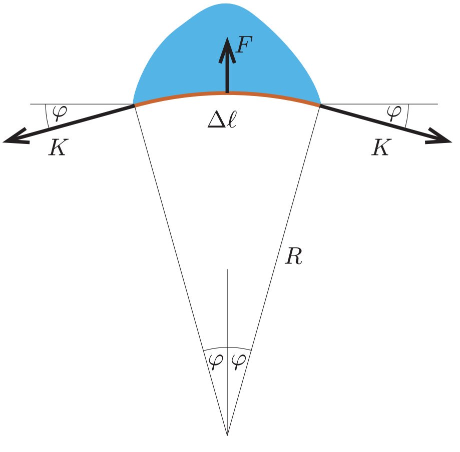
$$2K\varphi = F,$$

ami (1) és (2) felhasználásával így írható:

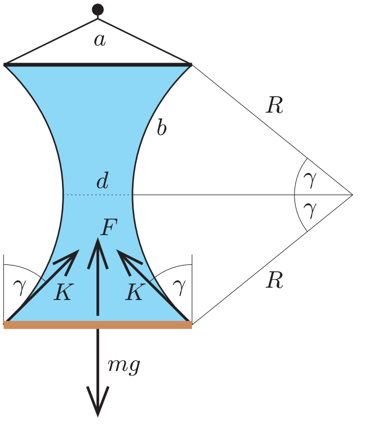
$$2\alpha \cdot 2\varphi R = 2K\varphi,$$

vagyis

$$K = 2\alpha R. \tag{3}$$



2. ábra



3. ábra

Vizsgáljuk meg most a *3. ábrán* látható helyzetben az alsó drótszál egyensúlyának feltételét. A drótszál mg súlyát a hozzá közvetlenül csatlakozó hártya felületi feszültségéből származó erő és a drótszál végeinél ható fonálerők függőleges komponenseinek eredője egyensúlyozza ki:

$$mg = F + 2K\cos\gamma, \tag{4}$$

ahol γ a cérnaszálak érintőjének a függőlegessel bezárt szöge a szálak alsó végeinél. A körív alakú cérnaszálak hossza az eredeti b hosszúsággal egyezik meg, tehát

$$b = 2R\gamma. \tag{5}$$

A megadott geometriai feltétel szerint

$$\frac{a}{2} = \frac{d}{2} + R(1 - \cos\gamma),$$

vagyis (5) felhasználásával

$$\frac{a-d}{2}=R\left(1-\cos\frac{b}{2R}\right).$$

A távolságokat cm egységekben mérve a fenti egyenlet:

$$0{,}7=R\left(1-\cos\frac{4}{R}\right),$$

aminek numerikus megoldása:

$$R\approx 11{,}3\ \mathrm{cm}.$$

Felhasználva az (1), (3) és (4) összefüggéseket megkapjuk a keresett felületi feszültséget:

$$\alpha=\frac{mg}{2a+4R\cos\left(b/2R\right)}\approx 0{,}05\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}.$$

Bencz Benedek (Budapest, Baár-Madas Ref. Gimn., 10. évf.)

5 dolgozat érkezett. Helyes Bencz Benedek megoldása. Hiányos (1–3 pont) 4 dolgozat.

P. 5491. *Egy adott térbeli ponttól induló, különböző hajlásszögű lejtőkön egy kezdősebesség nélkül induló, kicsiny test csúszhat le. Hol helyezkednek el térben a lejtők azon pontjai, amelyeknél a súrlódási hő értékei megegyeznek?*

(*4 pont*) Közli: *Gnädig Péter,* Vácduka

Megoldás. A súrlódási hő az F_s csúszási súrlódási erő ℓ úton végzett munkájával egyezik meg. Legyen az adott P pontból induló lejtő hajlásszöge α, a kis test tömege m és a csúszási súrlódási együttható μ. Ekkor

$$F_\mathrm{s}=\mu mg\cos\alpha,$$

vagyis a P ponttól az *1. ábrán* látható T pontig fejlődő hő:

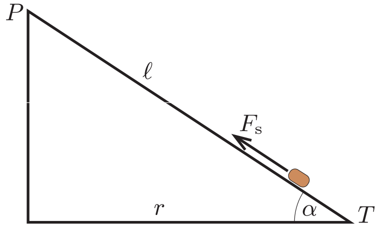
$$Q=F_\mathrm{s}\,s=\mu mg\ell\cos\alpha.$$

Vegyük észre, hogy $\ell\cos\alpha$ éppen T-nek a P-n átmenő függőleges egyenestől mért r távolságával egyezik meg, és így

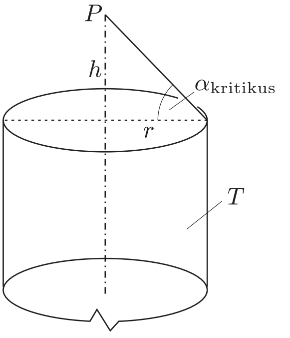
$$Q=\mu mgr,\qquad \text{azaz}\qquad r=\frac{Q}{\mu mg}=\text{állandó}.$$

A keresett T pontok tehát egy r sugarú henger palástjára illeszkednek; a henger sugara a P ponton átmenő függőleges egyenes. A kis test azonban nem juthat el a hengerpalást tetszőleges pontjába, hiszen ha

$$\alpha\leqslant\alpha_\mathrm{kritikus}=\mathrm{arctg}\,\mu,$$



1. ábra



2. ábra

akkor el sem indul a lejtőn. A kérdéses pontok tehát azok, amelyek a P pont alatt legalább

$$h = r\,\mathrm{tg}\,\alpha_{\text{kritikus}} = r\mu = \frac{Q}{mg}$$

mélyen helyezkednek el (lásd a *2. ábrát*).

Kis Márton Tamás (Hódmezővásárhely, Bethlen G. Ref. Gimn., 10. évf.)

32 dolgozat érkezett. Helyes 7 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 15, hiányos (1–2 pont) 8, hibás 1, nem versenyszerű 1 dolgozat.

P. 5493. *A James Webb űrtávcső az úgynevezett* L_2 *Lagrange-pont közelében, a Földdel szinkronban járja körül a Napot. Ez a pont a Nap-Föld egyenesen, a Földtől nagyjából másfél millió kilométerre helyezkedik el a Földnek a Nappal ellentétes oldalán, és arról nevezetes (a többi Lagrange-ponttal együtt), hogy az oda helyezett testek „többé-kevésbé" a Földdel együtt mozogva „helyben maradnak". Egyszerűsített számolással mutassuk meg, hogy valóban ilyen messze van a Földtől az* L_2 *Lagrange-pont!*

(*4 pont*) Közli: *Honyek Gyula,* Veresegyház

Megoldás. A Nap-Föld távolság $D = 1{,}5\cdot 10^{11}$ m, a teleszkóp távolsága a Földtől legyen d. Szeretnénk belátni, hogy

$$d = 1{,}5\cdot 10^{9}\ \mathrm{m} \approx \frac{1}{100}D.$$

Mivel a Nap M tömege jelentősen (táblázati adatok szerint mintegy 1/3 milliószor) nagyobb, mint a Föld m tömege, ezért úgy tekintjük, hogy a Nap van a Föld, illetve a teleszkóp keringésének középpontjában.

A Föld centripetális gyorsulása a Nap hatására

$$a_1 = \gamma\frac{M}{D^2},$$

a teleszkóp centripetális gyorsulása pedig a Nap és a Föld együttes hatására

$$a_2 = \gamma \left(\frac{M}{(D+d)^2} + \frac{m}{d^2} \right).$$

Mivel a Föld D sugarú pályán mozog a Nap körül ω szögsebességgel, fennáll

$$a_1 = D\,\omega^2.$$

Az űrtávcső ugyanekkora szögsebességgel, de $D+d$ sugarú pályán mozog, tehát

$$a_2 = (D+d)\,\omega^2.$$

A fenti egyenletek összevetéséből kapjuk, hogy

$$\frac{M}{D^3} = \frac{M}{(D+d)^3} + \frac{m}{d^2(D+d)},$$

amit kicsit átrendezve

$$\frac{(D+d)^3}{D^3} = 1 + \frac{m}{M}\frac{(D+d)^2}{d^2},$$

azaz

$$1 + \frac{3d}{D} + \frac{3d^2}{D^2} + \frac{d^3}{D^3} = 1 + \frac{m}{M}\left(\frac{D^2}{d^2} + \frac{2D}{d} + 1\right) \tag{1}$$

adódik.

Mivel $m \ll M$, a Föld gravitációs hatása kicsi a Nap mellett, emiatt $D+d \approx \approx D$, vagyis $d \ll D$. A $d/D \ll 1$ mennyiség négyzetét és köbét (1) bal oldalán elhanyagolhatjuk d/D mellett. Hasonló megfontolással (1) jobb oldalán $D/d \gg 1$ miatt D/d és a zárójelben szereplő 1-es elhanyagolható $(D/d)^2$ mellett. Ezekkel a közelítésekkel (1) így írható:

$$\frac{3d}{D} = \frac{m}{M}\frac{D^2}{d^2},$$

vagyis

$$d^3 = \frac{mD^3}{3M},$$

tehát

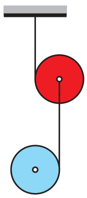
$$d = \sqrt[3]{\frac{m}{3M}} \cdot D = \frac{1}{100}D = 1{,}5 \cdot 10^9 \text{ m}.$$

Ez éppen a megadott érték, tehát az állítást bebizonyítottuk.

Csilling Dániel (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.)

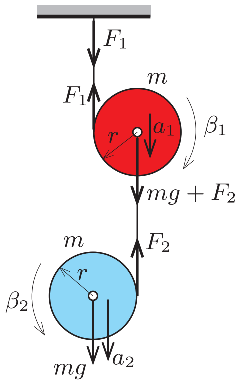
38 dolgozat érkezett. Helyes 14 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 15, hiányos (1–2 pont) 6, hibás 1, nem versenyszerű 2 dolgozat.

P. 5494. *Az ábrán látható „kettős jojó" két egyforma, homogén tömegeloszlású korongból és a rájuk tekert fonalakból áll.*



A két testet a fonalak függőleges helyzetéből kezdősebesség nélkül indítjuk el. Mennyi idő alatt tekeredik le az alsó korongról a rajta lévő 80 cm *hosszúságú fonál?*

(*5 pont*) Példatári feladat nyomán



Megoldás. Jelöljük a felső fonalat feszítő erőt F_1-gyel, az alsó fonálban ható erőt F_2-vel, a korongok tömegközéppontjának gyorsulását a_1-gyel és a_2-vel, a szöggyorsulásukat pedig β_1-gyel és β_2-vel (lásd az *ábrát*). Felhasználjuk még, hogy az m tömegű és r sugarú, homogén tömegeloszlású korongok tehetetlenségi nyomatéka $\Theta=\frac{1}{2}mr^2$.

A korongok transzlációs mozgásának egyenletei:

$$mg+F_2-F_1=ma_1 \tag{1}$$

és

$$mg-F_2=ma_2. \tag{2}$$

Felírhatjuk még a forgómozgás alapegyenletét is mindkét korongra:

$$F_1r=\Theta\beta_1,\quad \text{vagyis}\qquad F_1=\frac{1}{2}m\cdot r\beta_1, \tag{3}$$

valamint

$$F_2r=\Theta\beta_2,\quad \text{azaz}\qquad F_2=\frac{1}{2}m\cdot r\beta_2. \tag{4}$$

A korongok tömegközéppontjának gyorsulása és a korongok szöggyorsulása nem független egymástól, hiszen a függőleges fonáldarabok hosszának megváltozása megegyezik a letekeredő fonál hosszával. Tetszőleges t idő alatt ezek a hosszúságok a gyorsulásokkal és a szöggyorsulásokkal kifejezve:

$$\frac{1}{2}a_1t^2=\frac{1}{2}(r\beta_1)t^2,$$

illetve

$$\frac{1}{2}a_2t^2-\frac{1}{2}a_1t^2=\frac{1}{2}(r\beta_2)t^2,$$

ahonnan

$$a_1=r\beta_1, \tag{5}$$

illetve

$$(6) \qquad a_2 - a_1 = r\beta_2$$

következik.

A szöggyorsulásokat (5) és (6)-ból kifejezve és (3)-ba és (4)-be helyettesítve kapjuk, hogy

$$F_1 = \frac{1}{2}ma_1, \qquad \text{valamint} \qquad F_2 = \frac{1}{2}m(a_2 - a_1).$$

Ezeket (1) és (2)-be írva a

$$3a_2 = 2g + a_1 \qquad \text{és} \qquad a_1 = \frac{2g + a_2}{4}$$

egyenletrendszert kapjuk, amelynek megoldása

$$a_1 = \frac{8}{11}g; \qquad a_2 = \frac{10}{11}g.$$

Az alsó korongról t idő alatt letekeredő fonál hossza

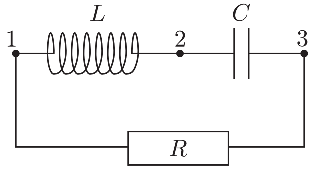
$$s = \frac{1}{2}(r\beta_2)t^2 = \frac{1}{2}(a_2 - a_1)t^2 = \frac{1}{11}gt^2,$$

vagyis a keresett idő

$$t = \sqrt{\frac{11\,s}{g}} = \sqrt{\frac{11 \cdot 0{,}8\ \mathrm{m}}{9{,}81\ \mathrm{m/s}^2}} \approx 0{,}95\ \mathrm{s}.$$

Csiszár András (Szeged, Radnóti M. Kísérleti Gimn., 10. évf.)

13 dolgozat érkezett. Helyes Csiszár András, Fehérvári Donát, Kis Márton Tamás, Tárnok Ede és Vágó Botond megoldása. Kicsit hiányos (3 pont) 3, hiányos (1–2 pont) 5 dolgozat.



P. 5495. *Az ábrának megfelelően egy* $R = 100\ \Omega$*-os ellenállást, egy* $L = 1$ mH *önindukciójú tekercset és egy* $C = 10\ \mu$F *kapacitású kondenzátort kapcsolunk össze. Az* 1, 2, *és* 3*-as pontok közül kettőre* $f = 50$ Hz*-es szinuszos feszültségforrást kapcsolunk. A három eset közül melyiknél fejlődik a legtöbb hő az ellenálláson?*

(*5 pont*) Közli: *Cserti József,* Budapest

Megoldás. A legtöbb hő akkor fejlődik az ellenálláson, amikor legnagyobb a rá eső

$$P = \frac{U_{\mathrm{eff}}^2}{R}$$

elektromos teljesítmény. Tehát azt kell megkeresnünk, mikor a legnagyobb az ellenállás végpontjai közötti feszültség. (Váltóáram miatt természetesen végig effektív feszültségről, illetve effektív áramerősségről beszélünk.)

Megvizsgálva a három kapcsolást rögtön látszik, hogy az $1-3$ kapcsolás esetén az R ellenálláson a feszültségforrás *teljes* feszültsége megjelenik. Ennél kedvezőbb esetet nem tudunk összehozni, tehát részletes számítás nélkül is egyértelmű, hogy a legtöbb hő ekkor fejlődik az R ellenálláson, hiszen ekkor legnagyobb a rá eső feszültség és egyúttal a rajta átfolyó áram erőssége is.

Vizsgáljuk meg azért a három kapcsolás impedanciaviszonyait.

(i) A tekercs induktív ellenállása $X_L = 2\pi f L = 0{,}314\ \Omega$.

(ii) A kondenzátor kapacitív ellenállása $X_C = \frac{1}{2\pi f C} = 318{,}31\ \Omega$.

(iii) Végül pedig az ohmos ellenállás impedanciája önmaga: $R = 100\ \Omega$.

Ezek ismeretében kiszámíthatjuk az ohmos ellenállást tartalmazó ág eredő impedanciáját, abból az ágban folyó áramerősséget és az R ellenállásra jutó feszültséget.

a) Az $1-2$ kapcsolás esetén az $R-C$ ág eredő impedanciája:

$$Z_1 = \sqrt{R^2 + X_C^2} = 333{,}65\ \Omega.$$

Az ellenállásra jutó feszültség.

$$U_R^{(1-2)} = \frac{R}{Z_1} U = 0{,}30\, U.$$

b) A $2-3$ kapcsolás esetén az $R-L$ ág eredő impedanciája:

$$Z_2 = \sqrt{R^2 + X_L^2} = 100{,}0005\ \Omega,$$

és így

$$U_R^{(2-3)} = \frac{R}{Z_2} U = 0{,}999\,995\, U.$$

c) Az $1-3$ kapcsolásban természetesen

$$U_R^{(1-3)} = U.$$

Látható, hogy $1-3$ kapcsolás esetén legnagyobb a hőfejlődés, de a $2-3$ kapcsolás nagyon megközelíti ezt az esetet, a relatív eltérés az U_R^2-tel arányos hőfejlődésben mindössze 10^{-5} nagyságú.

Klement Tamás (Pécs, Leőwey Klára Gimn., 10. évf.)

12 dolgozat érkezett. Helyes 5 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 1, hiányos (1–3 pont) 6 dolgozat.

P. 5497. *Tekintsük a hidrogénatom Thomson-féle atommodelljét. A hidrogénatom sugara kb.* 50 pm.

a) Hol lehet egyensúlyban az elektron?

b) Mekkora frekvenciával rezeg az elektron ezen egyensúlyi helyzet körül? A színkép milyen tartományába esik az ilyen frekvenciájú fény?

(*5 pont*) Közli: *Zsigri Ferenc,* Budapest

Megoldás. A ma már meghaladott, elavultnak tekintett Thomson-modell szerint a hidrogénatom egy homogén, $+e$ töltésű gömb, amelyben a negatív, $-e$ töltésű elektron „úszkál” (e az elemi töltést jelöli).

a) Az elektron a homogén töltésű gömb középpontjánál van egyensúlyban, mert ott minden irányban azonos mennyiségű pozitív töltés veszi körül, így ezek vonzóereje kioltja egymást.

b) Ismert, hogy ha egy homogén tömegeloszlású, gömb alakú bolygón elkezdünk leásni a bolygó közepe felé, akkor csak az „alattunk lévő” gömbben lévő anyag gravitációs vonzását fogjuk érezni.

A Newton-féle gravitációs törvény és a Coulomb-törvény hasonló szerkezete miatt állíthatjuk, hogy a Thomson-modell esetében is hasonló a helyzet, vagyis ha az elektron x távolságra van az R sugarú atom középpontjától, akkor csak egy x sugarú gömbben lévő, $Q(x)$ nagyságú pozitív töltések vonzását „érzi”. Mivel

$$Q(x) = \frac{e}{\left(\frac{4\pi R^3}{3}\right)} \cdot \frac{4\pi x^3}{3} = e\frac{x^3}{R^3},$$

az m tömegű elektronra ható erő az atom középpontjától x távolságban:

$$F(x) = k\frac{eQ(x)}{x^2} = \frac{ke^2}{R^3} \cdot x \equiv D \cdot x.$$

Ez az erőtörvény alakilag a harmonikus rezgőmozgás törvényével egyezik meg, így az elektron rezgésideje a Thomson-modell szerint

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} = 2\pi\sqrt{\frac{mR^3}{ke^2}} = 2\pi\sqrt{\frac{\left(9{,}1 \cdot 10^{-31}\right)\left(50 \cdot 10^{-12}\right)^3}{\left(9 \cdot 10^9\right)\left(1{,}6 \cdot 10^{-19}\right)^2}}\ \mathrm{s} =$$

$$= 1{,}40 \cdot 10^{-16}\ \mathrm{s}.$$

Az elektron rezgéseinek frekvenciája

$$f = \frac{1}{T} = 7{,}1 \cdot 10^{15}\ \mathrm{Hz}.$$

Az ilyen frkvenciájú fény hullámhossza

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8 \ \mathrm{m/s}}{7{,}1 \cdot 10^{15} \ 1/\mathrm{s}} \approx 42 \ \mathrm{nm},$$

ami az elektromágneses színkép ultraibolya (UV) tartományába esik.

Bocor Gergely (Pécsi Leőwey Klára Gimn., 10. évf.)

23 dolgozat érkezett. Helyes 16 megoldás. Hiányos (1–3 pont) 4, hibás 3 dolgozat.

P. 5498. *Egy α hajlásszögű, h magas éket könnyen gördülő, az ékkel együtt M tömegű kocsira rögzítettünk. Az ék alján egy $m \ll M$ tömegű test nyugszik. A kis testet úgy szeretnénk feljuttatni az ék tetejéig, hogy az éket állandó nagyságú, vízszintes erővel gyorsítjuk.*

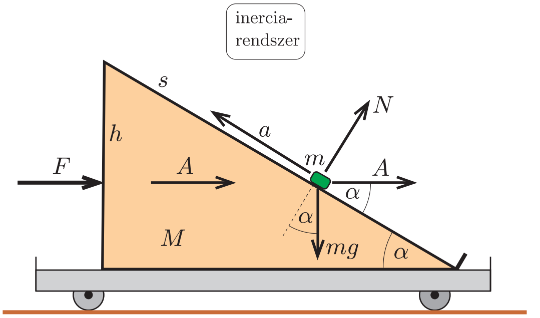
a) Legalább mekkora munkát kell végezzünk eközben, ha a súrlódás elhanyagolható?

b) A legkisebb munkavégzés esetén mekkora erővel hatunk az ékre és mennyi idő alatt emelkedik a kis test h magasságra?

Adatok: $h = 1$ m; $M = 1$ kg; $\alpha = 30°$.

(*6 pont*) Közli: *Holics László*, Budapest

Megoldás. Jelöljük az ékre ható külső (vízszintes) erőt F-fel, az ék gyorsulását A-val, a kis testnek az *ékhez viszonyított* gyorsulását pedig a-val. A kis teste ható erők: mg nagyságú nehézségi erő, valamint az ék által kifejtett, az ék síkjára merőleges, N nagyságú nyomóerő (lásd az *1. ábrát*).



1. ábra

Mivel a kis test m tömege elhanyagolható az ék M tömege mellett, Newton törvénye szerint a kocsi és az ék gyorsulása

$$A = \frac{F}{M}. \tag{1}$$

Írjuk le a kis test mozgását a talajhoz rögzített koordináta-rendszerben. (Ez *inerciarendszer,* amelyben a Newton-féle mozgásegyenlet az eredeti formájában érvényes.) A kis test gyorsulása ebben a rendszerben $\boldsymbol{A}$ és $\boldsymbol{a}$ vektori összege. Az ék ferde lapjának irányában N-nek nincs összetevője, így a kis test mozgásegyenlete:

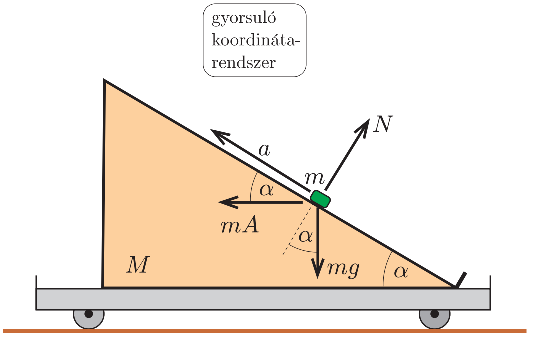
$$mg\sin\alpha = m(A\cos\alpha - a), \tag{2}$$

ahonnan

$$a = A\cos\alpha - g\sin\alpha. \tag{3}$$

A kis test nyilván csak akkor juthat el az ék tetejére, ha $a > 0$, vagyis $A > g\operatorname{tg}\alpha$.

Megjegyzés. A kis test mozgását az ékhez rögzített, tehát $\boldsymbol{A}$ gyorsulással mozgó koordináta-rendszerben is le lehet írni. (A feladat megoldói kivétel nélkül ezt az utat követték. – A Szerk.) Ebben a rendszerben a kis test gyorsulása $\boldsymbol{a}$, viszont a rá ható nehézségi erő mellett figyelembe kell vennünk még a $-m\boldsymbol{A}$ „tehetetlenségi erőt" is (*2. ábra*).



2. ábra

A kis test mozgásegyenlete ebben a leírásban

$$mA\cos\alpha - mg\sin\alpha = ma,$$

ami megegyezik (2)-vel.

A kis test az ékhez képest a gyorsulással felfelé mozogva

$$t = \sqrt{\frac{2s}{a}}$$

idő alatt tesz meg $s = \frac{h}{\sin\alpha}$ utat, tehát

$$t = \sqrt{\frac{2h}{a\sin\alpha}} \tag{4}$$

idő alatt jut fel a h magas ék tetejére. Ennyi idő alatt a kiskocsi és az ék $v = At$ sebességre gyorsul fel, tehát

$$\frac{Mv^2}{2} = \frac{MA^2}{2}t^2 = \frac{Mh}{\sin\alpha}\cdot\frac{A^2}{a}$$

mozgási energiára tesz szert. Ez az energia jó közelítéssel az általunk végzett W munkával egyezik meg, hiszen $m \ll M$ miatt a kis test mozgási- és helyzeti energiája az ék mozgási energiája mellett elhanyagolható.

(1) és (3) felhasználásával a munkavégzés így is felírható:

$$W(F) = \frac{h}{\sin\alpha\,\cos\alpha} \cdot \frac{F^2}{F - Mg\,\mathrm{tg}\,\alpha}. \tag{5}$$

a) A legkisebb munkavégzés kiszámításához meg kell határoznunk a $W(F)$ függvény minimumát az $F = MA > Mg\,\mathrm{tg}\,\alpha$ intervallumon. A szélsőértéket pl. differenciálszámítással, grafikus ábrázolással vagy számítógépes segítséggel (lásd a `GeoGebra`, avagy a `WolframAlpha` alkalmazásokat) határozhatjuk meg, de elemi matematikai módszerekkel is célhoz érhetünk. $W(F)$ legkisebb értékének megkereséséhez elegendő, ha (5) jobb oldalán található második tört *reciprokának maximumát* számítjuk ki. Ez a kifejezés az $1/F$ változó kvadratikus függvénye, aminek maximumát teljes négyzetté alakítással kaphatjuk meg:

$$\frac{F - Mg\,\mathrm{tg}\,\alpha}{F^2} = \frac{1}{F} - Mg\,\mathrm{tg}\,\alpha\frac{1}{F^2} =$$

$$= -Mg\,\mathrm{tg}\,\alpha\left(\frac{1}{F} - \frac{1}{2Mg\,\mathrm{tg}\,\alpha}\right)^2 + \frac{1}{4Mg\,\mathrm{tg}\,\alpha} \leqslant \frac{1}{4Mg\,\mathrm{tg}\,\alpha}.$$

A végzett munka tehát legalább

$$W_{\min} = \frac{h}{\sin\alpha\,\cos\alpha}\,4Mg\,\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{4Mgh}{\cos^2\alpha} \approx 52{,}3\ \mathrm{J}.$$

b) Az egyenlőség akkor áll fenn, ha

$$F = 2Mg\,\mathrm{tg}\,\alpha \approx 11{,}3\ \mathrm{N}.$$

Ekkora erő mellett a mozgás ideje (1), (3) és (4) felhasználásával

$$t = \frac{1}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{2h}{g}} \approx 0{,}9\ \mathrm{s}.$$

Több megoldás alapján

14 dolgozat érkezett. Helyes Bencz Benedek, Bodré Zalán, Halász Henrik, a Lumity csapat (Kurucz Kende és Vidor Nikoletta), valamint Tárnok Ede megoldása. Kicsit hiányos (5 pont) 1, hiányos (2–3 pont) 4, hibás 4 dolgozat.

P. 5500. *Egy hinta hosszú kötelei álló helyzetben legfeljebb M tömegű terhet bírnak el biztonságosan. Legfeljebb mekkora tömegű ember hintázhat rajta, ha a maximális kitérés egy α hegyesszög? Eredményünket ábrázoljuk grafikonon!*

(*4 pont*) Közli: *Rakovszky Andorás,* Budapest

Megoldás. A hinta mozgása a matematikai inga mozgásával közelíthető. A köteleknek a függőlegessel bezárt szögét jelölje φ $(0 \leqslant |\varphi| \leqslant \alpha)$. A köteleket feszítő erők K összege $\varphi = 0$-nál lesz a legnagyobb, és a megadott feltétel szerint

$$K_{\max} \leqslant Mg. \tag{1}$$

Az energiamegmaradás törvénye szerint a test v sebességére a következő egyenlet érvényes:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgr - mgr\cos\alpha,$$

vagyis

$$v^2 = 2gr(1-\cos\alpha), \tag{2}$$

ahol r az ingamozgás pályájának sugara.

A hintázó ember centripetális gyorsulása a pálya legmélyebb pontjánál v^2/r, így a mozgásegyenlet szerint

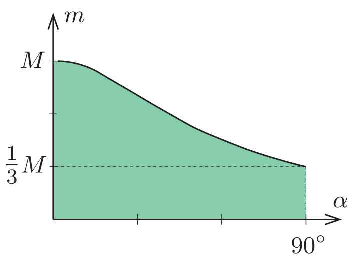
$$K_{\max} - mg = m\frac{v^2}{r},$$

ahonnan (2) felhasználásával

$$K_{\max} = mg(3 - 2\cos\alpha).$$

Ezt (1)-be beírva

$$Mg \geqslant mg(3-2\cos\alpha),$$



vagyis a keresett egyenlőtlenség:

$$m \leqslant \frac{M}{3-2\cos\alpha}.$$

A hinta biztonságos használatánál a hintázó ember tömege csak az *ábra* zölddel jelölt tartományába eshet.

Kiss Adorján Timon (Kaposvár, Táncsics M. Gimn., 11. évf.) dolgozata alapján

77 dolgozat érkezett. Helyes 36 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 15, hiányos (1–2 pont) 19, hibás 6, nem értékelhető 1 dolgozat.

Fizikából kitűzött feladatok

M. 426. Mérjük meg gyári műszer használata nélkül három különböző, a háztartásban található anyag viszkozitását! Például: étolaj, méz, mosogatószer, motorolaj, tusfürdő stb.

(*6 pont*) Közli: *Széchenyi Gábor,* Budapest

G. 829. Kepler második törvénye értelmében a Napból a bolygóhoz húzott vezérsugár azonos idők alatt azonos területeket súrol. Határozzuk meg, hogy a Napból a Földhöz húzott vezérsugár másodpercenként hány km^2-t súrol!

(*3 pont*)

G. 830. Egy vékony falú, 5 cm sugarú hengeres üvegedény fenéklapja kétszer vastagabb, mint a palástja. Legfeljebb milyen magas az edény, ha egy 30 fokos lejtőn a talpára állítva nem borul fel?

(A súrlódás olyan nagy, hogy az edény nem csúszik meg a lejtőn.)

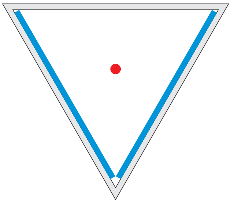
(*4 pont*)

G. 831. Vízitúrán dobozos vaníliafagylaltot vásároltunk, melyet vékony falú, közelítőleg téglatest alakú fagylaltos dobozban árulnak. A termék címkéjéről leolvasható, hogy a töltőtömege 1250 g és a nettó térfogata 2500 ml. A doboz üresen 81 gramm tömegű, ha színültig töltjük vízzel, 2738 grammot nyom.

A lezárt, bontatlan fagylaltosdoboz úgy pottyan a vízbe, hogy a teteje néz felfelé. Becsüljük meg, hogy a magasságának hányad részéig merül a vízbe, és a magaságának hányad részéig tölti ki a fagylalt!

(*4 pont*)

G. 832. Egy szabályos háromszög alapú szoba kettő falát síktükör borítja. A szoba közepén áll egy lámpa. Hány képe keletkezik a lámpának?

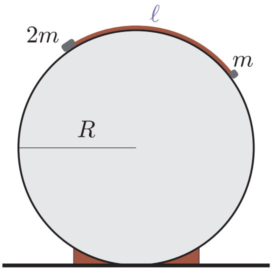


(*4 pont*)

P. 5517. Egy lejtő felső, ℓ_1 hosszúságú szakaszán a súrlódási együttható μ_1, az alsó, ℓ_2 hosszúságú szakaszán pedig μ_2. Egy kicsiny test nulla kezdősebességgel indulva a lejtő aljánál éppen megáll. Mekkora a lejtő hajlásszöge?

Adatok: $\ell_1 = 20$ cm, $\ell_2 = 40$ cm, $\mu_1 = 0{,}1$ és $\mu_2 = 0{,}2$.

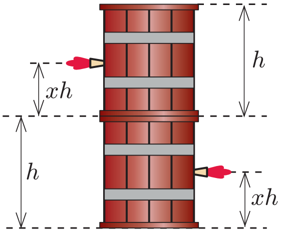
(*4 pont*) Közli: *Holics László*, Budapest



P. 5518. Vízszintes helyzetben rögzített, $R = 20$ cm sugarú, csúszós felületű hengeres testre ℓ hosszúságú hajlékony, könnyű fonalat fektettünk az *ábrán* látható módon.

A fonál egyik végéhez m, a másikhoz $2m$ tömegű, pontszerűnek tekinthető testet erősítettünk. Legfeljebb mekkora ℓ esetén lehet egyensúlyban ez a rendszer?

(*4 pont*) Példatári feladat nyomán



P. 5519. Dionüszosz vízszintes talajon elhelyezett egymás tetején 2 egyforma, h magasságú, egyenes henger alakú, borral közel teletöltött hordót. Héraklész tizenharmadik próbájaként azt a feladatot kapja, hogy fúrjon a hordók falára merőlegesen egy-egy lyukat az alsó, illetve a felső hordóba, az adott hordó aljától mért ugyanakkora xh magasságban.

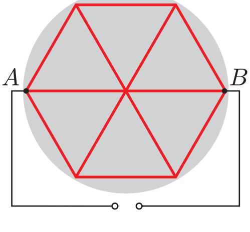
Hogyan válassza meg Héraklész a dimenziótlan x arányszám értékét, hogy a borsugarak földet érési pontjai a lehető legmesszebb kerüljenek egymástól?

(*5 pont*) Dürer-verseny feladata nyomán

P. 5520. A mindkét végén zárt, 2ℓ hosszúságú, vízszintesen fekvő hengert egy vékony dugattyúlap két egyenlő részre oszt. Mindkét részben 100 °C hőmérsékletű, 100 kPa nyomású levegő van. Az egyik részbe annyi vizet juttatunk, hogy telített gőz keletkezik, miközben a hőmérsékletet 100 °C-on tartjuk.

Mennyivel mozdul el a dugattyúlap és mekkora lesz mindkét részben a nyomás?

(*4 pont*) Példatári feladat

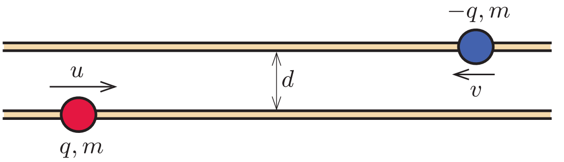


P. 5521. Egy főzőlapon 12 egyforma ellenálláshuzal található, amelyek az *ábrán* látható módon kapcsolódnak egymáshoz.

Milyen a főzőlap hőteljesítményének százalékos megoszlása az egyes huzalok között, ha az A és B pontok közé feszültséget kapcsolunk?

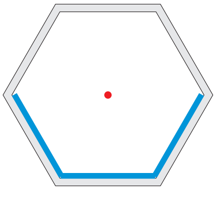
(*4 pont*) Közli: *Tornyos Tivadar Eörs*, Budapest

P. 5522. Két vízszintes, párhuzamos, súrlódásmentes szigetelőrúd egymástól d távolságra helyezkedik el. Az alsó rúdon egy q töltésű, m tömegű, a felsőn pedig egy $-q$ töltésű, m tömegű kicsiny szigetelőgyöngy csúszik az *ábrán* látható módon.



Kezdetben a gyöngyök egymástól távol helyezkednek el, és u illetve v nagyságú sebességgel indulnak egymás felé. Mekkora lesz a mozgás során az egyes testek maximális sebessége?

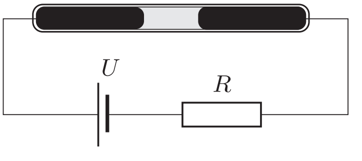
(*5 pont*) Közli: *Németh Róbert*, Budapest



P. 5523. Egy szabályos hatszög alapterületű szoba három szomszédos falát síktükör borítja. A szoba közepén világít egy lámpa. Hány képe keletkezik a lámpának?

(*5 pont*) Példatári feladat nyomán

P. 5524. Zárt kapilláris csőben 2 higanyoszlopot HgI_2 (higany-jodid) elektrolit vizes oldatú cseppje választ el. A cső belső átmérője 0,3 mm. A kapilláris cső a higanyhoz csatlakozó elektródákon keresztül sorba van kötve egy $R = 390$ kΩ-os ellenállással és egy $U = 10$ V-os teleppel. Mennyi idő alatt mozdul el az oldatcsepp egy centiméternyit? Melyik irányba történik ez az elmozdulás?



(*4 pont*) A Kvant nyomán

P. 5525. Egy r sugarú, ϱ fajlagos ellenállású, hosszú, hengeres fémhuzalban I erősségű áram folyik egyenletes eloszlásban. A huzal felületi hőmérséklete állandó T_0 értékű. Határozzuk meg a huzal hőmérsékletét a szimmetriatengelyén, ha ismert, hogy a fém hővezetési tényezője λ!

(*6 pont*) Közli: *Vigh Máté*, Biatorbágy

❄

Beküldési határidő: 2023. december 15.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄

MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL FOR SECONDARY SCHOOLS
(Volume 73. No. 8. November 2023)

Problems in Mathematics

New exercises for practice – competition K (see page 479): **K. 784.** Let us replace the letters below with digits 0–9 (with the exception of one digit) such that the result of the subtraction of the two 3-digit numbers is the closest possible to 300: $ABC - DEF = GHJ$. Prove that the result that has the smallest difference from 300 can only be obtained in a unique way. (Different letters has to be replaced with different digits.) **K. 785.** In the shops of three merchants Ali, Selim and Khafim a barrel of olives had the same price at the beginning of June. Ali increased the price by 10%, then by 10% again, and then at the beginning of September decreased the price by 20%. Selim increased the price by 20%, then decreased it by 10%, and then at the beginning of September decreased it by 10% again. Khafim increased the price by 20%, and then at the beginning of September decreased it by 20%. We know that at the beginning of September Ali sold a barrel of Olives 4 dinars cheaper than Selim. How much did a barrel of olives cost at the beginning of September in Khafim's shop? **K. 786.** Let X denote the sum of the squares of the first 50 positive integers. Express the sum of the squares of the first 50 positive even integers in terms of X. **K/C. 787.** How many points of intersection can the diagonals of a convex 16-gon have, if the points of intersections are all distinct? **K/C. 788.** Sequence a_n satisfies $a_1 = 2$ and $a_{n+1} = a_n + 2n$. Find the value of a_{100}.

New exercises for practice – competition C (see page 479): **Exercises up to grade 10: K/C. 787.** See the text at Exercises **K. K/C. 788.** See the text at Exercises **K. Exercises for everyone: C. 1783.** Let a, b, c and d be positive integers such that the open interval $\left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right)$ includes 1. Prove that $\frac{a}{b} < \frac{a+c+1}{b+d+1} < \frac{c}{d}$. (Proposed by *B. Bíró,* Eger) **C. 1784.** The shorter leg of right triangle ABC has length 1. The ratio of the angles φ and ε between the height from the right angle (perpendicular to hypotenuse AB) and the angle bisectors of the acute angles is $\frac{\varphi}{\varepsilon} = \frac{4}{5}$. Find the angles of the triangle and the length of the height corresponding to the hypotenuse. (Proposed by *B. Bíró,* Eger) **C. 1785.** Find all pairs $(x; y)$ of real numbers that satisfy the system of equations $\frac{10}{1+|x|} + y = 4$; $\frac{10}{1+|y|} + x = 4$. (*German competition problem*) **Exercises upwards of grade 11: C. 1786.** We roll five four-sided tetrahedral dies. Find the probability that the resulting five numbers can be the degrees of a tree on five vertices. (Proposed by *B. Kovács,* Szombathely) **C. 1787.** In acute triangle ABC we draw a parallel line through orthocenter M with side AB, which intersects sides AC and BC in points D and E, respectively. Let CC_1 be the diameter of the circumcircle of triangle ABC. Find the perimeter of triangle DEC_1, given that $AB = 14$. (*Inspired by Kvant*)

New exercises – competition B (see page 481): **B. 5342.** Let us pick four consecutive integers of the same parity, and take the products of all possible pairs. Prove that the sum of these products cannot be a perfect square. (*3 points*) (Proposed by *G. Kiss,* Csömör) **B. 5343.** Decide which one of numbers $A = 1! - 2! + 3! - 4! + \cdots + 2021! - 2022! + 2023!$

and $B=(1-2+3-4+\ldots+2021-2022+2023)!$ is the bigger. (*3 points*) (Proposed by *B. Hujter,* Budapest) **B. 5344.** Anti and Bandi would like to get from Balatonmáriafürdő to Balatonlelle, which is 30 kilometers away, partly on foot and partly by bicycle. They start at the same time, and they only have a single bicycle. Anti's speed by bicycle is 30 km/h, and he can run with a speed of 15 km/h. Bandi's speed by bicycle is 20 km/h, and he can run with a speed of 12 km/h. Find the least amount of time they need to get to their destination in minutes. (During their trip they can swap the bicycle with each other as many times as they want, and the bicycle can be safely left at the side of the road.) (*5 points*) (Proposed by *P. P. Pach,* Budapest) **B. 5345.** Prove that if the incircle and the nine-point circle of a triangle are concentric, then the triangle is equilateral. (*4 points*) (Proposed by *G. Kiss,* Csömör) **B. 5346.** For which n is it possible to find an equilateral (all sides have the same length) n-gon such that each of its sides is parallel to exactly two other sides? (*5 points*) (Proposed by *B. Hujter,* Budapest) **B. 5347.** Prove that if r is a positive rational number, and r^r is also rational, then r is an integer. (*5 points*) (Proposed by *Cs. Sándor,* Budapest) **B. 5348.** Let b, c and n be non-negative integers satisfying $0\leqslant c\leqslant b-2n$. Prove that $\sum_{a=0}^{n}\binom{2a}{a}\binom{b-2a}{n-a}=\sum_{a=0}^{n}\binom{2a+c}{a}\binom{b-c-2a}{n-a}$. (*6 points*) (Proposed by *L. Tóthmérész,* Budapest) **B. 5349.** The edges of parallelepiped P all have lengths that are at most 1. Let X be an arbitrary point of P. Show that we can find a vertex of P such that its distance from X is at most $\sqrt{3}/2$. (*6 points*) (Proposed by *V. Vígh,* Sándorfalva)

New problems – competition A (see page 482): **A. 863.** Let $n\geqslant 2$ be a given integer. Find the greatest value of N, for which the following is true: there are infinitely many ways to find N consecutive integers such that none of them has a divisor greater than 1 that is a perfect n^{th} power. (Proposed by *Péter Pál Pach,* Budapest) **A. 864.** Let ABC be a triangle and O be its circumcenter. Let D, E and F be the respective tangent points of the incircle of $\triangle ABC$, and sides BC, CA and AB. Let M and N be the respective midpoints of sides AB and AC. Let M' and N' be the respective reflections of points M and N across lines DE and DF. Let lines CM' and BN' intersect lines DE and DF at points H and J, respectively. Prove that the points H, J and O are collinear. (Proposed by *Luu Dong,* Vietnam) **A. 865.** A crossword is a grid of black and white cells such that every white cell belongs to some 2×2 square of white cells. A word in the crossword is a contiguous sequence of two or more white cells in the same row or column, delimited on each side by either a black cell or the boundary of the grid. Show that the total number of words in an $n\times n$ crossword cannot exceed $\frac{(n+1)^2}{2}$. (Proposed by *Nikolai Beluhov,* Bulgaria)

Problems in Physics

(see page 507)

M. 426. Measure the viscosity of three different materials found in your household without using a viscosity meter. For example: cooking oil, honey, washing-up liquid, motor oil, shower gel, etc.

G. 829. According to Kepler's second law, the ray from the Sun to the planet will sweep out equal areas during equal time intervals. Determine how many km^2 the ray from the Sun to the Earth sweeps in each second. **G. 830.** The width of the material of the base of a thin-walled cylinder-shaped glass jar with a radius of 5 cm is twice as large as the width of its vertical wall. What is the maximum height of the jar if it does not tip over when placed on its base on a slope with an elevation angle of 30°? (The friction is so large that the pot does not slip on the slope.) **G. 831.** On a boat trip we bought vanilla ice cream, which is sold in a thin-walled, roughly cuboid shape ice cream container. The product's label states that it contains 1250 g ice cream, which has a net volume of 2500 ml. The empty box weighs 81 g and when filled to the top with water, it weighs 2738 g. The sealed, unopened ice cream container is dropped into the water with the top facing up. Estimate what fraction of its height is submerged in the water, and up to what fraction of its height it is filled with ice cream. **G. 832.** Two walls of a room with an equilateral triangle-shaped floor are covered with flat mirrors (see the *figure*). A lamp stands in the centre of the room. How many images does the lamp produce?

P. 5517. The coefficient of friction on the upper part of a slope of length ℓ_1 is μ_1, whilst on the lower part of the slope, having a length of ℓ_2 is μ_2. A small body with zero initial velocity starts at the bottom of a slope and stops just at the bottom. What is the angle of inclination of the slope? *Data:* $\ell_1 = 20$ cm, $\ell_2 = 40$ cm, $\mu_1 = 0.1$ and $\mu_2 = 0.2$. **P. 5518.** A cylindrical body of radius $R = 20$ cm is fixed in a horizontal position. A piece of light and flexible thread of length ℓ was laid on its slippery surface, as shown in the *figure.* To one end of the thread a point-like body of mass m, whilst to the other end another point-like body of mass $2m$ were attached. What can the greatest value of ℓ be, if the system remains at rest? **P. 5519.** Dionysus placed 2 identical cylinder-shaped barrels, having the same height h, on the horizontal ground, one on the top of the other (see the *figure*). Both were nearly fully filled with wine. Heracles' thirteenth task was to drill a hole perpendicularly to the wall of each of the barrels at the same xh height measured from the bottom of each barrel. How should Heracles choose the value of the dimensionless factor x, in order that the impact points of the wine rays fall as far apart as possible? **P. 5520.** A horizontal cylinder of length 2ℓ is closed at its both ends, and is divided into two equal parts by a thin piston. Each part contains air with a temperature of 100 °C and a pressure of 100 kPa. Into one part, enough water is ejected to produce a saturated vapour while the temperature is kept at 100 °C. How much will the piston move and what will be the pressure in both parts? **P. 5521.** A hob has 12 identical resistance wires, which are connected as shown in the *figure.* What is the percentage distribution of the dissipated power in each of the wires of the hotplate when voltage is applied across points A and B? **P. 5522.** Two horizontal, parallel, frictionless insulating rods are spaced d apart. On the lower rod a small insulating bead of charge q and of mass m slides, and on the upper rod another small insulating bead of charge $-q$ and of mass m slides, as shown in the *figure.* Initially, the beads are spaced far apart and move towards each other with velocities of u and v, respectively. What will the maximum velocity of each bead be during the motion? **P. 5523.** Three adjacent walls of a regular hexagon-shaped room are covered with flat mirrors (see the *figure*). A lamp is lit in the middle of the room. How many images does the lamp produce? **P. 5524.** In a closed capillary tube, there are 2 mercury columns between which there is a drop of HgI_2 (mercury iodide) electrolyte in aqueous solution. The inner diameter of the tube is 0.3 mm. The capillary tube is connected in series with a $R = 390$ kΩ resistor and a $U = 10$ V battery through electrodes which are in contact with the mercury. How long does it take for the solution drop to move 1 centimetre? In which direction does this displacement occur? **P. 5525.** In a long cylindrical metal wire of radius r and of resistivity ϱ, a current of strength I flows in a uniform distribution. The wire has a constant surface temperature T_0. Determine the temperature of the wire on its axis of symmetry if it is known that the metal has a coefficient of thermal conductivity of λ.

Képek az idei KöMaL Ifjúsági Ankétról

Totó kitöltése közben

A hétcsúcsú teljes gráf kereszteződés nélkül felrajzolva egy bögrére

Ördöglakatolás

Díjkiosztó az idei KöMaL Ifjúsági Ankéton

Petőfi Kulturális Ügynökség

Nemzeti Együttműködési Alap

nka Nemzeti Kulturális Alap

Bethlen Gábor Alapkezelő Zrt.

Miniszterelnökség