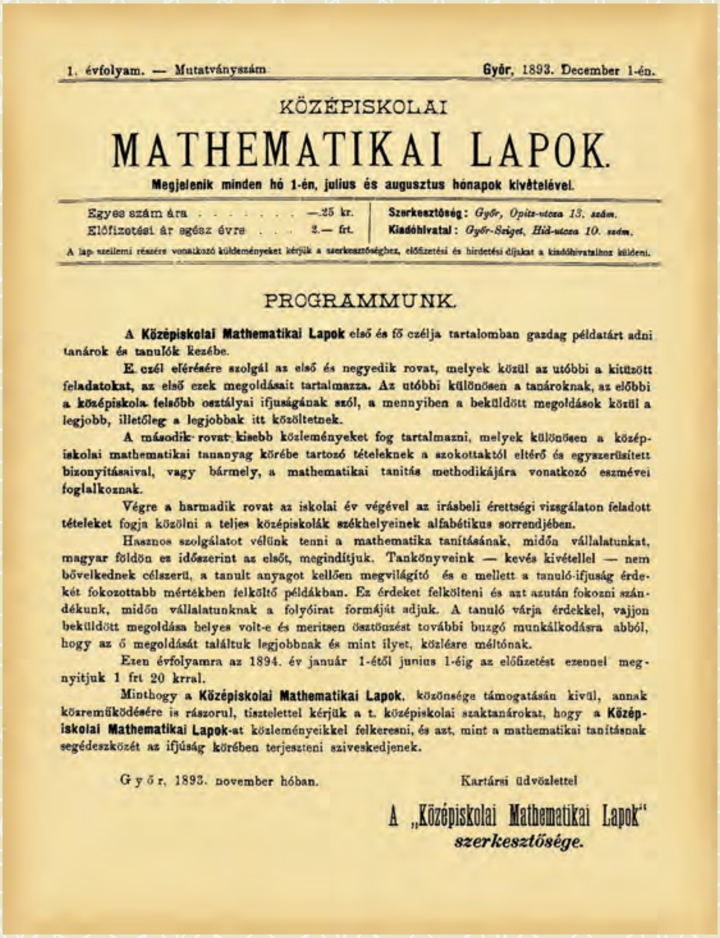
Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok

Informatika rovattal

130 éve, 1893 decemberében jelent meg a KöMaL első példánya



1. évfolyam. — Mutatványszám. Győr, 1893. December 1-én.

KÖZÉPISKOLAI

MATHEMATIKAI LAPOK.

Megjelenik minden hó 1-én, julius és augusztus hónapok kivételével.

Egyes szám ára . . . . —.25 kr.	**Szerkesztőség:** *Győr, Opitz-utcza 13. szám.*
Előfizetési ár egész évre . . . . 2.— frt.	**Kiadóhivatal:** *Győr-Sziget, Híd-utcza 10. szám.*

A lap szellemi részére vonatkozó küldeményeket kérjük a szerkesztőséghez, előfizetési és hirdetési díjakat a kiadóhivatalhoz küldeni.

PROGRAMMUNK.

A **Középiskolai Mathematikai Lapok** első és fő czélja tartalomban gazdag példatárt adni tanárok és tanulók kezébe.

E czél elérésére szolgál az első és negyedik rovat, melyek közül az utóbbi a kitűzött feladatokat, az első ezek megoldásait tartalmazza. Az utóbbi különösen a tanároknak, az előbbi a középiskola felsőbb osztályai ifjuságának szól, a mennyiben a beküldött megoldások közül a legjobb, illetőleg a legjobbak itt közöltetnek.

A második rovat kisebb közleményeket fog tartalmazni, melyek különösen a középiskolai mathematikai tananyag körébe tartozó tételeknek a szokottaktól eltérő és egyszerüsitett bizonyitásaival, vagy bármely, a mathematikai tanitás methodikájára vonatkozó eszmével foglalkoznak.

Végre a harmadik rovat az iskolai év végével az irásbeli érettségi vizsgálaton feladott tételeket fogja közölni a teljes középiskolák székhelyeinek alfabétikus sorrendjében.

Hasznos szolgálatot vélünk tenni a mathematika tanításának, midőn vállalatunkat, magyar földön ez időszerint az elsőt, megindítjuk. Tankönyveink — kevés kivétellel — nem bővelkednek célszerü, a tanult anyagot kellően megvilágító és e mellett a tanuló-ifjuság érdekét fokozottabb mértékben felköltő példákban. Ez érdeket felkölteni és azt azután fokozni szándékunk, midőn vállalatunknak a folyóirat formáját adjuk. A tanuló várja érdekkel, vajjon beküldött megoldása helyes volt-e és meritsen ösztönzést további buzgó munkálkodásra abból, hogy az ő megoldását találtuk legjobbnak és mint ilyet, közlésre méltónak.

Ezen évfolyamra az 1894. év január 1-étől junius 1-éig az előfizetést ezennel megnyitjuk 1 frt 20 krral.

Minthogy a **Középiskolai Mathematikai Lapok**, közönsége támogatásán kivül, annak közreműködésére is rászorul, tisztelettel kérjük a t. középiskolai szaktanárokat, hogy a **Középiskolai Mathematikai Lapok**-at közleményeikkel felkeresni, és azt, mint a mathematikai tanításnak segédeszközét az ifjúság körében terjeszteni sziveskedjenek.

Győr, 1893. november hóban.

Kartársi üdvözlettel

A „Középiskolai Mathematikai Lapok"
szerkesztősége.

Érettségi feladatok 1893-ból és 1914-ből
A Héttusáról | Matematika és fizika feladatok megoldásai | Csomó a kötélen | Tanulságos hibák | Tabló

KöMaL

73. évfolyam
9. szám
2023.
december

A Bolyai János Matematikai Társulat és az Eötvös Loránd Fizikai Társulat folyóirata

KöMaL kihívás – Meg Tudod Oldani?

130 éves érettségi feladatok a első „mutatvány” számában

Balázsfalva.

Gör. kath. román főgymnasium.

Oldassék meg a következő, elsőfoku egyenletekből álló rendszer;

$$\frac{33y+11}{3}-\frac{6y+2x+79}{6}=\frac{23x-10y+2}{12}-\frac{x-y}{4}$$

$$\frac{x+5}{2}-\frac{5x-3y+2}{5}=\frac{2x-9y+2}{8}-\frac{x+2}{15}$$

A hold átmérője 33'03''-nyi szög alatt látszik; a) mily nagy a hold felülete és térfogata, ha a középtávolság a föld és a hold között 384400 Km. b) Milyen szög alatt látszik majd a földnek tengelye (12712 Km.) a holdról?

(Viciu Emil).

Belényes.

Gör. kath. román főgymnasium.

Egy atya minden fiának könyveket ajándékoz születésük napján, még pedig annyi kötetet a hány évet az illető fiu már eltöltött. Ekkép az öt fiu egy 375 kötetből álló könyvtárt gyüjtött össze. Mily korúak voltak egyenkint a fiuk, ha mindegyik a közvetlenül utána következőnél három (3) évvel idősebb?

Mily magasságban és mily sebességgel ütközik egy $c = 300$ méternyi kezdő sebességgel $\alpha = 30^\circ$-nyi emelkedési szög alatt kilőtt golyó az $a = 4500$ méternyi távolságban levő függőleges sziklafalba?

(Fekete Demeter).

Beszterce.

Ág. ev. főgymnasium.

9. 3 szám arithmetikai, más három geometriai progressiót alkot. Ha összeadjuk a két haladvány megfelelő tagjait, akkor rendre megkapjuk a következő összegeket: 27, 39, 87. A számtani haladvány tagjainak összege $s = 26$. Hogyan hangzik a két haladvány?

Egy egyenes hatoldalú gulánál az alapél 4 méter hosszú; az oldallapok az alaplappal $\alpha = 50^\circ$ szöget képeznek. Mennyivel lesz magasabb a gulánál azon kúp, melynek térfogata egyenlő a guláéval és alapja azon kör, mely a gula alapjába van beirva?

(Silex Albert).

Besztercebánya.

Kir. kath. főgymnasium.

A következő egyenletekből kiszámitandó x, y és z értéke:

$$\frac{3}{x}-\frac{4}{5y}-\frac{1}{z}=7\frac{3}{5}$$

$$\frac{1}{3x}+\frac{1}{2y}-\frac{2}{z}=10\frac{1}{6}$$

$$\frac{4}{5x}-\frac{1}{2y}+\frac{4}{z}=16\frac{1}{10}$$

10. Valamely négyszög oldalai: 33 m., 63 m., 16 m., 56 m. Az első és negyedik oldal közti szög egyenlő a második és harmadik oldal közti szöggel. Mily nagyok a szögek, az átlók és a terület?

(Marcsiss János).

Brassó.

Állami főreáliskola.

Egy golyó egy 30 m. hosszú ferde csőben hatszor annyi idő alatt gurul le, mint a mennyi idő alatt a cső felső végéből szabadon leesik. Mekkora ezen csőnek a vizszinteshez való hajlásszöge, és milyen sebességgel ér le a guruló golyó?

11. Egy 350 cm^3 köbtartalmu vaskúp, melynek magassága egyenlő az alap sugarával, csucsával lefelé, higanyban úszik. Mily mélyre merül el ezen kúp a higanyban, ha az előbbinek fajsúlya 7·2 gr. és az utóbbié 13·6 gr.

(Walter Béla).

*

Róm. kath. főgymnasium.

Egy jószág megvételére 3 ajánlat van: A) 15 évig 3500 frtot igér minden évnek végével; B) 15000 forintot azonnal kész adni s ezen kivül 12 évig 245 frtot igér minden évnek végével; C) 30000 frtot igér 6 év mulva s ezután 3 év mulva 5000 frtot s azután 8 évig 1600 frtot kiván fizetni minden év végével. Melyik ajánlat a legelőnyösebb s mennyi készpénzt ér mindegyiknek ajánlata 4% kamatos kamat mellett?

Meghatározandó egy 3 oldalu csonka gúla felülete és köbtartalma, ha a nagy alaplap éle $a = 60$ cm. a kis alaplap éle $a = 36$ cm. s a csonka gúla magassága $m = 50$ cm.

(Ágoston Lajos).

*

Ág. ev. főgymasium.

Nem közölte.

*

Gör. kel. román főgymnasium.

Nem közölte.

Budapest.

II. kerületi állami reáliskola.

Egy 3500 frtnyi tőke kiadva 4%-ra kamatok kamatja mellett 4790 forinttá növekedett; mennyi idő alatt történt az?

Számittassék ki azon csonka kup felszine, a melyen az alaplap sugara $R = 4$ méter, az ellenlap sugara $r = 3$ méter és az oldalhossz $l = 8$ m.?

(Mayer József).

*

V. kerületi állami főreáliskola.

B és C összesen 3400 frtot helyezett valamely vállalatba. B a tőke és egy évi kamat fejében visszakap összesen 2070 frtot, C a tőke és a 16 havi kamat fejében 1920 frtot. Hány forintot helyezett B a vállalatba?

Valamely egyenes gulának alapja derékszögü négyszög, a gúla oldaléleinek mértékszáma $= c$; a derékszögü négyszög oldalainak mértékszámai: a és b. Mekkora távolságban kell a csúcstól számitva sikot (az alappal II sikot) helyezni, hogy a gúla két egyenlő részre osztassék?

Bizonyos apa oly módon kivánja gyermekét biztositani, hogy az 25 éves korától kezdve 15 éven át évi előleges 1500 frtban részesüljön. Mekkora összeget kell e végből a gyermek születésekor a takarékpénztárba tenni, ha az összetett kamatok kamatlába $= 4$?

KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK
INFORMATIKA ROVATTAL BŐVÍTVE
ALAPÍTOTTA: **ARANY DÁNIEL** 1894-ben

73. évfolyam 9. szám Budapest, 2023. december

Megjelenik évente 9 számban, januártól májusig és szeptembertől decemberig havonta 64 oldalon. ÁRA: 1250 Ft

TARTALOMJEGYZÉK

A szerkesztőség címe: 1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/C III. emelet 3.405. Telefon: +36 20 320-1143
A lap megrendelhető az Interneten: `www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.h.shtml`.
Előfizetési díj egy évre: 10 400 Ft

E-mail: `szerk@komal.hu`
Internet: `http://www.komal.hu`
This journal can be ordered from the Editorial office: Pázmány Péter sétány 1/C III. emelet 3.405. 1117–Budapest, Hungary telephone: +36 20 320-1143 or on the Postal address H–1518 Budapest 112, P.O.B. 32, Hungary, or on the Internet: `www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.e.shtml`.

Egy közel 110 éves érettségi feladat a 150 éves Debreceni Fazekas Mihály Gimnázium múltjából

A Debreceni Fazekas Mihály Gimnázium idén ünnepli alapításának 150. évfordulóját. Ezt a 150 évet nem lehet röviden összefoglalni, ezért az iskola történetének csak néhány fontos állomását emeljük ki.

Az 1860-as évektől egyre erősebben merült fel Debrecenben az igény arra, hogy „a reáltudományoknak a kor kívánalmához képest nagy mérvben és szép sikerrel művelésnek indult mezején városunk nagy középosztállyal biró közönségének is itt helyben, valláskülönbség nélkül tér és előhaladásra alkalom nyújtassék”. Ennek eredményeképpen az iskola 1873-ban városi főreáltanodaként kezdte meg, majd 1891-től állami főreáliskolaként folytatta működését, 1934-et követően pedig a törvényi rendelkezés értelmében gimnáziummá alakult. Az 1892/93-as tanévben került sor az első érettségi vizsgálatokra, 1893-ban költözött jelenlegi épületébe, és 1922-ben vette fel Fazekas Mihály nevét.

A gimnázium a mai napig büszke arra, hogy ugyan mindössze pár hónapon át és csak ideiglenes minőségben, de 1886-ban itt kezdte tanári pályafutását Kürschák József, a későbbi műegyetemi oktató és akadémikus.

A 20. század első évtizedeiben, a főreáliskolában töltött tanári éveik alatt Kovaliczky Antal és Telkes (korábban Tvergyák) Sándor matematikai tárgyú cikkeket publikáltak a Középiskolai Mathematikai (Matematikai és Fizikai) Lapokban, ahol egyébként több tanár, esetenként diákok által javasolt feladat is kitűzésre került.

A matematikai közösség elsősorban a speciális matematika tagozatos osztályairól ismeri a gimnáziumot. Ez a képzés 1965-ben kezdődött (bár egy évvel korábban már indult egy kísérletinek mondható, matematika–fizika tagozatos osztály), a hat évfolyamos változat pedig 1992 óta van jelen (1991-ben és 1992-ben indult egy-egy öt évfolyamos osztály is).

A Debreceni Állami Főreáliskola egy 1914 májusából származó, mai szemmel is meglepő nehézségű érettségi feladatával és annak megoldásával zárjuk megemlékezésünket. Akkoriban az írásbeli érettségin egy algebrai és egy geometriai feladatot tűztek ki, amelyeket a tankerületi főigazgató jelölt ki a végzős osztály szaktanára által beküldött javaslatok közül.

A feladatot az eredeti megfogalmazás szerint közöljük:

Mi az arány az ellipszis nagy és kis tengelye közt, ha az ellipszis és az épakkora területű koncentrikus kör közös pontjaihoz húzott érintők által bezárt szög tangense 3/2?

A megoldáshoz helyezzük el az ellipszist és a kört a derékszögű koordinátarendszerben úgy, hogy a közös középpontjuk az origó legyen, az ellipszis szimmetriatengelyei pedig egybeessenek a koordinátatengelyekkel. Az ellipszis nagy és kis féltengelyét jelölje a és b, a kör sugarát r.

Az ellipszis területe $ab\pi$, a köré pedig $r^2\pi$, így a feltétel szerint $ab = r^2$.

Az ellipszis ismert paraméterezését használva, legyen az ellipszis és a kör valamelyik metszéspontjának helyvektora $(a\cos t, b\sin t)$, ahol $t \in \mathbb{R}$ (valójában elég lenne azt feltenni, hogy $t \in [0, 2\pi[$, de erre nem lesz szükségünk). Ennek hossza a kör sugarával egyezik meg, tehát

$$a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t = r^2 = ab,$$

amiből a trigonometrikus Pitagorasz-tétel ($\cos^2 t + \sin^2 t = 1$) felhasználásával kiszámolható, hogy

$$\cos^2 t = \frac{b}{a+b}, \quad \sin^2 t = \frac{a}{a+b}.$$

A paraméteresen megadott görbe egy pontjában az érintő egy irányvektora a paraméterezésből koordinátánkénti deriválással kapható. Így az ellipszis metszéspontbeli érintőjének egy irányvektora $(-a\sin t, b\cos t)$. A kör metszéspontbeli érintőjének egyik lehetséges normálvektora megegyezik a metszéspont helyvektorával, ezért egy irányvektora $(-b\sin t, a\cos t)$.

A két irányvektor skaláris szorzata $ab\sin^2 t + ab\cos^2 t = ab$. Az irányvektorok hossznégyzetei pedig rendre

$$a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t = a^2\frac{a}{a+b} + b^2\frac{b}{a+b} = a^2 - ab + b^2$$

és $b^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t = ab$.

A két érintő által bezárt szög tangensének négyzete $\frac{9}{4}$, így koszinuszának négyzete $\frac{4}{13}$. Az irányvektorok szögének koszinusznégyzete ugyanez az érték függetlenül attól, hogy az az egyenesek által bezárt szöggel megegyező vagy annak kiegészítő szöge.

Ezeket felhasználva, a skaláris szorzat definíciója alapján

$$(ab)^2 = (a^2 - ab + b^2)ab\frac{4}{13},$$

$$\frac{a}{b} - 1 + \frac{b}{a} = \frac{13}{4},$$

amelyből az $\frac{a}{b}$-re adódó másodfokú egyenletet megoldva kapjuk, hogy $\frac{a}{b} = 4$ vagy $\frac{1}{4}$. A keresett arány tehát $4 : 1$.

Nyul Gábor
Matematikai Intézet, Debreceni Egyetem
e-mail: `gnyul@science.unideb.hu`

Héttusára fel!

7 éve létezik az Érintő elektronikus matematikai lapok, célja a tudományos ismeretterjesztés a matematikát érintő témákban, legyen az fizika, informatika, orvoslás, technika, zene, történelem vagy szépirodalom. Matematikával kapcsolatos híreket, interjúkat, könyvajánlókat is rendszeresen lehet olvasni a negyedévente március, június, szeptember és december közepén megjelenő online folyóiratban (`www.ematlap.hu`). Az Érintőben minden korosztály, a matematika iránt valamelyest is érdeklődő diákoktól a felnőttekig találhat kedvére való cikkeket, bennük animációkat, videókat is. Tanárok és tanulók egyaránt hasznos információkat kaphatnak a Tanóra – Szakkör rovatból. Például a 2023. júniusi Érintő egyik cikke: *A Középiskolai Matematikai Lapok 100 éve 10 feladat tükrében.* A szeptemberi számban megjelent: *A matematika érettségi követelmények változása 2024-től*, vagy a *Kell-e nekünk függvénytáblázat?*

Idén indult egy új, feladatokat kitűző rovat, a Héttusa. A KöMaL olvasói persze bőven el vannak látva feladatokkal hónapról hónapra, ám nekik is érdemes lehet ezeken a kicsit más jellegű problémákon gondolkodni (és be is küldeni azokat).

A Héttusa rovatban olyan feladatok vannak,

- amelyek megoldására egy érdeklődő tizenévesnek hasonló esélye van, mint egy nyugdíjas matematikatanárnak;
- amelyeken jó gondolkozni, érdekesek és több úton is megközelíthetjük a választ;
- amelyek újabb kérdéseket inspirálhatnak, elindulhatunk mélyebb és általánosabb vizsgálatok felé.

A problémák általában néhány mondatban megoldhatók, de nem szükséges leírni a megoldást, elég csak a választ beküldeni a feladatban feltett kérdésre. A versenyen bárki részt vehet, vagy diák vagy felnőtt kategóriában. A beküldők között az Érintő szerkesztősége jutalomkönyveket sorsol ki, illetve az éves pontverseny végén az élmezőnyt jutalmazza.

Milyen feladatok voltak eddig? Nézzük az első forduló első három feladatát. (Próbáljuk megválaszolni a kérdéseket.)

1. Van-e olyan szám, amelynek pontosan tíz pozitív osztója van a 20-nál nem nagyobb számok között?

Erre a szokatlan kérdésre a beküldők fele adott helyes választ. A válasz röviden, frappánsan megadható. A feladat felvet újabb kérdéseket, ezt látjuk a mostani Schweitzer versenyen, ahol ez volt a 6. feladat:

Igazoljuk, hogy minden elég nagy n természetes szám és $0<k\leqslant n$ esetén van olyan m természetes szám, hogy m-nek pontosan k osztója van az $1,2,\dots,n$ halmazból.

(A Héttusa feladata az $n=20$, $k=10$ esetre kereste a választ.)

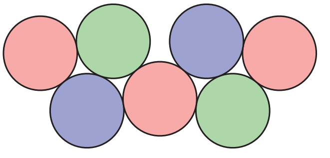
A Héttusa verseny második feladata:

2. Egy asztallapra 11 egybevágó fehér korongot helyeztünk úgy, hogy a korongok között nincs átfedés. Igaz-e, hogy a korongokat mindig kiszínezhetjük úgy 3 színnel, hogy az egymással érintkező korongok különböző színűek?

Ez a feladat volt a legnehezebb kérdés az első fordulóban, csak 4 helyes válasz érkezett, míg a többi feladat mindegyikére legalább kétszer ennyien válaszoltak helyesen.

Az Érintő következő számában a problémáról Pálvölgyi Dömötör írt cikket *Érmegráfok* címmel. Ebben elmeséli, hogyan próbálkozik a megoldással egy matematikus, akinek a kombinatorikus geometria a szakterülete, ahova ez a kérdés éppen tartozik. Akkor kezdett foglalkozni a feladattal, amikor tízéves lánya fél órán át sikertelenül rendezgette a 11 korongot. Érdekes a háttér, az érmegráfok, gyufagráfok világa.

Néhány részlet az írásából:



„Egy … tipikus hiba az volt, ha valaki azzal érvelt, hogy mivel nem lehet 4 egymást páronként érintő egységkorong, ezért nincs a gráfban K_4, tehát háromszínezhető. … Mindenesetre, mivel a legtömörebb elrendezés nem használ, egy olyat kell keresnünk, amiben van egy kis szabadsági fokunk.

A másik érdekesség pedig, hogy az ember úgy érzi, hogy az ilyen típusú feladatok a játékos matematika körébe tartoznak, és nemigen vannak alkalmazásaik. Legnagyobb meglepetésemre nemrég kiderült, hogy ilyen típusú kérdések még a kvantummechanikában is előjönnek.

Tehát kis csúsztatással mondhatjuk, hogy az ilyen gráfok színezhetőségétől függ a fizikai valóságunk megismerhetősége!”

A Héttusa verseny harmadik feladata:

3. Legfeljebb hány pontot lehet megadni a kocka felületén, ha a pontok nem mind egy lapon fekszenek, és ezek egy szabályos sokszög csúcsai?

Óvatosan a válasszal, mert a hét kitűzött feladat között a beküldött jó válaszok száma alapján a második legnehezebb feladat ez volt. Talán segít, ha felidézzük Kolmogorov: *A matematikusi hivatásról* c. cikkének egy mondatát (*KöMaL,* 1974. november):

„Például már ragyogó matematikusnak kell lenni ahhoz, hogy csukott szemmel, ábra nélkül, világosan el tudjuk képzelni magunknak egy kocka felületének azt a síkmetszetét, melynél a metsző sík merőleges a kocka egyik testátlójára és átmegy annak középpontján.”

Öröm látni, hogy megoldóink között számos általános iskolás, középiskolás és egyetemista van. Megtisztelő, hogy országos, sőt nemzetközi hírű matematikus is küldött megoldásokat. De a beküldők között van hajdani diákolimpikon, és olimpikonokat felkészítő, ma már nyugdíjas tanár is.

December közepén tesszük közzé a Héttusa harmadik fordulójának 7 feladatát és az előző forduló megoldásait. Az új feladatok megoldásait új beküldőktől is várjuk a hettusa@ematlap.hu címen. A korábbi feladatok és megoldások az Érintő 2023. júniusi és szeptemberi számában és az Érintő facebook-oldalán* is elolvashatók.

A KöMaL honlapján a jövőben fel fogjuk hívni a figyelmet az Érintő megjelenésére, és benne a Héttusa újabb fordulójára. Fiatalok és idősebbek: Héttusára fel!

Oláh Vera
a KöMaL egykori főszerkesztője,
az Érintő felelős szerkesztője

Róka Sándor
az Abacus egykori főszerkesztője,
az Érintő Héttusa rovatának szerkesztője

Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire

I. rész

1. *a*) Oldjuk meg a

$$\lg\left(2025-x^2\right) < \sqrt[2024]{x-2023}$$

egyenlőtlenséget a valós számok halmazán. (*6 pont*)

b) Oldjuk meg a

$$\frac{42-x}{x-1}-\frac{2x-20}{2-x}=2$$

egyenletet a valós számok halmazán. (*6 pont*)

2. A híres Dávid-szobor Firenzében egy állandó kiállításon látható. Biztonsági okokból a szobor egy 2,3 méter magas talapzaton áll. A talapzat aljától pontosan 4,5 méterre található padlókamerából a szobor legalsó pontja 32°-kal kisebb emelkedési szögben látszik, mint a legfelső pontja.

a) Hány centiméter magas a szobor? (*7 pont*)

Egy pénteki napon 2650 felnőtt-, és 1100 gyermekjegyet értékesített a múzeum, így aznap 37 750 euró folyt be a jegyekből. Másnap 2830 felnőtt-, és 4500 gyermekjegyet adtak el, ezzel 50 290 euró lett az aznapi jegybevétel.

b) Számítsuk ki egy felnőtt-, illetve egy gyermekjegy árát. (*7 pont*)

3. A trícium, azaz a hármas hidrogénizotóp mennyiségének a fele 12,3 év alatt bomlik el.

a) Mennyi idő alatt bomlik el adott mennyiségű trícium $\frac{15}{16}$ része? (*3 pont*)

b) Egy palack idei bor 350 százalékkal több tríciumot tartalmaz, mint egy – ugyanakkora űrtartalmú – palack ugyanolyan, múlt századi bor. Hány éves lehet a régebbi bor a tríciumtartalma alapján? (*8 pont*)

* https://www.facebook.com/ematlap

4. *a*) Tornaórán egy 12 fős csoport medicinlabdával erősített. Az egyik gyakorlat során mindenki háromszor dobott és a tanár a legnagyobb dobás hosszát méterben feljegyezte. A testnevelő megállapította, hogy a felírt számok terjedelme 5, mediánja és módusza is 9 méter. Alsó kvartilise 8,1 méter, felső kvartilise pedig 10,5 méter. Adjunk meg három különböző adathalmazt, amelyre a fenti megállapítások érvényesek. (*6 pont*)

b) Robinak óra után 12 azonos méretű labdát kell két dobozba beraknia, az egyikben 4, a másikban 8 labda fér el. A labdák közül 7 piros, 3 kék, a többi zöld színű. Hányféleképpen helyezheti el a labdákat Robi, ha az azonos színű labdákat nem különbözteti meg és dobozon belül a labdák elhelyezkedése nem számít? (*8 pont*)

II. rész

5. Egy 28 fős osztályban a matematikatanár háromféleképpen mérte fel a tanulók decemberi teljesítményét: videós beszámoló, interaktív feladatlap, illetve írásbeli dolgozat formájában. Minden tanuló részt vett legalább egyfajta értékelésben. Tudjuk, hogy 15-en videóztak, ugyanennyien pedig pontosan kétfajta értékelés résztvevői voltak. 16-an interaktív feladatokat oldottak meg, 22-en pedig dolgozatot írtak. A tanár találomra kiválaszt egy tanulót, akit szóban is szeretne feleltetni.

a) Mekkora a valószínűsége, hogy olyan tanulót választ, aki mindhárom értékelésben részt vett decemberben? (*9 pont*)

b) Az osztály tanulóinak hány százaléka vett részt mindössze egyfajta értékelésben? (*2 pont*)

c) Legfeljebb hányan lehetnek azok, akik csak dolgozatot írtak? (*5 pont*)

6. Egy 0,4 dm átmérőjű tömör fémgömböt leguríttottak egy golyópályán. A táv első felében 0,12 m/s, a második felében 0,16 m/s átlagsebességgel gurult a gömb.

a) Mekkora volt a gömb (a pálya teljes hosszára vonatkozó) átlagsebessége? (*10 pont*)

Ezután a gömböt megolvasztották és anyagából 0,5 cm sugarú tömör gömböket öntöttek.

b) Hány darab ilyen gömb keletkezhetett az öntés során? (*6 pont*)

7. Gergő a 180-nál kisebb, 6-tal osztható természetes számok mindegyikét felírta egy-egy cetlire, majd a cetliket belerakta egy nagy dobozba.

a) Mennyi a cetliken szereplő számok összege, illetve szorzata, ha minden cetlire különböző számot írt Gergő? (*4 pont*)

Gergő öccse találomra kiválasztott a cetlik közül egyszerre éppen hármat.

b) Mekkora a valószínűsége, hogy legalább két kiválasztott cetlin 10-zel osztható szám szerepel? (*5 pont*)

Ezután Gergő visszatette az összes cetlit a dobozba, jól megkeverte őket, majd véletlenszerűen kiválasztott egy cetlit, felírta a rajta lévő számot, majd ismét visszatette a dobozba. Ezt az eljárást még kétszer megismételte, tehát összesen három számot írt fel.

c) Mekkora a valószínűsége, hogy Gergő nem írta fel a nulla számjegyet? (*7 pont*)

8. *a*) Egy kör két párhuzamos húrja 4 cm és 198 mm hosszúságú. Mekkora lehet a köztük lévő távolság, ha a kör átmérőjének hossza 20,2 cm? (*8 pont*)

b) Egy derékszögű háromszög külső szögeinek ívmértéke – nagyság szerint sorba állítva – egy mértani sorozat három, közvetlenül egymást követő tagja. Adjuk meg a háromszög belső szögeinek fokmértékét. (*8 pont*)

9. Adott a következő két halmaz:

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 < 9\} \quad \text{és} \quad B = \{\text{egyjegyű, pozitív prímszámok}\}.$$

Hány olyan – egymástól különböző – függvény van, amelynek

a) értelmezési tartománya az A, képhalmaza a B halmaz? (*4 pont*)
b) értelmezési tartománya az A, értékkészlete a B halmaz? (*4 pont*)
c) értelmezési tartománya a B, képhalmaza az A halmaz? (*4 pont*)
d) értelmezési tartománya a B, értékkészlete az A halmaz? (*4 pont*)

Kozma Katalin Abigél
Győr

Megoldásvázlatok a 2023/8. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához

I. rész

1. *Az őszi szünetben a Nagy család háromnapos kirándulást tervez. Az első napon a tervezett teljes túra harmadánál* 2 km-*rel többet tettek meg. A második napon a maradék táv harmadánál* 3 km-*rel többet túráztak. Az utolsó napra így a teljes táv harmadánál* 1 km-*rel kevesebb maradt hátra.*

a) *Hány kilométert tettek meg az egyes napokon?* (5 pont)

A családot a nagyszülők is meglátogatták a hétvégén. Az autópályára való felhajtásukat követően az autójuk által megtett utat a másodpercben mért eltelt idő (x) *függvényében a következőképpen írhatjuk le:*

$$f(x) = \begin{cases} 2\,x + 0{,}25\,x^2, & \text{ha } 0 \leqslant x \leqslant 4{,}5; \\ 4{,}25\,x - 5{,}0625, & \text{ha } 4{,}5 < x \leqslant 20. \end{cases}$$

b) *Mennyi utat tett meg az autó a felhajtást követő ötödik másodpercben, ha* $f(x)$ *azt adja meg, hogy hányszor* 10 *métert tett meg az autó?* (*3 pont*)

c) *Igazoljuk, hogy a* $2x + 0{,}25x^2$ *függvény* $x_0 = 4{,}5$ *abszcisszájú pontjában a parabolához húzott érintő tartalmazza az* $f(x)$ *függvény lineáris részét.* (*4 pont*)

Megoldás. a) Jelöljük x-szel a teljes túra hosszát km-ben mérve. Megoldandó az

$$\left(\frac{x}{3}+2\right)+\left(\frac{x-\left(\frac{x}{3}+2\right)}{3}+3\right)+\left(\frac{x}{3}-1\right)=x$$

egyenlet. Ennek megoldása $x=30$. Tehát az első napon 12 km-t, a másodikon és harmadikon pedig 9 km-t tettek meg.

b) Az 5-ödik másodpercben megtett utat az $f(5)$ és $f(4)$ helyettesítési értékek különbségének segítségével határozhatjuk meg. $f(5)-f(4)$ eredményét 10-zel szorozva kapjuk méterben a megtett utat.

$$f(5)=4{,}25\cdot 5-5{,}0625=\frac{259}{16} \quad \text{és} \quad f(4)=2\cdot 4+0{,}25\cdot 4^2=12.$$

A különbség $\frac{67}{16}$, így az 5-ödik másodpercben megtett út 41,875 m.

c) Az $g(x)=2x+0{,}25x^2$ függvény deriváltfüggvénye $g'(x)=2+0{,}5x$. Az érintő egyenletéhez szükséges a deriváltfüggvény $x_0=4{,}5$ pontbeli helyettesítési értéke, ami az érintő meredekségét adja meg:

$$g'(4{,}5)=2+0{,}5\cdot 4{,}5=4{,}25.$$

Valamint kiszámítandó a $g(4{,}5)=14{,}0625$ helyettesítési érték. Ezek segítségével az érintő egyenlete

$$y-14{,}0625=4{,}25\cdot(x-4{,}5),$$

rendezve $y=4{,}25x-5{,}0625$. Ez valóban az $f(x)$ függvény lineáris részével esik egybe.

2. *Egy* felül nyitott, *fából készült, kocka alakú asztali tolltartó külső élei* 10,5 cm *hosszúságúak, a doboz falvastagsága az alján és az oldalain egyaránt* 8 mm.

a) Számítsuk ki a doboz faanyagának térfogatát. *(5 pont)*

b) Legfeljebb milyen hosszúságú lehet az a ceruza, amely beletehető a tolltartóba úgy, hogy nem lóg ki belőle? (A ceruza vastagságát elhanyagoljuk.) *(2 pont)*

A dobozban 8 *darab kék toll,* 5 *darab piros toll és* 2 *darab zöld toll van, amelyek közül egyszerre* 3*-at csukott szemmel kiveszek.*

c) Mekkora a valószínűsége, hogy lesz piros toll is a kiválasztottak között? *(4 pont)*

Megoldás. a) Kiszámítjuk a tömör 105 mm élhosszúságú kocka térfogatát, majd ebből kivonjuk a belső, téglatest alakú üreg térfogatát. Ennek szélessége és hosszúsága egyaránt $105-2\cdot 8=89$ mm, magassága $105-8=97$ mm. A kocka térfogata $105^3=1\,157\,625$ mm^3. Az üreg térfogata $89^2\cdot 97=768\,337$ mm^3. A faanyag térfogata

$$1\,157\,625-768\,337=389\,288\ \text{mm}^3=389{,}3\ \text{cm}^3.$$

b) A leghosszabb ceruza, ami nem lóg ki a tolltartóból olyan hosszú, mint a téglatest alakú üreg testátlója.

$$l=\sqrt{89^2+89^2+97^2}=\sqrt{25\,251}=158{,}9\ \text{mm}.$$

c) A dobozban összesen 15 toll található, amelyek közül 3-at választunk ki. Az összes lehetséges kiválasztások száma $\binom{15}{3} = 455$. A komplementer eseményt vizsgáljuk, a tolltartóban $8 + 2 = 10$ olyan toll található, amely nem piros. Ezek közül 3-at $\binom{10}{3} = 120$ különböző módon tudunk kiválasztani. Annak a valószínűsége, hogy lesz piros toll is a kiválasztottak között:

$$P(A) = 1 - \frac{120}{455} = \frac{67}{91} = 0{,}7363.$$

3. *Az alábbi táblázat egy iskola tíz osztályában mutatja a lányok és fiúk létszámát.*

Osztály	8.A	8.B	9.A	9.B	10.A	10.B	11.A	11.B	12.A	12.B
lány	15	8	15	13	9	18	15	10	13	11
fiú	11	17	12	13	16	9	14	17	14	17

Ezekben az osztályokban a fiúk körében felmérést készítettek, hogy ki szereti a kosárlabdát, a kézilabdát, illetve a focit, a kérdésekre mindenki válaszolt. Kiderült, hogy a megkérdezett fiúk 5%*-a egyiket sem szereti,* 28*-an viszont mindhármat nagyon kedvelik.* 103 *olyan választ találtak az elemzéskor, amelyben legalább két sportot megneveztek a fiúk.*

a) Hány diák válaszában szerepelt egy vagy két sport a kedvencek között? *(4 pont)*

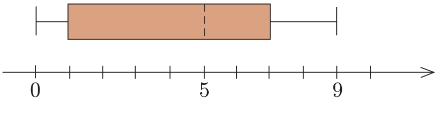
b) Határozzuk meg a lányok számának terjedelmét, átlagát és szórását. *(4 pont)*

c) Számítsuk ki osztályonként a lányok és fiúk száma közötti különbség abszolút értékét. Készítsünk box-plot (doboz)diagramot a kapott értékek alapján. *(5 pont)*

Megoldás. *a*) A fiúk összlétszáma a tíz osztályban 140, közülük $140 \cdot 0{,}05 = 7$ fiú egyik sportot sem kedveli. 28-an kedvelik mindhárom sportot. Az 1 vagy két sportot kedvelők száma tehát $140 - (7 + 28) = 75$. Ezek segítségével kiszámítható, hogy pontosan egy sportot $140 - 7 - 75 - 28 = 30$ fő jelölte meg a felmérésben. Így $30 + 75 = 105$ diák válaszában szerepelt egy vagy két sport a kedvencek között.

b) A lányok számának terjedelme $18 - 8 = 10$, átlaga 12,7, szórása 3,002.

c) A lányok és fiúk száma közötti különbség abszolút értékeit rendezzük növekvő sorrendbe: $0; 1; 1; 3; 4; 6; 7; 7; 9; 9$. Az értékek minimuma 0, maximuma 9, mediánja $\frac{4+6}{2} = 5$, alsó kvartilise a harmadik adat, azaz 1, felső kvartilise a nyolcadik adat, azaz 7. Ezek alapján a box-plot diagram:



Megjegyzés: Az adatsokaság minimuma, illetve maximuma sem kiugró adat, mert az alsó és felső kvartilistől való eltérésük kisebb, mint a félterjedelem másfélszerese.

4. *a*) *Igazoljuk, hogy a* $2x^3+3x^2-1=0$ *egyenletnek az* $\frac{1}{2}$ *egyszeres, míg a* -1 *kétszeres gyöke.* *(4 pont)*

b) *Oldjuk meg a* $2\cos^3 x+3\cos^2 x-1=0$ *egyenletet a valós számok halmazán.* *(4 pont)*

c) *Jellemezzük monotonitás és konvexitás szempontjából az*

$$f(x)=2x^3+3x^2-1$$

függvényt. *(7 pont)*

Megoldás. *a*) Ha az egyenletnek az $\frac{1}{2}$ egyszeres gyöke, akkor gyöktényezős alakjában szerepel az $\left(x-\frac{1}{2}\right)$ tényező. Ha a -1 kétszeres gyöke, akkor a gyöktényezős alakban szerepel az $(x+1)^2$ tényező. Az egyenlet főegyütthatóját figyelembe véve végezzük el a

$$2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+1)^2$$

polinom zárójeleinek felbontását, és a lehetséges összevonásokat. Eredményül kapjuk:

$$(2x-1)\big(x^2+2x+1\big)=2x^3+3x^2-1.$$

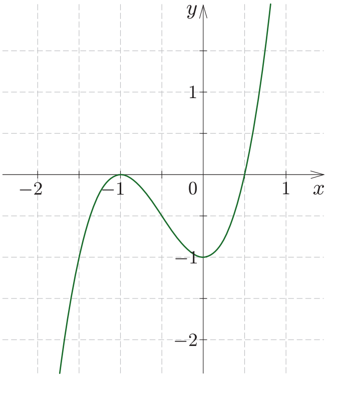
Tehát valóban igaz az állítás.

b) Az *a*) feladatrész alapján megoldandó a $\cos x=\frac{1}{2}$, illetve a $\cos x=-1$ egyenlet. Az első egyenlet megoldásaként $x_{1,2}=\pm\frac{\pi}{3}+k\cdot 2\pi$. A második egyenletből $x_3=\pi+k\cdot 2\pi$ adódik, ahol $k\in\mathbb{Z}$. Ezek valóban megoldásai az eredeti egyenletnek.

c) Határozzuk meg az $f(x)$ függvény deriváltfüggvényét: $f'(x)=6x^2+6x$. Ennek zérushelyei $x_1=0$ és $x_2=-1$. A $]-\infty;-1[$ és a $]0;\infty[$ intervallumokon az első derivált pozitív előjelű, így ott az $f(x)$ függvény szigorúan monoton növekedő. A $]-1;0[$ intervallumon az első derivált negatív előjelű, így ott az $f(x)$ függvény szigorúan monoton csökkenő.

A konvexitás megadásához az $f(x)$ függvény második deriváltját vizsgáljuk: $f''(x)=12x+6$. A második derivált zérushelye $x=-\frac{1}{2}$. A $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right[$ intervallumon a második derivált negatív előjelű, ezért az $f(x)$ függvény konkáv, a $\left]-\frac{1}{2};\infty\right[$ intervallumon a második derivált pozitív előjelű, így ott az $f(x)$ függvény konvex.

Megjegyzés. Az $f(x)=2x^3+3x^2-1$ függvény képe:



5. *Egyenlő szárú háromszöget készítünk* 56 *darab* 1 cm *hosszú pálcikából azok eltörése nélkül, majd az oldalaira kifelé négyzeteket rajzolunk, melyek területének összege* 1056 cm^2.

a) *Igazoljuk, hogy a háromszög szárai* 20 cm *hosszúságúak.* (*6 pont*)

b) *Számítsuk ki a háromszög beírható körének sugarát.* (*3 pont*)

c) *A súlypontból mekkora szögben látszik a háromszög* 16 *cm-es alapja?* (*4 pont*)

Tekintsük a háromszög csúcsait és súlypontját, ezek mindegyikét összekötve egymással egy egyszerű gráfot kapunk.

d) *Van-e ebben a gráfban zárt Euler-vonal?* (*3 pont*)

Megoldás. *a*) Jelöljük az egyenlő szárú háromszög alapját a-val, szárait b-vel. Így a háromszög kerületére és az oldalaira kifelé rajzolt négyzetek területére felírhatóak a következő egyenletek:

$$a + 2b = 56,$$

$$a^2 + 2b^2 = 1056.$$

Az első egyenletből kifejezzük az a alap értékét ($a = 56 - 2b$), majd a második egyenletbe behelyettesítjük:

$$(56 - 2b)^2 + 2b^2 = 1056,$$

$$6b^2 - 224b + 2080 = 0,$$

$$b_1 = 20; \quad b_2 = \frac{52}{3}.$$

A feladatnak csak b_1 értéke adja a megoldását, mert az 1 cm hosszú pálcikákat nem törhetjük el. Így a háromszög szárainak hossza valóban 20 cm.

b) *I. megoldás.* A háromszög alapja 16 cm, szárainak hossza 20 cm. Pitagorasz tételének segítségével kiszámítható a háromszög magassága:

$$m = \sqrt{20^2 - 8^2} = \sqrt{336} = 18{,}33.$$

A háromszög területe így

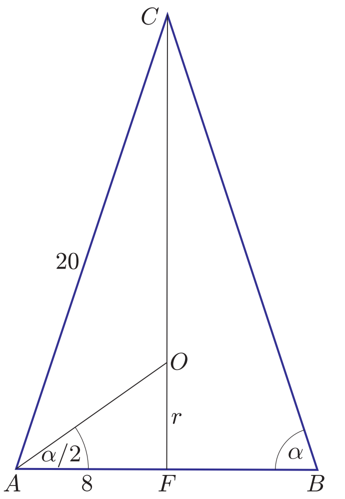
$$T = \frac{16 \cdot 18{,}33}{2} = 146{,}64 \text{ cm}^2.$$

A területre vonatkozó $T = r \cdot s$ összefüggés rendezésével a beírható kör sugara:

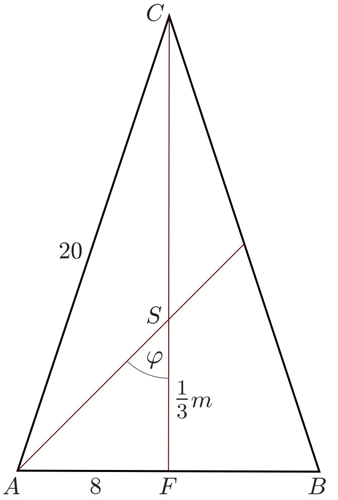
$$r = \frac{146{,}64}{28} = 5{,}24 \text{ cm}.$$

II. megoldás. A háromszög alapon fekvő szögét kiszámítjuk az AFC derékszögű háromszögben.

$$\cos\alpha = \frac{8}{20} \;\Rightarrow\; \alpha = 66{,}42^\circ.$$



b)



c)

A beírható kör O középpontját a szögfelezők metszéspontja adja, ezért az AFO derékszögű háromszögben

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{r}{8}\ \Rightarrow\ r=8\cdot\operatorname{tg}33{,}21^\circ=5{,}24\text{ cm}.$$

c) A háromszög S súlypontja harmadolja a súlyvonalakat, ezért $SF=\frac{1}{3}\cdot 18{,}33=6{,}11$.

Az AFS derékszögű háromszög S csúcsánál lévő szögére felírható, hogy $\operatorname{tg}\varphi=\frac{8}{6{,}11}$, amiből $\varphi=52{,}63^\circ$. A súlypontból a háromszög 16 cm hosszú alapja $2\varphi=105{,}26^\circ$ fokos szögben látszik.

d) A megadott gráf mind a 4 csúcsának fokszáma 3. Az Euler-tétel értelmében egy gráfban akkor és csak akkor van zárt Euler-vonal (vagy Euler-körvonal), ha összefüggő és minden csúcs páros fokszámú. Ez utóbbi feltételt a feladatban meghatározott gráf nem teljesíti, ezért nincs zárt Euler-vonala.

6. *Az újfajta magyar rendszámok a latin ábécé* 5 *magánhangzóját és* 21 *mássalhangzóját, illetve a* 10 *számjegyet használják a következő feltételek mellett:*

– *Vagy mindkét első betű magánhangzó, vagy mindkét első betű mássalhangzó, de nem használhatóak a* CS, GY, LY, NY, SZ, TY, ZS *párosítások.*

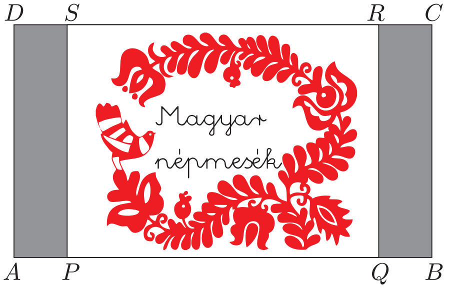
– *Ezt követi még két tetszőleges betű.*

– *Végül három számjeggyel fejeződik be a rendszám, ami nem lehet* 000. *(A rendszámokra még számos egyéb szabály is vonatkozik, de mi most csak ezeket vesszük figyelembe.)*

a) *Hány százalékkal több olyan rendszám lehetséges e szabályok szerint, amelyekben a számokon kívül csak mássalhangzók vannak, mint amelyekben szerepel magánhangzó is? A választ egészre kerekítve adjuk meg.* (*6 pont*)

Elektromos autónkat egy 50 *kilowatt teljesítményű töltőoszlopnál szeretnénk feltölteni. A díjszabási táblázatban az olvasható, hogy kilowattóránként* 210 *forintot kell fizetnünk a töltéskor. Ez az autó* 15 *kilowattóra energiát használ el* 100 km-*es távolságon. A dízelmotoros autó üzemanyag-fogyasztása* 100 km-*enként* 4,6 *liter, amit a benzinkúton literenként* 720 *forintért vásárolhatunk meg.*

b) Hasonlítsuk össze a két autó esetén a 140 km-*es távolságú utazás energia-, illetve üzemanyagköltségét. Van-e olyan távolság, amikor az elektromos autó energiaköltsége magasabb, mint a dízelmotoros autó üzemanyagköltsége? (Feltételezzük, hogy az elektromos autó veszteség nélkül fel tudja használni a töltéskor kifizetett energiát.)* *(4 pont)*



Az utazás alatt a gyerekek mesefilmet néztek egy olyan tableten, melynél a szélesség és magasság aránya 16 : 9*, képátlójának hossza* 29 cm*. A mesefilm már régi, képaránya* 4 : 3*, ezért a tablet két oldalán egy-egy fekete sáv látható.*

c) A képernyő maximális kihasználtsága mellett határozzuk meg a fekete sávok összterületét. *(6 pont)*

Megoldás. *a*) A csak mássalhangzókat tartalmazó rendszámok első két betűje $21\cdot 21-7=434$-féle lehet. A következő két betű $21\cdot 21=441$-féle lehet. Az utolsó három számjegy $1000-1=999$-féle lehet. Így összesen

$$434\cdot 441\cdot 999=191\,202\,606$$

csak mássalhangzókat tartalmazó rendszám készíthető.

A magánhangzókat is tartalmazó rendszámokat úgy számolhatjuk össze, hogy az összes lehetséges eset számából levonjuk azokat, amelyek csak mássalhangzókat tartalmaznak. Az összes lehetséges eset száma:

$$(5\cdot 5+21\cdot 21-7)\cdot 26\cdot 26\cdot 999=309\,973\,716.$$

Tehát 118 771 110 magánhangzót is tartalmazó rendszám készíthető.

$$\frac{191\,202\,606}{118\,771\,110}=1{,}609,$$

ezért egészre kerekítve 61%-kal több csak mássalhangzót tartalmazó rendszám van.

b) Az elektromos autó a 140 km-es távolságon $1{,}4\cdot 15=21$ kWh energiát használ, amelynek energiaköltsége $21\cdot 210=4410$ forint. A dízelmotoros autó 140 km-en $1{,}4\cdot 4{,}6=6{,}44$ liter üzemanyagot használ, amelynek költsége $6{,}44\cdot 720=4636{,}8$ forint.

Nincs olyan távolság, amikor a elektromos autó energiaköltsége magasabb, mint a dízelmotoros autó üzemanyagköltsége, mert x km-es távolság esetén az elektromos autó költsége

$$\frac{x}{100}\cdot 15\cdot 210=31{,}5x,$$

ami kevesebb, mint a dízelmotoros autó

$$\frac{x}{100} \cdot 4{,}6 \cdot 720 = 33{,}12x$$

üzemanyagköltsége.

c) Az $ABCD$ téglalap jelenti a feladatban szereplő tabletet, amelynél az oldalak aránya $AB : BC = 16 : 9$, képátlója pedig $AC = 29$ cm. Az ABC derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tételt felírva:

$$(16x)^2 + (9x)^2 = 29^2.$$

Ennek megoldásaként $x = 1{,}58$ cm adódik, ezért a tablet szélessége 25,28 cm, magassága 14,22 cm. A tablet magassága adja a mesefilm magasságát, így annak szélessége $\frac{4}{3} \cdot 14{,}22 = 18{,}96$ cm. A tablet területe $25{,}28 \cdot 14{,}22 = 359{,}48\ \mathrm{cm}^2$, a mesefilm területe $18{,}96 \cdot 14{,}22 = 269{,}61\ \mathrm{cm}^2$. A különbség $89{,}87\ \mathrm{cm}^2$, ez adja a fekete sávok összterületét.

7. *Tekintsük a következő állítást:* Ha egy szám osztható 3-mal és 6-tal is, akkor osztható 18-cal.

a) Fogalmazzuk meg az állítás megfordítását, és adjuk meg az így kapott állítás logikai értékét, indoklással együtt. *(3 pont)*

b) Fogalmazzunk meg egy-egy olyan kijelentést, amelyek a 24-gyel való oszthatósághoz kapcsolódóan:

(i) szükséges, de nem elégséges
(ii) elégséges, de nem szükséges
(iii) szükséges és elégséges feltételt adnak meg. *(3 pont)*

c) Bizonyítsuk be, hogy a $4n^3 + 20n$ kifejezés minden pozitív egész n esetén osztható 24-gyel. *(5 pont)*

d) Létezik-e olyan n pontú teljes gráf, amelynek $4n^3 + 20n$ éle van? *(5 pont)*

Megoldás. *a*) A megfordítás: *Ha egy szám osztható 18-cal, akkor osztható 3-mal és 6-tal is.* Ennek logikai értéke: *igaz,* mert a 18 többszörösei a 18 minden osztójának, így a 6-nak és a 3-nak is többszörösei.

b) (*i*) *A szám osztható 2-vel.*

(*ii*) *A szám osztható 48-cal.*

(*iii*) *A szám osztható 3-mal és 8-cal.*

c) *I. megoldás.*

$$4n^3 + 20n = 24n + 4n^3 - 4n = 24n + 4n(n^2 - 1) = 24n + 4(n-1)n(n+1).$$

A kifejezés első tagja osztható 24-gyel. A második tagjában a 4-es szorzó után három egymást követő egész szám következik, amelyek közül legalább az egyik osztható 2-vel, pontosan egy pedig osztható 3-mal, így ez a tag is osztható $4 \cdot 2 \cdot 3 = 24$-gyel. Ezért az eredeti kifejezés is osztható 24-gyel, így igazoltuk az állítást.

II. megoldás. A bizonyítást teljes indukció segítségével is elvégezhetjük.

$n=1$ esetén a kifejezés helyettesítési értéke 24, ezért igaz az állítás. Tegyük fel, hogy $n=k$ esetén igaz, hogy $4k^3+20k$ osztható 24-gyel. Ezt felhasználva igazoljuk $n=k+1$-re az állítást.

$$4(k+1)^3+20(k+1)=4\big(k^3+3k^2+3k+1\big)+20k+20=$$
$$=4k^3+12k^2+12k+4+20k+20=4k^3+20k+24+12k^2+12k=$$
$$=4k^3+20k+24+12k(k+1).$$

Az első két tag összege az indukciós feltétel miatt osztható 24-gyel, a harmadik tag maga 24, az utolsó tagban szereplő $k(k+1)$ két tényezője két egymást követő pozitív egész szám, ezért az egyik páros, így a 12-szerese osztható 24-gyel. Így minden pozitív egész számra igazoltuk az állítást.

d) Az n pontú teljes gráf éleinek száma $\frac{n(n-1)}{2}$, ezért megoldandó a

$$4n^3+20n=\frac{n(n-1)}{2}$$

egyenlet. n-nel ($n\neq 0$) való osztás, és rendezés után a $8n^2-n+41=0$ másodfokú egyenlet adódik, amelynek nincs valós megoldása. Ezért nincs olyan n pontú teljes gráf, amelynek $4n^3+20n$ éle van.

8. *Zsolt a nyáron* 6 *hét alatt diákmunkával kereste meg új telefonjának árát. Az első héten bemelegítésként* 20 *órát dolgozott, majd minden héten az előző hetinél* 4 *órával többet.*

a) Mennyi pénzt keresett összesen Zsolt, ha a munkájáért 1790 *forintot kapott óránként?* (*2 pont*)

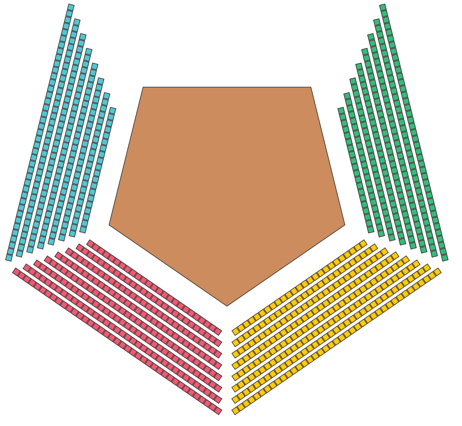
A nyár végén Zsolt megnézett egy szabadtéri előadást, ahol a nézőtér 4 *szektorból állt. A két szélső szektor első sorában szektoronként* 20 – 20 *ülőhely van, majd hátrafelé minden sorban szektoronként* 3*-mal több, a középső két szektor első sorában szektoronként* 25 – 25 *néző foglalhat helyet, majd minden sorban szektoronként* 2*-vel több. A sorokat elölről teljesen feltöltötték* 3 210 *nézővel (kivéve az utolsó megkezdett sort).*

b) Hányan ültek az utolsó megkezdett sorban? (*5 pont*)

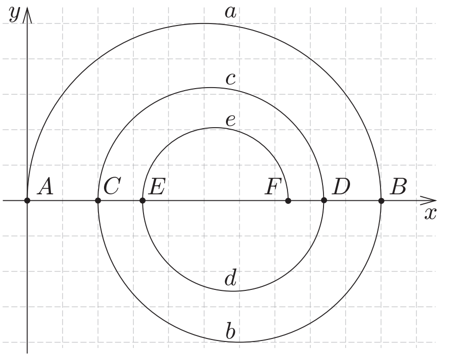
Zsolt a telefonjára letöltötte a GeoGebra *alkalmazást és csigavonalat rajzolt úgy, hogy a koordinátarendszer origójából indulva megrajzolt egy* 5 *egység sugarú a félkörívet, amelynek átmérője az x-tengelyre illeszkedik. A B pontból folytatta a rajzolást a b körívvel, amelynek sugara az első kör sugarának* 80%*-a, majd ezen eljárást követve folytatta tovább a rajzot.*

c) Hányadik körív után lesz a csigavonal 65 *egységnél hosszabb?* (*5 pont*)

d) Melyik az a pontja a koordinátarendszernek, amelyik mindegyik félkörív két végpontja között helyezkedik el, akármeddig folytatja is Zsolt a rajzolgatást? (*4 pont*)



b)



c)

Megoldás. *a*) A 6 hét alatt ledolgozott munkaórák száma

$$20 + 24 + \dots + 40 = 180.$$

Így a diákmunkával Zsolt $180 \cdot 1\,790 = 322\,200$ forintot keresett.

b) Jelöljük n-nel a megkezdett sorok számát, a széksorokban elhelyezett ülőhelyek száma számtani sorozatot alkot. A szektorokra alkalmazva a számtani sorozat összegképletét a férőhelyek száma a szélső szektorokban

$$\frac{n\big(20 + 20 + (n-1)\cdot 3\big)}{2},$$

a középső szektorokban

$$\frac{n\big(25 + 25 + (n-1)\cdot 2\big)}{2}.$$

Megoldandó tehát a

$$2 \cdot \frac{n\big(20 + 20 + (n-1)\cdot 3\big)}{2} + 2 \cdot \frac{n\big(25 + 25 + (n-1)\cdot 2\big)}{2} = 3\,210$$

egyenlet. A rendezés után az $n^2 + 17n - 642 = 0$ másodfokú egyenletet kapjuk, amelynek a pozitív gyöke $n_1 = 18{,}23$. (Másik gyöke negatív, ami nem lehet megoldása a feladatnak.) Tehát 18 sor teljesen megtelt minden szektorban, a 19. sort kezdték meg feltölteni a nézők. A 18 sorban összesen

$$2 \cdot \frac{18(40 + 17\cdot 3)}{2} + 2 \cdot \frac{18(50 + 17\cdot 2)}{2} = 3\,150$$

néző számára van ülőhely. Ezért $3\,210 - 3\,150 = 60$ néző ült az utolsó megkezdett sorban.

Megjegyzés. A feladat megoldható egyetlen olyan számtani sorozat segítségével is, melynek első tagja $a_1 = 40 + 50 = 90$, differenciája pedig $d = 4 + 6 = 10$.

c) A félkörívek hosszai olyan mértani sorozatot alkotnak, amelynek első tagja $b_1 = 5\pi$, hányadosa 0,8. A mértani sorozat összegképletét használva

$$5\pi \cdot \frac{0{,}8^n - 1}{0{,}8 - 1} > 65,$$

$$0{,}8^n < 0{,}172,$$

$$n > \log_{0,8} 0{,}172 = \frac{\lg 0{,}172}{\lg 0{,}8} = 7{,}89.$$

Tehát a 8. körív megrajzolása után lesz a csigavonal hosszabb, mint 65 egység.

d) A félkörívek végpontjai az x-tengelyen helyezkednek el. A keresett pont abszcisszáját végtelen mértani sor összegeként kapjuk:

$$10 - 10 \cdot 0{,}8 + 10 \cdot 0{,}8^2 - 10 \cdot 0{,}8^3 + \cdots .$$

A végtelen mértani sor hányadosa $q = -0{,}8$, amely abszolút értékben kisebb, mint 1, ezért a végtelen mértani sor konvergens. Összege

$$S = \frac{10}{1 - (-0{,}8)} = \frac{50}{9}.$$

Tehát Zsolt az $\left(\frac{50}{9}; 0\right)$ koordinátájú pontba jut.

9. *Tekintsük a k_1 kört, amelynek egyenlete $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 25$, illetve a k_2 kört, amelynek egyenlete $x^2 + y^2 - 16x - 4y + 55 = 0$.*

a) *Igazoljuk, hogy a két körlap közös részének területe egy tizedesjegyre kerekítve* 10,9 *területegység.* (*8 pont*)

b) *Mekkora a valószínűsége annak, hogy ha véletlenszerűen kiválasztunk egy pontot a két körlap által összesen lefedett részen, akkor az a két körlap közös részébe esik?* (*2 pont*)

A k_1 körvonal által határolt zárt körlap 81 *rácspontot tartalmaz, melyek közül nagyon rövid időre egy-egy pont véletlenszerűen felvillan.*

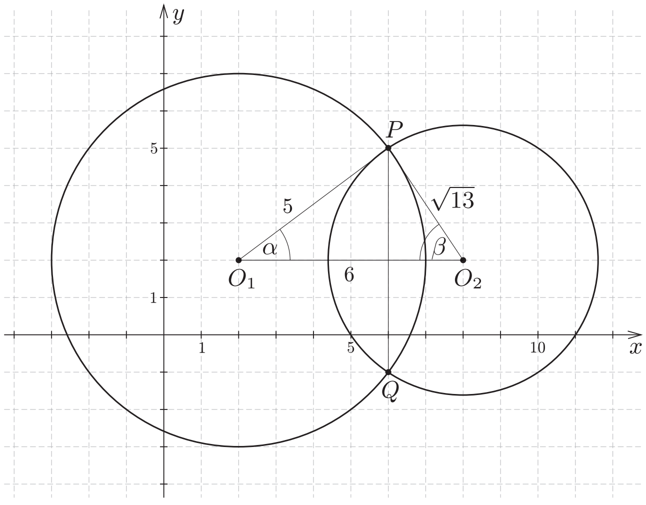
c) *Hány felvillanás után mondhatjuk, hogy* 95%*-nál nagyobb a valószínűsége, hogy volt olyan felvillanó pont, amely a körvonalra esett?* (*6 pont*)

Megoldás. *a*) A k_1 kör középpontja $O_1(2;2)$ sugara $r_1 = 5$. A k_2 kör egyenletének teljes négyzetté alakított formája

$$(x-8)^2 + (y-2)^2 = 13,$$

ezért középpontja $O_2(8;2)$ sugara $r_2 = \sqrt{13}$.

A két középpont távolsága $O_1O_2 = 6$. Tekintsük az O_1O_2P háromszöget, amelynek O_1 csúcsánál lévő α szögét és O_2 csúcsánál lévő β szögét koszinuszté-



tel segítségével számíthatjuk ki:

$$\left(\sqrt{13}\right)^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \cos\alpha,$$

$$\cos\alpha = \frac{4}{5} \Rightarrow \alpha = 36{,}87°;$$

$$5^2 = \left(\sqrt{13}\right)^2 + 6^2 - 2 \cdot \sqrt{13} \cdot 6 \cdot \cos\beta,$$

$$\cos\beta = \frac{2\sqrt{13}}{13} \ \Rightarrow\ \beta = 56{,}31°.$$

A két körlap közös területét a PQ szakasz két körszeletre osztja. Mindegyik körszelet területét úgy határozzuk meg, hogy a 2α, illetve a 2β középpontú körcikkek területéből levonjuk az O_1PQ, illetve az O_2PQ háromszögek területét.

A jobb oldali körszelet területe:

$$t_1 = \frac{5^2\pi}{360°} \cdot 2\alpha - \frac{5^2 \cdot \sin 2\alpha}{2} = 4{,}088.$$

A bal oldali körszelet területe:

$$t_2 = \frac{\left(\sqrt{13}\right)^2\pi}{360°} \cdot 2\beta - \frac{\left(\sqrt{13}\right)^2 \cdot \sin 2\beta}{2} = 6{,}776.$$

Összegük egy tizedesjegyre kerekítve valóban 10,9 területegység.

b) A két körlap által lefedett terület kiszámítható úgy, hogy a két kör területének összegéből levonjuk a közös területet:

$$5^2\pi + \left(\sqrt{13}\right)^2\pi - 10{,}9 = 108{,}48.$$

A kérdésre geometriai valószínűségi modell segítségével válaszolhatunk:

$$p = \frac{10{,}9}{108{,}48} = 0{,}1.$$

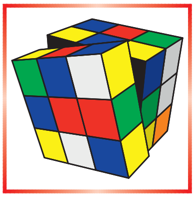
c) A megadott pontok közül 12 esik a körvonalra. Jelölje A azt az eseményt, hogy n felvillanás után volt olyan pont, amely a körvonalra esett. Ennek komplementere $\overline{A}$ jelenti azt az eseményt, hogy egyik felvillanás sem esett a körvonalra. A feltétel szerint $P(\overline{A}) \leqslant 1 - 0{,}95 = 0{,}05$. Egy tetszőleges felvillanó pont esetén $\frac{12}{81}$ annak a valószínűsége, hogy az a körvonalra illeszkedik. A felvillanások teljesen véletlenszerűen történnek, ezért binomiális eloszlást használhatunk.

$$P(\overline{A}) = \binom{n}{0} \cdot \left(\frac{12}{81}\right)^0 \cdot \left(1 - \frac{12}{81}\right)^n \leqslant 0{,}05,$$

$$\left(\frac{69}{81}\right)^n \leqslant 0{,}05.$$

Vegyük mindkét oldal $\frac{69}{81}$ alapú logaritmusát ügyelve arra, hogy ez a logaritmusfüggvény szigorúan monoton csökkenő. Mivel ebből $n \geqslant 18{,}68$, így legalább 19 felvillanást kell megvárni, utána mondhatjuk, hogy 95%-nál nagyobb a valószínűsége, hogy volt olyan felvillanó pont, amely a körvonalra esett.

Jócsik Csilla
Győr



Rejtvények, ördöglakatok

Köss csomót összekötött kézzel!

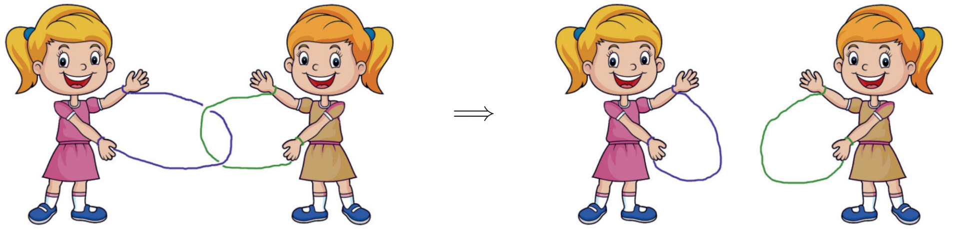
Rovatunkban minden hónapban valamilyen szórakoztató matematikai fejtörőt mutatunk be. Ezek között fontos helyet foglalnak el a különböző kirakós játékok, topológiai feladványok, ördöglakatok és a matematikát felhasználó bűvészmutatványok.

Manapság szinte mindent meg lehet találni az interneten, de az igazi élményt az adja, ha a feladatokat magunk oldjuk meg, a bűvészmutatványok trükkjeit mi találjuk ki, és a szükséges kellékeket is mi tervezzük meg és készítjük el. Próbáljuk meg a feladatokat továbbgondolni, általánosítani, igyekezzünk új feladatokat kitalálni.

A megoldásokat, általánosításokat a `rejtveny.komal@gmail.com` címen várjuk. Ezek a pontversenyekbe nem számítanak bele, de a legjobbakat – akár cikk vagy videó formájában – a honlapunkon vagy itt a Lapban örömmel közöljük.

Lánc, lánc, gyereklánc

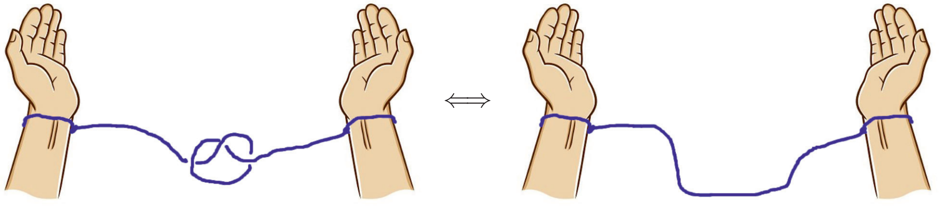
Diákrendezvények, partik gyakori feladata a következő. Kérünk két önként jelentkezőt, és mindkettőnek összekötjük a kezeit egy-egy 1–1,5 méter hosszú zsinórral úgy, hogy a gyerekek és zsinórok által alkotott hurkok át legyenek bújtatva egymáson, mint két láncszem. A két gyerek feladata az, hogy szabaduljanak ki – a két láncszemet válasszák szét – úgy, hogy a madzagot nem szabad kikötni, a zsinórnak végig a csuklójukon kell maradnia.



A legtöbb esetben a gyerekek azonnal elkezdenek átbújni a zsinórok alatt, fölött vagy között, esetleg mindezt fejen állva, a közönség nagy derültségére . . .

Köss csomót!

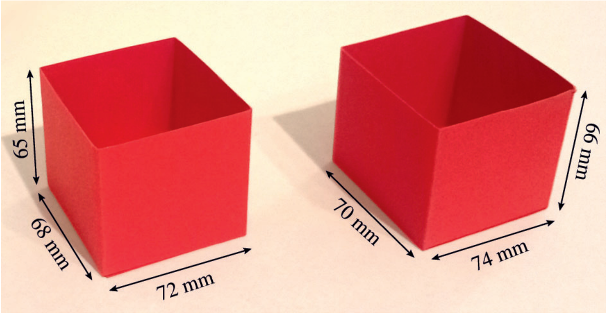
A feladat egyszemélyes változata, hogy a két kezünket kötjük össze egy madzaggal úgy, hogy a madzag közepén van egy csomó. A feladat az, hogy a madzagot csomózzuk ki, majd csomózzuk vissza, ismét csak úgy, hogy a csuklónkra kötött madzagot nem szabad kikötni.



A novemberi bűvészmutatvány megoldása

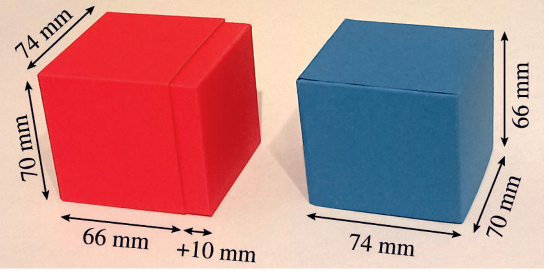
Az előző részben bemutattunk egy piros és egy kék papírdobozt azzal a meglepő tulajdonsággal, hogy bármelyik dobozt bele lehetett csomagolni a másik dobozba.

A dobozok ugyanakkorák, de nem pontosan kocka alakúak; a képeken látható példányok esetében a dobozok külső fele $74 \times 70 \times 66$, a belső fele pedig $72 \times 68 \times 65$ milliméter, a legrövidebbik él irányában lehet a két fél dobozt egymásba csúsztatni.

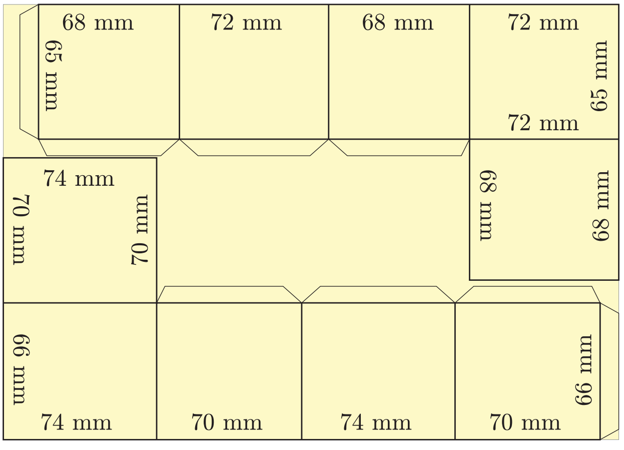


Minden papírréteg nagyjából 1 milliméterrel csökkenti a doboz belső méretét (ezért is választottam a belső fél doboz magasságát 1, a két hosszabb élét 2 milliméterrel kisebbnek), ezért a becsukott, $74 \times 70 \times 66$ méretű dobozba már csak egy körülbelül $70 \times 66 \times 64$ méretű kisebb doboz férne bele.

Ha viszont a dobozt nem csukjuk be teljesen, hanem csak annyira, hogy a belső fél doboz 10 milliméterrel kilógjon a külső félből, akkor az eddigi legrövidebb (66 milliméteres) él lesz a doboz leghosszabb, 76 milliméteres éle, és így már – elforgatva! – belefér a teljesen becsukott másik doboz.



Az alábbi *ábrán* látható háló alapján egy A4-es méretű kartonlapból a doboz mindkét fele kivágható és összeragasztható.



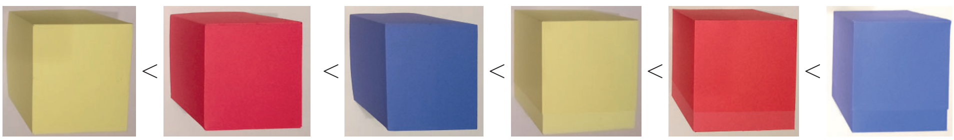
Három dobozzal?

A három dobozos változat nem látszik lehetségesnek ugyanakkora dobozokkal. A megvalósítás, amit itt mutatok, három különböző méretű dobozt használ:

	kék	piros	sárga
külső fél doboz	$178 \times 166 \times 154$	$174 \times 162 \times 152$	$170 \times 158 \times 150$
belső fél doboz	$176 \times 164 \times 153$	$172 \times 160 \times 151$	$168 \times 156 \times 149$

A dobozokat B2 (70×50 cm) méretű kartonlapokból készítettem el, a fentihez hasonló szabásmintákkal.

A sárga doboz belefér a pirosba, a piros a kékbe. A kék doboz – elforgatva – belefér a nem teljesen becsukott sárgába, a nem teljesen becsukott sárga belefér a nem teljesen becsukott piros dobozba, végül a nem teljesen becsukott piros doboz is belefér a nem teljesen becsukott kék dobozba.



A három doboz összesen ötféle sorrendben pakolható egymásba; egyedül csak a kék–piros–sárga eset nem lehetséges, amikor a legnagyobb van legbelül, és a legkisebb van kívül. A mutatvány videófelvétele megtekinthető ezen a címen:

`https://youtu.be/_ReYQUWp4aM`

Kós Géza

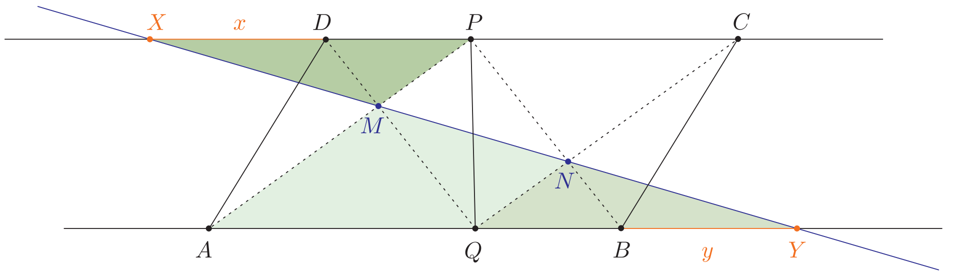
C gyakorlat megoldása

C. 1740. *Az $ABCD$ paralelogramma CD oldalán felvesszük a P belső pontot, a CD-vel párhuzamos AB oldalon a Q belső pontot. A PA és QD szakaszok metszéspontja M, a PB és QC szakaszok metszéspontja N.*

Tegyük fel, hogy $MN \nparallel AB$, és MN a CD egyenesét az X, AB egyenesét az Y pontban metszi. Bizonyítsuk be, hogy $DX = BY$.

(*Amerikai versenyfeladat*)

I. megoldás. Legyen az $ABCD$ paralelogramma AB és CD oldalának hossza a, valamint legyen $DX = x$, illetve $BY = y$. Azt kell bizonyítanunk, hogy $x = y$. Ehhez tekintsük az *1. ábrát.*



1. ábra

A feltételekből következik, hogy az M és az N metszéspontok mindig létrejönnek, és minden lehetséges esetben különböznek is egymástól, így a P, Q pontok bármely, a feltételnek megfelelő elhelyezése esetén az MN egyenes is mindig létezik és mivel $MN \nparallel AB$, ezért az X, Y metszéspontok is létrejönnek.

Az $AQPD$ és $CPQB$ négyszögek trapézok, átlóik metszéspontja M, illetve N.

A trapéz átlóinak metszéspontja az átlókat a párhuzamos oldalak arányában osztja, ezért az $AQPD$ trapézban

$$\frac{PM}{MA} = \frac{PD}{AQ}, \tag{1}$$

a $CPQB$ trapézban pedig

$$\frac{CN}{NQ} = \frac{CP}{BQ} = \frac{a - PD}{BQ}. \tag{2}$$

Az AB és CD egyenesek párhuzamossága miatt az XMP és YMA háromszögek megfelelő szögei egyenlők, ezért a két háromszög hasonló, és így az (1) egyenlet felhasználásával

$$\frac{PM}{MA} = \frac{PD}{AQ} = \frac{x + PD}{a + y}. \tag{3}$$

Hasonló módon láthatjuk be, hogy az XNC és YNQ háromszögek is hasonlók, ezért (2) szerint

$$\frac{CN}{NQ} = \frac{CP}{BQ} = \frac{a - PD}{BQ} = \frac{a + x}{y + BQ}. \tag{4}$$

A műveletek elvégzésével és rendezéssel a (3) egyenletből azt kapjuk, hogy

$$x \cdot AQ + PD \cdot AQ = PD \cdot a + PD \cdot y, \tag{5}$$

a (4) egyenletből pedig azt, hogy

$$x \cdot BQ + PD \cdot BQ = y \cdot a - PD \cdot y. \tag{6}$$

Az (5) és (6) egyenletek megfelelő oldalait összeadva és figyelembe véve, hogy $AQ+BQ=a$, adódik az

$$x\cdot a+PD\cdot a=y\cdot a+PD\cdot a$$

egyenlőség, ahonnan rendezés, és a pozitív a számmal való osztás után $x=y$ következik, amit bizonyítani akartunk.

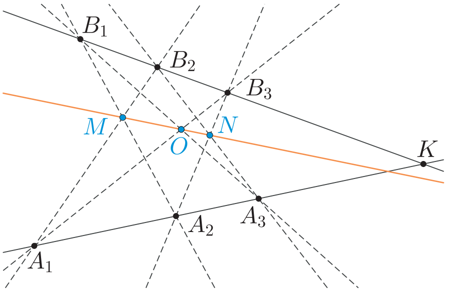
A KöMaL honlapon látható megoldás

Megjegyzések. 1. Jelöljük az $ABCD$ paralelogramma átlóinak metszéspontját K-val. Ekkor könnyen bizonyítható, hogy az XDK és YBK háromszögek egybevágók, ezért az X, K, Y pontok egy egyenesre illeszkednek. Ez azt is jelenti, hogy az MN egyenes áthalad a paralelogramma K szimmetriaközéppontján.

2. Az a megállapítás, hogy az MN egyenes áthalad a paralelogramma középpontján, a *KöMaL*-ban 2006 májusában kitűzött **B. 3914.** számú feladat állítása. Ezt használta fel megoldásában *Kerekes András* (Szeged, Radnóti Miklós Kís. Gimn., 9. évf.).

3. A feladat megoldása lényegesen egyszerűsíthető a *Papposz–Pascal*-tétel segítségével. A tétel kimondja:

Ha A_1, A_2, A_3 egy egyenesnek és B_1, B_2, B_3 egy másik egyenesnek a két egyenes közös pontjától különböző három-három pontja, akkor az A_1B_2 és A_2B_1 egyenesek, továbbá az A_2B_3 és A_3B_2 egyenesek, illetve az A_3B_1 és A_1B_3 egyenesek metszéspontjai egy egyenesen vannak (*2. ábra*).



2. ábra

Ha az A_1, A_2, A_3 pontokat tartalmazó egyenes és a B_1, B_2, B_3 pontokat tartalmazó egyenes párhuzamos (ekkor az egyenesek K-val jelölt közös pontja ideális pont), továbbá $A_1A_3=B_1B_3$, akkor $A_1A_3B_3B_1$ paralelogramma.

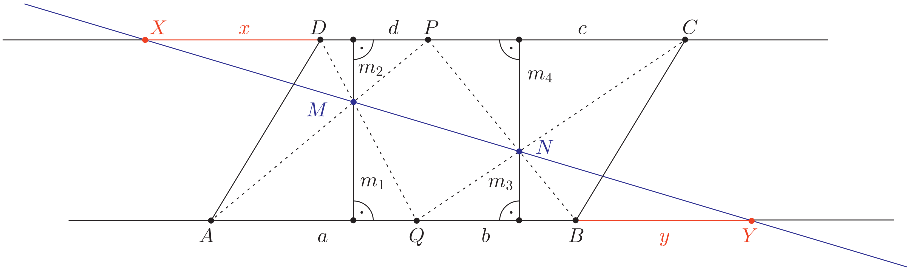
Ekkor az $A_1=A$, $A_3=B$, $B_3=C$, $B_1=D$ és $B_2=P$, $A_2=Q$ választással azt kapjuk, hogy a PA és QD egyenesek M, illetve a PB és QC egyenesek N metszéspontja ugyanarra az egyenesre illeszkedik, mint az AC és BD egyenesek O metszéspontja. Az O pont azonban éppen az $ABCD$ paralelogramma középpontja.

Az MN egyenes tehát áthalad a paralelogramma O szimmetriacentrumán, ezért az MN egyenesnek a CD, illetve AB egyenesekkel való X, illetve Y metszéspontjai is szimmetrikusan helyezkednek el az O pontra nézve. Ebből azonnal következik, hogy $DX=BY$.

(A *Papposz–Pascal*-tétel és bizonyítása megtalálható például *Hajós György: Bevezetés a geometriába* című egyetemi tankönyvében a 451. oldalon.)

II. megoldás. A feladat feltételei miatt az X és Y metszéspontok mindig létrejönnek. Legyen a *3. ábrán* $DX=x$ és $BY=y$, továbbá $AQ=a$, $BQ=b$ és $CP=c$, $DP=d$, valamint az M pontnak az AB, illetve CD egyenestől mért távolsága m_1, illetve m_2, az N pontnak pedig ezen két egyenestől való távolsága legyen m_3, illetve m_4.

Az AQM és PDM háromszögek, illetve az AYM és PXM háromszögek megfelelő szögei az AB és CD egyenesek párhuzamossága miatt egyenlők, ezért



3. ábra

az AQM és PDM, illetve AYM és PXM háromszögek hasonlók. Ezért a megfelelő oldalak, illetve a megfelelő oldalakhoz tartozó magasságok aránya a két-két háromszögben egyenlő, azaz

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a}{d}, \qquad \frac{m_1}{m_2} = \frac{a+b+y}{d+x}. \tag{1}$$

Az (1) összefüggésből azonnal következik, hogy

$$\frac{a}{d} = \frac{a+b+y}{d+x},$$

ahonnan a műveletek elvégzése és rendezés után kapjuk, hogy

$$ax = bd + yd. \tag{2}$$

Hasonlóan egyszerűen láthatjuk be, hogy a BQN és CPN háromszögek, illetve a QYN és CXN háromszögek hasonlók, így

$$\frac{m_3}{m_4} = \frac{b}{c}, \qquad \frac{m_3}{m_4} = \frac{b+y}{c+d+x}, \tag{3}$$

ebből pedig

$$\frac{b}{c} = \frac{b+y}{c+d+x}$$

következik. A kapott egyenletben a nevezőkkel való szorzás és rendezés után adódik, hogy

$$bx = cy - bd. \tag{4}$$

Összeadva a (2) és (4) egyenletek megfelelő oldalait, azt kapjuk, hogy

$$x(a+b) = y(c+d). \tag{5}$$

Mivel $AB = a + b$ és $CD = c + d$, illetve a paralelogramma szemközti oldalainak hossza egyenlő, ezért nyilvánvaló, hogy $a + b = c + d$.

Így az (5) egyenlet mindkét oldalát az $a + b = c + d$ tényezővel osztva az $x = y$ egyenlőséghez jutunk, és ez éppen a feladat állítása.

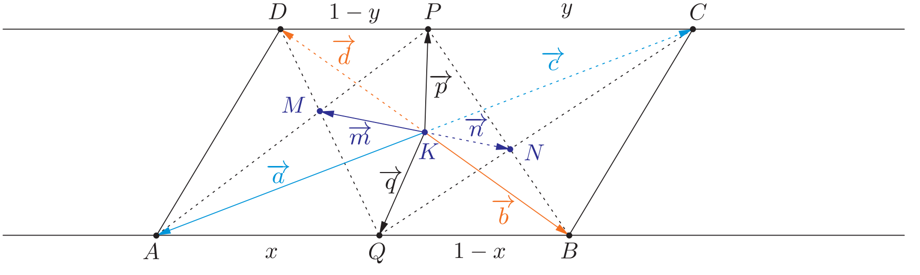
Keszthelyi Eszter (Hong Kong, Li Po Chun United World College, 11. évf.) dolgozata alapján

III. megoldás. Az általánosság megsértése nélkül feltehetjük, hogy

$$AB = CD = 1.$$

Legyen az AQ szakasz hossza x, a CP szakasz hossza y, ezzel $BQ = 1 - x$ és $DP = 1 - y$, a feltételek miatt $BQ > 0$ és $DP > 0$. Legyen továbbá a paralelogramma átlóinak metszéspontja K. Bizonyítani fogjuk, hogy az M, K, N pontok egy egyenesen vannak.

Rajzoljunk vektorokat a K pontból az A, B, C, D, illetve P, Q, M, N pontokba. A vektorokat a pontoknak megfelelő kisbetűvel jelöljük a *4. ábra* szerint.



4. ábra

Ismeretes, hogy

$$\overrightarrow{q} = \frac{BQ}{AQ + BQ}\overrightarrow{a} + \frac{AQ}{AQ + BQ}\overrightarrow{b},$$

tehát az ábra jelöléseivel

$$\overrightarrow{q} = (1 - x)\overrightarrow{a} + x\overrightarrow{b}. \tag{1}$$

Hasonlóképpen

$$\overrightarrow{p} = \frac{DP}{CP + DP}\overrightarrow{c} + \frac{CP}{CP + DP}\overrightarrow{d}$$

alapján azt kapjuk, hogy

$$\overrightarrow{p} = (1 - y)\overrightarrow{c} + y\overrightarrow{d}. \tag{2}$$

A továbbiakban az (1) és (2) összefüggések segítségével kifejezzük az $\overrightarrow{m}$ és $\overrightarrow{n}$ vektorokat.

AQ és DP párhuzamossága miatt az AQM és PDM háromszögek megfelelő szögei egyenlők, tehát a két háromszög hasonló, ezért teljesül, hogy

$$\frac{QM}{DM} = \frac{x}{1 - y},$$

ebből pedig következik, hogy

$$\frac{QM}{DM + QM} = \frac{x}{x + 1 - y}, \qquad \frac{DM}{DM + QM} = \frac{1 - y}{x + 1 - y}. \tag{3}$$

Hasonlóan állapíthatjuk meg, hogy a BQN és a PCN háromszögek hasonlók, ezért

$$\frac{BN}{PN} = \frac{1-x}{y},$$

így

(4) $$\frac{BN}{BN+PN} = \frac{1-x}{1-x+y}, \qquad \frac{PN}{BN+PN} = \frac{y}{1-x+y}.$$

Az $\overrightarrow{m}$ vektort kifejezhetjük a $\overrightarrow{q}$ és $\overrightarrow{d}$, az $\overrightarrow{n}$ vektort pedig a $\overrightarrow{p}$ és $\overrightarrow{b}$ vektorokkal:

$$\overrightarrow{m} = \frac{DM}{DM+QM}\overrightarrow{q} + \frac{QM}{DM+QM}\overrightarrow{d},$$

illetve

$$\overrightarrow{n} = \frac{BN}{BN+PN}\overrightarrow{p} + \frac{PN}{BN+PN}\overrightarrow{b}.$$

Ebből (3) és (4) alapján azt kapjuk, hogy

(5) $$\overrightarrow{m} = \frac{1-y}{x+1-y}\overrightarrow{q} + \frac{x}{x+1-y}\overrightarrow{d}, \qquad \overrightarrow{n} = \frac{1-x}{1-x+y}\overrightarrow{p} + \frac{y}{1-x+y}\overrightarrow{b}.$$

Az (5) vektoregyenletekből (1) és (2) felhasználásával két újabb vektoregyenletet kapunk, amelyekben még azt is figyelembe vesszük, hogy a paralelogramma tulajdonságai miatt $\overrightarrow{a}$ és $\overrightarrow{c}$, illetve $\overrightarrow{b}$ és $\overrightarrow{d}$ ellentett vektorok, azaz $\overrightarrow{c} = -\overrightarrow{a}$, illetve $\overrightarrow{b} = -\overrightarrow{d}$.

A műveletek elvégzésével és rendezéssel előbb

$$\overrightarrow{m} = \frac{(1-x)(1-y)}{x+1-y}\overrightarrow{a} + \frac{xy}{x+1-y}\overrightarrow{d}, \qquad \overrightarrow{n} = -\frac{(1-x)(1-y)}{1-x+y}\overrightarrow{a} - \frac{xy}{1-x+y}\overrightarrow{d},$$

majd

(6) $$(x+1-y)\overrightarrow{m} - xy\overrightarrow{d} = (1-x)(1-y)\overrightarrow{a},$$

és

(7) $$(1-x+y)\overrightarrow{n} + xy\overrightarrow{d} = -(1-x)(1-y)\overrightarrow{a}.$$

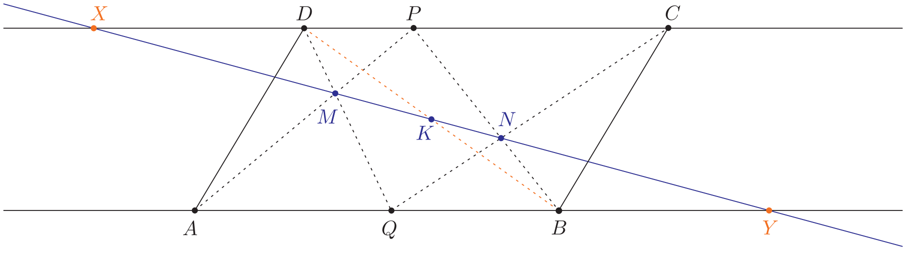
A (6) és (7) vektoregyenletek megfelelő oldalainak összeadásával és rendezéssel adódik, hogy

$$\overrightarrow{m} = -\frac{1-x+y}{x+1-y}\overrightarrow{n}.$$

Ez azt jelenti, hogy a két vektor egymásnak valós számszorosa, tehát a vektorok párhuzamosak egymással és a negatív előjel miatt ellentétes irányúak.

Ugyanakkor a két vektor kezdőpontja közös, ezért a vektorok M, N végpontjai és a K kezdőpont valóban egy egyenesen vannak.

Tekintsük most az *5. ábrát,* amelyen megrajzoltuk az MN egyenest és a feladat szövegében szereplő X, Y pontokat és a paralelogramma BD átlóját.



5. ábra

A KDX és KBY háromszögek KD és KB, illetve KX és KY oldalának egyenesei közösek, DX és BY pedig párhuzamosak, ezért a két háromszög megfelelő szögei egyenlők. Ugyanakkor a paralelogramma szimmetriája miatt az egymásnak megfelelő KD és KB oldalak hossza egyenlő, tehát a KDX és KBY háromszögek egybevágók.

Ebből azonnal következik, hogy $DX = BY$, ez pedig éppen a feladat állítása.

Megjegyzés. A $MN \nparallel AB$ feltétel miatt az X, Y metszéspontok mindig létrejönnek.

Szabó Donát (Miskolc, Herman Ottó Gimn., 10. évf.)
dolgozata alapján

Megjegyzés. A fenti koordináta-geometriai megoldás nem részletezett minden számítási lépést, például azokat, amelyek alapján eljuthatunk az (1)–(2) egyenletek segítségével a (3), illetve a (4)–(5) egyenletek felhasználásával a (6) összefüggésekig. Nem vizsgálta továbbá azt sem, hogy a (3), (6), illetve (7) alatti törtek nevezője milyen feltételek mellett lehet nulla.

Egy minden részletre kiterjedő, teljes megoldásnak ezeket a lépéseket is tartalmaznia kell.

Összesen 82 dolgozat érkezett. 5 pontos 13, 4 pontos 3, 3 pontos 5, 2 pontos 11 dolgozat. 1 pontot 31, 0 pontot 4 versenyző kapott. Nem versenyszerű: 7 dolgozat. Egy versenyző pontszámát adathiány miatt nem számítottuk bele a pontversenybe.

Megjegyzések (a javítás és az azt követő felüljavítás után).

a) A dolgozatokban többféle kisebb-nagyobb hiba előfordult. Az egyik leggyakoribb hiba az volt, hogy indoklás, illetve ismert tételre vagy feladatra való hivatkozás nélkül kijelentették, majd felhasználták, hogy az MN egyenes átmegy a paralelogramma szimmetriaközéppontján.

b) Több versenyző elvi hibát követett el, amikor az MN egyenesnek az AD, illetve BC szakaszokkal való metszéspontjait I-vel, illetve H-val jelölve megmutatta, hogy az $ABHI$ és $CDIH$ négyszögek szögei egyenlők, majd a közös IH oldal miatt egybevágóknak is nevezte azokat. Néhány versenyző a szögek egyenlőségének megállapítása után hasonlónak nevezte a két négyszöget, ez is nyilvánvaló elvi hiba.

c) Egy versenyző a megoldás leírásához nem mellékelt rajzot, ő a Versenykiírás értelmében 0 pontot kapott. Egy versenyző nem a feladat szövegének megfelelő ábrát készített, mert a P, Q pontokat nem a CD, illetve AB oldalon vette fel, így lényegében nem a feladat megoldásával próbálkozott.

d) Hét megoldó munkája a „Nem versenyszerű” minősítést kapta, közülük egy versenyző a dolgozat nem megfelelő formátuma, a többiek viszont az egyértelműen azonosítható másolás miatt.

A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok ABACUS-szal közös pontverseny 9. osztályosoknak (789–793.)

K. 789. Egy számegyenesen az egész számok helyét kiszínezzük egy-egy piros vagy kék ponttal.

a) Lehet-e úgy választani a színezést, hogy két azonos színű pont távolsága ne legyen sem 5, sem 7 egység?

b) Lehet-e úgy választani a színezést, hogy két azonos színű pont távolsága ne legyen sem 6, sem 11 egység?

K. 790. Bergengócia 100 leggazdagabb embere egy üzleti vacsorán találkozott egy teremben, ahol 12 hatalmas asztal állt. Akiknek a születésnapja ugyanabban a hónapban van, azok ugyanahhoz az asztalhoz ültek. Keressük meg azt az asztalt, amelyik körül a legkevesebben ültek, legyen itt X fő. Keressük meg azt az asztalt is, ahol a legtöbben ültek, legyen itt Y fő. Határozzuk meg X lehető legnagyobb értékét és Y lehető legkisebb értékét.

K. 791. *a*) Keressük meg az összes olyan háromjegyű számot, amely egyenlő számjegyei szorzatának négyszeresével.

b) Találunk-e olyan háromjegyű számot, amely egyenlő a számjegyei szorzatának kétszeresével?

K/C. 792. Legyen n pozitív egész szám. Mutassuk meg, hogy az $1+2+3+ \ldots +n$ összeg utolsó számjegye nem lehet a 2, 4, 7, 9 számjegyek egyike sem.

			X
X		**X**	
	X		

K/C. 793. Az *ábrán* szereplő 3×4-es táblázatot kell kitöltenünk **X**-ekkel. A szabály az, hogy ha egy sorban vagy oszlopban pontosan két **X** van, akkor ezekkel egy vonalba valamelyik üres cellába beírhatunk egy harmadikat. Mutassuk meg, hogy bármilyen sorrendben is haladunk, a végén mindig marad legalább 2 üres cella.

❄

Beküldési határidő: 2024. január 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄

A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (792–793., 1788–1792.)

Feladatok 10. évfolyamig

K/C. 792. A szövegét lásd a **K** feladatoknál.

K/C. 793. A szövegét lásd a **K** feladatoknál.

Feladatok mindenkinek

C. 1788. Oldjuk meg az

$$14x^2 + 15y^2 = 7^{2023}$$

egyenletet az egész számpárok halmazán.

(*Svájci versenyfeladat alapján*)

C. 1789. Egy teknőc 14 egységnyi utat jár be a síkon, lépésenként egységnyi szakaszokat megtéve. Minden megtett lépést követően elfordul: ha az előző lépés sorszáma páratlan volt, akkor 60°-kal, ha páros, akkor 90°-kal, továbbá a 3., 5., 8. és 12. lépést követően jobbra, minden más esetben balra. Mutassuk meg, hogy a teknőc

a) a 14. lépés megtételével visszajut a kezdőpontjába és a kezdő irányába,

b) adjuk meg algebrai alakban a teknőc által körüljárt területet.

Javasolta: *Szilassi Lajos* (Szeged)

C. 1790. Határozzuk meg az

$$x^2 + y^2 + 5z^2 - xy - 3yz - zx + 3x - 4y + 7z$$

kifejezés legkisebb értékét, ha x, y, z valós számok.

(*Vietnámi feladat*)

Feladatok 11. évfolyamtól

C. 1791. Oldjuk meg a

$$\frac{8^x - 15625}{4^x + 25 \cdot 2^x + 625} = 2023$$

egyenletet a valós számok halmazán.

Javasolta: *Teleki Olivér* (Tököl)

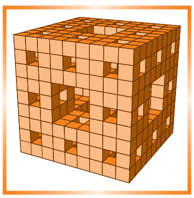
C. 1792. Az ABC háromszög AB és AC oldalának felezőpontja F, illetve E. Legyen P és Q a háromszög síkjának tetszőleges két pontja. A P pontnak az E-re, a Q pontnak az F-re vonatkozó tükörképe legyen P', illetve Q'. A PB szakasz felezőpontja M, a QC szakasz felezőpontja N. Bizonyítsuk be, hogy $MN \parallel P'Q'$ és $P'Q' = 2MN$.

Javasolta: *Van Khea* (Kambodzsa)

❄

Beküldési határidő: 2024. január 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄



A B pontversenyben kitűzött feladatok (5350–5357.)

B. 5350. *a*) Vannak-e olyan a, b, c, d pozitív egész számok, amelyekre a és b számtani közepe nagyobb, mint c és d négyzetes közepe, de a és b mértani közepe kisebb, mint c és d harmonikus közepe?

b) Vannak-e olyan a, b, c, d pozitív egész számok, amelyekre a és b mértani közepe nagyobb, mint c és d négyzetes közepe, de a és b számtani közepe kisebb, mint c és d harmonikus közepe?

(*3 pont*) Javasolta: *Hujter Bálint* (Budapest)

B. 5351. Az ABC szabályos háromszög egy tetszőleges belső pontja P. Az AB-vel P-n keresztül húzott párhuzamos a BC oldalt C_1, az AC oldalt C_2 pontban metszi. Hasonlóan, a P-n keresztül BC-vel húzott párhuzamos az AC oldalt A_1, az AB oldalt A_2 pontban; végül az AC-vel húzott párhuzamos AB-t B_1, BC-t B_2 pontban metszi. Mutassuk meg, hogy az $A_1B_1C_1$ és $A_2B_2C_2$ háromszögek területe egyenlő.

(*3 pont*) Javasolta: *Vígh Viktor* (Sándorfalva)

B. 5352. Milyen $n > 3$ egész számok esetén lehet úgy megadni n egyenest a síkon, hogy közülük bármely három egyenlő szárú háromszöget alkosson?

(*4 pont*) Javasolta: *Hujter Bálint* (Budapest)

B. 5353. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges 1-nél nagyobb pozitív egész n esetén

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |i-j| = \frac{n(n^2-1)}{3}.$$

(*4 pont*) Javasolta: *Bencze Mihály* (Brassó)

B. 5354. Bizonyítsuk be, hogy egy nem egyenlő szárú háromszög Euler-egyenese akkor és csak akkor párhuzamos a háromszög valamelyik belső szögfelezőjével, ha a felezett szög 120°-os.

(*5 pont*) Javasolta: *Jármai Roland* (Budapest)

B. 5355. Egy kockás füzet egy lapján n mezőt pirosra színeztünk. A piros mezőket megszámozzuk 1-től n-ig, majd az élszomszédos piros mezőkön álló számokat összeadjuk. Igaz-e, hogy bármely n db piros mező esetén lehet úgy számozni a piros mezőket, hogy a számpárok összeadásakor csupa különböző értéket kapjunk?

(*5 pont*) Javasolta: *Imolay András* (Budapest)

B. 5356. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $n \geqslant 2$ egész szám és $x_1, \ldots, x_n$ nemnegatív valós számok esetén teljesül az alábbi egyenlőtlenség:

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}(1+x_i)} \geqslant 1 + \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}.$$

(*6 pont*) Javasolta: *Somogyi Ákos* (London)

B. 5357. Az ABC háromszög körülírt köréhez B-ben és C-ben húzott érintők a P pontban metszik egymást. Legyen a PB és AC egyenesek metszéspontja D, a PC és AB egyenesek metszéspontja E. A BC szakaszfelező merőlegese az AC és AB egyeneseket rendre az F és G pontokban metszi. A PDF és PEG körök a P ponton kívül az M pontban metszik egymást. Legyen továbbá A' az A pont FG-re vonatkozó tükörképe, és O az AFG kör középpontja. Mutassuk meg, hogy az OA' egyenes, és az MFG és ADE körök egy közös pontra illeszkednek.

(*6 pont*) Javasolta: *Baris Koyuncu* (Isztambul)

❄

Beküldési határidő: 2024. január 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄

Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (866–868.)

A. 866. Egy gráfot kétszeresen összefüggőnek nevezünk, ha bármelyik csúcsát (és a hozzá tartozó éleket) elvéve a gráf összefüggő marad.

Igaz-e, hogy minden kétszeresen összefüggő, megszámlálható sok pontból álló gráfban lehet találni olyan, az egyik irányban végtelen sétát (azaz nem feltétlenül különböző csúcsok olyan $v_1, v_2, \ldots$ sorozatát, melyekre v_i és v_{i+1} között mindig van él), amely minden élen legfeljebb egyszer megy át?

Javasolta: *Bursics Balázs* és *Kocsis Anett* (Budapest)

A. 867. Legyen $p(x)$ egy n-edfokú, 1 főegyütthatójú, egész együtthatós polinom, melynek n darab valós gyöke van: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Legyen $q(x)$ egy tetszőleges egész együtthatós polinom, amely relatív prím a $p(x)$ polinomhoz (azaz nincs olyan nem konstans 1 vagy -1, egész együtthatós polinom, mely $p(x)$-et és $q(x)$-et is osztja). Bizonyítsuk be, hogy

$$\sum_{i=1}^{n} \left|q(\alpha_i)\right| \geqslant n.$$

Javasolta: *Matolcsi Dávid* (Berkeley)

A. 868. Egy síkbeli ponthalmazt diszharmonikusnak nevezünk, ha bármely két, a pontok által meghatározott távolság aránya vagy 100/101 és 101/100 közé esik, vagy pedig legalább 100 vagy legfeljebb 1/100.

Igaz-e, hogy tetszőleges síkbeli, különböző $A_1, A_2, \ldots, A_n$ pontok esetén lehet találni olyan $A_1', A_2', \ldots, A_n'$ pontokat, melyek diszharmonikus ponthalmazt alkotnak, továbbá A_i, A_j és A_k pontosan akkor esnek ebben a sorrendben egy egyenesre, ha A_i', A_j' és A_k' ebben a sorrendben egy egyenesre esnek (minden különböző $1 \leqslant i, j, k \leqslant n$ számhármas esetén).

Javasolta: *Pálvölgyi Dömötör* és *Keszegh Balázs* (Budapest)

❄

Beküldési határidő: 2024. január 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄

Informatikából kitűzött feladatok

I. 607. Nevezzük közepes számoknak azokat a pozitív egész számokat, amelyek számjegyeinek számtani közepe osztója a számnak. Ilyenek például az egyjegyű számok, és ilyen szám a 15 vagy a 48. Készítsünk programot `i607` néven, amely megadja, hogy adott intervallumban hány közepes szám található.

A program standard bemenetének egyetlen sorában a zárt intervallum két végpontja, két egész szám található egy szóközzel elválasztva. A program a standard kimenetre írja ki az intervallumba eső közepes számok darabszámát.

Példák:

Bemenet	**Kimenet**
`10 50`	`10`
`100 200`	`19`
`1000 1500`	`77`

Beküldendő egy tömörített `i607.zip` állományban a program forráskódja és rövid dokumentációja, amely megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben fordítható.

I. 608. Egy vasútvonal állomásain a szabadban tárolják a betakarított cukorrépát. A cukorgyári kampány előtt az egyik állomásra fedett tárolót szeretnének építeni és a termést odaszállítani a többi állomásról, hogy a répa minőségromlása minél kisebb legyen. Melyik állomásra tervezzék a fedett tárolót, ha a költség a szállítási út hosszával és a szállított tömeggel is egyenesen arányos?

Készítsünk programot `i608` néven, amely a megadja az N állomás előző állomástól mért $H[N]$ távolságának és az ott tárolt cukorrépa $T[N]$ tömegének ismeretében, hogy melyik állomáson legyen a fedett tároló a minimális szállítási költség mellett.

A program standard bemenetének első sorában a vasútállomások $(1 \leqslant N \leqslant 100)$ száma található. A következő N sorban a vasútállomások $(1 \leqslant H[i] \leqslant 50)$ kilométerben mért távolsága szerepel az előző állomástól, és az ott tárolt $(1 \leqslant T[i] \leqslant 1000)$ cukorrépa tömege van tonnában megadva. Az első állomásnál `0` távolság szerepel.

A program a standard kimenetre írja ki, hogy hányadik vasútállomásra érdemes tervezni a fedett tárolót és mennyi az ideszállítás költsége. Több azonos költségű megoldás esetén a kisebb sorszámú vasútállomást adjuk meg.

Példa:

Bemenet	**Kimenet**

`5`
`0 15`
`10 50`
`5 60`
`8 20`
`10 10`
	`3`
	`815`

Magyarázat: $(10+5)\cdot 15+5\cdot 50+8\cdot 20+(8+10)\cdot 10=815$.

Beküldendő egy tömörített `i608.zip` állományban a program forráskódja és rövid dokumentációja, amely megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben fordítható.

I. 609. Vizsgáljuk a következő állítást: azoknak a pontosan ötjegyű számoknak a száma, amelyeknél vagy a számjegyek összege és a számjegyek szorzata is egy pozitív egész szám négyzete, vagy a számjegyek összege és a számjegyek szorzata is egy pozitív egész szám köbe, maga is négyzetszám és köbszám egyszerre. Igazoljuk az állítást táblázatkezelő segítségével az alábbi feladatok megoldásával:

1. Hozzunk létre `otjegyu` néven egy munkafüzetet.
2. Legyen három munkalapja **eredmeny**, **negyzet** és **kob** néven.
3. Válogassuk ki a **negyzet** munkalapon az ötjegyű számok közül azokat, amelyeknél a számjegyek összege és a számjegyek szorzata is egy pozitív egész szám négyzete.
4. Válogassuk ki a **kob** munkalapon az ötjegyű számok közül azokat, amelyeknél a számjegyek összege és a számjegyek szorzata is egy pozitív egész szám köbe.
5. Soroljuk fel az **eredmeny** munkalap B oszlopában a B1 cellától kezdve a **negyzet** munkalapról kiválogatott számokat növekvő sorrendben.
6. Soroljuk fel az **eredmeny** munkalap C oszlopában a C1 cellától kezdve a **kob** munkalapról kiválogatott számokat növekvő sorrendben.
7. Az **eredmeny** munkalap A oszlopában sorjázzanak a számok 1-től kezdődően mindaddig, míg a B vagy C oszlop tartalmaz adatot.
8. Az **eredmeny** munkalap D1 és E1 cellájában jelenjen meg a B, illetve C oszlopban lévő számok száma.
9. Végül az F1:H1 tartományban jelenítsük meg ezek összegét, annak négyzet- és köbgyökét.

Segédszámításokat a **negyzet** és a **kob** munkalapokon végezhetünk. A megoldásban saját függvény vagy makró nem használható.

Beküldendő egy tömörített `i609.zip` állományban a táblázatkezelő munkafüzet, illetve egy rövid dokumentáció, amelyben szerepel a megoldáskor alkalmazott módszer, a táblázatkezelő neve, verziószáma.

I. 610. Egy iskola menzája nem túl népszerű, a befizetett ebédet sokszor nem eszik meg tanulók. Mivel az ebéd kiadásakor a tanulók mágneskártyával igazolják magukat, ezért elektronikusan rendelkezésre állnak az iskola ebédelési adatai, amelyek az `ebed.txt` szöveges állományban találhatók. Az állomány egy-egy sorából kiolvasható, hogy melyik tanulónak hány napra fizettek be az A menü vagy a B menü kínálatából, illetve hány napon fogyasztotta el valóban az ebédet. Az adatokat felhasználva adatbázis-kezelő alkalmazás segítségével *vagy* SQL parancsok segítségével oldjuk meg a következő feladatokat.

1. Készítsünk új adatbázist `ebed` néven. A forrásként kapott – tabulátorokkal tagolt, UTF-8 kódolású – szöveges állományt az ebed nevű táblába importáljuk.

Az állomány első sora a mezőneveket tartalmazza. A létrehozás során állítsuk be a megfelelő típusokat és a kulcsot.

Tábla:

ebed (nev, azon, fizA, fizB, megA, megB)

nev	A tanuló neve.
azon	A tanuló azonosítója, a tábla kulcsa.
fizA	A tanuló számára megrendelt ebédek száma az A menüből (egész).
fizB	A tanuló számára megrendelt ebédek száma a B menüből (egész).
megA	A tanuló által megevett ebédek száma az A menüből (egész).
megB	A tanuló által megevett ebédek száma a B menüből (egész).

A tanuló azonosítójának első négy karateréből képzett szám megadja, hogy a tanuló melyik évben érkezett az iskolába, az ötödik karakter megadja az osztályának betűjelét, a többi karakter a tanuló egyedi azonosítója.

A következő feladatok megoldásánál a lekérdezéseket a zárójelben olvasható néven mentsük. Ügyeljünk arra, hogy a megoldásban pontosan a kívánt mezők szerepeljenek.

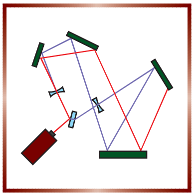
2. Melyik diákok fizettek elő legalább egy napra B menüt a 2014-ben induló C osztályból? Adjuk meg a tanulók nevét ABC sorrendben. (`2bmenuc`)
3. Lekérdezéssel adjuk meg azoknak a tanulóknak a nevét és azonosítóját, akiknek befizettek A menüs ebédet, és ők azt mind elfogyasztották. (`3amegette`)
4. Készítsünk lekérdezést, amely megadja a nevüket azoknak, akik a 2015-ben indult C osztályba járnak és legalább egy napra be vannak fizetve ebédelni. (`4ebed15C`)
5. Lekérdezés segítségével listázzuk ki, hogy melyik osztályban hány olyan tanuló van, aki legalább öt napi ebédet elfogyasztott. (`5otebed`)
6. Készítsünk lekérdezést, amely megadja azokat a tanulókat, akik azonos névvel szerepelnek az adatbázisban. (`6nevazon`)
7. Lekérdezés segítségével listázzuk ki, hogy a C osztálytípusba járó tanulóknál mennyi a menü fogyasztásának és befizetésének aránya. A listában azok szerepeljenek az arány szerint növekvő sorrendben, akiket legalább egy napra befizettek. (`7arany`)

Beküldendő egy tömörített `i610.zip` állományban az adatbázis adatokat és lekérdezéseket is tartalmazó állománya, vagy az SQL-ben készült megoldások esetén az adatbázist és a táblát létrehozó és a kérdésekre választ adó lekérdezések egy szöveges állományban. Mellékeljünk egy rövid dokumentációt, amelyben szerepel a megoldáskor alkalmazott adatbáziskezelő vagy SQL rendszer neve.

Letölthető állomány: `ebed.txt`.

❄

A feladatok megoldásai regisztráció után a következő címen tölthetők fel:
`https://www.komal.hu/munkafuzet`
Beküldési határidő: 2024. január 15.



Tanulságos hibák
országos és nemzetközi fizikaversenyeken

Bevezetés

A versenyeken a diákok gyakran hibáznak, ez természetes. (Ha mindenki hibátlanul oldaná meg a feladatokat, akkor nem lennének nyertesek.) Nem túl gyakran (mondhatjuk: nagyon ritkán) a versenybizottság is tévedhet, hiszen senki nem tökéletes. A hibás feladatok, vagy korrekt feladatok hibás megoldásai azonban nem maradnak felderítetlenül, előbb vagy utóbb mindig kiderül, hogy „a helyzet nem is annyira egyszerű". Ez a fizika (és általában a természettudományok) sajátsága, a téves megfontolások hibái mindig felszínre kerülnek. (Más tudományágakban és pl. a művészi alkotások megítélésében nem ilyen egyértelmű a helyzet, ott sok szubjektív tényező szerepet kaphat.)

Az alábbi írásban az OKTV, az Eötvös-verseny és a Nemzetközi Fizikai Diákolimpia nevezetes „bakijaiból" válogattunk össze egy kis gyűjteményt. A fizika különböző területeiről (pontmechanika, merev testek mozgása, hőtan, elektrosztatika, időben változó elektromágneses mezők) mutatunk be egy-egy tanulságos tévedést. A felsorolás nem a versenyek, hanem a hibák kiderülésének időrendjét követi.

Célunk véletlenül sem a versenybizottságok pellengérre állítása, sokkal inkább a hibákból való tanulás és annak dokumentálása, hogy a hibák, tévedések kijavíthatók, és ki is kell javítani azokat.

I. Káosz az OKTV-n (rugalmas szálú inga)

Az 1965. évi verseny II. fordulójának 1. feladata így szólt:

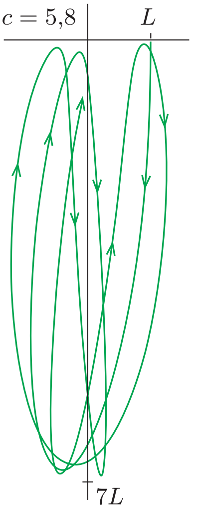
Felfüggesztett L hosszúságú rugóra olyan kis méretű testet akasztunk, amely a rugót eredeti hosszának c-szeresével nyújtja meg ($\ell = cL$). A rugót a testtel együtt vízszintes helyzetbe hozzuk (a rugó ekkor nyújtatlan állapotban van, hossza L), és innen elengedjük. Mekkora a rugó megnyúlása, amikor a test éppen a felfüggesztési pont alatt halad át?

A versenyzők lelki szemei előtt egy függőleges irányban megnyújtott kör, vagy ahhoz hasonló pályagörbe jelenhetett meg. Ilyen görbe a középiskolai matematika tananyagban csak egy szerepel: ez az *ellipszis.* A diákok többsége (e sorok írója is) megpróbálta bebizonyítani, hogy a pálya valóban ellipszis. Ha ez sikerül, akkor az energiamegmaradás törvényéből, az ellipszis csúcspontbeli görbületi sugarából és a Newton-féle mozgásegyenletből már „gyerekjáték" az eredmény leolvasása. Sajnos a bizonyítási kísérlet kudarcot vallott. Voltak, akik 4 órát töltöttek el ezzel, hiába. Nem ismerték (és a versenybizottság sem ismerte) a KöMaL 1938. évi 1. számában megjelent 641. feladatot: *Egy könnyen nyúló gumifonálra erősített súlyos golyócska ingamozgást végez. Vizsgáljuk meg pályáját, vajon ellipszis ív-e?* [1]. A megoldás az 1938. évi 3. számban jelent meg [2], miszerint a pályagörbe *nem* lehet ellipszis.

Az OKTV feladat hivatalos „megoldása" szerint: ... *Feladatunkban a kérdezett pontban ismeretlen a görbületi sugár értéke, ezért a feladatot nem tudjuk megolda-*

ni. Az a gondolat, hogy a kérdéses pontban a görbületi sugár $L+\ell$ volna, minden alapot nélkülöz. Nagyon is kérdéses, hogy a görbületi középpont egyáltalán benn van-e a felfüggesztési ponton átmenő függőlegesben, amikor a tömeg ezen áthalad, vagyis, hogy a tömeg vízszintesen halad-e át a felfüggesztési pont alatt. Adott numerikus értékek mellett, hosszadalmas számítási eljárásokkal a tömeg pályája bizonyos közelítéssel megállapítható.

A hosszadalmas számítást a verseny után Vermes Miklós el is végezte, számítógép segítségével sok kis lépés eredményét összegezve határozta meg a pályát, és az *1. ábrán* láthatóhoz hasonló görbéket kapott.[1]



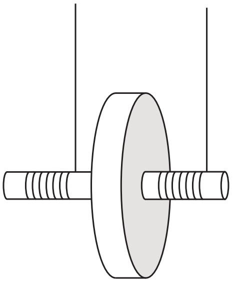
1. ábra

Látható, hogy az inga mozgása meglehetősen bonyolult, nem periodikus, a pálya legmélyebb pontja nem a felfüggesztési pont alatt van, és a hosszú ideig nyomon követett mozgás vélhetően *kaotikus.* A pálya nagyon kemény rugó ($c \ll 1$) és nagyon lágy rugó ($c \gg 1$) határesetben közelítőleg analitikusan (képletekkel leírható módon) is meghatározható [3].

II. Többségi szavazattal Newton II. törvénye átmenetileg nem érvényes!

Az 1988. évi Nemzetközi Fizikai Olimpia (Bad Ischl, Ausztria) 2. feladata a Maxwell-korong (ismertebb nevén: a jojó) mozgásával foglalkozott [4].

Egy $M=0{,}40$ kg *tömegű,* $R=0{,}060$ m *sugarú,* $d==0{,}010$ m *vastag, egyenletes tömegeloszlású hengeres korongot két egyenlő hosszúságú fonálra függesztünk fel. A fonalak egy* $r=3$ mm *sugarú, a korong középpontján átmenő tengelyhez csatlakoznak (a fonalak tömege és vastagsága, valamint a tengely tömege elhanyagolható). A fonalakat a tengelyre felcsévélve a korongot (a tömegközéppontját)* $H=1{,}0$ m *magasságba emeljük, majd elengedjük, hogy letekeredjen* (2. ábra). *A korong pályájának legalsó pontját elérve újra emelkedni kezd.*


2. ábra

Oldjuk meg a következő részfeladatokat azzal az egyszerűsítő feltevéssel, hogy a pillanatnyi forgástengely mindig a felfüggesztési pont alatt helyezkedik el, vagyis a fonalak mindig függőlegesek maradnak. ...

Az egyik részfeladat kérdése ez volt: *Számítsuk ki a korong szögsebességét az elfordulási szög függvényében az átfordulási fázisban! Ábrázoljuk (legalább kvalitatíven) a korong tömegközéppontjának elmozdulás- és sebességösszetevőit (alkalmasan választott Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszerben) az elfordulási szög függvényében!*

---

[1] A görbék rekonstruálását nemrég – a mai modern számítástechnikai lehetőségeket kihasználva – Széchenyi Gábor (ELTE) készítette el.

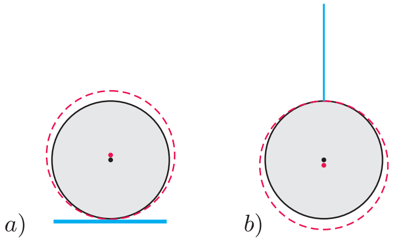
Az elméleti verseny előtti este a 27 részt vevő ország több mint félszáz csapatvezetőjéből álló zsűri megvitatta a feladatokat, mondatról mondatra végiggondolta azokat. Az egyik csapatvezető hevesen tiltakozott. Így érvelt: *A feladat szövegében szereplő egyszerűsítő feltevés a korong átfordulása alatt nem teljesülhet. Ha ugyanis a felfüggesztő fonalak mindvégig függőlegesek maradnának, akkor a korongra nem hatna vízszintes irányú erő, s Newton II. törvénye értelmében a tömegközéppontja nem gyorsulhatna vízszintes irányban. Márpedig az egyszerűsítő feltétel szükségszerűen együtt jár egy ilyen gyorsulás feltételezésével! A tényleges mozgás során a korong tömegközéppontja majdnem pontosan függőlegesen mozog. Az átfordulás alatt a fonalak átcsapódnak a tengely túlsó oldalára, s mivel a függőlegestől csak nagyon kicsit térnek el, számottevő vízszintes erőt nem képesek kifejteni."*

A feladat kitűzői elismerték, hogy ez valóban így van, de ennek az átcsapódási folyamatnak a részletes végiggondolását túlságosan nehéznek ítélték, és emiatt a hibás, a Newton-egyenleteknek ellentmondó feltevéshez ragaszkodtak. Hosszabb vita után az Elnök szavazásra bocsátotta a kérdést. A Bizottság „demokratikusan" megszavazta, hogy maradjon az eredeti szöveg, vagyis másnap a versenyen ennél a feladatnál tekintsük érvénytelennek Newton II. törvényét.

III. Egy csaknem 50 éven keresztül rosszul magyarázott hőtani feladat. Finom effektusok finom megfontolásokat igényelnek

Az 1967. évi, Varsóban megrendezett (első) Nemzetközi Fizikai Diákolimpia 3. feladata a következő volt:

Adva van két teljesen egyforma golyó. Közülük az egyik vízszintes síkon fekszik, a másik vékony fonálon van felfüggesztve. Mindegyik golyónak ugyanakkora hőmennyiséget adunk olyan gyorsan, hogy mindenféle hőveszteségtől eltekinthetünk. A két golyó hőmérséklete egyforma lesz-e, vagy nem, és miért?



3. ábra

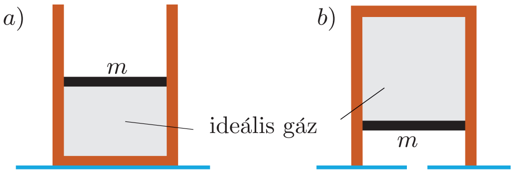
A kérdés egyszerű, és nagyon meglepő. Vajon mi lehet a különbség a két eset végállapota között? A hivatalos (és évtizedeken keresztül elfogadott, számos feladatgyűjteményben [5] megtalálható) megoldás szerint a kulcsszó a *hőtágulás. A golyó melegedéskor kiterjed* (3. ábra).

Az első golyó súlypontja feljebb kerül, és a súly ellen végzett munkát a hőenergia fedezi. Tehát kevesebb a melegedésre fordított hőmennyiség, és a hőmérséklet nem növekszik annyira, mint várható. A második golyó súlypontja lejjebb kerül; itt a munkavégzésből lesz hőmennyiség, amely szintén melegíti a golyót.

A hatás nagyságát megbecsülhetjük. 10 cm *sugarú vörösréz gömbre a relatív eltérés kb.* 10^{-7}*, és ez azt mutatja, hogy a kérdés feltevése fizikai szempontból irreális.*

Eddig tart a hivatalos megoldás, ami azonban *hibás!* Gyanakodhattunk volna, hogy a gravitációs helyzeti energiára alapozott érvelés – bár jól hangzik – nem biztos, hogy helyes.

Képzeljük el, hogy a feladatban leírt gondolatkísérletet fémgolyók helyett egy hőszigetelt hengernek hőszigetelt, súlyos dugattyúval lezárt részében lévő ideális gázzal hajtjuk végre (*4. ábra*). A dugattyú súlya miatt az egyik esetben a gáz nyomása nagyobb, a másiknál pedig kisebb, mint a külső légnyomás.



4. ábra

Az a) esetben a melegítés hatására a dugattyú gravitációs helyzeti energiája növekszik, a b) esetben pedig csökken. A versenyfeladat naiv megoldásának mintájára úgy érvelhetünk, hogy az első esetben a közölt hőnél kevesebb, a másodiknál pedig több energia „jut" a gáz melegítésére, tehát az első esetben kevesebbet változik a hőmérséklet, mint a másodiknál. Ez azonban téves következtetés, hiszen az ideális gáz állandó nyomáshoz tartozó hőkapacitása *nem függ* a gáz nyomásától, tehát a hőmérséklet-változás a két esetben *ugyanakkora.*

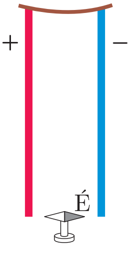
Visszatérve az eredeti (golyós) feladathoz egy másik érvet is felhozhatunk a naiv megoldás ellen. Képzeljük el, hogy egyetlen golyóval olyan termodinamikai körfolyamatot valósítunk meg, amelyben először az a) esetnek, majd fordított irányban a b) esetnek megfelelő állapotváltozás történik. Ha a hőmérséklet-változás kicsiny ΔT, akkor a hasznos mechanikai munka (a golyó helyzeti energiájának növekedése) is, és a melegítés során felvett hő is ΔT-vel arányos, a hőerőgép hatásfoka tehát a hőmérséklet-különbségtől független. Ez azonban a hőtan II. főtétele szerint lehetetlen, hiszen az elképzelhető legjobb hatásfokú Carnot-gép hatásfoka $\Delta T \to 0$ határesetben nullához tart, tehát a golyóval végzett körfolyamat hatásfoka sem lehet ebben a határesetben véges $\eta > 0$ érték.

A paradoxon feloldását egy 2015-ben (fél évszázaddal a verseny után) megjelent cikk adta meg [6]. A szerzők (meglehetősen bonyolult, itt most nem részletezhető érveléssel) kimutatták, hogy a naiv várakozással ellentétben nem a fonálon felfüggesztett, hanem a vízszintes síkon fekvő golyó fog jobban felmelegedni ugyanakkora közölt hő hatására.

IV. Kelt-e az eltolási áram mágneses mezőt? Alkalmazható-e a Biot–Savart-törvény nem záródó vezetőkre?

Az 1984. évi Eötvös-verseny 3. feladata a következő volt:

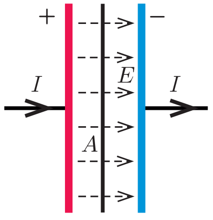
Egy párhuzamosan elhelyezett lemezekből álló kondenzátor fel van töltve (5. ábra). *A lemezek alsó széle alatt kis iránytű áll. Ezután a lemezek tetejére helyezett pálcával a kondenzátort kisütjük. Hogyan viselkedik a kisülés közben az iránytű?*



5. ábra

A hivatalos (kifogásolható) megoldás:

A pálcában haladó kisütő áram a jobbkéz-szabály szerint az északi pólust a papír síkjára merőlegesen befelé nyomja mágneses erejénél fogva. A feladat lényege azonban az ún. eltolási áram szerepének tisztázása.



6. *ábra*

Maxwell a múlt század második felében feltételezte, hogy az elektromos térerő időbeli változása a közönséges elektromos áramhoz hasonlóan mágneses erőket okoz a környezetében. Vizsgáljunk egy kondenzátort, amelyet I áram folyamatosan feltölt (6. ábra)! *Ezen I áram a környezetében mágneses erőket hoz létre. Közben a kondenzátor terében az E elektromos térerő időben folyamatosan növekszik. Maxwell feltételezte, hogy az A felszínű felületre merőleges, időben változó elektromos térerő olyan mágneses teret hoz létre környezetében, mint az $\varepsilon_0 A\cdot(\mathrm{d}E/\mathrm{d}t)$ amper erősségű áram, amely esetünkben megegyezik a kondenzátort töltő vagy kisütő áram erősségével. Az állítás helyességét a kísérleti nehézségek miatt nem lehet közvetlenül megvizsgálni. Azonban az eltolási áram feltételezésével levezethető az elektromágneses hullámok tulajdonsága, és ezeket a tapasztalat igazolja. Így az időben változó elektromos térerő áramszerű viselkedésének létezése bizonyított.*

Feladatunkban a balról jobbra mutató elektromos térerő időben csökken, az ún. eltolási áram a lemezek közötti térben jobbról balra mutat. Ennek mágneses ereje az északi pólust a jobbkéz-szabály szerint a papír síkjából ki akarja emelni, ellentétesen a pálca áramának hatásával. Kérdés, melyik hatás erősebb. Ha például feltételezzük, hogy a kondenzátor lemezei kör alakúak, akkor az eltolási áram a tér minden részében közelebb van az iránytűhöz, mint a pálca, ezért hatása erősebb: az iránytű északi pólusa ki akar emelkedni a papír síkjából.

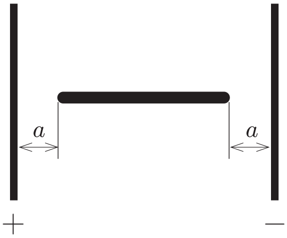
Mi a hiba a fenti megoldásban? Az, hogy az eltolási áramból a Biot–Savart-törvény felhasználásával ugyanúgy próbálja kiszámítani a kialakuló mágneses mezőt, mint ahogy azt a „valódi áramok” esetében tesszük. Ez azonban hibás eredményre vezet! Részletes vizsgálatok [8] azt mutatják, hogy az eltolási áramot *egyáltalán nem* kell figyelembe venni, ha a Biot–Savart-törvénnyel számolunk, ezek az „áramok” csak az Ampère-féle gerjesztési törvény alkalmazásánál kapnak szerepet.

Esetünkben tehát csak a tényleges (a töltött részecskék mozgásához köthető) áramok hozzák létre a kisülő kondenzátor belsejében és a határához közel a mágneses teret. Ezen áramok között nemcsak a pálcában, hanem a lemezekben folyó áramokat is számításba kell vennünk. Ezen megfontolások eredménye: az iránytű helyén – első közelítésben – a mágneses indukcióvektor eltűnik, tehát az iránytű semerre nem térül ki. Pontosabb – a széleffektusokat is figyelembe vevő – megfontolások [8] azt mutatják, hogy az összes áram hatására a nagyon gyenge mágneses mező az iránytű északi pólusát az ábra síkjába *befelé* fogja eltéríteni.

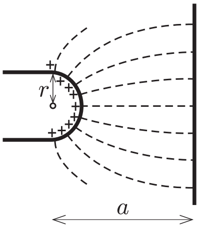
V. Mi fejt ki erőt egy fémdarab elektromos töltéssel rendelkező részére? A Coulomb-erők vektori összege, vagy pedig az elektrosztatikus mező?

Az 1974. évi Eötvös-verseny 3. feladata a következő volt:

Nagy területű síkkondenzátor lemezei között a feszültség $U = 100$ V. A lemezek között, a lemezekre merőlegesen hosszú, 1 mm átmérőjű, mindkét végén legömbölyített fémrúd van. A rúdvégek távolsága a lemezektől $a = 5$ mm. Számítsuk ki hozzávetőlegesen, mekkora feszítőerő működik a fémrúdban!



7. ábra



8. ábra

A közölt *(hibás)* megoldás: *Tekintettel a szimmetrikus elrendezésre, végig a fémrúd mentén a feszültség* 50 volt, *vagyis $U/2$ a jobb oldali lemezhez képest. Közvetlenül a rúd végénél az erővonalak sugarasan indulnak ki, mint egy gömbön elhelyezett töltés esetében, ezért a rúd végének a potenciálja a lemezhez képest kQ/r* (8. ábra).

A tér távolabbi módosulását nem kell figyelembe vennünk, hiszen a töltés átvivésének munkája java részét a gömbfelület közelében végezzük, és nem sokat számít, hogy milyen messze van a lemez. Tehát:

$$\frac{U}{2} = \frac{kQ}{r},$$

ahol $k = 1/(4\pi\varepsilon_0)$ a Coulomb-állandó. Innen az a töltés, amely a megosztás következtében a rúd végén összegyűlik: $Q = Ur/(2k)$. Ez akkora erővel vonzódik a lemezhez, mintha a lemez mögött levő, szimmetrikusan elhelyezett ugyanakkora töltéshez vonzódna (ún. tükörerő):

$$F = \frac{kQ^2}{(2a)^2} = \frac{U^2}{16k}\left(\frac{r}{a}\right)^2.$$

Coulombbal, méterrel és newtonnal számolva $k = 9 \cdot 10^9$, és így számadatainkkal $F = 7 \cdot 10^{-10}$ newton.

Mi a probléma ezzel a – logikusnak látszó és számításokkal jól követhető – „hozzávetőleges” megoldással? Az, hogy feltételezi: az elektromos megosztás során a nulla össztöltésű fémrúd felületén csak a rúd végeinél jelennek meg töltések, és az ezekre, mint ponttöltésekre ható erők határozzák meg a rúdban ébredő mechanikai feszültségeket. Ez azonban nem lehet igaz, hiszen tudjuk, hogy a fémrúd egésze ekvipotenciális (a rúdban az elektromos térerősség mindenhol nulla). Ezt az állapotot két ponttöltés nem tudja létrehozni, ahhoz az kell, hogy a rúd hengeres részének palástjára is számottevő mennyiségű töltés kerüljön. Belátható, hogy palást töltése sokkal nagyobb, mint a rúd végeinek töltése, így a rúd egyik felére ható eredő elektrosztatikus erőt elsősorban a rúd másik felének palástján található töltések és a kondenzátorlemezek töltései hozzák létre. Ha sikerülne valahogyan meghatározni a töltések eloszlását a teljes fémrúd palástján és a kondenzátorlemezeken, a jobb oldali félrúdra ható erőt az összes felületdarabka-pár között fellépő Coulomb-erők vektori összegeként kaphatnánk meg. Ez meglehetősen bonyolult számítást igényel, de elvégezhető [9]. Az eredmény:

$$F = \text{néhányszor}\ \frac{U^2}{16k} \approx 10^{-8}\ \text{N}.$$

A „néhányszor” kifejezés a rúd tükörtöltéseinek, vagyis a lemezeken a rúd végeinek közelében kialakuló töltésátrendeződésnek a hatására utal. Belátható, hogy ez a hatás csak egy $\ln(L/a)$ faktorral módosítja az erő képletét (L a rúd hossza), nem pedig $(r/a)^2$-tel, mint ahogy az a hivatalos megoldásban szerepelt.

Érdekes, hogy ez az erő (ami 2 nagyságrenddel nagyobb, mint a verseny hivatalos megoldásának eredménye) sem az r sugártól, sem az a távolságtól *nem függ.*

Van egy másik, sokkal egyszerűbb mód is a feladat megoldására. Tegyük fel, hogy valamilyen módon (legalább „hozzávetőlegesen” meg tudjuk határozni a fém felületének töltéseloszlását, vagyis a σ-val jelölt felületi töltéssűrűségét. Ez a mennyiség általában helyről helyre változik, csupán néhány speciális esetben (mint pl. a síkkondenzátornál, és ott is csak a lemezek szélétől elegendően távol) tekinthető a helytől független állandónak.

A felület egy kicsiny, ΔA nagyságú darabkáján

$$\Delta Q = \sigma \Delta A$$

nagyságú elektromos töltés található. Ez a töltés – a Gauss-féle fluxustörvény szerint – a fémen kívül

$$E = \frac{\Delta Q}{\varepsilon_0 \Delta A} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

nagyságú, a felületdarabkára merőleges elektromos teret hoz létre a felületen kívül, annak közvetlen közelében. (A fémen belül az elektromos tér természetesen nulla.)

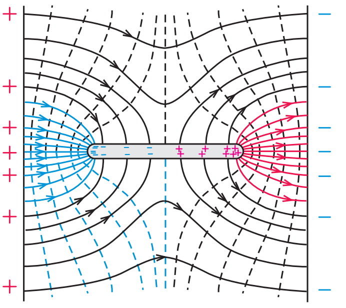
A felületi töltésekre az átlagos $E/2$ elektromos térerősség

$$F = \frac{E\Delta Q}{2} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\Delta A$$

nagyságú húzóerőt fejt ki. (Az erő iránya nem függ a töltéssűrűség előjelétől.) A fémdarabra (vagy annak egy részére, pl. a feladatban szereplő fémrúd egyik felére) ható eredő erő a fenti erőjárulékok összegzésével (felületi integrálásával) kaphatjuk meg.

Vizsgáljuk meg a fentiek tükrében a kondenzátorlemezek között lévő fémrúd egyik (mondjuk a jobb oldali) felére ható eredő elektrosztatikus erőt. (Ezzel az erővel tart egyensúlyt a rúd másik fele által kifejtett mechanikai erő, vagyis az, amit a feladat szövege kérdez.) Ez az erő – az elrendezés szimmetriája miatt – a rúd tengelyével párhuzamos, tehát a rúd hengeres részén lévő töltések eloszlása *nem* ad hozzá járulékot. Elegendő tehát a rúd félgömb alakú részén „ülő” töltésekkel foglalkozzunk.

A kialakuló elektrosztatikus mezőt (nyilván csak vázlatosan) a *9. ábra* mutatja. Ezt úgy „sejthetjük meg”, hogy először a szaggatott vonallal jelölt ekvipotenciális felületeket (azok síkmetszeteit), majd az azokra merőleges erővonalakat rajzoljuk meg.



9. ábra

Közvetlenül a rúd jobb oldali végénél az erővonalak sugarasan indulnak ki, mint gömbön elhelyezett töltés esetében, ezért a rúdvég és a lemez közötti térrészben a piros erővonalakkal jelölt elektromos mező közelíthető a Coulomb-féle elektromos mezővel. A legömbölyített rúdvégtől balra természetesen más lesz a térerősség (lásd a feketével jelölt erővonalakat). A rúd bal oldali végénél is hasonló a helyzet, a kéken jelölt erővonalak közelítőleg egy negatív ponttöltés Coulomb-tere egy részének felelnek meg. A rúd többi részén kialakuló töltéseloszlást nem ismerjük, de erre szerencsére nincs is szükségünk.

A rúd félgömb alakú végeinél a felületi töltéssűrűséget (a Coulomb-tér közelítésnek megfelelően) állandónak, $\pm\sigma_0$ értékűnek tekinthetjük. Az elektromos mező olyan, mintha egy

$$Q = 4r^2\pi\sigma_0$$

nagyságú töltés hozta volna létre. A rúd vége és a hozzá közeli kondenzátorlemez közötti feszültség (az elrendezés szimmetriája miatt) $U/2$, fennáll tehát, hogy

$$\frac{U}{2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a}\right) \approx \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{r}.$$

(Kihasználtuk, hogy $a \gg r$, tehát $1/r$ mellett $1/a$ elhanyagolhatóan kicsi.) A fenti összefüggések szerint a félgömbökön a felületegységre jutó töltés nagysága:

$$\sigma_0 = \frac{\varepsilon_0 U}{2r}.$$

A rudat feszítő erőt (amekkora erővel egyensúlyban lehetne tartani a közepén gondolatban kettévágott rúd két részét) a következő gondolatmenettel lehet meghatározni. Ha a félgömb valamely kicsiny, ΔA területű felületdarabkájának normálisa α szöget zár be a rúd tengelyével, akkor erre a felületdarabkára ható erő tengely irányú vetülete $\frac{\sigma_0^2}{2\varepsilon_0}\Delta A\cos\alpha$. Mivel $\Delta A\cos\alpha$ a felületdarabka tengely irányú vetületének $\Delta A'$ területe, az eredő erő

$$F = \frac{\sigma_0^2}{2\varepsilon_0}\sum \Delta A' = \frac{\sigma_0^2}{2\varepsilon_0}\,r^2\pi = \frac{\varepsilon_0\pi U^2}{8} = \frac{U^2}{32\,k} \approx 3{,}5\cdot 10^{-8}\ \mathrm{N}.$$

Érdekes, hogy ez az erő csak a kondenzátor feszültségétől függ, de a feladatban megadott távolságadatoktól (az alkalmazott közelítésben) *független.* Az eredmény számértéke csak „hozzávetőleges”, de nagyságrendileg helyes, és ez az erő két nagyságrenddel nagyobb, mint ami a hivatalos megoldásban szerepelt.

Irodalom

[1] KöMaL 1938/1, 161. (Lásd `http://db.komal.hu/scan`).

[2] KöMaL 1938/3, 218–219.

[3] Gnädig P., Honyek Gy., Vigh M., 333+ Furfangos Feladat Fizikából, 49. feladat, Typotex, Budapest, 2017.

[4] A 19. Nemzetközi Fizikai Diákolimpia elméleti feladatainak megoldása, KöMaL 1988/8-9, 400–402.

[5] Gnädig P., Honyek Gy., Vigh M., 333 Furfangos Feladat Fizikából, 169. feladat, Typotex, Budapest, 2014.

[6] Gnädig P., Honyek Gy., Vigh M., 333+ Furfangos Feladat Fizikából, 184. feladat, Typotex, Budapest, 2014.

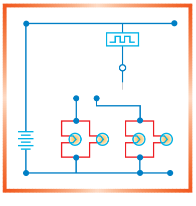
[7] Giacomo de Palma, Mattia C. Sormanini, Counterintuitive effect of gravity on the heat capacity of a solid sphere: Re-examination of a well-known problem, American Journal of Physics, **83**, 723, 2015.

[8] Gnädig Péter, Alkalmazható-e a Biot–Savart-törvény nem záródó „áramkörökre?" – I–II. rész, Fizikai Szemle, **65**, 2015/4, 123–127., valamint 2015/5, 162–168.

[9] L. D. Landau, E. M. Lifsic., Elméleti fizika VIII. Folytonos közegek elektrodinamikája, e-könyv, 3. §. 9. feladat, Typotex, Budapest, 2010.

[10] Gnädig P., Honyek Gy., Vigh M., 333+ Furfangos Feladat Fizikából, 347. feladat. Typotex, Budapest, 2017.

Gnädig Péter



Fizika gyakorlat megoldása

G. 823. *Egy kétkarú mérleg karjait különböző hosszúságúra gyártották. Ha az egyik serpenyőbe teszünk egy sárgadinnyét, akkor* 96 *dekagrammal tudjuk kiegyensúlyozni. Ha a másik serpenyőbe tesszük, akkor* 1,5 *kilogramm tartja egyensúlyban. Mekkora a sárgadinnye tömege?*

(*4 pont*)

Megoldás. A sárgadinnye tömegét jelöljük m-mel, a mérleg karjainak hosszát (mint erőkarokat) pedig x-szel, illetve y-nal.

Az első mérésnél használt súly tömege: $m_1 = 96$ dkg $= 0{,}96$ kg, a másodiknál pedig $m_2 = 1{,}5$ kg.

A forgatónyomatékoknak a két oldalon egyenlőnek kell lenniük mindkét mérésnél, hiszen a mérleg mindkétszer egyensúlyban van. A forgatónyomatékot az erő nagysága és az erőkar szorzatából kapjuk meg.

A feladat szerint a két mérésre egy-egy egyenletet írhatunk fel a forgatónyomatékok egyenlőségére:

$$mgy = m_1 gx,$$

$$m_2 gy = mgx.$$

Mindkét egyenletben egyszerűsítünk g-vel, a második egyenletben a két oldalt felcseréljük, majd összeszorozzuk a két egyenletet:

$$m^2 yx = m_1 x m_2 y,$$

$$m^2 = m_1 m_2,$$

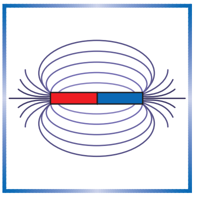
$$m = \sqrt{m_1 m_2} = 1{,}2\ \mathrm{kg}.$$

Tehát a sárgadinnye tömege 1,2 kg.

Blaskovics Ádám (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 9. évf.)

72 dolgozat érkezett. Helyes 56 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 9, hiányos (2 pont) 3, hibás 4 dolgozat.

Fizika feladatok megoldása



P. 5503. *Egy* $V = 80\ \mathrm{dm}^3$ *térfogatú edényben* $C_V = 124{,}5\ \mathrm{J/K}$ *hőkapacitású,* $T = 402\ {}^\circ\mathrm{C}$ *hőmérsékletű,* $p = 4{,}2 \cdot 10^5$ Pa *nyomású,* $m = 191$ g *tömegű gáz van. Hány szabadsági foka van a gázrészecskéknek? Hány gázrészecske van az edényben? Milyen gáz lehet az edényben?*

(*4 pont*) Közli: *Holics László,* Budapest

I. megoldás. Ahol szükséges, a mértékegységeket átváltjuk: $V = 0{,}08\ \mathrm{m}^3$, $T = 675$ K, felhasználjuk a $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}$ és az $N_\mathrm{A} = 6{,}02 \cdot 10^{23}\ \frac{1}{\mathrm{mol}}$ állandókat.

Az ideális gáz $pV = NkT$ állapotegyenlete alapján kifejezhetjük a részecskék számát:

$$N = \frac{pV}{kT} = 3{,}61 \cdot 10^{24}.$$

Ismert, hogy az ideális gáz állandó térfogaton mért hőkapacitása $C_V = \frac{f}{2} Nk$, amiből:

$$f = \frac{2C_V}{Nk} = 5{,}00,$$

tehát a gáznak 5 szabadsági foka van, ami a kétatomos (vagy más lineáris) molekulák tulajdonsága.

A gáz meghatározásához kiszámolhatjuk a moláris tömegét:

$$M=\frac{mN_\mathrm{A}}{N}=31{,}9\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}}.$$

A periódusos rendszer segítségével megállapítható, hogy ez a gáz O_2 molekulákból állhat, mivel az oxigénatom moláris tömege 16 $\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}}$, a keresett gázé pedig ennek (kerekítve, jó közelítéssel) éppen a kétszerese.

A *Raufasertapete csapat: Kéki Edit, Novák Péter*
(Miskolc, Földes Ferenc Gimn., 12. évf.)

II. megoldás. A $pV=nRT$ állapotegyenletbe behelyettesítve és rendezve $n=5{,}99$ mol és $N=nN_\mathrm{A}=3{,}59\cdot 10^{24}$.

A megadott hőkapacitást a tömeggel elosztva fajhőt kapunk, amelyet össze lehet hasonlítani a „Négyjegyű függvénytáblázatok” fajhőadataival. A feladatban szereplő gáz (állandó térfogaton mért) fajhője:

$$c_V=\frac{C_V}{m}=651{,}8\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{K}},$$

amelyhez legközelebb a táblázatban az O_2 fajhője áll 653 $\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{K}}$ értékkel (0,2% eltérés, a következő legközelebbi CO_2 már 3%-kal tér el). Ellenőrzésképpen: az O_2 moláris tömege $M=32\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}}$, amelyből a gáz tömegére $m=nM=191{,}7$ g adódik, a megadott tömeggel hibahatáron belül megegyezően.

Tehát az edényben körülbelül $3{,}6\cdot 10^{24}$ oxigénmolekula van. Az oxigén kétatomos gáz, így a szabadsági fokok száma 5.

Teveli Jakab (Budapest, Karinthy Frigyes Gimn., 10. évf.)

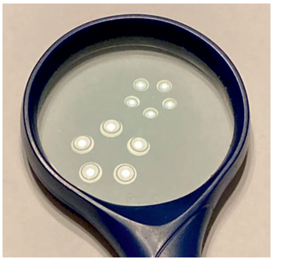
107 dolgozat érkezett. Helyes 68 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 26, hiányos (1–2 pont) 10, hibás 3 dolgozat.

P. 5505. *Egy szobában a mennyezeten egy ötágú csillár világít, az íróasztalon egy szimmetrikus, mindkét oldalán domború kézinagyító fekszik. A nagyítóra pillantva a csillár két különböző nagyítású és tájolású képét láthatjuk.*

a) Hogyan jön létre a két kép?

b) Merre állnak a csillár karjai a valóságban?

(*5 pont*) Közli: *Baranyai Klára,* Veresegyház



Megoldás. A két kép úgy alakul ki, hogy a fény tükröződik a nagyító mindkét felületéről.

Amikor a külső felületről verődik vissza a fény, akkor olyan, mintha egy domború tükörről tükröződne. A domború tükör dioptriája

$$D_1=-\frac{2}{r},$$

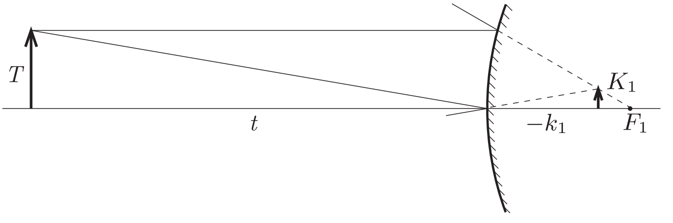
ahol r a lencse görbületi sugara. A leképzési törvény alapján ekkor

$$D_1 = \frac{1}{t} + \frac{1}{k_1},$$

ahol t a tárgy, k_1 pedig a kép távolsága a nagyítótól. Rendezve, a képtávolság

$$k_1 = \frac{t}{tD_1 - 1} < 0.$$

Egy domború tükör képe bármely tárgytávolságnál egyenes állású, látszólagos (a tükör mögött keletkezik) és kicsinyített.



1. ábra

A nagyítás abszolút értéke:

$$|N_1| = \frac{|K_1|}{T} = \frac{|k_1|}{t} = \frac{1}{1 - tD_1} = \frac{r}{2t + r} < 1.$$

A másik esetben a fény áthalad a lencsén, visszaverődik a nagyító hátsó, homorú felületén, majd újra áthalad a lencsén. A lencsék és a tükrök nagyon közel vannak egymáshoz, így a dioptriáik összeadódnak (a lencsén kétszer halad át a fény, így a lencse dioptriája kétszeresen szerepel):

$$D_2 = \frac{2}{r} + 2(n-1)\frac{2}{r} = (2n-1)\frac{2}{r},$$

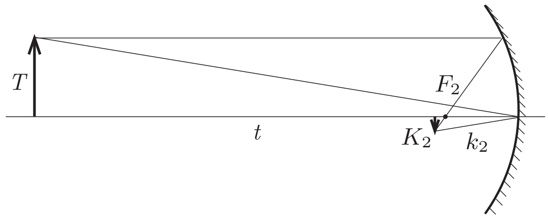
ahol $n > 1$ a nagyító üvegének törésmutatója ($n \approx 1{,}5$, de pontos értékének a feladat megoldása szempontjából nincs jelentősége). Ebben az esetben a nagyító úgy fogja tükrözni a tárgyat, mint egy D_2 dioptriájú homorú tükör. A leképzési törvény alapján ekkor

$$D_2 = \frac{1}{t} + \frac{1}{k_2},$$

ahol t a tárgy, k_2 pedig a kép távolsága a nagyítótól. Rendezve, a képtávolság

$$k_2 = \frac{t}{tD_2 - 1} > 0.$$

Esetünkben biztosan $t > 2f_2$ ($f_2 = D_2^{-1} < r$), így a homorú tükörben keletkező kép fordított állású, valódi (a tükör előtt keletkezik) és kicsinyített.



2. ábra

A nagyítás ebben az esetben:

$$N_2 = \frac{K_2}{T} = \frac{k_2}{t} = \frac{1}{tD_2 - 1} = \frac{r}{2(2n-1)t - r} < 1.$$

Hasonlítsuk össze a nagyításokat. A csillár távolsága biztosan sokkal nagyobb, mint a nagyító görbületi sugara, $t \gg r$. Ezt (valamint azt, hogy $n > 1$) felhasználva

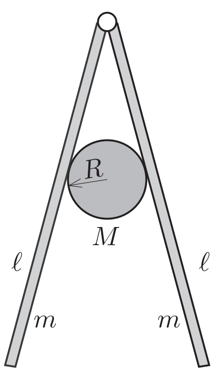
$$|N_1| = \frac{r}{2t + r} \approx \frac{r}{2t} > \frac{r}{2(2n-1)t} \approx \frac{r}{2(2n-1)t - r} = N_2,$$

tehát a domború felület által létrehozott, egyenes állású, látszólagos kép a nagyobb.

Ezek szerint a csillár karjai a valóságban úgy állnak, mint ahogyan a nagyobb képen.

Tóth Kolos Barnabás (Budapest, Eötvös J. Gimn., 10. évf.)

23 dolgozat érkezett. Helyes Tóth Kolos Barnabás megoldása. Kicsit hiányos (4 pont) 4, hiányos (1–3 pont) 12, hibás 6 dolgozat.



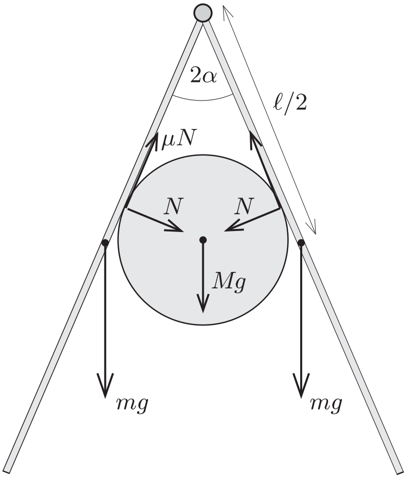
P. 5507. *Két egyforma, érdes deszkát súrlódásmentes, vízszintes helyzetben rögzített tengely kapcsol össze. Mindkét deszka tömege m, hossza ℓ. A deszkák közé egy $M = \frac{1}{2}m$ tömegű, $R = \frac{1}{5}\ell$ sugarú hengert helyezünk.*

a) Legalább mekkora kell legyen a deszkák és a henger közötti tapadási súrlódás együtthatója, hogy a henger valahol (egy alkalmasan választott helyen) egyensúlyban maradhasson?

b) Mekkora lehet a deszkák által bezárt szög a henger egyensúlyi állapotában?

(*6 pont*) *Dózsa Márton* (1914–1999) feladata nyomán

I. megoldás. A geometriai viszonyokat és a hengerre ható erőket a megcsúszás határesetében az *1. ábra* mutatja.



1. ábra

Az egyensúly feltétele:

$$(1)\qquad 2(\mu N\cos\alpha - N\sin\alpha) - Mg = 0.$$

Egyensúlyi helyzetben bármelyik deszkánál a rá ható erők eredő forgatónyomatéka a tengelyre vonatkoztatva nulla:

$$mg\frac{\ell}{2}\sin\alpha = NR\operatorname{ctg}\alpha.$$

Tudjuk, hogy $5R = \ell$ és $2M = m$, így fennáll, hogy

$$(2)\qquad N = 5Mg\sin\alpha\ \operatorname{tg}\alpha.$$

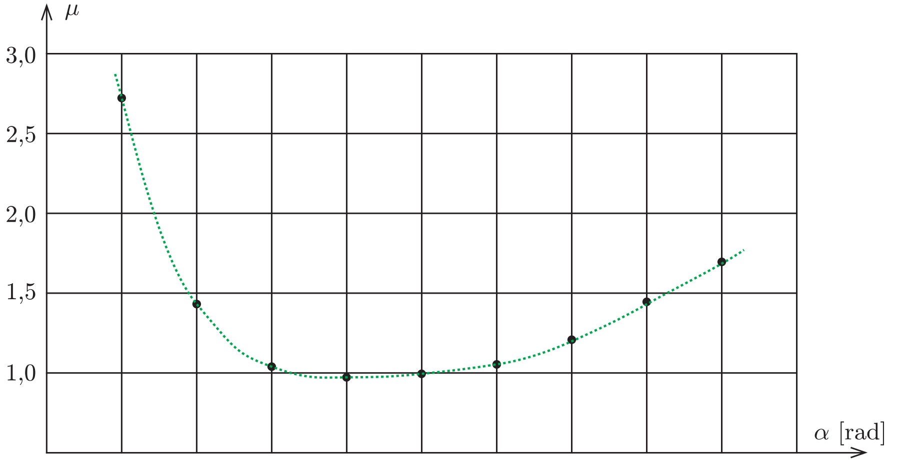
Ezt (1)-be helyettesítve a kritikus súrlódási együtthatóra

$$\mu = \frac{1}{10\sin^2\alpha} + \operatorname{tg}\alpha$$

adódik. Természetesen ennél nagyobb tapadó súrlódási együttható esetén is fennállhat az egyensúly.

Grafikusan ábrázolva a $\mu(\alpha)$ függvényt (*2. ábra*) leolvashatjuk, hogy a legkisebb súrlódási együttható, amely mellett létrejöhet egyensúly:

$$\mu_{\min} \approx 1{,}0,$$



2. ábra

és a hozzá tartozó szög:

$$\alpha_0 \approx 0{,}5 \text{ rad} \approx 30^\circ.$$

Daniils Koselevs (Belfast, Campbell College, 10. évf.)

II. megoldás. Legyen α a két deszka által bezárt szög fele, amely

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{5} \approx 11{,}3^\circ < \alpha < 90^\circ$$

értékeket vehet fel. (Az alsó határt az a feltétel határozza meg, hogy a henger és a deszkák érintkezési vonala nem lehet lejjebb, mind a deszkák alsó széle.) Ha k-val jelöljük az érintkezési vonal és a tengely távolságát, a deszkák félnyílásszögére fennáll:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{R}{k} = \frac{\ell}{5k} \qquad (0 < k < \ell). \tag{3}$$

Mivel a rendszer egyensúlyban van, a deszkákra ható eredő forgatónyomaték *nulla:*

$$\frac{1}{2}mg\ell\sin\alpha - Nk = 0,$$

ahonnan

$$N = \frac{mg\ell\sin\alpha}{2k}. \tag{4}$$

A hengerre ható erők függőleges komponenseinek összege is nulla. Határesetben, amikor a súrlódási erő μN:

$$Mg + 2N\sin\alpha - 2\mu N\cos\alpha = 0,$$

vagyis ($M = m/2$-t is felhasználva):

$$2N(\mu\cos\alpha - \sin\alpha) = \frac{1}{2}mg. \tag{5}$$

A (3), (4) és (5) összefüggésekből megkapjuk egy adott α szöghöz tartozó legkisebb súrlódási együtthatót, ami mellett az egyensúly kialakulhat:

$$\mu(\alpha) = \frac{1}{10\sin^2\alpha} + \operatorname{tg}\alpha. \tag{6}$$

A $\mu(\alpha)$ függvény minimuma adja meg azt a súrlódási együtthatót, amely mellett (alkalmasan választott α szögnél) teljesülhet az egyensúly feltétele. A szélsőértéknél (6) deriváltja nulla:

$$\mu'(\alpha) = \frac{-\cos\alpha}{5\sin^3\alpha} + \frac{1}{\cos^2\alpha} = 0,$$

ahonnan

$$\operatorname{tg}\alpha = \sqrt[3]{\frac{1}{5}} = 0{,}585,$$

vagyis

$$\alpha = 30{,}31^\circ \approx 30^\circ,$$

és a minimum értéke

$$\mu_{\min} = 0{,}977 \approx 1{,}0.$$

Kiss Adorján Timon (Kaposvári Táncsics M. Gimn., 11. évf.)

III. megoldás. *a*) Az előző megoldások gondolatmenetét követve a megcsúszás határesetére a

$$\mu(\alpha) = \frac{1}{10\,\sin^2\alpha} + \operatorname{tg}\alpha$$

feltételt kapjuk. Mivel

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \qquad \text{vagyis} \qquad \frac{1}{\sin^2\alpha} = 1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha},$$

ezért érdemes áttérni α-ról az $x = \operatorname{tg}\alpha$ új változóra. (Az általunk vizsgált $\frac{1}{5} \leqslant \operatorname{tg}\alpha = x$ intervallumban $x(\alpha)$ monoton növekvő függvény, μ minimumát kereshetjük az x változó szerinti minimum formájában is.) Ezzel a helyettesítéssel

$$\mu(x) = \frac{1}{10x^2} + x + \frac{1}{10},$$

amit a

$$\mu(x) = \frac{1}{10x^2} + \frac{x}{2} + \frac{x}{2} + \frac{1}{10}$$

alakban is felírhatunk.

A számtani és mértani közepekre vonatkozó ismert egyenlőtlenség szerint

$$\mu(x) \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{1}{10x^2}\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}} + \frac{1}{10} = \sqrt[3]{\frac{27}{40}} + \frac{1}{10} \approx 0{,}977 \approx 1{,}0.$$

Az egyenlőség akkor teljesül, ha

$$\frac{1}{10\,x^2} = \frac{x}{2}, \qquad \text{vagyis} \qquad x = \sqrt[3]{\frac{1}{5}} = 0{,}585,$$

azaz

$$\alpha = \operatorname{arctg}\sqrt[3]{\frac{1}{5}} \approx 30{,}3^\circ.$$

Ekkora szögnél a henger ténylegesen érintkezik a deszkákkal, tehát ez az egyensúlyi állapot fizikailag megvalósítható.

b) Mekkora lehet a deszkák által bezárt szög? Mivel a fizikailag reális

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{5}\approx 11{,}3^\circ < \alpha < 90^\circ$$

intervallumban minden α szöghöz tartozik egy véges, pozitív $\mu(\alpha)$ érték, elvben ezen szögek bármelyikénél létrehozható az egyensúly, amennyiben a tapadó súrlódási együttható „elegendően" nagy. A valóságban azonban túlságosan nagy α értékeknél nem alakulhat ki egyensúly, hiszen $\alpha\to 90^\circ$ határesetben $\mu(\alpha)$ végtelenhez tart, emiatt semmilyen anyagú henger nem maradhat egyensúlyban ekkora, vagy ezt megközelítő nagyságú deszkaállásnál.

Bencz Benedek (Budapest, Baár-Madas Ref. Gimn., 11. évf.)

47 dolgozat érkezett. Helyes 23 megoldás. Kicsit hiányos (4-5 pont) 6, hiányos (1–3 pont) 15, hibás 3 dolgozat.

Fizikából kitűzött feladatok

M. 427. Fizikaórán azt tanuljuk, hogy a csúszási súrlódási erő egyenesen arányos a felületeket összenyomó erővel, és az arányossági tényező nem függ a felület nagyságától. Vizsgáljuk meg (legalább kétféle anyagpárral), hogy mennyire pontosan teljesülnek ezek az állítások!

(*6 pont*) Közli: *Gnädig Péter,* Vácduka

G. 833. Egy gyermek minden lineáris testmérete néhány év alatt kétszeresére nő. Hogyan változik a talpai alatt a nyomás? (Feltételezhető, hogy a gyermek sűrűsége nem változik a növekedés közben.)

(*3 pont*) Közli: *Simon Péter,* Pécs

G. 834. Megszoktuk, hogy reggel az árnyékok hosszúak, délig rövidülnek, délután nyúlnak, és alkonyatkor ismét hosszúak. Van-e olyan pontja a Földnek, ahol egy függőleges pálca vízszintes talajra vetett árnyéka egész nap ugyanolyan hosszú?

(*3 pont*)

G. 835. Egy autóvezető 60 km/h sebességgel halad egy domb alján, mikor „üresbe" kapcsolja az autóját. Amikor felér a domb tetejére, akkor a sebességmérője 40 km/h értéket mutat. A közegellenállási és súrlódási veszteségeket hanyagoljuk el.

a) Mekkora lenne az autó sebessége a domb tetején, ha a domb aljára 70 km/h sebességgel érkezett volna?

b) Mekkora minimális sebességgel haladhat az autóvezető a domb alján, hogy meghajtás nélkül feljusson annak tetejére?

(*4 pont*) Közli: *Gelencsér Jenő,* Kaposvár

G. 836. Egy $\ell = 0{,}5$ m hosszú, hengeres, egyik végén zárt, a másik végén nyitott üvegcsövet nyílásával lefelé fordítva, függőleges helyzetben a Holt-tenger vizébe merítünk úgy, hogy a cső alsó (nyitott) vége $h = 30$ méterrel a vízfelszín alá kerül. A csőben 32 °C-os hőmérsékletű és 800 Hgmm nyomású – a légkörrel megegyező – levegő volt. A Holt-tenger vizének hőmérséklete 27 °C, sűrűsége a desztillált víz sűrűségének 1,24-szerese. Milyen magasra emelkedik a víz a csőben?

(*4 pont*)

P. 5526. Álló helyzetből induló, a pályája mentén egyenletesen gyorsuló motorkerékpár mozgásának 7. másodpercében 13 m utat tett meg.

a) Mekkora utat tesz meg a 11. másodpercben?

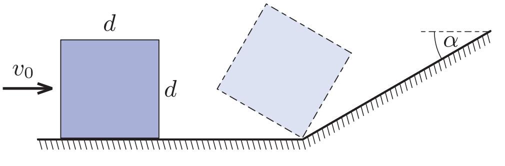
b) Mekkora a motoros gyorsulása a 11. másodperc végén, ha a pályája 120 m sugarú kör?

(*4 pont*) Közli: *Holics László,* Budapest

P. 5527. Vízszintes, érdes asztalon a μ csúszási súrlódási együttható az asztal peremétől mért x távolság függvénye. Egy kicsiny testet a peremről különböző v kezdősebességekkel elindítva azt tapasztaljuk, hogy a megállásig megtett út $s = kv$ alakú, ahol k az asztalra jellemző paraméter. Határozzuk meg a súrlódási együttható helyfüggését!

(*5 pont*) Dürer Verseny feladata nyomán

P. 5528. Vízszintes, súrlódásmentesnek tekinthető talajon egy $d = 10$ cm oldalélű, homogén tömegeloszlású kocka csúszik v_0 sebességgel. Egyszer csak a kocka a talajhoz csatlakozó, $\alpha = 30°$ hajlásszögű lejtőhöz ér. A lejtő és a talaj „törésvonala” merőleges a kocka haladási irányára. A kocka talajjal érintkező, első oldaléle a törésvonalnál tökéletesen rugalmatlanul megakad, így a kocka megbillen. Legalább mekkora v_0 értéke, ha a kocka elülső oldallapja „rábillen” a lejtőre?

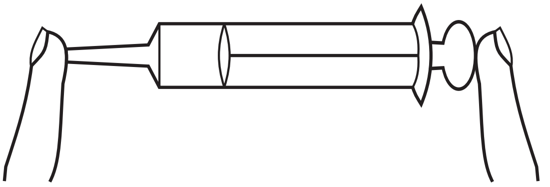


(*5 pont*) Közli: *Vigh Máté,* Biatorbágy

P. 5529. Egy 7 tonnás helikopter akkor tud egyhelyben lebegni, ha hajtóműve 1000 kW teljesítményt ad le. Becsüljük meg, mekkora teljesítmény szükséges az előbbi helikopter egyhelyben lebegtetéséhez, ha az a belső terében még további 4 tonna súlyt szállít?

(*5 pont*) Közli: *Széchenyi Gábor,* Budapest

P. 5530. Egy orvosi fecskendő dugattyújának 300 mm^2, kivezető csöve üregének pedig 4 mm^2 a keresztmetszete. A nyitott végű eszköz dugattyújának megmozdításához (a tapadási súrlódás legyőzéséhez) 1,4 N erő szükséges. Miután a kivezető csövet az *ábra* szerint egyik ujjunkkal befogtuk, a dugattyút egy másik ujjunkkal nagyon lassan befelé toljuk úgy, hogy egyéb helyen nem érünk a végig nyugalomban lévő fecskendőhöz (lásd az ábrát). A teljes folyamat során a bezárt levegő térfogata 20 cm^3-ről 15 cm^3-re csökken.



a) Mennyi a dugattyú betolását követően a bezárt levegő nyomása?

b) Legalább mekkora erővel kell szorítanunk ekkor a fecskendő kivezető csövének végét?

(A külső légnyomás 100 kPa, a fecskendő súlyától eltekinthetünk.)

(*4 pont*) Közli: *Kis Tamás,* Heves

P. 5531. Egy Newton-féle csillagászati távcső nyitott tubusába véletlenül berepült egy világító szentjánosbogár. Amikor a tükörtől 150 cm távol, az optikai tengelyen lévő P ponton keresztül az optikai tengely mentén mozgott, a képének pillanatnyi sebessége kétszer akkora volt, mint amikor a P ponton keresztül az előzővel megegyező sebességgel, de az optikai tengelyre merőlegesen repült. Mekkora a távcső tükrének fókusztávolsága?

(*5 pont*) Közli: *Gnädig Péter,* Vácduka

P. 5532. Egy változtatható kapacitású kondenzátort, melynek kezdeti kapacitása C_0, feltöltünk U_0 feszültségre, majd egy R ellenálláson keresztül rövidre zárunk.

a) Mennyi ideig és hogyan kell a kondenzátor kapacitását változtatnunk, hogy a kondenzátor kisütése közben az áramerősség állandó maradjon?

b) Határozzuk meg a kondenzátor kezdeti energiájának és az ellenálláson keletkező Joule-hőnek az arányát! Adjunk magyarázatot az eredményünkre.

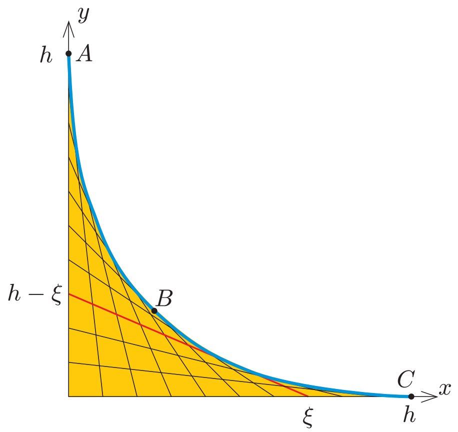
(*5 pont*) A Quantum Magazine nyomán

P. 5533. A ^{40}K izotóp szokatlan viselkedésű, mert képes negatív és pozitív béta-bomlásra is, sőt elektronbefogásra is. Mekkora a háromféle folyamat bomlási energiája MeV egységben?

Útmutatás: Az izotóptömegeket lásd a `https://www.komal.hu/cikkek/atomtomegek.pdf` oldalon.

(*4 pont*) Példatári feladat nyomán

P. 5534. Legyen egy derékszögű koordináta-rendszer x tengelye vízszintes, y tengelye pedig függőleges. Az x tengely $0 \leqslant \xi \leqslant h = 1$ m minden egyes $x = \xi$ pontját kössük össze az y tengelyen lévő $y = h - \xi$ ponttal. Fektessünk egy súrlódásmentes, vékony csövet az előzőek szerint felvett szakaszokból kialakuló sárga „síkidom" burkolójára.



Indítsunk el lökésmentesen egy m tömegű, kicsiny testet a cső tetejéről. Adjuk meg mg egységekben, hogy a mozgása során mekkora erővel nyomja a test a cső falát

a) közvetlenül az indulás után az A pontban;

b) a cső B felezőpontjánál;

c) közvetlenül a cső elhagyása előtt a C pontnál!

(*6 pont*) Közli: *Honyek Gyula,* Veresegyház

❄

Beküldési határidő: 2024. január 15.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄

MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL FOR SECONDARY SCHOOLS
(Volume 73. No. 9. December 2023)

Problems in Mathematics

New exercises for practice – competition K (see page 542): **K. 789**. We color the positions of the integers on the number line using red and blue dots. *a*) Is it possible to find a coloring such that no two dots with the same color are exactly 5 or 7 units apart from each other? *b*) Is it possible to find a coloring such that no two dots with the same color are exactly 6 or 11 units apart from each other? **K. 790.** The 100 richest people of Neverland had a dinner party in a room with 12 huge tables. Those with birthdays in the same month sat down at the same table. Let X denote the number of people around the table with the smallest number of people. Let Y denote the number of people around the table with the largest number of people. Find the greatest possible value of X and the smallest possible value of Y. **K. 791.** *a*) Find all three digit numbers that are equal to four times the product of their digits. *b*) Is it possible to find a three digit number that is equal to twice the product of its digits? **K/C. 792.** Let n be a positive integer. Prove that the last digit of the sum $1+2+3+\dots+n$ cannot be 2, 4, 7 or 9. **K/C. 793.** We have to fill in the 3×4 table in the *figure* with X's obeying the following rule: if there are exactly two X's in the same row or column, we can put a third X in one of the empty cells in the row or column of the two X's. Prove that regardless of the order we choose, we will be left with at least two empty cells in the end.

New exercises for practice – competition C (see page 543): **Exercises up to grade 10: K/C. 792.** See the text at Exercises **K. K/C. 793.** See the text at Exercises **K. Exercises for everyone: C. 1788.** Solve the equation $14x^2+15y^2=7^{2023}$ for integer values of x and y. (*Based on a Swiss competition problem*) **C. 1789.** A tortoise travelled a distance of 14 units in the plane. Each of its steps were of a unit's length. After each step it made a turn: if the number of the previous step was odd, then with an angle of 60°, if even, then with an angle of 90°. In steps 3, 5, 8 and 12 he turned to the right, in the remaining steps he turned to the left. *a*) Prove that the tortoise will end up in its initial position facing in its initial direction after its 14^{th} step. *b*) Find the area enclosed by the walk of tortoise in algebraic form. (Submitted by *Lajos Szilassi,* Szeged) **C. 1790.** Find the smallest possible value of the expression $x^2+y^2+5z^2-xy-3yz-zx+3x-4y+7z$ for real values of x, y and z. (*Vietnamese problem*) **Exercises upwards of grade 11: C. 1791.** Solve the equation $\frac{8^x-15625}{4^x+25\cdot 2^x+625}=2023$ for real values of x. (Submitted by *Olivér Teleki,* Tököl) **C. 1792.** In triangle ABC let the midpoints of sides AB and AC be F and E, respectively. Let P and Q be two arbitrary points in the plane of triangle ABC. Let P' and Q' be the reflection of P and Q across E and F, respectively. Let M and N denote the midpoints of line segments PB and QC, respectively. Prove that $MN \parallel P'Q'$ and $P'Q'=2MN$. (Submitted by *Van Khea,* Cambodia)

New exercises – competition B (see page 544): **B. 5350.** *a*) Is it possible to find positive integers a, b, c and d such that the arithmetic mean of a and b is greater than the quadratic mean of c and d, however, the geometric mean of a and b is smaller than the harmonic mean of c and d? *b*) Is it possible to find positive integers a, b, c and d such that the geometric mean of a and b is greater than the quadratic mean of c and d, however, the arithmetic mean of a and b is smaller than the harmonic mean of c and d? (*3 points*) (Submitted by *Bálint Hujter,* Budapest) **B. 5351.** Let P be an arbitrary point inside the equilateral triangle ABC. The line parallel to AB through P intersects sides BC and AC in points C_1 and C_2, respectively. Similarly, the parallel through point P with side BC intersects sides AC and AB in points A_1 and A_2, respectively. Finally, let the parallel through point P with side AC intersect sides AB and BC in points B_1 and B_2, respectively. Prove that the areas of triangles $A_1B_1C_1$ and $A_2B_2C_2$ are equal. (*3 points*) (Submitted by *Viktor Vígh,* Sándorfalva) **B. 5352.** For which positive integers $n>3$ is it possible to find n lines in the plane such that any three of them form an isosceles triangle? (*4 points*) (Submitted by *Bálint Hujter,* Budapest) **B. 5353.** Prove the following equality for every positive integer $n>1$: $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|i-j|=\frac{n(n^2-1)}{3}$. (*4 points*) (Submitted by *Mihály Bence,* Brassó) **B. 5354.** Prove that the Euler line of a scalene triangle is parallel to one of the interior angle bisectors if and only if the bisected angle is 120°. (*5 points*) (Submitted by *Roland Jármai,* Budapest) **B. 5355.** We colored n squares red in a square lattice. We numbered the red squares from 1 to n, and calculated the sum of the numbers for each pair of squares that share a common side. Is it true that for all arrangements of the n squares it is possible to number the red squares in a way that we will get a different sum for all pairs that share a common side? (*5 points*) (Submitted by *András Imolay,* Budapest) **B. 5356.** Prove the following inequality for every integer

$n \geqslant 2$ and non-negative real numbers $x_1, \ldots, x_n$: $\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}(1+x_i)} \geqslant 1+\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}$. (*6 points*) (Submitted by *Ákos Somogyi,* London) **B. 5357.** Let ABC be a triangle. The tangents at B and C to the circumcircle of ABC intersect at P. Let $PB \cap AC = D$ and $PC \cap AB = E$. The perpendicular bisector of the line segment BC intersects AC and AB at F and G, respectively. The circumcircles of the triangles PDF and PEG intersect at M for the second time. Let A' be the reflection of A over FG and let O be the circumcenter of the triangle AFG. Prove that the line OA' passes through one of the intersections of the circles MFG and ADE. (*6 points*) (Submitted by *Baris Koyuncu,* Istambul)

New problems – competition A (see page 546): **A. 866.** A graph is called 2-connected, if after deleting any point (and the edges adjacent to it) from the graph it remains still connected. Is it true that in any 2-connected graph with a countably infinite number of vertices it's always possible to find a trail that is infinite in one direction (i.e. a sequence of not necessarily distinct points $v_1, v_2, \ldots$ such that v_i and v_{i+1} is always connected with an edge, and all edges (v_i, v_{i+1}) are distinct from each other)? (Submitted by *Balázs Bursics* and Anett Kocsis, Budapest) **A. 867.** Let $p(x)$ be a monic integer polynomial (polynomial with integer coefficients and leading coefficient 1) that has n real roots, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Let $q(x)$ be an arbitrary integer polynomial that is relatively prime to polynomial $p(x)$ (i.e. it's not possible to find an integer polynomial different from constant 1 and -1 that divides both $p(x)$ and $q(x)$). Prove that $\sum_{i=1}^{n} \left|q(\alpha_i)\right| \geqslant n$. (Submitted by *Dávid Matolcsi,* Berkeley) **A. 868.** A set of points in the plane is called disharmonic, if the ratio of any two distances between the points is between 100/101 and 101/100, or at least 100 or at most 1/100. Is it true that for any distinct points $A_1, A_2, \ldots, A_n$ in the plane it is always possible to find distinct points $A_1', A_2', \ldots, A_n'$ that form a disharmonic set of points, and moreover A_i, A_j and A_k are collinear in this order if and only if A_i', A_j' and A_k' are collinear in this order (for all distinct $1 \leqslant i, j, k \leqslant n$)? (Submitted by *Dömötör Pálvölgyi* and *Balázs Keszegh,* Budapest)

Problems in Physics

(see page 570)

M. 427. In physics classes, we learn that the kinetic frictional force is directly proportional to the force compressing the surfaces, and that the proportionality constant does not depend on the size of the surface. Investigate (using at least two pairs of materials) how accurate these statements are.

G. 833. The size of the body of a child in each (linear) direction doubles in a few years. How does the pressure exerted by its feet on the ground changes? (Assume that the density of the child does not change as it grows.) **G. 834.** We are used to shadows being long in the morning, shortening by midday, lengthening in the afternoon, and then long again at dusk. Is there any place on Earth where the shadow of a vertical stick cast on horizontal ground has the same length all day long? **G. 835.** A driver is driving at the foot of a hill at 60 km/h when he switches to neutral gear. When he reaches the top of the hill, the speedometer of the car reads 40 km/h. Neglect drag and friction losses. *a*) What would be the speed of the car at the top of the hill if it had reached the bottom of the hill at 70 km/h? *b*) What should the minimum speed of the car at the bottom of the hill be in order to reach the top without without using the engine? **G. 836.** An $\ell = 0.5$ m long cylindrical glass tube, closed at one end and open at the other, was submerged vertically in the Dead Sea with its open end turned downwards so that the lower (open) end of the tube is at a depth of $h = 30$ m. Inside the tube there was air at a temperature of

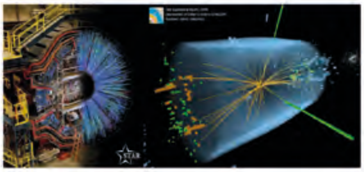
32 °C and at a pressure of 800 mmHg – which was the same as the atmospheric pressure. The water in the Dead Sea has a temperature of 27 °C and a density 1.24 times that of distilled water. How high does the water rise in the tube?

P. 5526. Starting from rest and accelerating uniformly, a motorcycle travelled 13 m in the 7th second of its motion. *a*) How much distance does it cover in the 11th second? *b*) What is the acceleration of the motorcycle at the end of the 11th second, if its path is a circle with radius 120 m? **P. 5527.** On a horizontal, rough table, the value of the coefficient of kinetic friction μ depends on the distance x measured from the edge of the table. Launching a small body from the edge at different initial velocities v, we find that the distance along which the small body stops is $s = kv$, where k is a parameter characteristic of the table. Determine the function how the value of the coefficient of kinetic friction depends on the position. **P. 5528.** On a horizontal, frictionless surface, a cube of edge $d = 10$ cm and of uniform mass distribution, is sliding at a velocity of v_0. At some point the cube reaches a slope of an angle of inclination of $\alpha = 30°$. The "fault line" between the slope and the ground is perpendicular to the direction of travel of the cube. The front edge of the cube which is in contact with the ground gets stuck at the fault line totally inelastically, so that the cube topples. What is the least value of v_0 if the front face of the cube "tips" onto the slope? **P. 5529.** A 7-tonne helicopter can hover in one place if its engine produces 1000 kW of power. Estimate the power required to hover the helicopter in one place if there is an additional 4 tonnes of weight in it. **P. 5530.** The cross sectional area of the piston of a medical syringe is 300 mm^2 and that of the outlet tube of the syringe is 4 mm^2. A force of 1.4 N is required to move the piston when the device is open (to overcome static friction). After sealing the outlet tube with one finger as shown in the *figure,* the piston is pushed inwards very slowly with the other finger so that no other part of the syringe is touched (see figure). During the process, the volume of air in the syringe is decreased from 20 cm^3 to 15 cm^3. *a*) What is the pressure of the air in the syringe after the piston was pushed to its final position? *b*) At this time, what is the least force at which we have to press the end of the outlet tube of the piston? (The ambient pressure is 100 kPa, the weight of the syringe is negligible.) **P. 5531.** A glowing firefly accidentally flew into the open tube of a Newtonian telescope. When it was moving along the optical axis through point P, which is a point on the principal axis 150 cm from the mirror, the instantaneous speed of its image was twice as fast as when it flew through point P at the same speed as before, but perpendicularly to the principal axis. What is the focal length of the mirror in the telescope? **P. 5532.** A variable capacitor with an initial capacitance of C_0 is charged to a voltage of U_0 and short-circuited through a resistor of resistance R. *a*) How long and how should we vary the capacitance of the capacitor so that the current remains constant when the capacitor is discharged? *b*) Determine the ratio of the initial energy of the capacitor to the heat dissipated by the resistor. Explain your results. **P. 5533.** The ^{40}K isotope has unusual behaviour because it can undergo both negative and positive beta decay, and even capture an inner electron. What is the decay energy of the three processes in MeV units? *Hint:* For the relative isotopic masses see `https://www.komal.hu/cikkek/atomtomegek.pdf` . **P. 5534.** The x-axis of a Cartesian coordinate system is horizontal and the y-axis is vertical. Connect each point $x = \xi$ of the x axis, $0 \leqslant \xi \leqslant h = 1$ m, to the point $y = h - \xi$ on the y axis. The yellow region in the figure shows the above defined line segments. Lay a frictionless, thin tube along the envelope of the line segments. Launch a small body of mass m from the top of the tube without any initial speed. Determine the force in mg units with which the body pushes the wall of the tube during its motion *a*) right after its start at point A; *b*) at point B, which is the midpoint of the tube; *c*) at point C, which is a point right before the body leaves the tube.

Fizika az ELTE Természettudományi Karán

Anyagfizika

- Mikromechanika
- Hidrogén tárolás
- Nanoszerkezetek
- Röntgen vonalprofil analízis



Atomfizika

- Csillagászat gravitációs hullámokkal (LIGO-Virgo Kollaboráció)
- Atommagütközések kísérleti és elméleti vizsgálata (CERN)
- Asztrofizika

Biológiai fizika

- Biológiai rendszerek által inspirált robotok
- Evolúció különböző időskálákon
- Döntéshozatal és hierarchiák

Csillagászat

- Bolygórendszerek és eredetük
- Galaktikus és extragalaktikus csillagászat
- A Nap és a csillagok fizikája
- Űridőjárás

Elméleti fizika

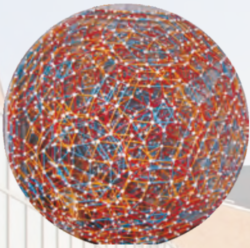
- Univerzum alapvető építőkövei és kölcsönhatásuk
- Univerzum alakulása a Nagy Bumm utántól napjainkig
- Környezeti áramlások

Komplex rendszerek fizikája

- Kvantuminformatika
- Atomi vékonyrétegek
- Genomika
- Mesterséges Intelligencia

Ha érdekel a fizika, akkor felvételizz fizika alapszakunkra!

További információk az ELTE Fizikai és Csillagászati Intézetéről: https://physics.elte.hu/



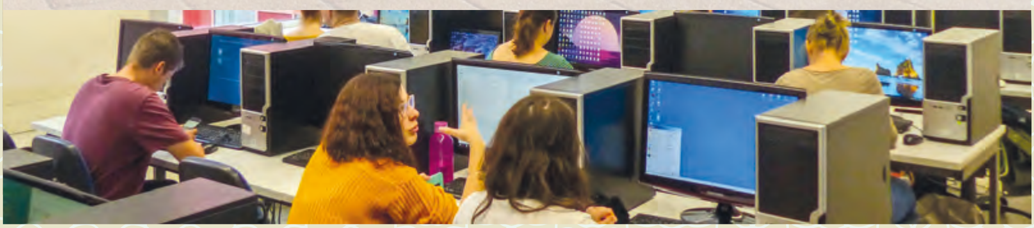
Természettudományi Kar

Az ELTE Természettudományi Kara (TTK) minden felmérés szerint az egyik legjobb egyetemi kar Magyarországon. A képzések a természettudományok teljes spektrumát felölelik: *matematika, biológia, fizika, földrajz, földtudományi, kémia, környezettan* alapszakok (BSc) – ezeken belül különböző szakirányok (biofizikus, csillagász, meteorológus...) – kerülnek meghirdetésre. **https://ttk.elte.hu/**

Matematikai Intézet

A matematika alapszak (BSc) egyaránt felkészít a kutatói életpályára és a matematika különböző területeken történő magas szintű alkalmazására is – kiváló karrierlehetőségeket nyújtva.
Az intézetben nagy hangsúlyt helyezünk a tehetséggondozásra és arra, hogy a választható szintek és blokkok révén mindenki megtalálja a neki megfelelő kurzusokat.
Az intézetben általános- és középiskolai tanárképzést is folytatunk osztatlan *matematikatanári* szakon. **http://www.math.elte.hu/**

Az ELTE TTK idén december 12-én tartja nyílt napját: **https://ttk.elte.hu/nyiltnap2023.** Ha esetleg későn jutna el hozzád ez a hír, a program a fenti linken vissza is nézhető.



Petőfi Kulturális Ügynökség
Nemzeti Együttműködési Alap
nka Nemzeti Kulturális Alap
Bethlen Gábor Alapkezelő Zrt.
Miniszterelnökség