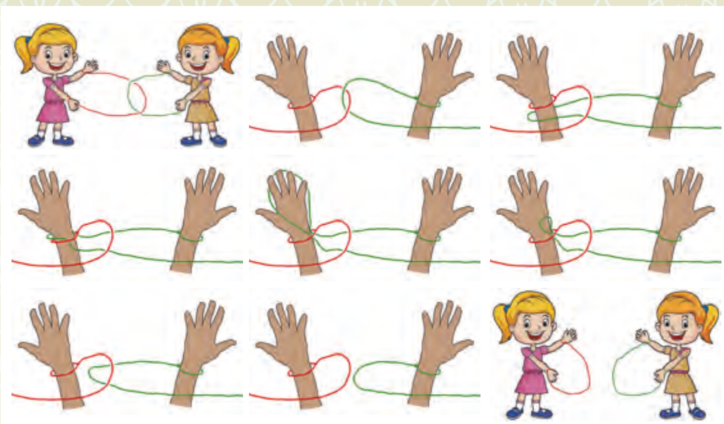
Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok

Informatika rovattal

Kép a G. 838-as feladathoz



Képek a decemberi ördöglakat feladvány megoldásához

Beszámoló a 2023. évi Eötvös-versenyről | Matematika és informatika – kéz a kézben | Matematika és fizika képzések az ELTE TTK-n | Rátz Tanár Úr Életműdíj 2023
Ördöglakat az erdőből

KöMaL

74. évfolyam
1. szám
2024.
január

A Bolyai János Matematikai Társulat és az Eötvös Loránd Fizikai Társulat folyóirata

Eötvös-verseny 2023

2023. október 13., a verseny budapesti helyszínén (ELTE Konferenciaterem)

2023. november 24., eredményhirdetés Budapesten

hátsó sor balról jobbra: Bátorfi Balázs, Seprődi Barnabás, Fey Dávid, Nagy Piroska Mária és Molnár Barnabás; első sor balról jobbra: Dancsák Dénes, Piriti János, Bartáné Cserny Katalin, Sarkadi Sándor István, Biszak Ákos, Beke Bálint és Zsigri Ferenc

balról jobbra: Ormos Pál (az Eötvös Loránd Fizikai Társulat elnöke), Fey Dávid (a verseny győztese) és Nagy Piroska Mária (tanára)

A KöMaL támogatói
Nemzeti Tehetség Program
Nemzeti Kulturális Támogatáskezelő
Kulturális és Innovációs Minisztérium

KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK

INFORMATIKA ROVATTAL BŐVÍTVE

ALAPÍTOTTA: **ARANY DÁNIEL** 1894-ben

74. évfolyam 1. szám — Budapest, 2024. január

Megjelenik évente 9 számban, januártól májusig és szeptembertől decemberig havonta 64 oldalon. ÁRA: 1250 Ft

TARTALOMJEGYZÉK

A szerkesztőség címe: 1117 Budapest,
Pázmány Péter sétány 1/C III. emelet 3.405.
Telefon: + 36 20 320-1143

A lap megrendelhető az Interneten:
`www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.h.shtml`.
Előfizetési díj egy évre: 10 400 Ft

E-mail: `szerk@komal.hu`
Internet: `http://www.komal.hu`

This journal can be ordered from the Editorial office:
Pázmány Péter sétány 1/C III. emelet 3.405.
1117–Budapest, Hungary
telephone: +36 20 320-1143
or on the Postal address
H–1518 Budapest 112, P.O.B. 32, Hungary,
or on the Internet:
`www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.h.shtml`.

Matematika és informatika – kéz a kézben, avagy egy 2023-as Schweitzer példa előzménye[1]

Ebben a cikkben megpróbáljuk bemutatni, hogy hogyan segíthet matematikai problémák megoldásában a számítógép, és hogyan segíthet a matematika memória vagy processzor használat szempontjából optimálisabb és/vagy több esetet is kezelni képes programok megírásában. A programjainkat algoritmusleíró nyelven adjuk meg (eredetileg C/C++ nyelven írtuk meg), reméljük, hogy az olvasó kedvet kap arra, hogy kipróbálja azokat saját kedvenc programozási nyelvén implementálva. A cikkben nem mindig közlünk teljes kódokat, inkább a programok lényegi/érdekes részeit emeljük ki, a „körítés” megírását a felhasználóra bízzuk. Kezdjünk is neki.

A Bolyai János Matematikai Társulat Érintő című elektronikus kiadványának 28. számában (2023. június) [1] jelent meg a Héttusa rovatban a következő

Feladat. *Van-e olyan szám, amelynek pontosan tíz pozitív osztója van a 20-nál nem nagyobb számok között?*

Megoldás. Mivel oszthatóságról, osztókról van szó, az embernek óhatatlanul eszébe jut a prímfelbontás. A keresett számunk legyen

$$p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_l^{\alpha_l}$$

alakú, ahol a p_i-k különböző prímek, α_i-k pedig pozitív egészek. Feltehetjük, hogy $p_i^{\alpha_i} \leqslant 20$, hiszen ha egy prímhatvány 20-nál nagyobb, akkor minden osztó, amelyben az tényezőként szerepel, szintén 20-nál nagyobb lesz. Kezdjük felépíteni egy egyszerű „mohó algoritmussal”[2] a számunkat prímhatványtényezőnként (a legkisebb prímtől kiindulva) úgy, hogy a 20-nál nem nagyobb osztók száma ne lépje túl a 10-et:

$$\begin{aligned} 2^4 &= 16; \quad && \text{20-nál nem nagyobb osztóinak száma 5,} \\ 2^4 \cdot 3^2 &= 144; \quad && \text{20-nál nem nagyobb osztóinak száma 10.} \end{aligned}$$

És a feladatot megoldottuk.

A feladat elég könnyen megoldható egyszerű számolással. A Héttusa feladatokra bárki küldhet választ, megoldást. A kitűző (Róka Sándor) szándéka és megfogalmazása szerint a rovatban olyan feladatokat tűznek ki, amelyekre szinte bárki találhat megoldást, de ugyanakkor újabb kérdéseket inspirálhatnak. Ez a feladat is ilyen, kezdjük hát el más módon is megközelíteni és vele kapcsolatos újabb kérdéseket feltenni.

1. kérdés. *Mely számok jöhetnek szóba megoldásként?*

[1] Ezt a kutatást a TKP2021-NVA-09 projekt támogatta. A TKP2021-NVA-09 számú projekt a Magyar Innovációs és Technológiai Minisztérium támogatásával valósult meg a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Alapból, a TKP2021-NVA támogatási konstrukció keretében.

[2] A mohó algoritmus olyan döntéshozó algoritmus, amely minden egyes lépésnél a legjobbnak tűnő döntést hozza a rendelkezésre álló lehetőségek közül, anélkül hogy előretekintene.

Megoldás. Már pedzegettük a kérdést a feladat megoldásában: olyan megoldásokat keresünk, ahol a számnak nincs 20-nál nagyobb p^α osztója, tehát ezek a prímhatványok jöhetnek szóba:

$$2^4, 3^2, 5, 7, 11, 13, 17, 19.$$

Más szóval a lényegesen különböző megoldások a $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 = 232\,792\,560$ osztói közül kerülhetnek ki. Az osztókból véges sok van, ellenőrizhető, hogy közülük melyek megoldások (lásd a következő kérdést). Egy megoldásból újabb megoldást kapunk, ha egy olyan prímhatvánnyal szorozzuk meg, amellyel megszorozva nem keletkezik újabb 20-nál kisebb osztó. Ilyen lehet egy 20-nál nagyobb prím hatványa, vagy lehet például a 2 valamilyen pozitív egész hatványa is, hiszen ez utóbbi esetben a 2 legalább az 5.-en szerepelne, ami már nagyobb, mint 20. Például a $144 \cdot 2 = 288$ és a $144 \cdot 3 = 432$ megoldások, nem megoldás a $144 \cdot 5 = 720$, de megoldás a $144 \cdot 23 = 3312$. Ezzel a módszerrel megkaphatjuk bármelyik megoldást.

A megoldáshalmaz egy érdekes tulajdonsága, hogy a megoldások 232 792 560-periodikusan helyezkednek el a számegyenesen. Ez azért teljesül, mert egy megoldás azért megoldás, mert a 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 prímek olyan hatványon szerepelnek benne, amilyenen, és ez nem változik a 232 792 560-nal való eltolással. Ebben a kijelentésben azért van egy kis csúsztatás: ha a megoldásban az egyik prím maximális (vagy annál nagyobb) hatványon szerepel, akkor az eltolással neki változhat a kitevője, de nem csökkenhet a maximális kitevő alá, és ez a 20-nál kisebb osztók számát nem befolyásolja.

2. kérdés. 232 792 560*-nak hány olyan pozitív osztója van, amelynek pontosan tíz pozitív osztója van a 20-nál nem nagyobb számok között?*

Megoldás. 232 792 560 osztóiból az ismert állítás alapján $5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 960$ darab van, így ezt már nem szívesen ellenőrizné az ember „kézzel”, érdemes programot írni rá.

De ha már emlegettük az „ismert állítást”, ne essünk neki teljesen naiv módon az osztók keresésének, végignézve a számokat 1-től 232 792 560-ig: a trükk az állítás bizonyításában, hogy az osztókban minden prímtényező kitevője lehet bármi 0-tól a számban található kitevőig, hát listázzuk ez alapján az osztókat a programban.

Nyilván tovább is fogunk általánosítani, tehát ne direktben erre a 20-as számra írjuk meg a programunkat, hanem általánosabban: k darab osztót fogunk keresni, amelyek nem nagyobbak n-nél.

Amikor az ember elkezd gondolkodni egy program megírásán, akkor végig kell gondolnia, hogy mit hogyan kíván „modellezni” a programban, mit hogyan kell tárolni, melyik adatot hogyan kell kezelni és milyen algoritmus alapján fog dolgozni a program. Ebben a konkrét esetben:

1. Egyelőre nem akarunk prímszámok keresésére programot írni, „égessük be” a programunkba az első néhány prímszámot például a `https://oeis.org/A000040` weboldal alapján.

2. A prímek hatványainak szorzatával kell számolnunk, ezt úgy tárolhatjuk, hogy egy tömbben megadjuk a megfelelő kitevőt a prímekhez.

3. Az összes lehetséges kitevő-kombinációt ki kell próbálnunk, erre legegyszerűbb egy rekurzív függvényt írni, ami kipróbálja az éppen aktuális prím kitevőit és meghívja önmagát a következő prímre.

4. És ezt kétszer kell megtennünk: a konkrét esetben a 232 792 560 osztóira kell ellenőriznünk, hogy azok osztóiból 10 darab van-e, amelyek nem nagyobbak, mint 20.

Ezek alapján elkezdhetjük megírni a programot:

```
p : Egészek tömbje := [2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47,53]
NP : Egész := Elemszám(p)
ph, oh, koh : Egészek tömbje
n, k : Egész
```

A `p` tömbben tároljuk a „beégetett” prímszámainkat, az `NP` megadja ezek számát. A `ph` (**p**rím **h**atvány) tömbben lesz, hogy n-ig melyik prím maximum melyik hatványon szerepelhet, a konkrét $n = 20$ esetben (a fentiek alapján) ebben a tömbben a következő számok lesznek majd:

$$4, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.$$

Az `oh` (**o**sztó **h**atvány) tömbben lesznek az osztók kitevői, és a `koh` (**k**is **o**sztó **h**atvány) az osztók osztóinak kitevői.

Ízlések és pofonok különbözőek, ahogy szokták mondani: egy programot lehet alulról felfelé, és felülről lefelé felépíteni. A szerző ez utóbbit preferálja: hiába írjuk meg az egyszerűbb, egy későbbi, összefoglaló algoritmusban felhasználandó függvényeket, ha végül azokból mégsem sikerül összerakni a teljes programot. Úgyhogy kezdjük a fő (main) függvénnyel. Miután bekértük n és k értékét és persze ellenőriztük, hogy azok megfelelőek-e ($1 \leqslant n \leqslant 53, 1 \leqslant k \leqslant n$) meg kell határoznunk, hogy melyik prím maximum mekkora hatványon szerepelhet:

```
j : Egész := 1
i : Egész := 0
ph[i] := Egész(log(n+0.5)/log(p[i]))
Ciklus amíg i<NP és ph[i]>0
    Ki: p[i] "^" ph[i]
    j := j * Egész(Kerekít(Hatvány(p[i],ph[i])))
    i := i+1
    Ha i<NP akkor ph[i] := Egész(log(n+0.5)/log(p[i]))
Ciklus vége
Ki: "=" j "osztóit vizsgáljuk"
```

A `ph[i]` kiszámolásakor lényegében az n adott prím alapú logaritmusának egészrészét vesszük, a `+0.5`-re azért van szükség, hogy az esetleges kerekítési hibákat kiküszöböljük. (Mottó: *„Tévedni emberi dolog, de igazán összekutyulni valamit csak számítógéppel lehet”.*) Ellenőrzésképpen kiírjuk, hogy melyik prím maximum hányadik hatványon szerepelhet, és hogy ezeknek mi a szorzata (itt is vigyázva az esetleges kerekítési hibákra). A konkrét $n = 20$ esetben meg is kapjuk a 232 792 560 számot. Ezek után meghívhatjuk a „külső” rekurzív függvényünket, ami meghatározza ezen szám összes osztóját a prímkitevők végigpróbálgatásával:

```
osz : Egész

Eljárás osztok( s : Egész )
  Ha s<NP és ph[s]>0 akkor
    oh[s] := 0
    Ciklus amíg oh[s]<=ph[s]
      osztok(s+1)
      oh[s] := oh[s] + 1
    Ciklus vége
  Különben
    osz := 0
    Ha osztokszama(0) = k akkor
      szam := 1
      i := 0
      Ciklus amíg i<NP és ph[i]>0
        Ha oh[i] > 0 akkor
          Ki: p[i] "^" oh[i]
          szam := szam * Egész(Kerekít(Hatvány(p[i],oh[i])))
        Elágazás vége
        i := i + 1
      Ciklus vége
      Ki: "=" szam
    Elágazás vége
  Elágazás vége
Eljárás vége
```

A függvény alapértelmezett paramétere, hogy az első (0. indexű) prímszámtól kezdjük a kitevők próbálgatását. A függvény először ellenőrzi, hogy kell-e még kitevőket próbálgatni, ha igen, akkor a megadott prímmel ezt megteszi, és meghívja saját magát a következő prím `p` tömbbeli indexével. A függvény második részében ellenőrizzük egy még meg nem írt `osztokszama` függvénnyel, hogy a kapott osztónak hány osztója nem nagyobb, mint n, és ha pontosan k darab, akkor kiírjuk az adott osztó prímtényezős felbontását és magát az osztót is. És végül az `osztokszama` függvény, ami az előző alapján már könnyen érthető:

```
Függvény osztokszama( s : Egész ) : Egész
  Ha s<NP és ph[s]>0 akkor
    koh[s] := 0
    Ciklus amíg koh[s]<=oh[s]
      osztokszama(s+1)
      koh[s] := koh[s] + 1
    Ciklus vége
  Különben
    szam := 1
    i := 0
    Ciklus amíg i<NP és ph[i]>0
      szam := szam * Egész(Kerekít(Hatvány(p[i],koh[i])))
      i := i + 1
    Ciklus vége
    Ha szam<=n akkor osz := osz + 1
  Elágazás vége
  osztokszama :=  osz
Függvény vége
```

Futtatva ezt a programot $n = 20$ és $k = 10$ bemenő paraméterekkel összesen 84 darab osztót kapunk:

```
2^4 3^2 5^1 7^1 11^1 13^1 17^1 19^1 = 232792560 osztóit vizsgáljuk.

3^2 5^1 7^1 11^1 13^1 17^1 19^1 = 14549535
2^1 5^1 7^1 11^1 13^1 17^1 19^1 = 3233230
2^1 3^1 7^1 11^1 13^1 17^1 19^1 = 1939938
...
2^4 3^1 11^1 13^1 = 6864
2^4 3^1 7^1 = 336
2^4 3^2 = 144
```

Néhány osztót „kézzel" ellenőrizve úgy tűnik, hogy a programban nincs hiba. Hát akkor kísérletezzünk, játsszunk egy kicsit a programmal. Gyorsan kiderül, hogy mégis van valami probléma, ugyanis $n=23$ esetén a futtatás első sorában ezt látjuk (ez operációs rendszer függő lehet, ha az `Egész` típus 4 byte-os egészt jelent, akkor nem lesz jó az eredmény):

```
2^4 3^2 5^1 7^1 11^1 13^1 17^1 19^1 23^1 = -2147483648 osztóit vizsgáljuk.
```

Pozitív számok szorzataként negatív számot kaptunk: ez matematikailag nyilván lehetetlen. Ez egy tipikus túlcsordulási hiba: a tényleges 5 354 228 880-os eredmény nem fér bele a 4 byte-os egész számábrázolásba. Kicserélhetnénk a megfelelő helyeken az `Egész` típust ún. `Hosszú Egész` típusra (8 byte-os egész szám), akkor 43-nál fog túlcsordulni a dolog. De ha nem ragaszkodunk a kiinduló szám és az osztók kiírásához, megelégszünk azok prímtényezős felbontásával is, akkor egy minimális módosítással a programunk tökéletesen fog működni. Az olvasóra bízzuk annak a programrésznek a megtalálását, ahol ezt a módosítást végre kell hajtani ahhoz, hogy a program jó eredményt produkáljon. Ugyancsak érdekes feladat lehet ennek a programnak a felgyorsítása, hiszen már $n=42$ és $k=21$ esetén is kb. 15 másodpercig fut a program, amíg megtalálja a 3218 darab megfelelő osztót.

De menjünk tovább.

3. kérdés. *Van-e olyan szám, amelynek pontosan k db pozitív osztója van az n-nél nem nagyobb számok között ($k \leqslant n$)?*

Megoldás. A eredeti feladat megoldásában használt mohó algoritmus alapján írhatunk egy programot, ami adott n és k, vagy akár elég sok (n,k) pár esetén ellenőrzi az állítást. Mit kell megváltoztatni az eddigi programunkban ehhez? A fő függvényben végigpróbáljuk a lehetséges (n,k) párokat:

```
i : Egész

Ciklus n := 1-től p[NP-1]-ig
  i := 0
  ph[i] := Egész(log(n+0.5)/log(p[i]))
  Ciklus amíg i<NP-1 és ph[i]>0
    i := i + 1
    ph[i] := Egész(log(n+0.5)/log(p[i]))
  Ciklus vége
  Ciklus k := 2-től n-ig
    Ki: n, k
    Ha osztok(0) akkor Ki: "van" Különben Ki: "nincs"
  Ciklus vége
Ciklus vége
```

Vegyük észre, hogy nem ellenőrizzük a $k=1$ esetet egyetlen n esetén sem, hiszen pontosan 1 osztót az 1-es szám ad minden n-re (az n-nél nagyobb prímek hatványainak szorzataiként képzett számok ilyenek még, más lehetséges megoldás erre nincs). Az `osztok` függvény annyiban változik, hogy visszaadja, hogy sikerült-e megfelelő számot találni az adott (n, k) párhoz, és persze átírjuk „mohóra”, vagyis nagy kitevőktől megyünk a kisebbek felé, és az első találatnál kiszállunk:

```
osz: Egész

Függvény osztok(s) : Logikai
  Ha s = 0 akkor
    i := 0
    Ciklus amíg i<NP és ph[i]>0
      oh[i] := 0
      i := i+1
    Ciklus vége
  Elágazás vége
  Ha s<NP és ph[s]>0 akkor
    oh[s] := ph[s]
    Ciklus amíg oh[s]>=0
      osz := 0
      aktosz := osztokszama(0)
      Ha aktosz=k akkor
        osztok := IGAZ
      Különben
        Ha aktosz<k és osztok(s+1) akkor osztok := IGAZ
      Elágazás vége
      oh[s] -= 1
    Ciklus vége
  Elágazás vége
  osztok := HAMIS
Függvény vége
```

Érdemes végiggondolni, hogy kezdetben itt miért kell 0-val feltölteni az `oh` tömböt, és miért nem kellett ezt megtenni korábban.

Az `osztokszama` függvényen viszont el kell végezni azt a bizonyos minimális átalakítást, ami azon kívül, hogy garantálja a helyes működést, gyorsít is a programon. Ez ugyanis az egyetlen hely, ahol ténylegesen ki kell számoljunk egy prímhatványokkal megadott számot (hiszen össze kell hasonlítanunk n-el), és emiatt ez túlcsordulhat. Ennek megoldása, hogy már a számolási ciklusban ellenőrizzük, hogy túl nagy számot kaptunk-e, és kiszállunk, ha igen:

```
  ...
    szam := 1
    i := 0
    Ciklus amíg i<NP és ph[i]>0 és szam <= n
      szam := szam * Egész(Kerekít(Hatvány(p[i],koh[i])))
      i := i + 1
    Ciklus vége
    Ha szam<=n akkor osz := osz + 1
  ...
```

A program így módosítva kevesebb, mint másfél másodperc alatt lefut, és azt adja eredményül, hogy $n \leqslant 53$-ra minden (n, k) párhoz van megfelelő szám. Itt is lehet egy kis matematikai okoskodással, és az annak megfelelő program-átalakítással gyorsítani: az olvasó gondolja meg, hogy a $k = n$ esetet sem kell ellenőrizni, és azt továbbgondolva egy akár tízszeres gyorsítás is elérhető. De jobb algoritmus is van: olyan, aminél a túlcsordulás nem jön elő (legalábbis addig nem, amíg egyáltalán van türelme az embernek kivárni a programfutást), és el tudunk menni pár másodperc alatt akár $n = 600$-ig is (házi feladat ☺). Csak összehasonlításképpen: a fent leírt algoritmus szerint $n = 600$-ra a kiinduló számnak kb. $3 \cdot 10^{35}$ darab osztója van, elvileg azokat kellene ellenőrizni, ami már kivárhatatlan idő lenne. Persze azért nem ennyire rossz a helyzet, hiszen a mohó algoritmus miatt nem ellenőrzünk minden osztót, de a fenti algoritmussal akkor is órákba kerül már csak az $n = 600$-as eset is, nemhogy addig az összes szám. Mindenesetre az „eredmény”, a sejtés megvan: minden (n, k) párhoz van megfelelő szám, már „csak” be kellene bizonyítani.

Mielőtt nagyon nekiesnénk a bizonyításnak, nézzük meg, mennyire hatékony a mohó algoritmus ennél a problémánál. Módosítsuk egy kicsit az `osztok` függvényünket, ellenőrizzük le, hogy ha egy adott prímhez felvettük a maximális kitevőt, ami még belefér az elvárt osztók számába, akkor utána kell-e visszább lépnünk:

```
...
Különben
  Ha aktosz<k akkor
    Ha osztok(s+1) akkor osztokszama := IGAZ
    Különben Ki: "Visszalépés"
  Elágazás vége
Elágazás vége
...
```

És az derül ki, hogy nem! Vagyis a mohó algoritmus nagyon hatékony ebben az esetben (nem mindig az). Másrészt ez azt is jelenti, hogy a bizonyításunkhoz van egy sejtésünk a megfelelő szám megkonstruálására: a mohó algoritmus szerint osszuk ki a kitevőket. Mondjuk hát ki az állításunkat.

4. állítás. *A fenti mohó algoritmussal lehet találni olyan természetes számot, amelynek pontosan k db pozitív osztója van az n-nél nem nagyobb számok között ($k \leqslant n$).*

Megoldás. Ennek az állításnak egy egyszerűbb (?) változata volt a 2023. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékverseny hatodik feladata, amelyben a mohó algoritmusra való utalás nélkül és csak elegendően nagy n-ekre kellett belátni az állítást. A kitűzés és a bizonyítás megtalálható a Bolyai Társulat honlapján ([2]). A 4. Állítás annyival több annál a feladatnál, hogy ezt minden n-re be kell látnunk. A megjelent bizonyítás nem foglalkozik azzal a kérdéssel, hogy konkrétan milyen nagy n-ektől kezdve teljesül az állítás, de óvatosabb becsléseket alkalmazva ellenőrizhető, hogy $n \geqslant 599$ esetére is adható hasonló bizonyítás. Az állítás bizonyítását a fent említett házi feladat teszi teljessé: ha megírunk egy olyan programot, ami $n \leqslant 598$ esetén ellenőrzi azt (nem volt véletlen a 600-as szám ☺). Amennyiben az olvasót érdekli a probléma, és talál egy megfelelően gyors algoritmust rá, a program forráskódját elküldheti a `hf@server.math.u-szeged.hu` e-mail címre 2024. február 15-ig. A leginnovatívabb megoldásokból egy cikket tervezünk írni egy későbbi KöMaL számban.

[1] `https://ematlap.hu/fooldal-2023-2`

[2] `https://www.bolyai.hu/versenyek-schweitzer-miklos-emlekverseny/`

Makay Géza
(SZTE, TTIK, Bolyai Intézet)
e-mail: makayg@math.u-szeged.hu

Rátz Tanár Úr Életműdíj 2023

2023 decemberében 23. alkalommal adták át a természettudományos tárgyakat oktató pedagógusoknak járó Rátz Tanár Úr Életműdíjat. Tavaly májusban jelent meg cikk a KöMaL-ban Rátz László tanár úrról születésének 160-adik évfordulója alkalmából. A róla elnevezett díjjal hazánk kiemelkedő tehetségű általános- és középiskolai pedagógusait tünteti ki a Magyar Természettudományos Oktatásért Alapítvány.

A díjat alapító három nagyvállalat, az Ericsson Magyarország, a Graphisoft és a Richter Gedeon Nyrt. közel 25 éve dolgozik azon, hogy tisztelettel adózzon a kiváló magyarországi pedagógusok előtt.

Az életművet díjazó elismerésre bárki felterjesztheti a saját életében meghatározó szerepet betöltő pedagógusát, éppen ezért az Alapítvány folyamatosan bátorítja a diákokat, szülőket, kollégákat és intézményeket az ország minden területén, hogy nevezzék azokat a reáltárgyakat oktató tanárokat, akiket érdemesnek tartanak a díjra. 2000 óta az Alapítvány összesen 176 pedagógust díjazott a matematika-, a fizika-, a kémia- és a biológiaoktatás területén nyújtott kimagasló teljesítményéért.

A Rátz Tanár Úr Életműdíjak ünnepélyes átadására idén is a Magyar Tudományos Akadémián került sor, december 11-én. A kitüntetést az alábbi pedagógusoknak ítélte oda a kuratórium:

Matematika

- **C. Neményi Eszter**, Eötvös Loránd Tudományegyetem Tanítói- és Óvóképző Kar, Matematika Tanszék, Budapest
- **Dr. Kosztolányi József**, Szegedi Tudományegyetem Bolyai Intézet, Analízis Tanszék, Szeged

Biológia

- **Csombóné Szaniszló Margit**, Eperjesi Általános Iskola, Eperjes
- **Gergely Tibor**, Nyíregyházi Krúdy Gyula Gimnázium, Nyíregyháza

Fizika

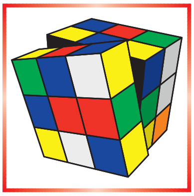
- **Punyiné Kandrács Erzsébet,** Kántor Mihály Általános Iskola, Cigánd
- **Tófalusi Péter**, Debreceni Református Kollégium Dóczy Gimnáziuma, Debrecen

Kémia

- **Dr. Petz Andrea**, Ciszterci Rend Nagy Lajos Gimnáziuma és Kollégiuma, Pécs
- **Lovasi Ildikó,** Hunyadi Mátyás Általános Iskola, Budapest XIII. kerület

A KöMaL szerkesztősége is kíván mindnyájuknak – és tanártársaiknak is – további erőt a tanításhoz, a tehetséges és érdeklődő diákok felkutatásához, támogatásához!

A részletes indoklás és az évente megújuló felhívás megtalálható a Díj honlapján: `https://www.ratztanarurdij.hu/`



Rejtvények, ördöglakatok

Ördöglakat az erdőből

Rovatunkban minden hónapban valamilyen szórakoztató matematikai fejtörőt mutatunk be. Ezek között fontos helyet foglalnak el a különböző kirakós játékok, topológiai feladványok, ördöglakatok és a matematikát felhasználó bűvészmutatványok.

Manapság szinte mindent meg lehet találni az interneten, de az igazi élményt az adja, ha a feladatokat magunk oldjuk meg, a bűvészmutatványok trükkjeit mi találjuk ki, és a szükséges kellékeket is mi tervezzük meg és készítjük el. Próbáljuk meg a feladatokat továbbgondolni, általánosítani, igyekezzünk új feladatokat kitalálni.

A megoldásokat, általánosításokat a `rejtveny.komal@gmail.com` címen várjuk. A legjobbakat – akár cikk vagy videó formájában – a honlapunkon vagy itt a Lapban örömmel közöljük.

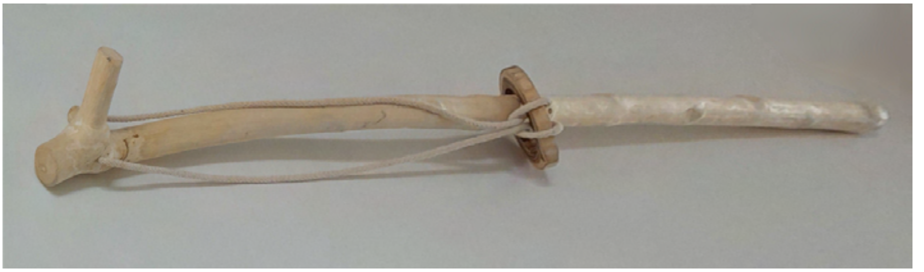
A bal oldali képen *Kirill Grebnev* orosz játéktervező alkotása látható, amellyel a 2007-es *International Puzzle Party* versenyén dicséretet nyert. A játék egy kampós végű, nagyjából egyenes faágból, egy karikából és egy zsinegből áll. A faág át van fűzve a karikán, a karikára pedig rá van hurkolva a zsineg, amelynek két vége az ág végén van rögzítve. Lényeges, hogy az ág kampós vége nem fér át a karikán, és a zsineg túl rövid ahhoz, hogy a karikát el lehessen húzni az ág túlsó végéig. A feladat az, hogy erről a szerkezetről szedjük le a karikát.

Faág helyett használhatunk fakanalat is, mint a jobb oldali képen. A fakanál feje két helyen át van fúrva, a baba szemei a zsinór végére kötött csomók.

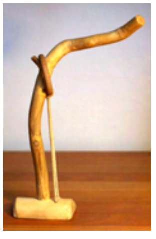
Kirill Grebnev játéka

fakanalas változat

Az következő képen látható, fél méternél hosszabb példányt a *Kézzelfogható Logika* című ördöglakat-kiállításon lehet kipróbálni.



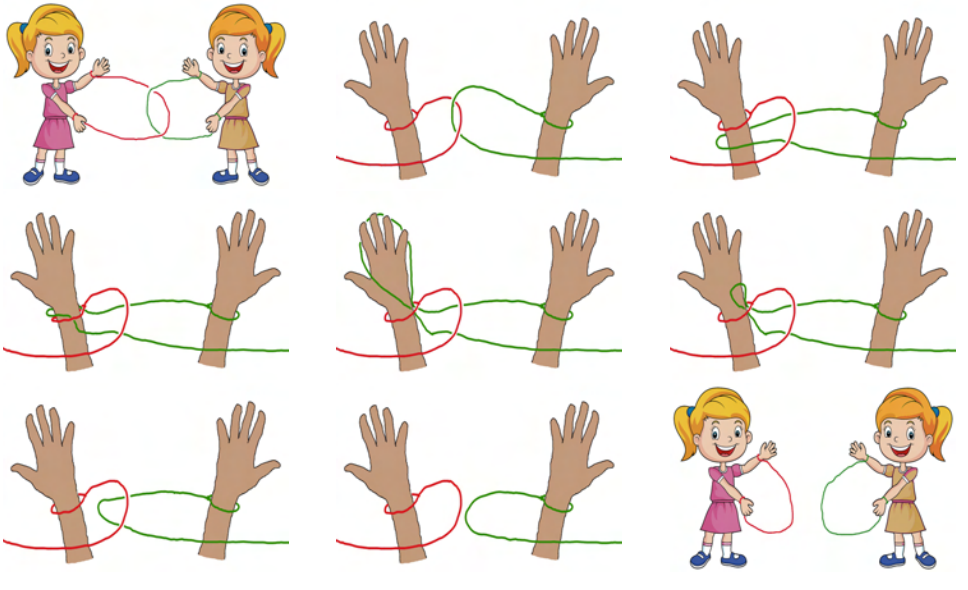
Gál Péter blogján további változatokat is találhatunk (`https://ordoglakat.blog.hu/2011/10/16/a_termeszet_ajandeka_406`):

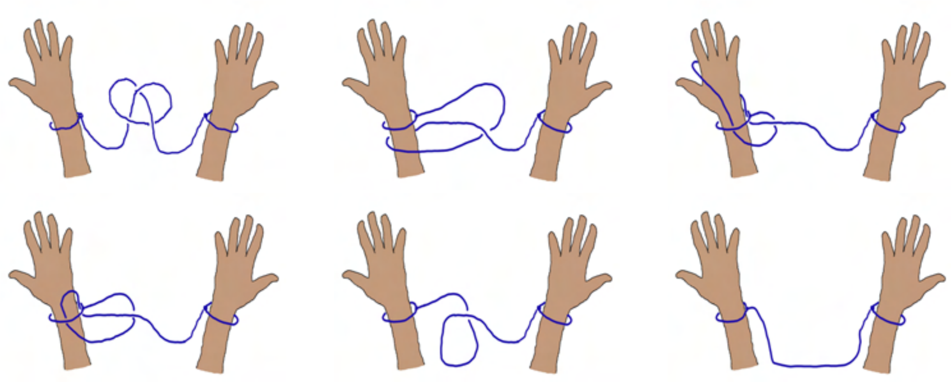
A decemberi játékok megoldása

Az első feladatban két, a csuklójukra kötött zsinórral egymáshoz összehurkolt játékost kellett szétválasztanunk úgy, hogy a madzagot nem szabad kikötni, a zsinórnak végig a csuklójukon kell maradnia.

A megoldáshoz nincs szükség semmilyen tornagyakorlatra, a megoldás inkább egy – ördöglakatoknál nagyon gyakori – átbújtatás: az egyik zsinórt átbújtatjuk a másik játékos csuklójára között madzag alatt, így meg tudjuk kerülni a kézfejét:



A másik feladat ennek egy változata volt: a két kezünkre kötött madzagon levő csomót kellett kioldanunk és visszakötnünk. Természetesen a megoldás ugyanazzal az átbújtatós trükkel lehetséges:



Kós Géza

Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire

I. rész

1. *a*) Határozzuk meg a valós számok halmazának lehető legbővebb részhalmazán értelmezett, az

$$f(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{2}$$

hozzárendelési szabállyal megadott f függvény értelmezési tartományát, értékkészletét és zérushelyeit. (*5 pont*)

b) Oldjuk meg a

$$\log_2 x + \log_x 4 \leq 3$$

egyenlőtlenséget a valós számok halmazán. (*6 pont*)

1. Egy 32 méter széles, téglalap alakú telek közepére (átlóinak metszéspontjába) elhelyeznek egy körbeforgó öntözőberendezést, amely egy 20 méter sugarú, kör alakú területet öntöz. A kerítésen belüli vizes rész területe a telek területének 60 százaléka.

a) Mekkora a telken belüli megöntözött rész? (*6 pont*)

b) Milyen hosszú a telek másik oldala? A választ két tizedesjegyre kerekítve adjuk meg. (*6 pont*)

3. *a*) Adjuk meg azokat a pozitív egész számokat, amellyel az $5n^2-5n$ kifejezés minden pozitív n egész esetén osztható. (*4 pont*)

b) Igazoljuk, hogy az $5n^2-5n+8$ kifejezés semmilyen pozitív egész n esetén sem lehet négyzetszám. (*4 pont*)

c) Igazoljuk, hogy az $a_n=5n^2-5n+8$ $(n\geqslant 1)$ sorozat szigorúan monoton növő. (*6 pont*)

4. *a*) Egy háromszögben az ABC szög 44 fok 17 perces, az ACB szög nagysága 105 fok 43 perc. Mekkora szögben látszik a háromszög BC oldala a háromszög köré írt körvonal – B-től és C-től különböző – pontjaiból? (*4 pont*)

b) Adott az KL szakasz a koordinátasíkon: $K(1;1)$ és $L(4;5)$. Adjuk meg azoknak a pontoknak a halmazát a koordinátasíkon, amelyekből a KL szakasz 150 fokos, vagy 30 fokos szög alatt látszik. (*10 pont*)

II. rész

5. *a*) Egy társaságban érkezéskor mindenki mindenkivel kezet fogott egyszer. Ha kétszer annyian lettek volna és ugyanígy üdvözlik egymást, akkor 477-tel több kézfogás lett volna. Hányan voltak a társaságban? (*6 pont*)

b) Döntsük el, hogy az alábbi állítás igaz-e, vagy hamis. A választást indokoljuk. (*5 pont*)

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}=2^n \qquad (n \text{ természetes szám}).$$

c) Írjuk fel egyetlen $\binom{n}{k}$ alakban a $\binom{2022}{100}+\binom{2022}{101}+\binom{2023}{102}$ összeget. (*5 pont*)

6. *a*) Egyszerűsítsük a

$$\frac{4n^2+54n-90}{2n^2+n-6}$$

törtet (n pozitív természetes szám). (*5 pont*)

b) Tagja-e az $a_n=\dfrac{4n^2+54n-90}{2n^2+n-6}$ sorozatnak a 4? (*5 pont*)

c) Határozzuk meg az a_n sorozat határértékét. (*6 pont*)

7. Egy különleges logó elkészítéséhez három függvényt használnak fel:

$$f(x)=-0{,}5x^2+6x-5{,}5; \qquad g(x)=-x^2+7x-6; \qquad h(x)=-x^2+17x-66.$$

a) Határozzuk meg az f függvény szélsőértékét. (*4 pont*)

b) Igazoljuk, hogy a g és h függvény az x tengelyen metszi egymást. (*5 pont*)

c) A három függvény grafikonja körbe zár egy véges síkidomot, amelyet aranyszínűre fognak festeni. Hány forintba kerül a terület kifestéséhez szükséges festék, ha tudjuk, hogy egy területegység 0,12 dm^2 területű, és a festék ára 1 négyzetméterre számolva 20 000 Ft? (*7 pont*)

8. A Varázslóiskolában Dumbledore igazgató kiválaszt 6 tanulót, akik különleges és nagyon veszélyes feladatot kapnak a Tiltott Rengetegben. Az igazgató egy zsákból húzza ki a kiválasztottak nevét. A zsákba 10 griffendéles és 5 mardekáros tanuló neve kerül. Sorban húzza ki a neveket tartalmazó cédulákat, és nem teszi vissza.

a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kihúzott 6 név között pontosan 3 mardekáros lesz? (*5 pont*)

b) A kiválasztott hat tanuló kap egy-egy szabályos dobókockát. Egyszerre feldobják. Mennyi a valószínűsége, hogy mindenki más számot dob? (*4 pont*)

c) A nap végén mind a hat tanuló egy 1-től 10-ig terjedő egész számmal értékeli a napját, az 1-es a legrosszabb, a 10-es a legjobb. Hány pontos értékelések születtek, ha tudjuk, hogy

– csak két azonos szám szerepel a 6 szám között,

– a statisztikából ezt olvashatjuk ki: a hat szám módusza 4, mediánja 5, átlaga 6, terjedelme 7. (*7 pont*)

9. 3D nyomtatóval elkészítünk egy testet, amelyet a következőképpen tervezünk meg: veszünk egy négyzetet, amelynek átlója $\sqrt{200}$ cm hosszúságú, és ekörül az átló körül megforgatjuk a négyzetet. A keletkező testből a forgástengelyétől 5 cm-nél nagyobb távolságra lévő részeket géppel eltávolítjuk.

a) Milyen testekből lehet összeállítani az így elkészült forgástestet? (*4 pont*)

b) Mekkora a test térfogata? (*5 pont*)

c) Mekkora a felszíne? (*4 pont*)

d) Megpróbáljuk különböző nyomtatókkal elkészíteni a testet, ám az első példányoknál még sok a hiba. Az alábbi gyakorisági táblázatba foglaltuk az egyes mintadarabok térfogatának százalékos eltérését az általunk elképzelt ideális térfogathoz képest. Készítsünk az adatokból dobozdiagramot. (*3 pont*)

százalékos eltérés	1	2	3	5	7	8
gyakoriság	1	2	1	3	3	1

Tatár Zsuzsanna Mária
Esztergom

Megoldásvázlatok a 2023/9. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához

I. rész

1. *a*) *Oldjuk meg a* $\lg(2025-x^2) < \sqrt[2024]{x-2023}$ *egyenlőtlenséget a valós számok halmazán.* (6 pont) *b*) *Oldjuk meg a* $\dfrac{42-x}{x-1}-\dfrac{2x-20}{2-x}=2$ *egyenletet a valós számok halmazán.*

(6 pont)

Megoldás. *a*) Meghatározzuk az egyenlőtlenség értelmezési tartományát. A logaritmus definíciója miatt $2025-x^2>0$, amiből $-45<x<45$, a 2024. gyök miatt pedig $x-2023\geqslant 0$, azaz $x\geqslant 2023$. A két halmaz metszete üres, így nincs olyan valós szám, amelyre az egyenlőtlenség mindkét oldala értelmezhető, tehát a megoldáshalmaz $M=\emptyset$.

b) Az egyenlet értelmezési tartománya: $\mathbb{R}\setminus\{1;2\}$. Azonos átalakítások, majd rendezés után az $x^2-28x+68=0$ másodfokú egyenlethez jutunk, melynek két valós gyöke $x_1=14+8\sqrt{2}$ és $x_2=14-8\sqrt{2}$. Mindkét gyök eleme az értelmezési tartománynak, így az eredeti egyenletnek is megoldásai.

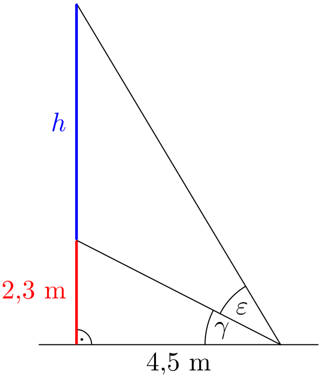
2. *A híres Dávid-szobor Firenzében egy állandó kiállításon látható. Biztonsági okokból a szobor egy* 2,3 *méter magas talapzaton áll. A talapzat aljától pontosan* 4,5 *méterre található padlókamerából a szobor legalsó pontja* 32°*-kal kisebb emelkedési szögben látszik, mint a legfelső pontja.*

a) *Hány centiméter magas a szobor?* (7 pont)

Egy pénteki napon 2650 *felnőtt-, és* 1100 *gyermekjegyet értékesített a múzeum, így aznap* 37 750 *euró folyt be a jegyekből. Másnap* 2830 *felnőtt-, és* 4500 *gyermekjegyet adtak el, ezzel* 50 290 *euró lett az aznapi jegybevétel.*

b) *Számítsuk ki egy felnőtt-, illetve egy gyermekjegy árát.* (7 pont)

Megoldás. *a*) Készítsünk ábrát, jelöljük a szobor magasságát h-val. Adott $\varepsilon=32°$. A γ hegyesszöget tartalmazó derékszögű háromszög két ismert befogójából $\operatorname{tg}\gamma=\dfrac{2{,}3}{4{,}5}$, amiből $\gamma\approx 27°$. Ekkor $\gamma+\varepsilon\approx 59°$, így $\operatorname{tg}59°\approx\dfrac{h+2{,}3}{4{,}5}$, amit h-ra megoldva kapjuk, hogy $h\approx 5{,}19$ méter.



A szobor magassága 519 centiméter.

b) Jelöljük a felnőttjegy árát x-szel, a gyermekjegyét pedig y-nal. A feladat feltételei alapján felállítjuk a $\begin{cases}2650x+1100y=37\,750\\2830x+4500y=50\,290\end{cases}$ egyenletrendszert, amelyet megoldhatunk a behelyettesítő vagy az egyenlő együtthatók módszerével is. A megoldás: $x=13$ és $y=3$, azaz a felnőttjegy 13, míg a gyermekjegy 3 euróba kerül.

3. *A trícium, azaz a hármas hidrogénizotóp mennyiségének a fele* 12,3 *év alatt bomlik el.*

a) *Mennyi idő alatt bomlik el adott mennyiségű trícium* $\frac{15}{16}$ *része?* (3 pont) *b*) *Egy palack idei bor* 350 *százalékkal több tríciumot tartalmaz, mint egy – ugyanakkora űrtartalmú – palack ugyanolyan, múlt századi bor. Hány éves lehet a régebbi bor a tríciumtartalma alapján?* *(*8 pont*)*

Megoldás. *a*) Ha a trícium eredeti mennyisége $x > 0$ mólnyi atom, akkor t év alatt elbomlik $\frac{15}{16} \cdot x$ mólnyi, így megmarad $x - \frac{15}{16} \cdot x = \frac{1}{16} \cdot x$ mólnyi, a felezési idő alapján pedig tudjuk, hogy 12,3 évenként feleződik a mennyisége. Ezek alapján felírhatjuk, hogy

$$x \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{12{,}3}} = \frac{x}{16},$$

amiből x-szel való egyszerűsítés után, majd az $\frac{1}{2}$ alapú exponenciális függvény szigorú monotonitását felhasználva azt kapjuk, hogy $\frac{t}{12{,}3} = 4$, azaz $t = 49{,}2$ év alatt bomlik el a trícium $\frac{15}{16}$ része.

b) Az idei bor tríciumtartalma $100 + 350 = 450$ százaléka, azaz 4,5-szerese a régebbi bor tríciumtartalmának. Az utóbbit y-nal jelölve teljesül, hogy

$$y = 4{,}5y \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{12{,}3}},$$

$$\frac{1}{4{,}5} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{12{,}3}},$$

amiből $t = 12{,}3 \cdot \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4{,}5}\right) \approx 26{,}7$ év, azaz a régebbi bor hozzávetőlegesen 27 éves (így valóban a XX. században készülhetett.)

4. *a*) *Tornaórán egy* 12 *fős csoport medicinlabdával erősített. Az egyik gyakorlat során mindenki háromszor dobott, és a tanár feljegyezte a legnagyobb dobás hosszát méterben. A testnevelő megállapította, hogy a felírt számok terjedelme* 5*, mediánja és módusza is* 9 *méter. Alsó kvartilise* 8,1 *méter, felső kvartilise pedig* 10,5 *méter. Adjunk meg három különböző adathalmazt, amelyre a fenti megállapítások érvényesek.* *(*6 pont*)*

b) *Robinak óra után* 12 *azonos méretű labdát kell két dobozba beraknia, az egyikben* 4*, a másikban* 8 *labda fér el. A labdák közül* 7 *piros,* 3 *kék, a többi zöld színű. Hányféleképpen helyezheti el a labdákat Robi, ha az azonos színű labdákat nem különbözteti meg, és a dobozon belül a labdák elhelyezkedése nem számít?* *(*8 pont*)*

Megoldás. *a*) Ha 12 elemű az adathalmaz, akkor növekvő sorrend szerint a két középső elem számtani közepe a medián, az első hat elem mediánja egyenlő az alsó kvartilissel, a második hat elem mediánja pedig a felső kvartilist adja. Mivel a módusz is 9, ezért a két középső elem mindenképpen 9 kell, hogy legyen, de akár 4-szer, illetve 6-szor is szerepeltethetjük. A terjedelem is adott, tehát figyeljünk, hogy a legnagyobb és a legkisebb elem különbsége 5 legyen. Az előzőek alapján megfelelőek például az alábbi adathalmazok (az elemek méterben értendők):

$$A_1 = \{6{,}2; 6{,}5; 8; 8{,}2; 8{,}5; 9; 9; 9{,}5; 10; 11; 11{,}1; 11{,}2\},$$
$$A_2 = \{6; 8; 8; 8{,}2; 9; 9; 9; 9; 10; 11; 11; 11\},$$
$$A_3 = \{7; 7; 7{,}2; 9; 9; 9; 9; 9; 9; 12; 12; 12\}.$$

b) Két darab zöld labda van. Nézzük meg, hogy a kisebb dobozba hány zöld és hány kék kerül, amely már egyértelműen meghatározza az elhelyezést (hiszen a maradékot kitöltjük pirosakkal). Zöldből lehet 0, 1 vagy 2, ami 3 lehetőség. Kékből pedig 0, 1, 2 vagy 3 lehet, ami 4 lehetőség, ez összesen $3 \cdot 4 = 12$ lehetőség lenne, de ezek közül nem jó, ha két zöld és három kék kerülne bele, mert öt labda nem fér el a kisebb dobozban.

Összesen $12 - 1 = 11$ lehetőség van a labdák elhelyezésére.

II. rész

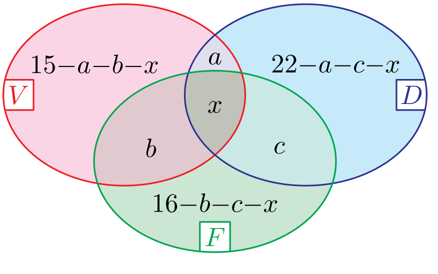
5. *Egy 28 fős osztályban a matematikatanár háromféleképpen mérte fel a tanulók decemberi teljesítményét: videós beszámoló, interaktív feladatlap, illetve írásbeli dolgozat formájában. Minden tanuló részt vett legalább egyfajta értékelésben. Tudjuk, hogy 15-en videóztak, ugyanennyien pedig pontosan kétfajta értékelés résztvevői voltak. 16-an interaktív feladatokat oldottak meg, 22-en pedig dolgozatot írtak. Január elején a tanár találomra kiválaszt egy tanulót, akit szóban szeretne feleltetni.*

a) *Mekkora a valószínűsége, hogy olyan tanulót választ, aki mindhárom értékelésben részt vett decemberben?* (8 pont)

b) *Az osztály tanulóinak hány százaléka vett részt decemberben mindössze egyfajta értékelésben?* (3 pont)

c) *Legfeljebb hányan lehetnek azok, akik csak dolgozatot írtak decemberben?* (5 pont)

Megoldás. *a*) Jelöljük x-szel azoknak a tanulóknak a számát, akik mindhárom említett értékelésben részt vettek, és készítsünk Venn-diagramot:

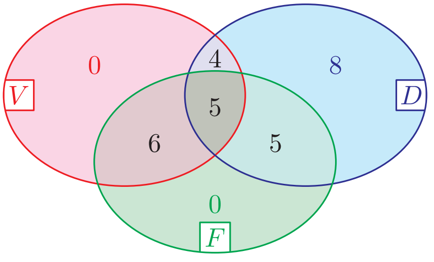


A létszámokat összeadva éppen 28-at kapunk:

$$28 = 15 - a - b - x + a + b + c + x + 22 - a - c - x + 16 - b - c - x,$$
$$2x = 25 - a - b - c.$$

Tudjuk, hogy pontosan két értékelésben 15 tanuló vett részt, ezért $a+b+c=15$, ezt behelyettesítve a fent kapott egyenletbe: $2x=25-15$, amiből $x=5$, azaz öt tanuló szerepelt mindhárom értékelésen. A kiválasztás valószínűsége $p=\frac{5}{28}$.

b) Az *a*) feladatrészben láttuk, hogy öten mindhárom értékelésben részt vettek, az pedig adott, hogy tizenöten pontosan kétfajta értékelési fajtában voltak érintettek, így $28-(5+15)=8$-an vannak, akik csak egyfajta számonkérésen voltak. Ez az osztálylétszám $\frac{8}{28}\cdot 100\approx 28{,}57$ százaléka.



c) Az előző feladatrészben láttuk, hogy 8 tanuló pontosan egyfajta értékelés résztvevője volt. Előfordulhatott, hogy mind a nyolcan dolgozatot írtak, ez esetben egyetlen olyan tanuló sem volt, aki csak videós beszámolót készített, illetve olyan sem volt, aki interaktív feladatlapot töltött ki. Ez tényleg megvalósulhat például az ábrán látható módon.

Legfeljebb 8 olyan tanuló volt, aki kizárólag dolgozatot írt decemberben.

6. *Egy* 0,4 *dm átmérőjű tömör fémgömböt leguríttottak egy golyópályán. A táv első felében* 0,12 *m/s, a második felében* 0,16 *m/s átlagsebességgel gurult a gömb.*

a) *Mekkora volt a gömb (a pálya teljes hosszára vonatkozó) átlagsebessége?*

(10 pont)

Ezután a gömböt megolvasztották, és az anyagából 0,5 *cm sugarú tömör gömböket öntöttek.*

b) *Hány darab ilyen gömb keletkezhetett az öntés során?* (6 pont)

Megoldás. *a*) Legyen a táv hossza x, ekkor az első felét $\frac{x}{2\cdot 0{,}12}$ idő alatt teszi meg, a második felét $\frac{x}{2\cdot 0{,}16}$ idő alatt, így az átlagsebessége

$$v_{\text{átlag}}=\frac{x}{\dfrac{x}{2\cdot 0{,}12}+\dfrac{x}{2\cdot 0{,}16}}=\frac{24}{175}\approx 0{,}137\ \text{m/s}.$$

b) A gömb sugara 2 cm, ezért a gömb térfogata $V_1=\frac{4}{3}\cdot 2^3\cdot\pi\ \text{cm}^3$, a kisebb gömb sugara 0,5 centiméter, így térfogata $V_2=\frac{4}{3}\cdot 0{,}5^3\cdot\pi\ \text{cm}^3$. Ezek aránya megmutatja, hogy elvileg hány kisebb gömb készíthető a nagyobb gömb anyagából:

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{\dfrac{4}{3}\cdot 2^3\cdot\pi}{\dfrac{4}{3}\cdot 0{,}5^3\cdot\pi}=64,$$

azaz legfeljebb 64 darab kisebb gömb önthető a nagyobb gömbből.

7. *Gergő a* 180*-nál kisebb* 6*-tal osztható természetes számok mindegyikét felírta egy-egy cetlire, majd a cetliket belerakta egy nagy dobozba.*

a) Mennyi a cetliken szereplő számok összege, illetve szorzata, ha minden cetlire különböző számot írt Gergő? *(*4 pont*)*

Gergő öccse találomra kiválasztott a cetlik közül egyszerre éppen hármat.

b) Mekkora a valószínűsége, hogy legalább két kiválasztott cetlin 10*-zel osztható szám szerepel?* *(*5 pont*)*

Ezután Gergő visszatette az összes cetlit a dobozba, jól megkeverte őket, majd véletlenszerűen kiválasztott egy cetlit, felírta a rajta lévő számot, majd ismét visszatette a dobozba. Ezt az eljárást még kétszer megismételte, tehát összesen három számot írt fel.

c) Mekkora a valószínűsége, hogy Gergő nem írta fel a nulla számjegyet? *(*7 pont*)*

Megoldás. *a*) A cetlik száma 30, hiszen 0-tól 174-ig minden hatodik egész szám éppen egy cetlin szerepel. A számok szorzata 0, mert az egyik tényező 0. A számok egy $d=6$ differenciájú számtani sorozat egymást követő tagjai, ezért az összegük

$$S_{30}=\frac{0+174}{2}\cdot 30=2610.$$

b) A 6 és a 10 legkisebb közös többszöröse a 30, ezért a cetliken szereplő számok közül azok oszthatók 10-zel, amelyek 30-cal is. Összesen hat ilyen szám van: 0; 30; 60; 90; 120; 150. Kedvező esetben vagy éppen két ilyen számot választott ki Gergő öccse, vagy mindhármat ezek közül választotta, ez

$$\binom{6}{2}\cdot\binom{24}{1}+\binom{6}{3}=360+20=380$$

kedvező esetet jelent. A 30 különböző elemből egyszerre vett ki hármat, így összesen $\binom{30}{3}=4060$ eset van.

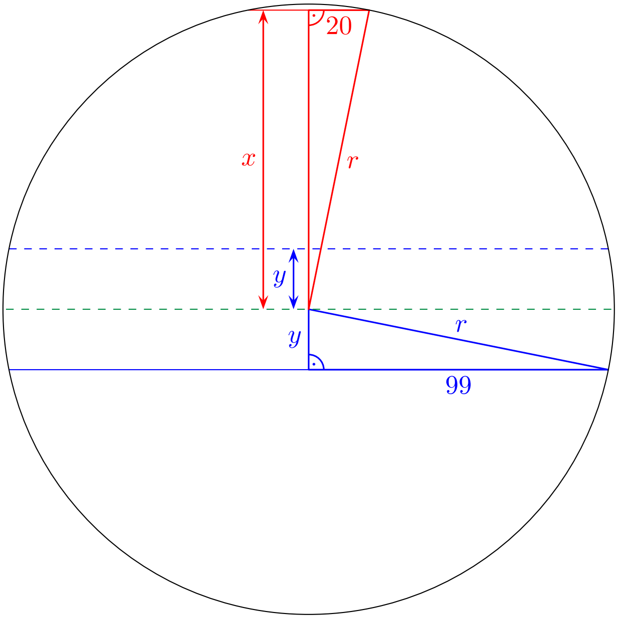
A keresett valószínűség $p=\dfrac{380}{4060}=\dfrac{19}{203}\approx 0{,}0936.$

c) A 10-zel osztható számokon kívül még azok is tartalmaznak nulla számjegyet, amelyeknek a középső számjegyük 0, a cetliken lévők közül ilyen a 102 és a 108, azaz összesen nyolc olyan cetli van, amelyen szerepel a nulla számjegy. Ha Gergő egyszer sem írta le a nullát, akkor mindhárom alkalommal abból a 22 darab számból választott, amelyben nincs nulla. Ennek valószínűsége $p=\left(\dfrac{22}{30}\right)^3=\dfrac{1331}{3375}\approx 0{,}394.$

8. *a) Egy kör két párhuzamos húrja* 4 *cm és* 198 *mm hosszúságú. Mekkora lehet a köztük lévő távolság, ha a kör átmérőjének hossza* 20,2 *cm?* *(*8 pont*)*

b) Egy derékszögű háromszög külső szögeinek ívmértéke – nagyság szerint sorba állítva – egy mértani sorozat három, közvetlenül egymást követő tagja. Adjuk meg a háromszög belső szögeinek fokmértékét. *(*8 pont*)*

Megoldás. *a*) Tekintsük az alábbi ábrát, amelyen a kör sugarát r-rel jelöltük.



A kör sugarának hossza 101 mm. Minden húr felezőmerőlegese átmegy a kör középpontján, ezért használhatjuk a Pitagorasz-tételt. A 40 mm-es húr távolsága a kör középpontjától $x = \sqrt{101^2 - 20^2} = 99$ mm. A 198 mm-es húr távolsága a kör középpontjától $y = \sqrt{101^2 - 99^2} = 20$ mm. A húrok párhuzamosak, így kétféle távolság léphet fel: ha azonos félkörben vannak, akkor $x - y = 99 - 20 = 79$ mm, ha pedig különböző félkörben vannak, akkor $x + y = 99 + 20 = 119$ mm.

b) A szögek ívmértéke és fokmértéke egyenesen arányos, ezért a feladat feltételei a háromszög külső szögeinek fokmértékére is fennállnak. Egy derékszögű háromszög legnagyobb belső szöge 90 fokos, így ugyanekkora a legkisebb külső szöge. Legyen a mértani sorozat hányadosa $q > 1$, ekkor a külső szögek nagysága $\gamma' = 90°$, $\beta' = q \cdot 90°$, $\alpha' = q^2 \cdot 90°$, amelyeknek összege 360°.

$$q^2 \cdot 90° + q \cdot 90° + 90° = 360°,$$

$$q^2 + q - 3 = 0, \qquad \text{ebből} \qquad q_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}.$$

Láthatjuk, hogy $q_1 > 1$, így ebből jó megoldást kapunk:

$$\gamma' = 90°, \qquad \beta' \approx 117{,}25°, \qquad \alpha' \approx 152{,}75°,$$

tehát a háromszög belső szögeinek fokmértéke:

$$\gamma = 90°, \qquad \beta \approx 62{,}75°, \qquad \alpha \approx 27{,}25°.$$

9. *Adott a következő két halmaz: $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 < 9\}$ és $B = \{$egyjegyű, pozitív prímszámok$\}$. Hány olyan – egymástól különböző – függvény van, amelynek*

a) értelmezési tartománya az A, képhalmaza a B halmaz? (4 pont)

b) értelmezési tartománya az A, értékkészlete a B halmaz? (4 pont)

c) értelmezési tartománya a B, képhalmaza az A halmaz? (4 pont)

d) értelmezési tartománya a B, értékkészlete az A halmaz? (4 pont)

Megoldás. A két halmaz az elemeivel felírva: $A = \{0; 1; 2\}$ és $B = \{2; 3; 5; 7\}$.

a) Az A halmaz minden eleméhez hozzárendelhetjük a B halmaz bármelyik elemét, ez összesen $4^3 = 64$ különböző függvényt jelent.

b) Egy függvény értékkészletének elemszáma nem lehet nagyobb, mint az értelmezési tartomány elemszáma, így az ilyen függvények száma 0.

c) A B halmaz mind a négy eleméhez 3–3 elemből választhatunk, ezért $3^4 = 81$ különböző függvényt hozhatunk létre.

d) Az értelmezési tartomány 4 eleméből kiválasztjuk azt a kettőt, amelyhez az A halmaznak ugyanazt az elemét rendeljük, ezt $\binom{4}{2} = 6$-féleképpen tehetjük meg. A másik két elemhez pedig az A halmaz másik két elemét rendeljük, így az A halmaz összes elemét felhasználjuk. Az értékkészlet három elemét $3! = 6$ különböző sorrendben rendelhetjük a B halmaz megfelelő elemeihez, így a feltételeknek megfelelő függvények száma: $\binom{4}{2} \cdot 3! = 6 \cdot 6 = 36$.

Megjegyzés. Komplementer módszerrel is számolhatunk. A *c*) feladatrészben kapott függvények közül azok nem jók, amelyekben nem választottuk ki az A halmaz mindhárom elemét, ezért alkalmazhatjuk a logikai szita formulát. A *d*) feladatrész feltételeinek megfelelő függvények száma $3^4 - 3 \cdot 2^4 + 3 \cdot 1^4 = 36$.

Kozma Katalin Abigél
Győr

Matematika feladatok megoldása

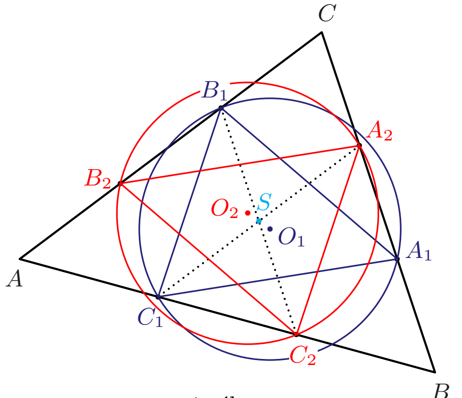
B. 5305. *Legyen az ABC háromszög BC oldalának B-hez közelebbi harmadolópontja A_1, C-hez közelebbi harmadolópontja pedig A_2. A CA oldalon hasonlóképpen jelöljük ki a B_1 és B_2, végül az AB oldalon a C_1 és C_2 harmadolópontokat. Bizonyítsuk be, hogy az ABC háromszög súlypontja illeszkedik az $A_1B_1C_1$ és $A_2B_2C_2$ háromszögek körülírt köreinek közös pontjait összekötő egyenesre.*

(*4 pont*) Javasolta: *Bíró Bálint* (Eger)

I. megoldás. Megmutatjuk, hogy az $A_1B_1C_1\triangle$ és az $A_2B_2C_2\triangle$ egymás tükörképei az ABC háromszög S súlypontjára. Mutassanak az A, B stb. pontokba egy tetszőleges O vonatkoztatási pontból rendre az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ stb. vektorok. Jól ismert, hogy az S súlypontba mutató vektor

$$\mathbf{s}=\frac{1}{3}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}).$$

Továbbá az osztópontba mutató vektorra vonatkozó formula szerint az összes har-



1. ábra

madolópontba mutató vektor is kifejezhető a csúcsokba mutató vektorok segítségével, például

$$\mathbf{a_1}=\frac{1}{3}(2\mathbf{b}+\mathbf{c});\qquad \mathbf{b_2}=\frac{1}{3}(\mathbf{c}+2\mathbf{a}).$$

Így az A_1B_2 szakasz felezőpontjába mutató vektorra azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{2}(\mathbf{a_1}+\mathbf{b_2})=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}(2\mathbf{b}+\mathbf{c})+\frac{1}{3}(\mathbf{c}+2\mathbf{a})\right]=\frac{1}{3}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{s}.$$

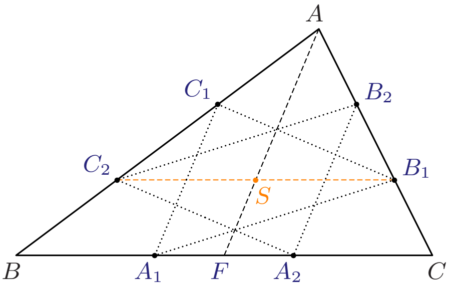
Ebből következik, hogy az A_1B_2 szakasz felezőpontja S. Hasonlóan megmutatható, hogy az A_2C_1 és C_2B_1 szakaszokat is felezi S, ebből pedig adódik, hogy az $A_1B_1C_1\triangle$ S-re vonatkozó tükörképe éppen az $A_2B_2C_2\triangle$.

Így az S-re vonatkozó tükrözés az $A_1B_1C_1\triangle$ körülírt körének O_1 középpontját éppen az $A_2B_2C_2\triangle$ körülírt körének O_2 középpontjába viszi, azaz S rajta van O_1O_2 szakaszfelező merőlegesén. Mivel a két kör sugara egyenlő, ezért a metszéspontok is illeszkednek O_1O_2 szakaszfelező merőlegesére, amiből az állítás adódik.

A KöMaL honlapon látható megoldás

Megjegyzések. A kiemelkedő dolgozatok közül a fentihez hasonló, vektorokat használó megoldást adott a feladatra: *Inokai Ádám* (Szeged, Radnóti Miklós Kís. Gimn., 10. évf.), *Bencz Benedek* (Budapest, Baár-Madas Ref. Gimn., 10. évf.).

II. megoldás. Legyen az ABC háromszög súlypontja S, a BC oldal felezőpontja F. Tekintsük a *2. ábrát.*



2. ábra

A súlypont a súlyvonalnak az oldalhoz közelebbi harmadolópontja, ezért $\frac{AS}{AF} = \frac{2}{3}$, ugyanakkor a feltételek alapján $\frac{AC_2}{AB} = \frac{2}{3}$ is igaz, ezért $\frac{AS}{AF} = \frac{AC_2}{AB}$, innen rögtön következik, hogy

$$\frac{AS}{AC_2} = \frac{AF}{AB}. \tag{1}$$

(1) szerint az ASC_2 és AFB háromszögek két-két oldalának aránya megegyezik és az ezek által bezárt, a közös A csúcshoz tartozó belső szög egyenlő, tehát a két háromszög hasonló.

Emiatt $C_2SA\sphericalangle = BFA\sphericalangle$, és így

$$C_2S \parallel BF.$$

Egyszerűen beláthatjuk, hogy az ASB_1 és AFC háromszögek is hasonlók, és ebből az előzőeknek megfelelően kapjuk, hogy

$$B_1S \parallel CF.$$

Mivel B, F és C egy egyenesen vannak, ezért fenti eredményeink azt jelentik, hogy a C_2, S, B_1 pontok is egy egyenesen vannak.

Az ASC_2 és AFB, illetve ASB_1 és AFC hasonló háromszögek megfelelő oldalainak aránya $\frac{2}{3}$, ezért

$$\frac{C_2S}{BF} = \frac{B_1S}{CF} = \frac{2}{3}. \tag{2}$$

Nyilvánvaló, hogy $BF = CF$, ezért (2) szerint

$$C_2S = B_1S,$$

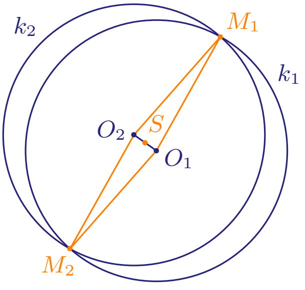
ez pedig azt jelenti, hogy a B_1C_2 szakasz felezőpontja S.

Hasonlóan láthatjuk be, hogy az A_1B_2, valamint az A_2C_1 szakaszok felezőpontja is az S súlypont. Eszerint az $A_1B_1C_1$ háromszögnek az S-re vonatkozó tükörképe az $A_2B_2C_2$ háromszög, ezért a két háromszög körülírt köre is egymás tükörképe, tehát a két kör sugara egyenlő.

Ezzel azt is igazoltuk, hogy az O_1, illetve O_2 középpontok az S pontra vonatkozóan egymás tükörképei, vagyis az O_1O_2 szakasz felezőpontja S. Ha tehát a két kör közös pontjait M_1, M_2-vel jelöljük, akkor az $O_1M_1O_2M_2$ négyszög rombusz, hiszen

$$O_1M_1 = M_1O_2 = O_2M_2 = M_2O_1.$$

A rombusz szimmetriacentruma S, ebben a pontban metszik egymást a rombusz M_1M_2 és O_1O_2 átlói, vagyis a közös pontokat összekötő M_1M_2 egyenes valóban áthalad az S ponton.



3. ábra

Németh Norbert Marcell (Szeged, Radnóti Miklós Kís. Gimn., 12. évf.) dolgozata alapján

Megjegyzés. A kiemelkedő, illetve maximális pontszámot elért dolgozatok közül a párhuzamos szelők tételének megfordítását, illetve középpontos hasonlóságot alkalmazó megoldást adott a feladatra: *Erdélyi Kata* (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.), *Nguyen Kim Dorka* (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.), *Puppi Barna* (Kaposvár, Táncsics Mihály Gimn., 10. évf.), *Zömbik Barnabás* (Budapest, Eötvös József Gimn., 11. évf.), *Zhai Yu Fan* (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 9. évf.), *Virág Lénárd Dániel* (Budapest, ELTE Apáczai Csere János Gimn., 10. évf.), *Kovács Benedek Noel* (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.).

III. megoldás. Normált baricentrikus koordináták segítségével megmutatjuk, hogy az A_1B_2, B_1C_2, C_1A_2 szakaszok közös felezőpontja a G-vel jelölt súlypont. Ehhez az ABC háromszöget tekintjük *vonatkoztatási háromszögnek,* ahol az A, B, C pontok normált baricentrikus koordinátái

$$A(1,0,0), \qquad B(0,1,0), \qquad C(0,0,1),$$

ebből következően a súlypont normált baricentrikus koordinátái $G\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.

Tekintsük a *4. ábrát.*

Az A_1, A_2 pontok normált baricentrikus koordinátái

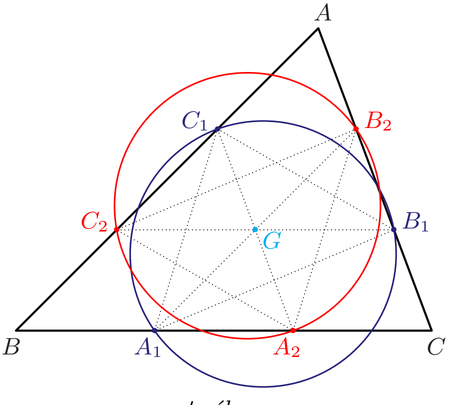
$$(1) \quad A_1\left(0,\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right), \quad A_2\left(0,\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right),$$

a B_1, B_2 pontoké

$$(2) \quad B_1\left(\frac{1}{3},0,\frac{2}{3}\right), \quad B_2\left(\frac{2}{3},0,\frac{1}{3}\right),$$

végül a C_1, C_2 pontoké

$$(3) \quad C_1\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},0\right), \quad C_2\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},0\right).$$



4. ábra

Egyszerű számítással kapjuk, hogy az A_1B_2, B_1C_2, C_1A_2 szakaszok felezőpontjának normált baricentrikus koordinátái egyaránt $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, tehát ezek a felezőpontok egyrészt egybeesnek, másrészt azonosak a G súlyponttal. Ez ekvivalens azzal, hogy az $A_1B_1C_1$ háromszögnek a G súlypont körüli $180°$-os elforgatottja az $A_2B_2C_2$ háromszög, így a két háromszög körülírt köre és azok középpontja is egymás G körüli $180°$-os elforgatottja. Eszerint a két kör sugara egyenlő, továbbá a középpontokat összekötő szakasz felezőmerőlegese áthalad a G súlyponton. Ez a felezőmerőleges a két kör hatványvonalával azonos, és tartalmazza a két kör közös pontjait.

Dam Soham (Pittsburgh, Mt. Lebanon Senior High School, 9. évf.) dolgozata alapján

Megjegyzések. 1. Az $A_1B_1C_1$ háromszögnek a G súlypont körüli $180°$-os elforgatottja azonos a G-re vonatkozó tükörképével.

2. Ha felvesszük a rögzített A, B, C pontokat, amelyek nem esnek egy egyenesbe, és helyvektoraik $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, akkor az A, B, C pontokba helyezett p, q, r súlyokkal ($p+q+r \neq 0$) az A, B, C pontok által kifeszített sík bármely P pontja előállítható súlypontként. A p, q, r számokat *baricentrikus koordinátáknak* nevezzük. Ha a p, q, r számokat elosztjuk $(p+q+r)$-rel, akkor egyrészt ez a súlyponton nem változtat, másrészt ezek összege nyilván 1-gyel egyenlő. Az így kapott koordinátákat *normált baricentrikus koordinátáknak* hívjuk. Ezekkel a P pont $\mathbf{x}$ helyvektora előállítható $\mathbf{x} = p\mathbf{a} + q\mathbf{b} + r\mathbf{c}$ alakban.

Mindezek alapján egyszerűen belátható, hogy a III. megoldás módja lényegében megegyezik az I. megoldás, ugyancsak síkbeli vektorokat használó módszerével.

3. Derékszögű koordinátarendszert használva oldotta meg a feladatot *Chrobák Gergő* (Debrecen, Fazekas Mihály Gimnázium, 11. évf.).

4. A *baricentrikus*, illetve *normált baricentrikus* koordinátákra vonatkozó anyagokat találhatunk például a következő internetes oldalakon:

`https://www.bolyai.hu/files/BartfaiPal_HAROMSZOG.pdf`

`https://people.inf.elte.hu/redragon/Bevezetes_szamitogepes_grafikaba/jegyzet/G21-Koordinata-rendszereink.html`

`https://docplayer.hu/42304392-Eotvos-lorand-tudomanyegyetem-termeszettudomanyi-kar-matematikai-intezet-geller-barnabas.html`

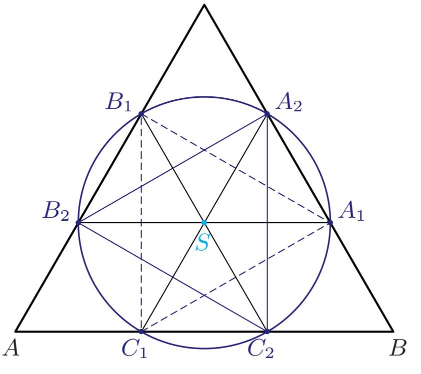
`https://dea.lib.unideb.hu/server/api/core/bitstreams/185623d7-e1b5-44a9-9044-9d6a04c75528/content`

Összesen 68 dolgozat érkezett. 4 pontos 42, 3 pontos 8, 2 pontos 8, 1 pontos 3 dolgozat. 0 pontot 7 versenyző kapott. Nem versenyszerű dolgozat nem volt.

Megjegyzések.

a) A beküldött dolgozatok jelentős része a honlapon megjelent megoldási utat (vagy ahhoz nagyon hasonlót) követte: vektorok segítségével felírta a harmadolópontok koordinátáit és hivatkozva a súlypont ismert tulajdonságaira, belátta, hogy egy-egy szakasz (például B_1C_2) felezőpontjába mutató vektor megegyezik a súlypontba mutató vektorral. Több dolgozat szerzője hivatkozott a felírt arányok egyenlősége alapján a párhuzamos szelők tételének megfordítására (vagy háromszögek hasonlóságára), ezzel igazolva egyes szakaszok párhuzamosságát, illetve bizonyos négyszögek (például $A_1A_2B_2C_1$) paralelogramma-tulajdonságát. Ezek a megoldók többségében azt is bizonyították, hogy az ABC háromszög súlyvonalai ezen paralelogrammák középvonalai.

b) *Inokai Ádám* (Szeged, Radnóti Miklós Kís. Gimn., 10. évf.) azt is megmutatta, hogy az $A_1B_1C_1$ és $A_2B_2C_2$ háromszögek körülírt körei biztosan metszik egymást. Ehhez felhasználta, hogy a feltételek alapján az $A_1B_1C_1$ és $A_2B_2C_2$ háromszög egyes oldalai metszik egymást, például az A_1B_1 oldal metszi az A_2B_2 és A_2C_2 oldalakat. Ezért az $A_1B_1C_1$ és $A_2B_2C_2$ háromszögek területének biztosan van közös része, így nem fordulhat elő, hogy a két kör kívülről érinti egymást, de az sem, hogy közös pont nélküli körök legyenek. Továbbá az egyik kör belülről nem érintheti a másikat, illetve nem lehetséges, hogy az egyik kör minden pontja a másik kör belső pontja legyen, mert a körök sugara egyenlő. Ebből az következik, hogy az $A_1B_1C_1$ és $A_2B_2C_2$ háromszög körülírt köreinek egynél több közös pontja van. Ez kétféleképpen lehetséges: vagy pontosan két metszéspontjuk van, vagy a két kör azonos. Utóbbi pontosan akkor áll fenn, ha az ABC háromszög szabályos, ekkor az $A_1B_1C_1$ és $A_2B_2C_2$ háromszögek is szabályosak *(5. ábra)*.



5. ábra

Ebben az esetben a háromszögek körülírt köreinek O_1, O_2 középpontjai és az S súlypont egybeesik és a feladat állítása abban az értelemben teljesül, hogy az egymásnak megfelelő A_1, B_2, valamint az A_2, C_1, végül a B_1, C_2 pontokat összekötő szakaszok közös pontja az S súlypont.

c) A dolgozatokban előforduló leggyakoribb hiba a bizonyításhoz szükséges tételekre való hivatkozás hiányossága volt. Ez részben abban nyilvánult meg, hogy az érintett dolgozatok szerzői egyes állításokat bizonyítás nélkül közöltek, például azt, hogy a súlypont illeszkedik a C_2B_1 szakaszra. Mások helytelenül a párhuzamos szelők tételére és nem annak megfordítására hivatkoztak.

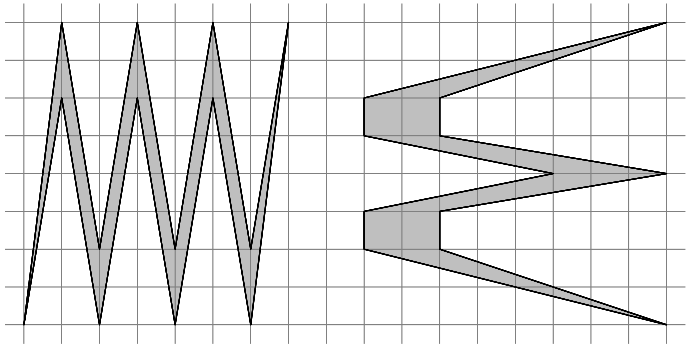
d) Öt versenyző töltött fel olyan dokumentumot, amely nem tartalmazott ábrát, ezekre a KöMaL Versenykiírása értelmében a javító 0 pontot adott. Két olyan megoldás született, ahol a feltöltött dokumentumban mindössze egy ábra szerepelt, érdemi bizonyítási lépések nélkül, ezek a dolgozatok is 0 pontot kaptak.

A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok ABACUS-szal közös pontverseny 9. osztályosoknak (794–789.)

K. 794. 10 000 €-t befektettünk egy évre, ebből 4000 €-t évi 5%-os, 3500 €-t évi 4%-os kamatra. Hány százalékos kamatot kapunk a maradék összegre, ha a befektetésünk összesen 500 € hasznot hoz?

K. 795. Négy különböző pozitív prímszám szorzata n. Hányféle különböző, n db kiskockából álló téglatestet lehetne összeállítani?

K. 796. Melyik síkidom területe a nagyobb?



K./C. 797. Egy 10 cm befogójú, egyenlő szárú derékszögű háromszög befogói és átfogói mint átmérők fölé rajzolunk egy-egy kört. Az egyik körlapot kiszínezzük pirosra, a másikat kékre, a harmadikat zöldre. Mennyi a területe a legalább két színnel színezett síkrésznek?

K./C. 798. Kovácsék bejárati ajtaja 2 méter magas és 1 méter széles. Az ajtó fölött a padlótól számított 3 méteres magasságban egy 1 méterre kinyúló vízszintes, téglalap alakú előtető van, amely pont olyan széles, mint az ajtó. Ennek az előtetőnek az ajtótól távolabbi szélén középre rögzítettek egy minden irányba világító lámpát. Mekkora területű részt világít meg a padlón a lámpa az ajtónyíláson keresztül, ha az ajtót teljesen kinyitják? (Az előszoba, melybe az ajtó nyílik, elegendően széles és hosszú ahhoz, hogy az ajtónyílás képe teljes egészében a padlón legyen.)

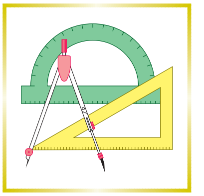
❄

Beküldési határidő: 2024. február 10.

Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄

A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (797–798., 1793–1797.)



K/C. 797. A szövegét lásd a **K** feladatoknál.

K/C. 798. A szövegét lásd a **K** feladatoknál.

Feladatok mindenkinek

C. 1793. A valós számok halmazán értelmezett f függvényre az alábbi két feltétel mindegyike teljesül (bármely $x \in \mathbb{R}$-re):

(1) $\quad f(x) = f(147 - x) \qquad$ (2) $\quad f(x + 100) = f(46 - x).$

Határozzuk meg $f(200) + f(201) + f(202)$ értékét, ha tudjuk, hogy

$$f(50) + f(51) + f(52) + f(53) = 2024.$$

Javasolta: *Kozma Katalin Abigél* (Győr)

C. 1794. A k_1 és k_2 körök az A, a k_2 és k_3 körök a B, végül a k_3 és k_1 körök a C pontban páronként kívülről érintik egymást. Az AB egyenes a k_3 kört másodszor a D pontban metszi. Bizonyítsuk be, hogy AC és CD merőlegesek egymásra.

(*Német versenyfeladat*)

C. 1795. Legyen p valós paraméter. A p értékeitől függően hány megoldása van az alábbi egyenletnek?

$$|x^2 - 6x + 5| = px^2 - 6px + 9p + 4.$$

Javasolta: *Szmerka Gergely* (Budapest)

C. 1796. Egy egységnyi élű szabályos oktaédert az egyik háromszöglapjával a lap síkjára helyezünk. Mekkora távolságra vannak ettől a síktól az oktaédernek a síkra nem illeszkedő csúcsai?

Javasolta: *Bíró Bálint* (Eger)

C. 1797. Melyik az a legnagyobb x egész szám, amelyre $x > 2$, és $\log_2(x)$, $\log_4(2x)$ és $\log_8(3x)$ egy háromszög oldalhosszai lehetnek?

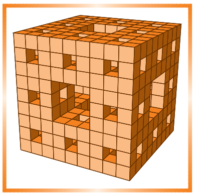
Javasolta: *Bíró Bálint* (Eger)

❄

Beküldési határidő: 2024. február 10.

Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄



A B pontversenyben kitűzött feladatok (5358–5365.)

B. 5358. Legfeljebb hány különböző egész számot lehet megadni úgy, hogy közülük bármely kettő összege kettőhatvány (a 2-nek nemnegatív egész kivetős hatványa) legyen?

(*3 pont*) Javasolta: *Hujter Bálint* (Budapest)

B. 5359. *a*) Van-e olyan háromszög, amelyben minden oldal hossza egész, és a területe kisebb, mint 1/10?

b) Van-e olyan négyszög, amelyben minden oldal hossza egész, és a területe kisebb, mint 1/10?

(*3 pont*) Javasolta: *Vígh Viktor* (Sándorfalva)

B. 5360. A nem egyenlő szárú ABC háromszög legnagyobb szöge C-nél van. Jelölje a C-ből induló magasság talppontját T, míg az C-ből induló belső szögfelező messe az AB oldalt az F pontban. Bizonyítsuk be, hogy $\dfrac{AT}{TB}=\left(\dfrac{AF}{FB}\right)^2$ akkor és csak akkor teljesül, ha $ACB\sphericalangle=90°$.

(*4 pont*) Javasolta: *Hujter Mihály* (Budapest) ötlete alapján

B. 5361. Jelölje a_n azt, hogy $2n$ hányféleképpen áll elő két pozitív prím összegeként. Igaz-e, hogy az (a_n) sorozat valahonnan kezdve szigorúan monoton növekedő?

(*4 pont*) Javasolta: *Pach Péter Pál* (Budapest)

B. 5362. Az ABC háromszögben $BAC\sphericalangle=50°$ és $ABC\sphericalangle=70°$. Az AC és BC oldalakon felvesszük az E és D pontokat úgy, hogy $ABE\sphericalangle=BAD\sphericalangle=30°$. Az AD és BE szakaszok metszéspontja M. Számítsuk ki az $ACM\sphericalangle$ és a $BED\sphericalangle$ szögeket.

(*4 pont*) Javasolta: *Róka Sándor* (Nyíregyháza)

B. 5363. Egy szabályos négyoldalú gúla alaplapja az $ABCD$ négyzet, a gúla csúcsa az E pont. Legyen a CE oldalél felezőpontja az F, a BE oldalél B-hez közelebbi harmadolópontja pedig a H pont. Milyen arányban osztja ketté az $ABCDE$ gúla térfogatát az AHF sík?

(*5 pont*) Javasolta: *Kiss Géza* (Csömör)

B. 5364. Egy érme két oldalára az 1, 2, egy kocka lapjaira pedig az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számokat írjuk. Határozzuk meg az érme és a kocka összes olyan cinkelését, hogy azokat egyszerre feldobva a 2, …, 8 dobásösszegek mindegyike ugyanolyan valószínűséggel forduljon elő, mint két olyan szabályos tetraéderrel történő dobás esetén, amelyek lapjaira az 1, 2, 3, 4 számokat írjuk. (Tetraéderrel való dobás eredményén az alsó lapon lévő számot értjük; cinkelés alatt pedig azt, hogy egy tárgy súlyozását megváltoztathatjuk úgy, hogy ne feltétlenül egyenlő eséllyel essen a különböző oldalakra.)

(*6 pont*) Javasolta: *Barczy Mátyás* (Szeged) és *Nyul Gábor* (Debrecen)

B. 5365. Határozzuk meg a legkisebb α valós számot, amelyhez végtelen sok olyan n pozitív egész számot lehet találni, amelyre $\sqrt{13}\cdot n$ és a hozzá legközelebbi egész szám különbsége kisebb, mint α/n.

(*6 pont*) Javasolta: *Somogyi Ákos* (London)

Beküldési határidő: 2024. február 10.

Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (869–871.)

A. 869. Legyenek A és B adott valós számok. A $0\le x_1\le x_2\le\ldots\le x_n$ valós számok összege A, a $0\le y_1\le y_2\le\ldots\le y_n$ valós számok összege B.

Mi $\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2$ lehetséges legnagyobb értéke?

Javasolta: *Csikvári Péter* (Budapest)

A. 870. Egy egyszerű gráf minden élére ráírjuk az él két végpontja fokszámainak különbségét. Egy N csúcsú gráfban legfeljebb mennyi lehet az élekre írt számok összege?

Javasolta: *Lenger Dániel* és *Szűcs Gábor* (Budapest)

A. 871. Az ABC tompaszögű háromszögnek H a magasságpontja. Jelölje ω_A az A középpontú, AH sugarú kört, ω_B és ω_C hasonlóan vannak definiálva. Az ABC háromszög síkjának minden X pontjára definiáljuk az $\Omega(X)$ kört a következőképpen (ha értelmezhető): vegyük X polárisait az ω_A, ω_B és ω_C körökre nézve, és legyen $\Omega(X)$ a három egyenes által alkotott háromszög körülírt köre.

Keressük meg (esetleg véges sok kivétellel) azoknak az X pontoknak a halmazát a síkon, amelyekre X rajta van $\Omega(X)$-en.

Javasolta: *Molnár-Szabó Vilmos* (Budapest)

Beküldési határidő: 2024. február 10.

Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

Matematikai képzések az ELTE TTK-n

Kedves leendő Egyetemista! A *KöMaL* olvasójaként bizonyára szívesen foglalkozol matematikával, és felmerülhetett már Benned az a gondolat, hogy életpályádul ennek a szép tudománynak a művelését választod, illetve szeretnél megismerkedni alkalmazásaival a műszaki, gazdasági és pénzügyi élet különböző területein.

Az alkalmazott matematika ma már az élet szinte minden területén nélkülözhetetlen, és az ilyen képzettségű munkaerő iránt egyre növekszik az igény. A *Fortune* magazin cikke szerint a legjelentősebb változás az üzleti életben az ipari forradalom óta a matematikai algoritmusok térhódítása (`https://fortune.com/2015/01/22/the-algorithmic-ceo/`). Egy amerikai felmérés évről évre a legjobb foglalkozások között tartja számon a matematikus végzettségűek számára elérhető adattudós, aktuárius és statisztikus munkaköröket `https://money.usnews.com/careers/best-jobs/rankings/the-100-best-jobs`. Mindez Magyarországra is igaz, az ELTE-n végzett matematikusokat nemcsak a kutatóintézetek, egyetemek várják, hanem számos cég is, igen jó fizetéssel.

Esetleg még nem döntöttél, de leginkább matematikából folytatnál felsőfokú tanulmányokat? Minderre kitűnő lehetőség nyílik az ország egyik legnagyobb múltú egyetemén, az Eötvös Loránd Tudományegyetem Természettudományi Karán, ahol világhírű professzoroktól és lelkes, közvetlen fiatal oktatóktól tanulhatsz. Pezsgő diákélet vár rád az ELTE korszerű számítógépparkkal felszerelt, a KöMaL szerkesztőségének is otthont adó modern lágymányosi épületegyüttesében.

A bolognai képzési rendszerbe illeszkedik BSc képesítést nyújtó hároméves matematikai alapképzésünk. Itt az első évben hallgatói és oktatói mentorok biztosítják, hogy mindenki be tudjon illeszkedni és találjon előismereteinek, képességeinek és tanulási sebességének megfelelő nehézségű feladatokat. Az első év végén dönthetsz arról, hogy milyen témákkal szeretnél a továbbiakban behatóbban foglalkozni.

A kínálat széles: aki szeretne, az elmélyedhet az elméleti matematika kérdéseiben, hiszen szinte minden fontos területről hirdetünk kurzusokat. Ezek építenek a magyar matematikai kutatások méltán világhírű hagyományaira, ugyanakkor szilárd alapokat nyújtanak a modern matematika műveléséhez, jól felkészítve hallgatóinkat a leendő kutatói munkára.

Akit viszont az alkalmazások érdekelnek, megteheti, hogy az alapok elsajátítása után olyan modern témákkal is foglalkozzon, mint az adattudomány vagy a mesterséges intelligencia matematikai kérdései. Azoknak is ajánljuk a matematika alapképzési szakot, akik ismereteiket később inkább a matematikán kívül szeretnék majd gyümölcsöztetni. Itt szerzett tudásukat hasznosíthatják például gazdasági területen, médiában, a matematika népszerűsítésében, a közművelődésben – és a megszerzett matematikai gondolkodásmód mindvégig segíteni fogja őket a munkájukban.

A képzés egyéb vonatkozásairól további részletek a `http://www.math.elte.hu/` honlapon a Képzések menüpont alatt találhatók. Ajánljuk a középiskolásoknak szóló oldalainkat is, ahol végzett diákjainkkal készült interjúk is láthatók.

A legkiemelkedőbb hallgatók az egyetemi oktatómunkába is bekapcsolódhatnak, és jó eséllyel pályázhatnak ösztöndíjakra, külföldi részképzésre (pl. az Erasmus+ program keretében). Az ÚNKP ösztöndíjprogramja már a leendő elsőéveseknek is elérhető! Részletes tájékoztató: `http://csikvarip.web.elte.hu/diak_kutatas.html`.

Az alapképzést további kétéves szakasz követ(het)i (mesterképzés vagy röviden MSc), egyetemünkön a Matematikai Intézet gondozásában matematikus, alkalmazott matematikus, valamint biztosítási és pénzügyi matematika mesterszakok indulnak. BSc-t végzett hallgatóink természetesen más (bel- és külföldi) oktatási intézmény programjain is folytathatják tanulmányaikat. A mesterszakot végzettek közül a legkiválóbbak számára biztosítjuk a doktori fokozat megszerzésének lehetőségét (PhD-képzés).

Egyetemünkön gondosan ápolt hagyomány, hogy a rátermett, tehetséges diákok neves professzorok vezetésével bekapcsolódnak a tudományos kutatásba. A legkiválóbb hallgatók matematikai versenyeken is sikerrel szerepelnek, például az Egyetemi Hallgatók Nemzetközi Matematikaversenyén kétszer is az ELTE csapata végzett az élen több, mint 70 egyetem csapatának versenyében – olyan nagyhírű egyetemeket is megelőzve, mint a Yale, a Princeton vagy a Moszkvai Állami Egyetem.

Matematikatanár-képzés az ELTE TTK-n

Az ELTE Természettudományi Karán sok évtizedes múltra tekint vissza a matematika szakos tanárképzés. Az általános és középiskolák részéről mindig jelentős igény mutatkozott a nálunk végzett matematikatanárok iránt, akik közül sokan külföldön is sikeres oktatói pályát futottak be.

A matematika szakos tanári pályát elsősorban azoknak a középiskolás diákoknak ajánljuk, akik számára örömet jelent érdekes matematikai feladatokon gondolkodni, és jó érzést okoz a megoldásokra másokat is rávezetni, másokkal is megosztani azt az élvezetet, amit a matematika megismerése jelent.

A tanárképzés osztatlan formában zajlik. A tanárképzésre való jelentkezés során a leendő hallgatóknak egy szakpárt kell megjelölni. Az ELTE-n a matematika szak mellé természettudományos szakokon és az informatikán kívül választani lehet a bölcsész szakok (például a magyar, a történelem vagy a nyelvszakok) közül is. A szaktárgyi tanítási gyakorlatok teljesítésére az ELTE hallgatóinak a legjobb budapesti iskolákban, kiváló vezetőtanárok irányítása mellett nyílik lehetőségük.

Bátran állíthatjuk tehát, hogy a KöMaL minden olvasójának testhezálló képzést tudunk nyújtani az ELTE Matematikai Intézetében. Az ELTE TTK idén december 12-én tartja a nyílt napját. `https://ttk.elte.hu/nyiltnap2023` Ha esetleg későn jutna el hozzád ez a hír, a program a fenti linken vissza is nézhető.

Informatikából kitűzött feladatok (611–614.)

I. 611. Egy statisztikai problémákat kedvelő diák minden reggel megmérte, hogy a menetrend szerint közlekedő autóbusza hány percet késett. Készítsünk programot `i611` néven, amely megadja a leghosszabb olyan egymást követő napok számát, amikor minden nap más idejű késés történt.

A program standard bemenetének első sorában a vizsgált időszak N napjainak száma ($1 \le N \le 100$) szerepel. A következő sorban egy-egy napon a késés T ideje ($0 \le T[i] \le 60$) szerepel percben.

A program írja ki a standard kimenetre a leghosszabb olyan időszak napjainak számát, amikor minden reggel különböző időt késett a busz.

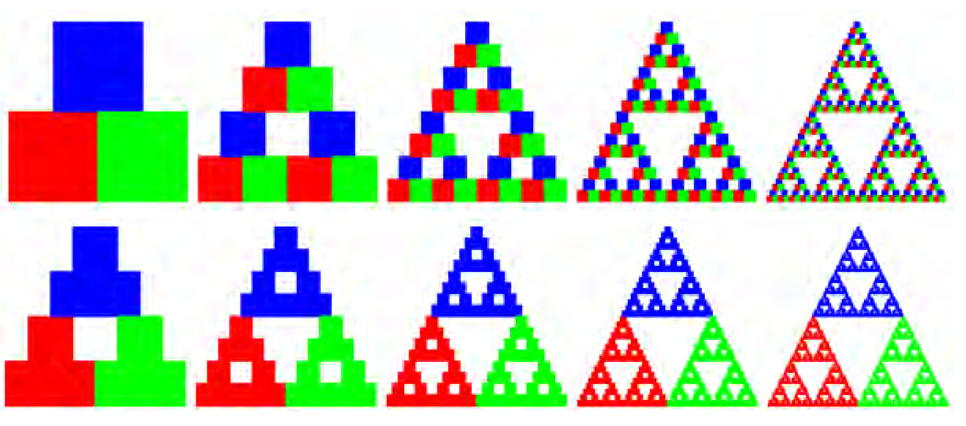
Minta:

Bemenet	**Kimenet**
17 1 2 3 1 0 3 4 4 1 **1 6 5 7 3 2** 1 5	6

Beküldendő egy tömörített `i611.zip` állományban a program forráskódja és rövid dokumentációja, amely megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben fordítható.

(*10 pont*)

I. 612. A Sierpiński-háromszög a fraktálok bemutatásnak kedvelt témája. Sok látványos konstrukció hozható létre a témában, gazdag a szakirodalma.



Készítsük el a minta két fraktálját megvalósító programot, illetve projektet `i612` néven. Mindkét fraktál első 5 szintje látható a fenti mintán, amelyek a `minta1`, valamint `minta2` eljárások meghívásával készültek. A `méret` paraméter a négyzetek oldalhossza, és a `szint` paraméter a fraktál szintjének sorszáma.

A megoldás során a Python, az Imagine Logo vagy a Scratch programozási nyelvet használjuk. Törekedjünk a moduláris programozási módszer alkalmazására, tehát megoldásunkat bontsuk logikusan kisebb önálló programegységekre.

Beküldendő egy tömörített `i612.zip` állományban a program forráskódja és rövid dokumentációja, amely megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben futtatható.

(*10 pont*)

I. 613. Egy benzinkúthálózatot üzemeltető cég a megváltozott igények miatt módosítani szeretné az üzemanyagszállító-flottája eddigi menetrendjét, hogy a kútjainál mindig legyen elegendő készlet minden üzemanyagfajtából. A készletoptimalizálás mellett azt is tudni szeretnék, hogy szükség van-e kútbővítésre. Ennek kiderítésére az egyes kutaknál egy héten át regisztrálták a tankolási eseményeket. Egy vidéki kúttól – ahol egy töltőhelyen tudnak tankolni – rendelkezésünkre állnak adatok. Végezzük el az alábbi, statisztikai jellegű vizsgálatot az adatok felhasználásával.

A cég belső használatú jelölései az üzemanyagtípusokra: „D”: dízel üzemanyag; „5”: 95-ös oktánszámú motorbenzin és „8”: 98-as oktánszámú motorbenzin. Egy jármű tankolási idejét minden megkezdett 20 literre 1 percnek és a fizetésre további 2 percnek számoljuk.

1. Nyissunk meg egy üres táblázatkezelő munkafüzetet, a munkalapnak adjuk ezt a nevet: ***adatok***, majd mentsük a munkafüzet **`kutbovites`** néven.

2. Illesszük be a munkalapra az *A1* cellától kezdve a mellékelt **kutadat.txt** fájl tartalmát, amely tabulátorokkal tagolt, UTF-8 kódolású.

3. A hét páratlan napjaihoz tartozó adatsorok kapjanak világoskék háttérszínt. Elegendő az aktuális adatok alapján elvégezni a háttér színezését, nem szükséges feltételes formázást alkalmazni.

4. Gépeljük be az ***F1:I1*** tartományba a mintán látható szövegeket, formázzuk meg a címsort a minta szerint.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	**Dátum**	**Idő**	**Típus**	**Mennyiség**	**Rendszám**	***Érkezés***	***Várakozás***	***Tankolás***	***Távozás***
2	2023.04.10	0:32	D	128,0	FGS 851	0:32	0:00	0:09	0:41
3	2023.04.10	0:47	D	54,5	LUY 692	0:47	0:00	0:05	0:52
4	2023.04.10	0:57	D	158,7	AA JH 985	0:57	0:00	0:10	1:07
5	2023.04.10	1:10	D	105,9	PRT 831	1:10	0:00	0:08	1:18
6	2023.04.10	1:17	D	39,3	ERG 737	1:17	0:01	0:04	1:22
7	2023.04.10	1:22	D	99,7	ECI 829	1:22	0:00	0:07	1:29
8	2023.04.10	1:34	8	38,4	IIR 609	1:34	0:00	0:04	1:38
9	2023.04.10	1:50	8	6,0	QDV 440	1:50	0:00	0:03	1:53
10	2023.04.10	2:00	8	51,1	FJX 118	2:00	0:00	0:05	2:05

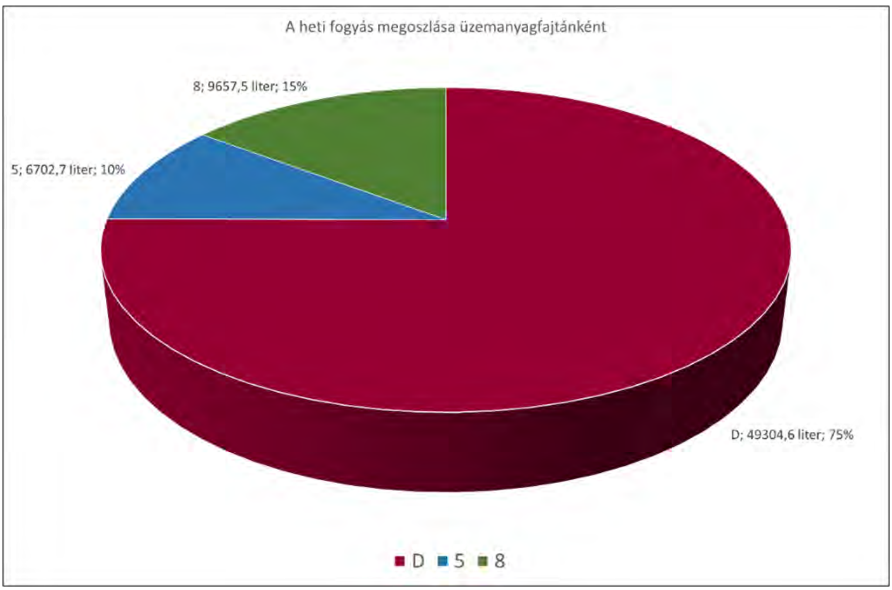
5. Adjuk meg a megfelelő képleteket az ***F2:I1060*** tartományban az értékek kiszámításához.

6. Hozzuk létre és formázzuk a minta szerint az ***L1:R9*** tartományban a segédtáblázatot.

K	L	M	N	O	P	Q	R
		D	5	8	Tankolásszám	Várakozók járművek %-a	Maximális várakozás
	2023.04.10	7170,6 liter	806,3 liter	1133,9 liter	145	20%	9 perc
	2023.04.11	6421,1 liter	1017,6 liter	988 liter	139	9%	7 perc
	2023.04.12	9481 liter	842 liter	1475,3 liter	164	26%	10 perc
	2023.04.13	6952,2 liter	667,6 liter	1711,8 liter	151	23%	7 perc
	2023.04.14	7366,6 liter	910,2 liter	1550,3 liter	160	19%	6 perc
	2023.04.15	5563 liter	941,1 liter	1563,7 liter	141	4%	2 perc
	2023.04.16	6350,1 liter	1517,9 liter	1234,5 liter	159	19%	10 perc
	Összesen	*49304,6 liter*	*6702,7 liter*	*9657,5 liter*	*1059*	*18%*	10 perc

7. Az M2:R9 cellák adatait az ***F:I*** oszlopokkal kiegészített alaptáblázat alapján képletekkel számoljuk ki, ügyeljünk a mértékegységekre.

8. Készítsük el új, diagram típusú munkalapra a mellékelt tortadiagramot.



Segédszámításokat az ***S*** oszloptól jobbra végezhetünk. A megoldásban saját függvény vagy makró nem használható!

Beküldendő egy tömörített `i613.zip` állományban a táblázatkezelő munkafüzet, illetve egy rövid dokumentáció, amelyben szerepel a megoldáskor alkalmazott táblázatkezelő neve, verziószáma.

A megoldáshoz szükséges letölthető állomány: `kutadat.txt`.

(*10 pont*)

I. 614. Egy iskolai nyári táborban az egyik este szellemi vetélkedőt tartanak. A vetélkedő során kérdéseket tesznek fel a csapatoknak, valamint megadnak négy választ. A négy válaszból minden kérdésre pontosan egy a helyes. A `kerdesek.txt` UTF-8 kódolású szöveges állomány hat-hat egymás követő sorában van minden kérdés: az első sorban a feltett kérdés, a következő négy sorban a lehetséges válaszok, és a hatodik sorban a helyes válasz sorszáma. Az állomány első néhány sora a következő, amelyből kiolvasható, hogy 23 fenyőfa áll a tábor területén, és 7 vízibiciklivel lehet evezni a tavon.

```
Hány fenyőfa van a tábor területén?
11
18
23
26
3
Hány vízibicikli van a táborban?
4
5
6
7
4
...
```

Készítsünk programot `i614` néven, amely beolvassa az adatokat tartalmazó állományt, majd válaszol az alábbi kérdésekre és megoldja a kitűzött feladatokat. Amennyiben a szöveges állomány ékezethelyes kezelése nem megoldható, akkor használjuk a `kerdesek2.txt` egyszerű ASCII kódolású állományt, amelyben az ékezetes karakterek helyett azok ékezet nélküli párja szerepel.

A felhasználóval történő párbeszéd során mindig adjuk meg, hogy milyen adatot kérdezünk és milyen eredményt adunk meg, illetve a feladatok megoldása előtt írjuk ki a feladat sorszámát. A megoldáshoz mintaként használhatjuk a feladatok után mellékelt mintát.

1. Írjuk ki, hogy hány kérdés szerepel az adatállományban, valamint írjuk ki az első kérdést és a hozzá tartozó válaszokat, jelezve, hogy melyik a jó válasz. A válaszokat egy-egy nagybetűvel és nyitó zárójellel vezessük be.

2. Adjuk meg, hogy melyek azok a kérdések, amelyekre a válaszok mindegyike egész szám. Írjuk ki a kérdések első 30 karakterét és három pontot, ha a kérdés hosszabb 30 karakternél, illetve a teljes kérdést, ha az nem hosszabb 30 karakternél. A kérdést követően írjuk ki a válaszok számát egy-egy szóközzel elválasztva úgy, hogy a helyes választ tegyük zárójelbe.

3. Készítsünk az állomány adataiból egy 10 kérdésből álló véletlen kérdéssorozatot. Figyeljünk arra, hogy ne szerepeljen egy kérdés sem többször. Írjuk ki a

kérdések szövegét és lehetséges válaszokat az 1. feladatban megadott formában. Kérjük be a felhasználó tippjét, ami az *a*, *b*, *c*, *d* betűk egyike lehet kis- vagy nagybetűvel. A hibás tippeket ne fogadjuk el, tehát addig ne lépjünk tovább, amíg a felhasználó a négy elfogadható betű egyikét nem adja meg.

4. Az előző feladatban kapott tippek és a helyes válaszok alapján adjuk meg, hogy a felhasználó hány kérdésre adott helyes választ, valamint készítsünk egy *nemjo.txt* szöveges állományt, amelybe elhelyezzük azokat a kérdéseket, amelyekre a felhasználónak nem sikerült helyesen válaszolnia. A fájlban minden kérdés két sorban szerepeljen: az egyik sorban a kérdés szövege, az őt követő sorban a helyes válasz. A kérdések és válaszok között egy üres sort hagyjunk ki. Ha a felhasználó minden kérdésre jól válaszolt, akkor a fájlba ne írjunk semmit.

Minta egy lehetséges programfutásra:

```
1. feladat:
19 kérdés van.
Az 1. kérdés: Hány fenyőfa van a tábor területén?
A) 11
B) 18
c) 23
D) 11
Helyes válasz: C

2. feladat:
Hány fenyőfa van a tábor terül... 11 18 (23) 26
Hány vízibicikli van a táborba... 4 5 6 (7)
Hány sportkapu van a tábor ter... 2 (4) 5 6
Hány sznuki van a táborban? 3 5 (7) 9

3. feladat:
Ki írta a Nagynéném, a miniszterasszony című verset?
A) József Attila
B) Pilinszky János
c) Ratkó József
D) Zelk Zoltán

Tipp (a, b, c, d): b

Kitől idézzük? „Piros az ég alja, aligha szél nem lesz”
A) Arany János
B) Vajda János
c) Petőfi Sándor
D) Tompa Mihály

Tipp (a, b, c, d):

...
```

Beküldendő egy tömörített `i614.zip` állományban a program forráskódja és rövid dokumentációja, amely megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben fordítható.

A megoldáshoz szükséges letölthető állományok: `kerdesek.txt`, `kerdesek2.txt`.

(*10 pont*)

❄

A feladatok megoldásai regisztráció után a következő címen tölthetők fel:
`https://www.komal.hu/munkafuzet`
Beküldési határidő: 2024. február 15.

Fizika alapszak és fizikatanár-képzés az ELTE TTK Fizikai Intézetében

A világon az egyik legizgalmasabb és legszebb feladat a természet kutatása, működésének megértése. A kutatás egy életre szóló élmény, egy életre szóló kihívás és izgalom. Ugyanakkor a hallgatóink olyan nyitottságot, problémamegoldó készséget is elsajátítanak, amely az élet bármely területén nagyon jól hasznosítható. Az itt végzettek között kiváló, a nemzetközi élvonalban dolgozó fizikusokat találunk, de olyan cégvezetőt is, aki egy patinás Wall Street-i befektetési bank budapesti matematikai modellező csoportját vezeti, vagy például olyan, ma már az USA-ban élő vállalkozót, aki az amerikai légierőnek szállít folyadékkristály-kijelzős sisakokat.

A fizika alapképzés mellett intézetünkben képezzük a fizikatanárok jelentős részét. Aki szereti a fizikát és már most is szereti társait tanítani, ajánljuk figyelmébe a fizikatanár-képzésünket!

Hogy miért érdemes a fizika alapszakot választani?

- **Modern oktatás**

A képzésünk többszintű és sokoldalú. A sokoldalúság abban mutatkozik meg, hogy a harmadik félévvel kezdődően érdeklődési terület szerint specializációt (fizikus, informatikus fizikus, biofizikus, csillagász, geofizikus, meteorológus) lehet választani.

A képzés közös részében a magas szintű fizikai ismereteken túl matematikát, elektronikát és informatikát is oktatunk. Mivel nincs fizikus kísérletek nélkül, az alapvető fizikai mérési készségeket és magát a kísérletező szemléletet a fizikai laboratóriumi gyakorlatokon lehet elsajátítani. A laborokon a diákok például Raspberry Pi vezérlést használva végzik alapméréseiket, később pedig olyan érdekes fizikai jelenségekkel és berendezésekkel találkoznak, mint a pozitronemissziós tomográfia, a holográfia, a pásztázó elektronmikroszkóp vagy éppen a kvantumradír. A kurzusok egy része két (normál és emelt) szinten végezhető, melyek könnyen átjárhatóak. A normál szint biztosítja, hogy a nem elit iskolából érkező, de motivált hallgatók számára is elsajátítható és élvezhető legyen a tananyag. Az emelt szintű órákon gyorsabb haladást és kiegészítő tartalmakat biztosítunk.

- **Világszínvonalú kutatások**

Az ARWU ranglistát a felsőoktatási szakma évek óta a legmegbízhatóbb értékelések között tartja számon. A 2023-as szakterületi felmérés (Global Ranking of Academic Subjects – GRAS) a korábbiakhoz hasonlóan 5 nagyobb tudományterületen (természettudományok, mérnöki tudományok, élettudományok, egészségtudományok és társadalomtudományok), azon belül 54 szűkebb szakterületen vizsgálta a világ egyetemeit. Egyetemünk a fizika területén szerepelt a legjobban, jelenleg a 101–150 helyen áll. Így bátran állíthatjuk, hogy az ELTE TTK Fizikai Intézet nemzetközi viszonylatban is kiemelkedő hely a fizika tanulására. Az összes magyar intézet közül itt a legszélesebb a választéka azoknak a területeknek, amelyeket oktatunk és kutatunk. A fizika legmodernebb, legizgalmasabb területeivel foglalkozunk: a gravitációs hullámok kutatásától a részecske- és biofizikán keresztül az asztrofizikáig, a nanotechnológiáig és a kvantumszámítógépekig mindent lefedünk, ami ma érdekes a fizikában. Körülbelül száz oktatónkkal és kutatónkkal, valamint diákjainkkal nagyon sok nemzetközi együttműködésben veszünk részt. 2023-ban egy új tanszék, a Csillagászati Tanszék is csatlakozott intézetünkhöz, így tovább bővült oktatási és kutatási repertoárunk. A kutatás iránt is érdeklődő diákok számára bejáratott út vezet a tudományos diákköri projektek felé. A diákköri kutatómunkák kiváló alapot adnak a külföldi egyetemeken történő mesterképzésben vagy doktori iskolában történő továbbtanulásra. Az ELTE TTK-n folyó fizikai témájú kutatások sok esetben világszínvonalú kutatóhelyekkel történő együttműködésben valósulnak meg. Diákjaink eljuthatnak a svájci CERN részecskefizikai kutatócentrumba, vagy a LIGO amerikai gravitációshullám-detektor eredményeit elemezhetik.

- **Kitűnő elhelyezkedési lehetőségek**

A fizika tárgy tudása, a felső szintű matematika és a programozási ismeretek, amit a fizika alapszakokon el lehet sajátítani, számos munkahelyen ad lehetőséget a karrier építésére. A fizika szakon végzetteket nemcsak a kutatóintézetekben, egyetemeken várják, hanem például a pénzügyekkel, informatikával, távközléssel, mérnöki vagy orvostudományokkal foglalkozó cégek is szívesen alkalmazzák őket.

- **Hallgatói élet**

Az ELTE TTK hallgatói élete vidám és szerteágazó. A Magyar Fizikus Hallgatók Egyesülete számos programot szervez a hallgatóinknak. Külföldi diákkonferenciákon vagy cseregyakorlatokon lehet részt venni, szabadidős programok és a fizika tárgyakban felkészítő programok szerepelnek a palettán. Minden évfolyamon több kiképzett mentor segít a tárgyak felvétele körüli kérdésekben, az optimális egyetemi stratégiák megtalálásában, és átadják a felsőbb éves diákok által összegyűjtött tapasztalatokat.

A fizika szak nem ér véget a BSc-fokozat megszerzésével. Az ELTE TTK Fizikai Intézetében 5-féle kétéves mesterképzési (MSc) szakra lehet jelentkezni: fizikus, geofizikus, csillagász, meteorológus, anyagtudomány. A fizikus mesterin belül a kutatófizikus, biofizikus és tudományos adatanalitika és modellezés (ez utóbbi többek között napjaink „forró” témájával, az óriási adathalmazokon végzett kutatásokkal, a „big data”-val foglalkozik) választható. A képzés harmadik szintje az intézetben a négyéves doktori iskola (PhD-fokozat).

Hogy miért érdemes fizikatanár szakot választani?

- **2022-től új rendszerű, 5 éves és osztatlan a tanárképzés**

2022 szeptemberében indult az új rendszerű fizikatanár-képzés. Az új rendszerben a képzési idő 5 év. Lényegében minden félévben lesz tanítási gyakorlat, és az utolsó félév szinte teljesen középiskolában zajlik. Az ELTE három gyakorlóiskolája is kiváló terep a tanárság komplex elsajátítására. A szakmai és módszertani órákat a Fizikai Intézet kitűnő kutatói-oktatói és a legjobb középiskolai tanárok tartják. Az ELTE nagyon sok szakot indít a fizikával párban, így szinte bármilyen tantárgyat lehet másiknak választani.

- **A tanári pálya szépségei**

Napjainkban igen sok szó esik a tanári pálya nehézségeiről. Miért lehet mégis érdemes a fizikatanári hivatást választani? Mert nagyon sok szépsége is van! Kreatív, változatos, fiatalok között végzett munka. Egy fizikatanárnak hatalmas lehetőségei vannak arra, hogy megmutassa a gyerekeknek a fizikai világ működésének szépségeit!

- **Hallgatói élet**

A Klebelsberg Képzési Ösztöndíj Program keretében egyetemistaként félévente akár 375 000 Ft-ot lehet kapni, amely több különféle ösztöndíjjal is kiegészíthető. Fontos megemlíteni, hogy lehetőség van oktatással kapcsolatos kutatásokba való becsatlakozásra és doktori tanulmányok folytatására a Fizika Tanítása Doktori Program keretében.

A képzések részleteiről az intézet honlapján (`https://physics.elte.hu`) lehet további információkat szerezni.

Beszámoló a 2023. évi Eötvös-versenyről

Az Eötvös Loránd Fizikai Társulat 2023. évi Eötvös-versenye október 13-án délután 3 órai kezdettel tíz magyarországi helyszínen[3] került megrendezésre. Ezért külön köszönettel tartozunk mindazoknak, akik ebben szervezéssel, felügyelettel a segítségünkre voltak. A versenyen a három feladat megoldására 300 perc áll rendelkezésre, bármely írott vagy nyomtatott segédeszköz használható, de (nem programozható) zsebszámológépen kívül minden elektronikus eszköz használata tilos. Az Eötvös-versenyen azok vehetnek részt, akik vagy középiskolai tanulók, vagy a verseny évében fejezték be középiskolai tanulmányaikat. Összesen 64 versenyző adott be dolgozatot, 16 egyetemista és 48 középiskolás.

Ismertetjük a feladatokat és azok megoldását.

❄

1. *A Vénusz 2023. szeptember 12-én 2 óra 20 perccel a Nap előtt kelt fel, szinte egyszerre a Holddal. A Hold ekkor egy vékony C alakot formázott, a Vénuszt viszont szabad szemmel egy fényes „csillag”-nak, pontszerűnek láthattuk.*

a) Milyen alakúnak láttuk volna ezen a hajnalon a Vénuszt távcsővel, ha tudjuk, hogy másnap néhány perccel hamarabb kelt fel a Naphoz viszonyítva? Mekkora volt a fázisa (a korong hányad része volt látható)?

b) Hogyan változik a Vénusz alakja és látszólagos mérete az ezt következő hónapokban? Mikor fog legközelebb újra 2 óra 20 perccel a Nap előtt kelni? Ábrázoljuk méretarányosan a szeptemberben, valamint a kérdéses időpontban látható Vénuszt!

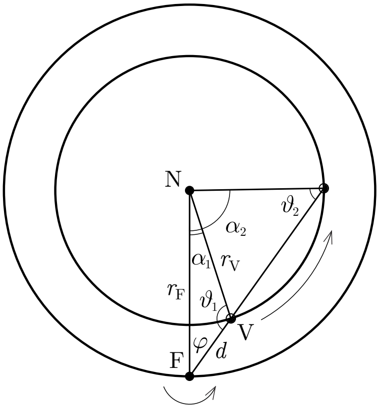
Az egyszerűség kedvéért a pályák excentricitását és ferdeségét, valamint a Föld tengelyferdeségét ne vegyük figyelembe. (A megadott adatok is ennek megfelelően módosítottak a valósághoz képest, és az eredményt is ebben a közelítésben keressük.) A Vénusz pályasugara 0,723*-szerese a Földének.*

(*Vankó Péter*)

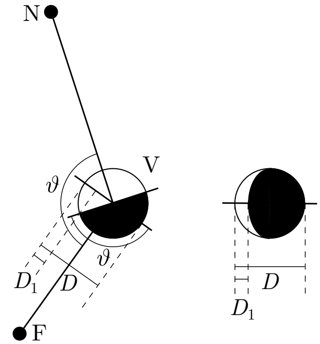
Megoldás. Vizsgáljuk a bolygók mozgását a Föld keringésével együtt forgó vonatkoztatási rendszerben. Készítsünk vázlatot a bolygókról. Az *1. ábrán* a Nap és a Föld középpontja áll, a Vénusz (egy később meghatározandó relatív szögsebességgel) kering a Nap körül, a Föld pedig 24 óránként körbefordul a tengelye körül.

a) A feladat szövege szerint a Vénusz 2 óra 20 perccel (2,33 órával) kel a Nap előtt. Mivel a Föld óránként $360^\circ/24 = 15^\circ$-ot fordul el a tengelye körül, ez azt jelenti, hogy a Vénusz a Földről $\varphi = 2{,}33 \cdot 15^\circ = 35^\circ$-os szögben látszik a Naphoz képest.

[3] Részletek a verseny honlapján: `http://eik.bme.hu/~vanko/fizika/eotvos.htm`



1. ábra



2. ábra

Látható, hogy ehhez a Vénusz két lehetséges helyzete tartozik, amelyeket az α_1, illetve az α_2 Föld–Nap–Vénusz szög jellemez. A feladat szövege szerint a Vénusz másnap néhány perccel korábban kel a Naphoz képest, ami azt jelenti, hogy φ növekedni fog. Ez az 1-es helyzetben valósul meg.

Már az *1. ábra* alapján is láthatjuk, hogy ekkor a Vénusz a Holdhoz hasonlóan vékony C alakú sarlónak látszik a távcsövön.

A fázist a *2. ábra* alapján határozhatjuk meg. Könnyen belátható, hogy a korong megvilágított és teljes területének aránya megegyezik a D_1/D aránnyal, ugyanis a világos sarlót úgy kaphatjuk meg, ha gondolatban a sötét félkört a *2. ábra* jobb oldalán bejelölt tengelye mentén összenyomjuk. Ez a transzformáció a tengelyirányú méreteket és a területet azonos arányban csökkenti. Eszerint a fázis

$$f = \frac{D_1}{D} = \frac{1+\cos\vartheta}{2},$$

ahol ϑ a Nap–Vénusz–Föld szög. A szinusztétel alapján

$$\frac{\sin\vartheta}{\sin\varphi} = \frac{r_F}{r_V} = \frac{1}{0{,}723},$$

amiből

$$\sin\vartheta = \frac{\sin\varphi}{0{,}723} = 0{,}793$$

és $\vartheta_1 = 127{,}5^\circ$. (Az ábra alapján a két lehetséges értékből ekkor a tompaszög a helyes.) Ebből a fázis

$$f_1 = \frac{1+\cos\vartheta_1}{2} \approx 0{,}20.$$

b) 2023. szeptember 12-én a Föld–Nap–Vénusz szög $\alpha_1 = 180^\circ - \varphi - \vartheta_1 = 17{,}5^\circ$. Az α szög ezután folyamatosan növekszik, és ezzel kezdetben φ is növekszik, azaz a Vénusz a Naphoz viszonyítva egyre korábban kel. Ezzel együtt ϑ csökken, a fázis pedig folyamatosan növekszik. Ugyanakkor a d Föld–Vénusz távolság folyamatosan nő, így a Vénusz látszólagos átmérője csökken.

A Vénusz akkor kel a Naphoz képest legkorábban, azaz φ értéke akkor lesz maximális, amikor $\vartheta = 90°$ (és így a fázis 0,5, azaz „félvénusz" látható).

Ezután φ értéke már csökken, a Vénusz egyre kevesebb idővel kel a Nap előtt. Ugyanakkor ϑ értéke továbbra is csökken, a Vénusz fázisa pedig tovább növekszik, látszólagos átmérője viszont a növekvő távolság miatt tovább csökken.

A feladatban szereplő állapotot, amikor a Vénusz újra 2 óra 20 perccel kel a Nap előtt, az α_2 Föld–Nap–Vénusz szögnél érjük el. Ebben az esetben ismét $\varphi = 35°$, $\vartheta_2 = 180° - \vartheta_1 = 52{,}5°$, $\alpha_2 = 180° - \varphi - \vartheta_2 = 92{,}5°$. A Vénusz fázisa ekkor

$$f_2 = \frac{1 + \cos\vartheta_2}{2} \approx 0{,}80.$$

Mikor fog ez bekövetkezni? A Vénusz *sziderikus* (csillagokhoz viszonyított) keringési ideje Kepler 3. törvénye alapján:

$$T_\mathrm{V} = \left(\frac{r_\mathrm{V}}{r_\mathrm{F}}\right)^{\frac{3}{2}} T_\mathrm{F} = 224{,}5 \text{ nap}.$$

($T_\mathrm{F} = 365{,}25$ nap.) A *szinodikus* (Földhöz viszonyított) keringési ideje

$$T'_\mathrm{V} = \left(\frac{1}{T_\mathrm{V}} - \frac{1}{T_\mathrm{F}}\right)^{-1} \approx 583 \text{ nap},$$

hiszen az általunk vizsgált koordináta-rendszerben a Vénusz keringésének szögsebessége $\Omega'_\mathrm{V} = \Omega_\mathrm{V} - \Omega_\mathrm{F}$.

A két vizsgált helyzet között $\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1 = 75°$-kal fordul el a Naptól a Vénuszhoz húzott sugár az általunk használt vonatkoztatási rendszerben. Ehhez

$$t = \frac{\Delta\alpha}{360°} T'_\mathrm{V} \approx 121 \text{ nap}$$

időre van szükség. Eszerint a Vénusz – ebben a közelítésben számolva – legközelebb körülbelül négy hónappal később, 2024. január 11-én fog ismét 2 óra 20 perccel a Nap előtt kelni.

Vizsgáljuk a Vénusz látszólagos átmérőjét!

Legnagyobbnak Föld-közelben látnánk, ekkor $d_\mathrm{min} = r_\mathrm{F} - r_\mathrm{V} = 0{,}277 r_\mathrm{F}$ (de ekkor persze „újvénusz" van, és a Vénusz a Nappal együtt kel, a Földről nem látható[4]). A változó Föld–Vénusz távolságot az *1. ábra* szerint a szinusztétel alapján számolhatjuk ki:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\vartheta} = \frac{d}{r_\mathrm{F}},$$

amiből

$$d = \frac{\sin\alpha}{\sin\vartheta} r_\mathrm{F}.$$

[4]A pályaferdeségek miatt a Vénusz általában nem halad el a Nap előtt, de 120 évente 8 év különbséggel kétszer igen. Legutóbb 2004-ben és 2012-ben figyelhettünk meg Vénusz-átvonulást a Nap korongja előtt. `http://eik.bme.hu/~vanko/fizika/erdekes/venusz_teto.htm`

A Vénusz látszólagos D átmérője fordítottan arányos a Föld–Vénusz távolsággal:

$$D = \frac{d_{\min}}{d} D_{\max}.$$

Ez alapján az 1-es és 2-es helyzetben

$$D_1 = \frac{0{,}277 \sin\vartheta_1}{\sin\alpha_1} D_{\max} = 0{,}73 D_{\max},$$

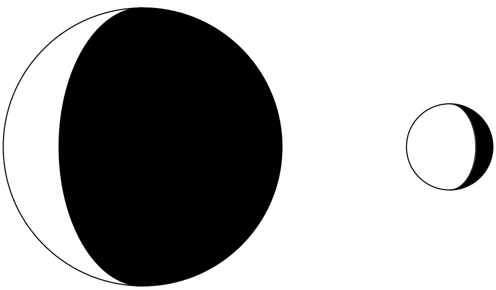
illetve

$$D_2 = \frac{0{,}277 \sin\vartheta_2}{\sin\alpha_2} D_{\max} = 0{,}22 D_{\max},$$

amiből

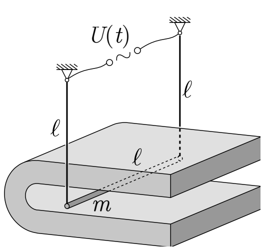
$$\frac{D_2}{D_1} = 0{,}30.$$

A kiszámított fázisok és relatív látszólagos átmérők alapján a feladatban kért rajz a *3. ábrán* látható.



3. ábra

Megjegyzés. A Föld tengelyferdesége és a Vénusz pályájának ekliptikához viszonyított dőlése miatt a valódi kelési idők jelentősen eltérnek az itteniektől, azonban a delelési idők közötti különbségek (amelyeket sokkal kevésbé befolyásolnak ezek a tényezők) a valóságban elfogadhatóan egyeznek az itt számoltakkal. A két bolygó pályájának excentricitása csak nagyon kis eltéréseket okoz.



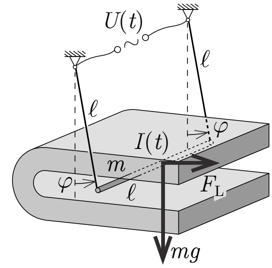
4. ábra

2. *Egy $m = 50$ g tömegű, $\ell = 20$ cm hosszúságú fémrudat két, ugyancsak ℓ hosszúságú fémszállal vízszintes helyzetben felfüggesztünk. A rudat egy széles patkómágnes pólusai közé helyezzük, így a rúd teljes egészében $B = 0{,}50$ T indukciójú, jó közelítéssel homogén mágneses mezőbe merül. A fémszálak és a rúd együttes elektromos ellenállása $r = 0{,}10\ \Omega$. A fémszálak felső végei közé $U_0 = 10$ mV amplitúdójú, $f = 1{,}0$ Hz frekvenciájú szinuszos váltófeszültséget kapcsolunk.*

Hogyan mozog a rúd hosszabb idő után? A közegellenállást hanyagoljuk el!

(*Vigh Máté*)

Megoldás. Az ingán keresztül $I(t)$ áram folyik, így mozgása közben a nehézségi erőn kívül az $F_\mathrm{L} = BI\ell$ nagyságú Lorentz-erő is hat rá.



5. ábra

A forgómozgás alapegyenlete:

$$m\ell^2\ddot{\varphi} = IB\ell^2\cos\varphi - mg\ell\sin\varphi,$$

ahol $m\ell^2$ az inga tehetetlenségi nyomatéka a forgástengelyre vonatkoztatva. Kis φ szögkitérést feltételezve $\cos\varphi \approx 1$ és $\sin\varphi \approx \varphi$, ezt felhasználva:

$$I(t) = \frac{m}{B}\ddot{\varphi} + \frac{mg}{B\ell}\varphi.$$

A mozgó rúdban a mágneses tér hatására $U_\mathrm{i}(t) = B\ell^2\dot{\varphi}$ feszültség indukálódik. Az áramkörre a huroktörvényt felírva

$$U(t) = rI(t) + U_\mathrm{i}(t),$$

és abba $I(t)$ és $U_\mathrm{i}(t)$ kifejezését behelyettesítve az

$$U(t) = \frac{mr}{B}\ddot{\varphi} + B\ell^2\dot{\varphi} + \frac{mgr}{B\ell}\varphi$$

egyenletet kapjuk, ahol $U(t) = U_0\sin(\omega t)$ és $\omega = 2\pi f$.

Ennek megoldására két lehetséges utat is ismertetünk.

I. megoldás. Felismerhetjük, hogy ez egy csillapított kényszerrezgés mozgásegyenlete:

$$\ddot{\varphi} + \frac{B^2\ell^2}{mr}\dot{\varphi} + \frac{g}{\ell}\varphi = \frac{BU_0}{mr}\sin(\omega t),$$

amelynek állandósult megoldását

$$\varphi(t) = \varphi_{\max}\sin(\omega t - \phi)$$

alakban kereshetjük. Vezessük be a következő, kényszerrezgéseknél szokásosan alkalmazott jelöléseket:

$$\frac{B^2\ell^2}{mr} = 2\beta, \quad \frac{g}{\ell} = \omega_0^2 \quad \text{és} \quad \frac{BU_0}{mr} = f_0.$$

A próbafüggvényt behelyettesítve a mozgásegyenletbe (vagy a megoldást az irodalomból kikeresve) adódik, hogy

$$\varphi_{\max} = \frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}} = \frac{\frac{BU_0}{mr}}{\sqrt{\left(\frac{g}{\ell} - \omega^2\right)^2 + \frac{B^4\ell^4\omega^2}{m^2r^2}}} \approx 3{,}6^\circ,$$

és

$$\phi = \operatorname{arctg}\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} = \operatorname{arctg}\frac{\frac{B^2\ell^2\omega}{mr}}{\frac{g}{\ell} - \omega^2} \approx 52{,}7^\circ.$$

Az inga tehát hosszabb idő után a rákapcsolt feszültséggel azonos, 1 Hz-es frekvenciával, de attól 52,7°-os fázissal lemaradva, 3,6°-os amplitúdóval leng.

A kitérés valóban kis szögű, így a közelítések jogosak voltak.

Bár a feladat nem kérdezte, a szögkitérés ismeretében érdekes meghatároznunk a rúdban folyó áramerősséget:

$$I(t) = \frac{m}{B}\ddot{\varphi} + \frac{mg}{B\ell}\varphi = \frac{m}{B}\left(-\omega^2 + \frac{g}{\ell}\right)\varphi_{\max}\sin(\omega t - \phi) =$$
$$= \frac{U_0}{r}\frac{\frac{g}{\ell} - \omega^2}{\sqrt{\left(\frac{g}{\ell} - \omega^2\right)^2 + \frac{B^4\ell^4\omega^2}{m^2r^2}}}\sin(\omega t - \phi) = I_0 \sin(\omega t - \phi),$$

ahol $I_0 \approx 61$ mA.

Fontos megjegyezni, hogy (az indukált feszültség miatt)

$$I(t) \neq \frac{U_0 \sin(\omega t)}{r},$$

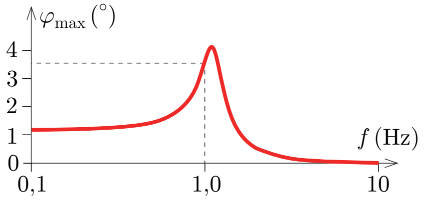
tehát az áramerősség nincs fázisban a rákapcsolt feszültséggel.

Ellenőrzésként kiszámolhatjuk a feszültségforrást terhelő (bemenő) és az ellenálláson disszipálódó teljesítményeket:

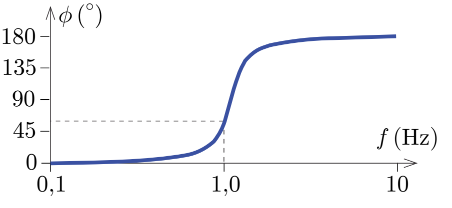
$$P_{\text{átl}} = \frac{U_0 I_0 \cos\phi}{2} = \frac{I_0^2 r}{2} \approx 18 \text{ mW}.$$

Ezek a várakozásunknak megfelelően egyenlők.

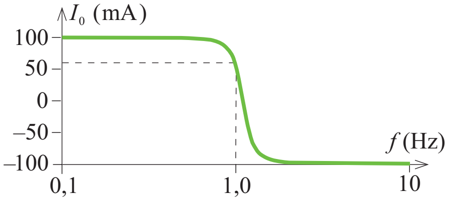
A *6.*, *7.* és *8. ábrán* a $\varphi_{\max}$ maximális szögkitérést, a ϕ fáziskülönbséget és az I_0 maximális áramerősséget ábrázoltuk a gerjesztő frekvencia függvényében. Látható, hogy a feladatban szereplő gerjesztés a rezonanciához közeli (az inga sajátfrekvenciája $f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\ell}} \approx 1{,}1$ Hz).



6. ábra



7. ábra



8. ábra

II. megoldás. Vessük össze a mozgásegyenletet a soros RLC-körre felírt huroktörvénnyel (a szokásos jelölésekkel):

$$U(t) = L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{1}{C}Q.$$

A két rendszer között tehát az alábbi megfeleltetés állítható fel:

$$Q \to \varphi, \qquad L \to \frac{mr}{B}, \qquad R \to B\ell^2, \qquad \frac{1}{C} \to \frac{mgr}{B\ell}.$$

Az áramkörös analógiában ismert, hogy az áramerősség az idő függvényében $I^\star(t) = I_0^\star \sin(\omega t - \phi^\star)$ módon változik, ahol az amplitúdó és a fázisszög:

$$I_0^\star = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}},$$

és

$$\phi^\star = \operatorname{arctg} \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}.$$

A töltés az idő függvényében (vagy integrálással vagy a harmonikus rezgőmozgás analógiájával):

$$Q(t) = -\frac{I_0^\star}{\omega} \cos(\omega t - \phi^\star).$$

Megjegyzés. Az $I^\star$ és $\phi^\star$ jelöléseket azért használjuk, hogy megkülönböztessük az áramkörös analógiában szereplő és a valódi ingában folyó áramerősséget, valamint az analógiában az áram és a feszültség, illetve a valóságban az inga szögkitérése és a feszültség közötti fázisszögeket.

Az áramkörös hasonlatot felhasználva most már megadhatjuk a felfüggesztett rúd szögkitérését az idő függvényében:

$$\varphi(t) = -\varphi_{\max} \cos(\omega t - \phi^\star) = \varphi_{\max} \sin(\omega t - \phi),$$

ahol

$$\varphi_{\max} = \frac{I_0^\star}{\omega} = \frac{\frac{U_0}{\omega}}{\sqrt{B^2\ell^4 + \left(\frac{mr\omega}{B} - \frac{mgr\omega}{B\ell}\right)^2}} \approx 3{,}6^\circ,$$

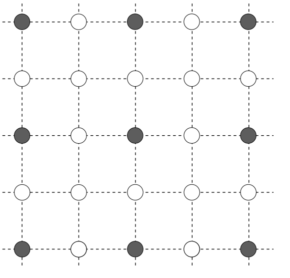
és

$$\phi = \phi^\star + 90^\circ = \operatorname{arctg} \frac{\frac{mr\omega}{B} - \frac{mgr}{B\ell\omega}}{B\ell^2} + 90^\circ = -37{,}3^\circ + 90^\circ = 52{,}7^\circ,$$

a korábbi eredményekkel egyezően.

3 *Egy átlátszatlan lapon egyforma, kicsiny lyukak találhatóak szabályos négyzetrács elrendezésben. Ha a lapot monokromatikus, a rácsállandónál jóval nagyobb hullámhosszúságú lézerfénnyel merőlegesen megvilágítjuk, akkor a távoli ernyőn szabályos négyzetrács elrendezésű, I_0 intenzitású fénypöttyöket láthatunk.*

Hogyan változik meg az elhajlási kép, ha a lapon minden második sor minden második nyílását eltakarjuk az ábrán látható módon? Mekkora lesz az egyes fénypöttyök intenzitása?



9. ábra

(Széchenyi Gábor)

Megoldás. *Sajnálatos módon a feladat szövegében maradt egy hiba: a lézerfényről szóló „a rácsállandónál jóval nagyobb hullámhosszúságú” félmondat ellentmond annak, hogy a távoli ernyőn szabályos négyzetrács elrendezésű diffrakciós kép keletkezik. Helyesen „a rácsállandónál kisebb hullámhosszúságú”-t kellett volna írni (a nagyon kicsi hullámhossz esetén a diffrakciós ábra nagyon apró lenne, vagy nagyon messze kellene helyezni az ernyőt). A megoldásban, ahogy látni fogjuk, nincs szükség a hullámhosszra, ezért kerülhette el a hiba sokszori átolvasás után is a szemünket. Elnézést kérünk érte!*

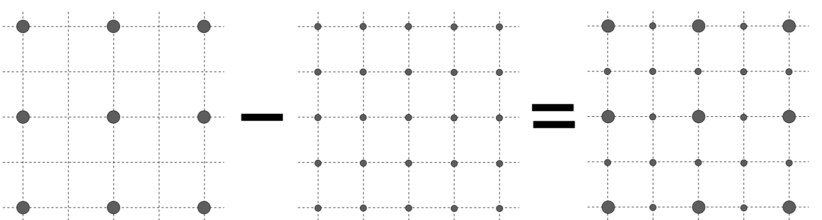
A Huygens–Fresnel-elv alapján a nyílások mindegyikéből azonos fázisú gömbhullámok indulnak ki. Az eredeti rács diffrakciós ábráján ott jelennek meg fénylő pontok, ahol a nyílásokból kiinduló gömbhullámok konstruktívan interferálnak. Ha a nyílások egynegyedét letakarjuk, akkor a korábbi fénylő pontok helyére csak háromnegyed annyi nyílásból érkeznek be a gömbhullámok, így a tér amplitúdója is háromnegyedére csökken. Az intenzitás az amplitúdónégyzettel arányos, így ezen fénypöttyök intenzitása $9/16\,I_0$ lesz. Továbbiakban azt a kérdést vizsgáljuk, hogy megjelennek-e további intenzitásmaximumok az ernyőn.

A feladatban szereplő hiányos rács (H rács) felfogható úgy mint az eredeti négyzetrács (E rács) és egy ritkább négyzetrács (R rács) különbsége. Mivel a diffrakciót leíró Maxwell-egyenletek lineárisak, így az E rács és R rács esetében kialakuló tér különbségének a H rács által keltett térrel kell megegyeznie. Érdemes megjegyezni, hogy ilyenkor a hullámok fázishelyes különbségét kell képezni, nem lehet közvetlenül az intenzitásokat kivonni.

Az E rács esetében a diffrakciós mintázatot ismerjük, ez négyzetrács elrendezésű fénypöttyök összessége. A diffrakciós ábra rácsállandója legyen a, a fénypöttyök helyén a tér amplitúdója pedig A.

Az R rács egy kétszer akkora rácsállandójú négyzetrács, így a megjelenő diffrakciós képet szintén négyzetrács elrendezésű fénypöttyök alkotják, de a rácsállandó $a/2$, azaz a diffrakciós ábra sűrűbb, mint az eredeti esetben. (Ez az inverziós tulajdonság már a hagyományos optikai rácsnál is megmutatható. Ha az optikai rácsot kétszeresére megnyújtjuk, akkor a diffrakciós ábrát a felére kell összenyomni.) Az R rács esetében a fénypöttyök helyén a tér amplitúdója $A/4$, mivel csak negyedannyi nyílás van az apertúrán, így a hullámok eredő amplitúdója 4-szer kisebb.

Következőkben az E és az R rács esetében kialakuló téreloszlások különbségét kell képezni. Azokban a pontokban, ahol az E és R rács esetében is nem nulla a tér, ott az első bekezdésben leírt gondolatmenetet megismételve $A - A/4 = 3/4\,A$ lesz az amplitúdó értéke, így az intenzitás $9/16\,I_0$-nak adódik. Azokban a pontokban,



10. ábra

ahol csak az R rács esetében nem nulla a tér, ott a különbség $-A/4$-nek adódik. A negatív előjel ara utal, hogy a H rács ezen a pontjaiban éppen ellentétes a fázis. Az intenzitás ismételten az amplitúdónégyzettel arányos, így ezekben a pontokban $1/16\, I_0$ intenzitású fénypöttyöket láthatunk.

A letakart rács elhajlási képe egy kétszer sűrűbb négyzetrács, ahol az eredeti fénypöttyök helyén az intenzitás $9/16\, I_0$, az újonnan megjelenő pontok intenzitása pedig $1/16\, I_0$. A megoldás elsőre kissé meglepő. Letakartunk néhány pontot az apertúrán, melynek hatására nem eltűntek a pontok az elhajlási ábráról, hanem újabbak jelentek meg.

Ellenőrzésképpen számítsuk ki, hogyan változott meg az ernyőn mérhető összintenzitás a letakarás nyomán. Kezdetben I_0 intenzitású fénypöttyeink voltak, melyek intenzitása lecsökkent $9/16\, I_0$-ra. Ellenben megjelentek kisebb intenzitású pontok is, minden nagy intenzitású pontra három kis intenzitású pont jut. Szebben megfogalmazva, a H rács elhajlási képének elemi cellájában egy $9/16\, I_0$ és három $1/16\, I_0$ fénypötty található. Az elemi cellában így az összintenzitás $3/4\, I_0$. Az ernyőn mérhető összintenzitás a 3/4-edére csökkent, ami megegyezik az előzetes elvárásunkkal, miszerint a nyílások 1/4-ét takartuk el, így a kezdeti esethez képest csak a fény intenzitásának 3/4-e jut át.

❄

Az ünnepélyes eredményhirdetésre és díjkiosztásra 2023. november 24-én délután került sor az ELTE TTK Konferenciatermében. Megemlékeztünk az 50 és 25 évvel ezelőtti Eötvös-versenyről, ismertettük az akkori feladatokat és a győztesek nevét. Ezután következett a 2023. évi verseny feladatainak és megoldásainak bemutatása. Az 1. és 2. feladat megoldását *Vankó Péter*, a 3. feladatét *Széchenyi Gábor* ismertette.

Az esemény végén került sor az eredményhirdetésre. A díjakat *Ormos Pál*, az Eötvös Loránd Fizikai Társulat elnöke adta át.

I. díjat a versenybizottság nem adott ki.

A harmadik feladat helyes, valamint az első és második feladat hiányos megoldásáért *második díjat* nyert **Fey Dávid**, az ELTE fizika BSc szakos hallgatója, aki a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnáziumban érettségizett *Nagy Piroska Mária* tanítványaként.

A második feladat helyes megoldásáért és a másik két feladatban elért részeredményekért, illetve az első feladat hiányos megoldásáért és a második feladatban elért részeredményekért *harmadik díjat* nyert **Molnár Barnabás**, az ELTE fizika BSc szakos hallgatója, aki a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnáziumban érettségizett Nagy Piroska Mária tanítványaként (2. helyezett) és **Seprődi Barnabás**, az Óbudai Árpád Gimnázium 12. osztályos tanulója, *Gärtner István* tanítványa (3. helyezett).

Az első feladat hiányos megoldásáért *dicséretet* kapott **Beke Bálint**, a BME fizikus-mérnök BSc szakos hallgatója, aki az ELTE Apáczai Csere János Gyakorló Gimnázium és Kollégiumban érettségizett *Zsigri Ferenc* tanítványaként (4. helyezett), **Sarkadi Sándor István**, az ELTE fizika BSc szakos hallgatója, aki a nyíregyházi Szent Imre Katolikus Gimnáziumban érettségizett *Bartáné Cserny Katalin* tanítványaként (5. helyezett), valamint **Bátorfi Balázs**, a nagykanizsai Batthyány Lajos Gimnázium 12. osztályos tanulója, *Piriti János* tanítványa, **Biszak Ákos**, a BME fizika BSc szakos hallgatója, aki a paksi Energetikai Technikum és Kollégiumban érettségizett *Nagyné Lakos Mária* és *Damjanovitsné Eke Violetta* tanítványaként, **Csilling Dániel**, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 11. osztályos tanulója, *Schramek Anikó* tanítványa és **Dancsák Dénes**, a nagykanizsai Batthyány Lajos Gimnázium 12. osztályos tanulója, Piriti János tanítványa (6–9. helyezett).

A második díjjal az *Andersen Adótanácsadó Zrt.* és a *Nanorobot Vagyonkezelő Kft.* adományából 60 ezer forint, a harmadik díjjal 45 ezer, a dicsérettel 30 ezer forint pénzjutalom jár. A díjazottak tanárai könyvutalványt kaptak. Gratulálunk a díjazottaknak, köszönjük az adományozók önzetlen támogatását!

Széchenyi Gábor, Vankó Péter, Vigh Máté

Mérési feladatok megoldása

M. 425. *Mérjük meg minél pontosabban egy talpaspohár vagy másféle üvegpohár anyagának sűrűségét!*

(*6 pont*) Közli: *Gnädig Péter*, Vácduka

Megoldás. A megoldók a pohár sűrűségének meghatározásához a

$$\varrho = \frac{m}{V}$$

összefüggést használták. A tömeg mérése általában problémátlan volt, hiszen tized vagy század gramm pontosságú digitális mérleg sok iskolában és háztartásban is található. A nehézséget a térfogat kellő pontosságú mérése okozta. Ennek megoldására rengeteg ötletet kitaláltak és megvalósítottak, ezek közül ismertetünk néhányat.

I. megoldás. A mérés első feléhez az iskolai század gramm pontosságú analitikai mérleget használtam. A pohár tömege a mérést többször megismételve mindig $m = 229{,}70$ g-nak adódott. A pohár térfogatának meghatározását többféleképp el lehet végezni. Próbálkoztam vízkiszorítással is, de bárhogy csináltam, hatalmas volt a szórás az egyes eredmények között. Végül legjobbnak a felhajtóerőn alapuló módszer bizonyult. Ennek nehézségét az okozza, hogy a mérés pontossága érdekében minél pontosabban meg kell határozni az adott folyadék sűrűségét.

Ehhez először az analitikai mérleggel megmértem egy V_L (200 vagy 500 cm^3-es) térfogatú mérőlombik m_L tömegét, majd a folyadékkal a jelig feltöltött lombikét is (m'_L). A két mérés különbsége adja a kimért térfogatú folyadék tömegét, majd a tömeg és a térfogat hányadosa a folyadék ϱ_f sűrűségét:

$$\varrho_\mathrm{f} = \frac{m'_\mathrm{L} - m_\mathrm{L}}{V_\mathrm{L}}.$$

A méréseket a pontosság kedvéért többször megismételtem.

A pohár térfogatának meghatározásához a következő eljárást alkalmaztam. Egy félliteres üvegedénybe helyeztem a poharat, majd addig töltöttem rá a korábban megmért sűrűségű folyadékból, hogy a poharat teljesen ellepje. Ezután egy gramm pontosságú konyhai mérleggel megmértem ennek a teljes tömegét (m_t). Végül a poharat egy állvány és fonál segítségével fellógattam úgy, hogy teljesen belemerüljön a folyadékba, de ne érjen az edényhez, és ekkor is leolvastam a mérleg által mutatott értéket (m'_t). A fonál által megtartott tömeg a kettő különbsége: $m_\mathrm{f} = m_\mathrm{t} - m'_\mathrm{t}$, a pohár által kiszorított folyadék tömege pedig:

$$m_\mathrm{k} = m - m_\mathrm{f} = m - m_\mathrm{t} + m'_\mathrm{t}.$$

Ennek ismeretében a pohár térfogata:

$$V = \frac{m_\mathrm{k}}{\varrho_\mathrm{f}},$$

sűrűsége pedig:

(1) $$\varrho = \frac{m}{V} = \frac{m}{m_\mathrm{k}}\varrho_\mathrm{f}.$$

A méréseket desztillált vízzel, olajjal, petróleummal és kloroformmal végeztem el. Az eredményeket az *1. táblázat* foglalja össze.

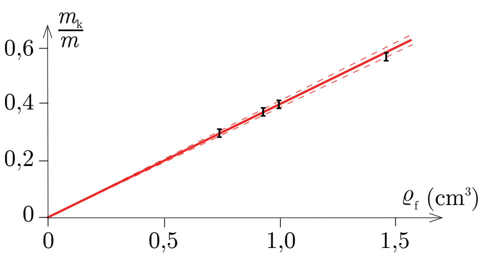
folyadék	V_L (cm^3)	m_L (g)	m'_L (g)	ϱ_f $\left(\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}\right)$	m_t (g)	m'_t (g)	m_k (g)	V (cm^3)	ϱ $\left(\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}\right)$
deszt. víz	200	146,0	344,7	0,993	952	814	91,7	92,3	2,49
olaj	500	171,0	629,0	0,916	851	706	84,7	92,5	2,48
petróleum	500	171,2	549,0	0,756	808	648	69,7	92,3	2,49
kloroform	500	171,0	911,0	1,48	1212	1117	135	91,0	2,52

1. táblázat

Az (1) összefüggésből láthatjuk, hogy

(2) $$\frac{m_\mathrm{k}}{m} = \frac{1}{\varrho}\varrho_\mathrm{f}.$$

Ábrázoljuk grafikonon az $\frac{m_\mathrm{k}}{m}$ értékeket ϱ_f függvényében, és illesszünk a pontokra egyenest. Az egyenes meredeksége (2) alapján $\frac{1}{\varrho}$ lesz.



1. ábra

A konyhai mérleg pontossága ±0,5 g, ezért m_k-t 1 g pontossággal ismerjük. Ennek alapján $\frac{m_\mathrm{k}}{m}$ hibáját a grafikonon is jelöltem. Az illesztett egyenes meredeksége $\frac{1}{\varrho} = (0{,}400 \pm 0{,}004)\ \frac{\mathrm{cm}^3}{\mathrm{g}}$, amiből a pohár sűrűsége:

$$\varrho = (2{,}500 \pm 0{,}025)\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}.$$

Csapó András (Budapest, Baár-Madas Ref. Gimn., 9. évf.)

II. megoldás. A pohár tömegét század gramm pontosságú digitális mérleggel mértük meg: $m = 151{,}62$ g. A pohár térfogatát háromféle módon állapítottuk meg.

a) Töltsünk vizet egy mérőkannába, és olvassuk le a térfogatot: $V_1 = 1345\ \mathrm{cm}^3$. Helyezzük bele a poharat úgy, hogy teljesen víz alatt legyen, majd olvassuk le újra a térfogatot: $V_2 = 1400\ \mathrm{cm}^3$. A két térfogat különbsége megadja a pohár térfogatát: $V = V_2 - V_1 = 55\ \mathrm{cm}^3$, amiből a pohár anyagának sűrűsége:

$$\varrho = \frac{m}{V} = 2{,}76\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}.$$

b) Töltsük fel a mérőkannát színültig vízzel, és helyezzük egy $m_0 = 52{,}85$ g tömegű tálcára, amely majd felfogja a kiömlő vizet. Töltsük meg a poharat is színültig vízzel, és mérjük meg így a tömegét: $m_\mathrm{t} = 334{,}07$ g. (A pohár minél pontosabb teljes feltöltését egy fecskendő segítségével végeztük.) A pohárba töltött víz tömege $m_\mathrm{v} = m_\mathrm{t} - m = 182{,}45$ g. Ezután helyezzük a teli poharat a teli mérőkancsóba, amiből így kifolyik valamennyi víz a tálcára. Ezután mérjük meg a tálca és a rá kifolyt víz együttes tömegét. Ezt háromszor is megismételtük: 297,73 g, 292,52 g és 295,05 g értékeket mértünk. Ezek átlaga: $m_1 = (295 \pm 2{,}5)$ g. A pohár térfogatát a

$$V = \frac{m_1 - m_0 - m_v}{\varrho_\mathrm{v}}$$

összefüggéssel határozhatjuk meg, ahol $\varrho_\mathrm{v} = 1\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$ a víz sűrűsége. Behelyettesítve $V = (59{,}8 \pm 2{,}5)\ \mathrm{cm}^3$ és ebből a pohár anyagának sűrűsége:

$$\varrho = \frac{m}{V} = (2{,}54 \pm 0{,}11)\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}.$$

2. ábra

c) A harmadik módszer a pohár külső felületéről egy gipszlenyomat készítése (*2. ábra*), amely megszáradás és összeragasztás után feltölthető vízzel. Ezután ha a gipszben lévő vizet elkezdjük áttölteni a pohár belsejébe, egészen addig, hogy azt színültig töltsük, akkor a maradék éppen a pohár anyagának térfogatával azonos mennyiségű víz lesz. Ennek tömegét megmérve a víz sűrűségének ismeretében megkapjuk a pohár térfogatát, majd abból a pohár tömegének ismeretében a pohár anyagának sűrűségét. Az így mért érték $\varrho = 3{,}26\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$, amely jelentősen eltér a korábbi két módszerrel mért eredménytől.

A *KömalÁszok csapat: Kiss 666 Kinga Lili, Bodnár Hanna*
(Debrecen, Tóth Árpád Gimn., 10. évf.)

Megjegyzések. 1. Ha két mért mennyiség hányadosát számítjuk, akkor a relatív hibák összeadódnak:

$$\frac{\Delta\left(\frac{x}{y}\right)}{\frac{x}{y}} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y}.$$

Az eredmény hibáját a nagyobb relatív hibával mért mennyiség hibája fogja meghatározni, így esetünkben hiába mérjük a tömeget 0,01%-os hibával, ha a térfogatmérés hibája 4%.

2. Ha a mérési adatok kiértékelésekor két olyan mennyiséget vonunk ki egymásból, melyek közel azonos nagyságúak ($x - y \ll x + y$), akkor az abszolút hibák összeadódnak:

$$\Delta(x - y) = \Delta x + \Delta y.$$

Az abszolút hiba tehát kicsit megnő, de nagyságrendje nem változik. Ezzel szemben a relatív hiba jelentősen, akár nagyságrendekkel is megnőhet:

$$\frac{\Delta(x - y)}{x - y} = \frac{\Delta x + \Delta y}{x - y} \gg \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y}.$$

Érdemes már a mérés megtervezésekor figyelni arra, hogy lehetőleg ne legyen szükség közel azonos nagyságú mért adatok különbségét képezni.

III. megoldás. A poharat szilánkokra törtük, és négy részletbe szétosztottuk. Az egyes adagok tömegét digitális mérleggel mértük meg, a térfogatukat pedig mérőhengerrel. A mérőhengerbe 50 cm^3 vizet töltöttünk, majd beleszórtunk egy adag törmeléket. Az eredeti és a módosult vízszintet lefényképeztük, majd leolvastuk a térfogatváltozást. A mért és számított értékeket a *2. táblázat* tartalmazza.

sorszám	m (g)	V (cm^3)	ϱ $\left(\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}\right)$
1.	24,2	10,5	2,30
2.	31,3	12,0	2,61
3.	38,0	15,0	2,53
4.	24,1	9,5	2,51

2. táblázat

A mért sűrűségértékek átlaga és szórása:

$$\varrho = (2{,}50 \pm 0{,}11)\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}.$$

A szakirodalom az üveg sűrűségére egy intervallumot határoz meg: 2,2–2,67$\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$ (forrás: Négyjegyű függvénytáblázatok). A mért értékünk szépen beleillik ebbe az intervallumba.

A *Newtonméter csapat: Kiss 668 Benedek, Sós Ádám*
(Sopron, Berzsenyi D. Ev. Gimn., 11. évf.)

26 dolgozat érkezett. Helyes 10 megoldás. Kicsit hiányos (4–5 pont) 8, hiányos (1–3 pont) 8 dolgozat.

Fizika feladatok megoldása

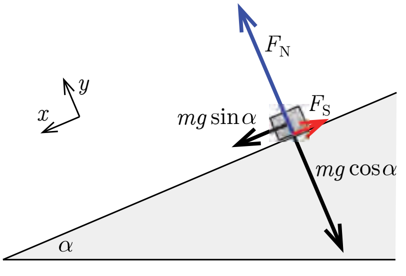
P. 5499. *Marci egy lejtőn csúszik le szánkójával a friss havon. Röviddel az indulását követően, egymás után négy darab szaloncukor esik ki a zsebéből (elhanyagolható magasságból) a hóra. A csúszás közben Marci a mobiltelefonja segítségével* 2,1 m/s^2*-nek mérte a szánkó gyorsulását, és* 23°*-osnak a lejtő hajlásszögét. Később a cukorkák közti távolságot is meghatározta, mely az első kettő között* 2*, a második és a hamadik között* 3,2*; a harmadik és negyedik között pedig* 4,4 *méternek adódott.*

a) Mekkora a súrlódási együttható a szánkó és a hó között?

b) Igazoljuk, hogy a szaloncukrok egyenlő időközönként estek ki a fiú zsebéből!

(*4 pont*) Közli: *Kis Tamás* (Heves)

Megoldás. *a*) A szánkóra a nehézségi erő, a lejtő nyomóereje és a súrlódási erő hat (*1. ábra*).



1. ábra

A szánkó csak a lejtővel párhuzamosan mozoghat, így a mozgásegyenletek:

$$ma = mg\sin\alpha - F_S,$$
$$0 = F_N - mg\cos\alpha,$$
$$F_S = \mu F_N,$$

amelyekből rendezéssel:

$$a = g\sin\alpha - \mu g\cos\alpha,$$
$$\mu = \frac{g\sin\alpha - a}{g\cos\alpha} = 0{,}19.$$

A *b*) kérdésre többféle megoldás is érkezett.

I. megoldás. Észrevehetjük, hogy

$$s_2 - s_1 = 3{,}2\ \mathrm{m} - 2\ \mathrm{m} = 1{,}2\ \mathrm{m},$$
$$s_3 - s_2 = 4{,}4\ \mathrm{m} - 3{,}2\ \mathrm{m} = 1{,}2\ \mathrm{m},$$

tehát két szaloncukor kiesése között megtett utak különbsége egyenlő, ha az első-második és a második-harmadik, illetve ha a második-harmadik és harmadik-negyedik cukor kiesését vizsgáljuk.

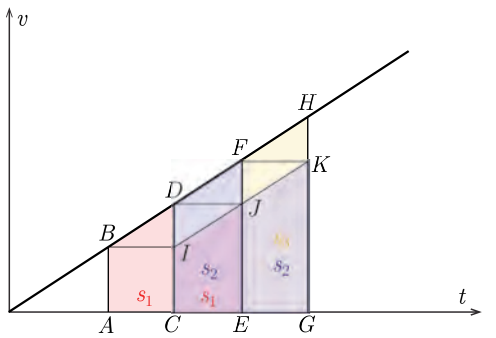
Galilei fedezte fel azt a törvényt, hogy az álló helyzetből induló, egyenes vonalú, egyenletesen gyorsuló mozgást végző test által az egymás utáni egyenlő idők alatt megtett utak úgy aránylanak egymáshoz, mint a páratlan számok, $1:3:5:7\ldots$.

Ez azt is jelenti, hogy az egyenlő időközök alatt megtett utak két szomszédos időköz esetén mindig ugyanannyival nőnek. A szánkó is álló helyzetből indult és egyenletesen gyorsult, és azt tapasztaltuk, hogy az adott időközök alatt megtett utak közötti különbség egyenlő, tehát a Galilei-féle törvény alapján a cukrok egyenlő időközönként estek ki.

Klement Tamás (Pécsi Leőwey Klára Gimn, 11. évf.)

II. megoldás. Egy egyenletesen változó mozgás sebesség–idő grafikonja egyenes, a függvény alatti terület pedig megadja a megtett utat (*2. ábra*).

Az ábrán a szaloncukrok kidobása között megtett utakat az $ABDC$, $CDFE$ és $EFHG$ trapézok területe adja meg: $T(ABDC)=s_1$, $T(CDFE)=s_2$ és $T(EFHG)=s_3$. Ha a szaloncukrok kidobása között mindig egyenlő idők teltek el ($AC=CE=EG$), akkor a trapézok az ábrán látható módon eltolhatók, és az utak közötti különbséget az $IDFJ$ és $JFHK$ parallelogrammák területe adja meg: $T(IDFJ)=s_2-s_1$ és $T(JFHK)=s_3-s_2$. Ezek a parallelogrammák két-két derékszögű háromszögre bonthatók (IDJ, FJD, JFK és HKF), valamint berajzolhatjuk a DIB derékszögű háromszöget is. Ezek a háromszögek mind egybevágók (szögeik és oldalaik páronként egyenlőek), és így a két parallelogramma is egybevágó, területük megegyezik.



2. ábra

A feladat szerint a kidobások közötti, egymást követő úthosszak különbsége megegyezik ($s_2-s_1=s_3-s_2=1{,}2$ m), és az előzőek alapján ez akkor teljesül, ha a szaloncukrok kiesése között azonos idők teltek el.

A *Raufasertapete csapat: Kéki Edit, Novák Péter*
(Miskolc, Földes Ferenc Gimn., 12. évf.)

III. megoldás. Legyen a szánkós sebessége az első szaloncukor kiesésénél v_0. Tegyük fel, hogy tényleg azonos t_k idő telt el a cukrok kiesése között. Ekkor az első és a második szaloncukor közötti távolság:

$$s_1=v_0t_\mathrm{k}+\frac{a}{2}t_\mathrm{k}^2. \tag{1}$$

A szánkós sebessége a második szaloncukornál $v_1=v_0+at_\mathrm{k}$, a második és a harmadik szaloncukor közötti távolság:

$$s_2=v_1t_\mathrm{k}+\frac{a}{2}t_\mathrm{k}^2=(v_0+at_\mathrm{k})t_\mathrm{k}+\frac{a}{2}t_\mathrm{k}^2=v_0t_\mathrm{k}+\frac{3}{2}at_\mathrm{k}^2. \tag{2}$$

A szánkós sebessége a harmadik szaloncukornál $v_2=v_1+at_\mathrm{k}=v_0+2at_\mathrm{k}$, a harmadik és a negyedik szaloncukor közötti távolság:

$$s_2=v_2t_\mathrm{k}+\frac{a}{2}t_\mathrm{k}^2=(v_0+2at_\mathrm{k})t_\mathrm{k}+\frac{a}{2}t_\mathrm{k}^2=v_0t_\mathrm{k}+\frac{5}{2}at_\mathrm{k}^2. \tag{3}$$

Az (1), (2) és (3) kifejezések alapján $s_2 - s_1 = s_3 - s_2 = at_\mathrm{k}^2$.

A feladat adatai szerint szintén $s_2 - s_1 = s_3 - s_2$, amiből következik, hogy a szaloncukrok egyenlő időközönként estek ki. Az adatokat behelyettesítve a szaloncukrok leesése közötti időtartam

$$t_\mathrm{k} = \sqrt{\frac{s_2 - s_1}{a}} \approx 0{,}76\ \mathrm{s},$$

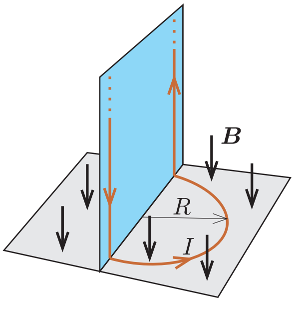
az első szaloncukor pedig (1) alapján az indulás után

$$t_0 = \frac{v_0}{a} = \frac{s_1}{at_\mathrm{k}} - \frac{t_\mathrm{k}}{2} \approx 0{,}88\ \mathrm{s}$$

idővel esett ki.

Dobos Anita (Budapest, Szent István Gimn., 10. évf.) dolgozata alapján

85 dolgozat érkezett. Helyes 30 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 12, hiányos (1–2 pont) 28, hibás 13, nem versenyszerű 2 dolgozat.

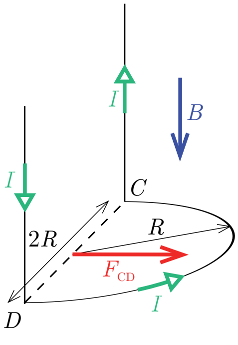


P. 5504. *A vízszintes síkban lévő, R sugarú félkör alakú vezetőben I erősségű áram folyik, amelyet hosszú, függőleges huzalok vezetnek a félkörbe annak végpontjainál. Az egész elrendezés függőleges irányú, $\boldsymbol{B}$ indukcióvektorral jellemezhető homogén mágneses mezőben helyezkedik el.*

Mekkora és milyen irányú mágneses erő hat a huzalok együttesére?

(*4 pont*) Közli: *Kotek László,* Pécs

Megoldás. A félkör alakú vezetőre a Lorentz-erő hat. Ezt úgy határozhatjuk meg, hogy a vezetőt felbontjuk kis ívelemekre, és az azokra ható elemi erőket összeadjuk. (A függőleges, mágneses indukcióval párhuzamos vezetőkre nem hat erő, azokkal nem kell foglalkoznunk.) Ehelyett használjuk a következő gondolatot. Tudjuk, hogy egy zárt vezető tömegközéppontja nem gyorsul homogén mágneses térben (lásd a *Megjegyzést*), azaz ha a CD szakaszon is I áram folyna, az eredő erő nulla lenne. Tehát $\boldsymbol{F}_\text{körív} + \boldsymbol{F}_{CD} = \boldsymbol{0}$. Az egyenes szakaszra ható erőt könnyen kiszámíthatjuk: $F_{CD} = 2RBI$, amely a jobbkéz-szabály alapján a függőleges vezetők síkjára merőlegesen, az *ábrán* jobbra mutat.



A huzalok együttesére ható $\boldsymbol{F}$ erő ugyanekkora, de ellentétes irányú. Tehát $|\boldsymbol{F}| = F_\text{körív} = 2RBI$, és az erő a függőleges vezetők síkjára merőlegesen, az ábrán *balra* mutat.

Seprődi Barnabás (Óbudai Árpád Gimn., 12. évf.)

Megjegyzés. A megoldásban szereplő állítás azzal egyenértékű, hogy egy zárt vezetőre nem hat eredő erő homogén mágneses térben. Ez többféleképpen is igazolható, egy lehetséges utat mutatunk. Bontsuk a zárt vezetőt kis, $\Delta\ell$ hosszúságú szakaszokra. Egy ilyen kis szakaszra ható erő $\Delta \boldsymbol{F} = I\Delta\boldsymbol{\ell} \times \boldsymbol{B}$. A teljes vezetőre ható erőt ezeknek a kis erőknek az eredője adja:

$$\boldsymbol{F} = \sum(\Delta \boldsymbol{F}) = \sum(I\Delta\boldsymbol{\ell} \times \boldsymbol{B}).$$

A zárt vezetőben mindenhol ugyanakkora az I áram, és a homogén mágneses mezőben mindenhol azonos a $\boldsymbol{B}$ indukcióvektor, így ezek a tényezők az összegzésből kiemelhetők:

$$\sum(I\Delta\boldsymbol{\ell} \times \boldsymbol{B}) = I\left(\sum \Delta\boldsymbol{\ell}\right) \times \boldsymbol{B}.$$

Ezután pedig azonnal látszik, hogy $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$, hiszen egy zárt vezetőre nyilvánvalóan $\sum(\Delta\boldsymbol{\ell}) = \boldsymbol{0}$.

18 dolgozat érkezett. Helyes 10 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 4, hiányos (1–2 pont) 3, hibás 1 dolgozat.

P. 5506. *Tekintsük az elektront kicsiny, homogén tömegeloszlású, felületén egyenletesen töltött gömbnek úgy, hogy a tömeg-energia ekvivalenciából számított energiája egyezzen meg az elektron körüli elektrosztatikus tér energiájával.*

a) Határozzuk meg a fenti módon az elektron sugarát, amit klasszikus elektronsugárnak neveznek!

b) Az elektron feles spinű részecske, mert saját perdülete a $\hbar \equiv h/2\pi$ redukált Planck-állandónak éppen a fele: $\hbar/2$. Tekintsük az elektron saját perdületét a klasszikus newtoni mechanika alapján úgy, ahogy egy, a középpontján átmenő tengely körül forgó, homogén gömb perdületét szokás. Határozzuk meg a forgó klasszikus elektron „egyenlítőjének” a kerületi sebességét! Hasonlítsuk össze ezt a fénysebességgel!

(4 pont) Közli: *Honyek Gyula,* Veresegyház

Megoldás. *a)* Az elektron tere gömbszimmetrikus, így ha az elektron köré helyezünk egy gömböt, akkor ennek felszínén a térerősség:

$$E(r) = \frac{ke}{r^2}.$$

Az elektromos tér energiasűrűsége:

$$\varrho_\mathrm{e} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{4\pi k}E^2.$$

Vegyük körbe az elektront egyre nagyobb sugarú gömbökkel, és összegezzük az így kapott energiákat, azaz integráljuk ϱ_e-t térfogat szerint az elektron keresett klasszikus sugarán (r_0) kívüli térrészre:

$$W_\mathrm{e} = \int_{r_0}^{\infty} \frac{1}{2}\,\frac{1}{4\pi k}\left(\frac{ke}{r^2}\right)^2 4r^2\pi \,\mathrm{d}r = \frac{ke^2}{2}\int_{r_0}^{\infty} r^{-2}\,\mathrm{d}r = \frac{ke^2}{2r_0}.$$

A feladat feltétele szerint:

$$mc^2 = \frac{ke^2}{2r_0},$$

amiből az elektron klasszikus sugara:

$$r_0 = \frac{ke^2}{2mc^2} = 1{,}4 \cdot 10^{-15}\ \mathrm{m}.$$

b) Az elektron perdülete a feladat szövege alapján:

$$N = \frac{h}{4\pi} = \Theta_{\mathrm{g}}\omega,$$

ahol

$$\Theta_{\mathrm{g}} = \frac{2}{5}mr_0^2$$

a gömb tehetetlenségi nyomatéka. Ebből

$$\omega = \frac{N}{\Theta_{\mathrm{g}}} \approx 7{,}4 \cdot 10^{25}\ \frac{1}{\mathrm{s}},$$

a keresett kerületi sebesség pedig:

$$v_{\mathrm{k}} = r_0\omega \approx 10^{11}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Látható, hogy ez jóval nagyobb, mint a fénysebesség, annak több mint 300-szorosa. A feladat fontos tanulsága, hogy klasszikus fizikai eszközökkel nem írhatunk le relativisztikus jelenségeket.

Klement Tamás (Pécsi Leőwey Klára Gimn, 11. évf.)

Megjegyzések. 1. Az elektron körüli tér energiáját integrálás nélkül is megkaphatjuk, ha a (gömb)kondenzátor energiájának ismert képletét ($W = \frac{1}{2}QU$) alkalmazzuk. Esetünkben $Q = e$ és $U = \frac{ke}{r_0}$ (az r_0 sugarú gömb felszínének potenciálja a végtelenhez képest), amiből $W_{\mathrm{e}} = \frac{ke^2}{2r_0}$, a fenti számítással egyezően.

2. A fenti megoldás azt feltételezi, hogy az elektron töltése a gömb felületén helyezkedik el, és így a belsejében nulla a térerősség. Ha a töltést az egész gömbben elosztottnak feltételezzük, akkor az eredmény egy 1-hez közeli számfaktorral eltér az itt levezetettől.

26 dolgozat érkezett. Helyes 25 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 1 dolgozat.

Fizikából kitűzött feladatok

M. 428. Mérjük meg, mekkora teljesítménnyel lehet vizet melegíteni egy mikrohullámú sütővel! Mitől függhet ez az érték?

(*6 pont*) Közli: *Széchenyi Gábor*, Budapest

G. 837. Tekintsük 100 °C-on és normál légköri nyomáson a víz folyékony és gáz halmazállapotú fázisát. Átlagosan hányszor messzebb van a szomszédos vízmolekulák középpontja egymástól a gőzfázisban, mint a folyadékfázisban?

(*3 pont*)

G. 838. Az alábbi, drónról készült fényképen vízszintes talajon emberek haladnak a Rio Grande partján Mexikó és az Egyesült Államok határán. Becsüljük meg, hogy milyen magasan volt a Nap a fotó készítésekor!

(*4 pont*)

G. 839. Két motoros halad egymás mögött 30 m/s sebességgel egy versenypályán, a közöttük lévő távolság 23 m, a motorkerékpárok hossza 2 m. Egyszer csak a hátsó motoros előzésbe kezd, 1 m/s^2-tel gyorsít addig, míg 23 m-rel a társa elé nem kerül, majd állandó sebességgel halad tovább. Abban a pillanatban, amikor befejezi az előzést, a másik motoros is előzésbe kezd szintén 1 m/s^2-es gyorsulással, amit hasonlóan 23 m-rel a társa előtt fejez be. Mekkora sebességet érnek el a motorosok a kétszeres előzés után?

(*4 pont*)

G. 840. Legalább mekkora sebességgel csapódjon a falnak egy szobahőmérsékletű ólomgolyó, hogy az megolvadjon? Tételezzük fel, hogy a rugalmatlan ütközés során felszabaduló hő fele a falat, fele pedig az ólomgolyót melegíti.

(*4 pont*)

P. 5535. Árnyékoló napvitorla 2 m^2 felülete közel vízszintes. Hirtelen egyenletesen elkezd esni az eső. A vitorla közepén van egy kicsi lyuk, amelyen az esővíz lefolyik. A vízsugár alá teszünk egy henger alakú edényt, amelynek az alján van egy 5 mm^2 keresztmetszetű lyuk. Az edényben a vízszint emelkedése megáll 20 cm-nél. Határozzuk meg, hogy a 10 percig tartó eső során hány mm csapadék esett!

(*4 pont*) Közli: *Simon Péter*, Pécs

P. 5536. Egy focimeccsen a kaputól valamekkora d távolságban lévő P pontból szabadrúgást végeznek el. A P pont a gólvonal felezőmerőlegesén helyezkedik el.

A játékos a labdát valamekkora α szögben éppen a felső kapufa közepe felé rúgja el, de az t_1 idejű mozgás után a gólvonal közepénél esik a földre. A rúgást valamilyen ok miatt meg kell ismételni. Másodszor a játékos erősebben, 2α szögben rúgja el a labdát, ami t_2 idő múlva eltalálja a felső kapufa közepét. (A kapu mérete kicsit eltér a szabványostól.)

a) Mekkora volt az α szög?

b) Mekkora a d távolság?

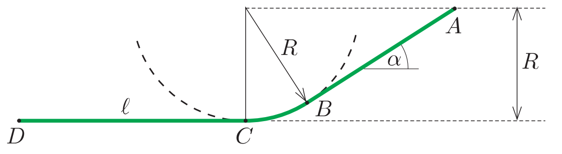
c) Mekkora volt a labda kezdősebessége az első, illetve a második szabadrúgásnál?

(A labdát tekintsük tömegpontnak, és a közegellenállást ne vegyük figyelembe.)

Adatok: $t_1 = 1{,}90$ s, $t_2 = 1{,}93$ s, $g = 9{,}81$ m/s^2.

(*5 pont*) *Nagy Béla* (1881–1954) feladata nyomán

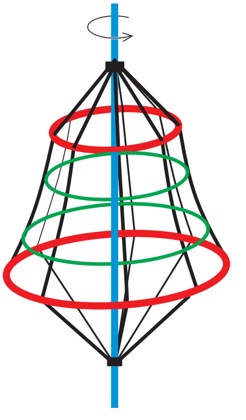
P. 5537. Egy kalandparkban az erre vállalkozók egy $R=20$ m magas, $\alpha=30°$-os hajlásszögű lejtő tetejéről (A), kezdősebesség nélkül, szabadon (fékezésmentesen) gurulhatnak lefelé egy kicsiny kocsiban. A lejtő törésmentesen csatlakozik egy R sugarú, körív alakú pályaszakaszhoz (B), majd a pálya a legmélyebb pontjától (C) vízszintesen folytatódik tovább. A vízszintes szakaszon a megfelelő módon fékezett kocsi időben egyenletesen lassul, és $\ell = 2R$ út megtétele után a D pontnál megáll.



Számítsuk ki, hogy az utasok a szokásos súlyuknak hányszorosát érzik a mozgásuk során! Ábrázoljuk ezt az arányt a megtett út függvényében!

(*5 pont*) *Holics László* feladata nyomán

P. 5538. Sok játszótéren találunk az *ábrához* hasonló, forgatható mászókát. Egy ilyen mászókán egy hangya mászik fel, miközben az egyenletesen forog. A felfelé kapaszkodó hangya folyamatosan azt érzi, hogy „függőlegesen fölfelé” mászik.



A mászóka köteleit tartó, piros körgyűrűk közül az alsó sugara 2 m, a felsőé 1 m, és a gyűrűk távolsága 3 m. Mekkora fordulatszámmal forog a mászóka?

(*5 pont*) Közli: *Rakovszky Andorás*, Budapest

P. 5539. Egy hosszú, merev, elhanyagolható tömegű palló n egymástól egyenlő távolságra elhelyezett, azonos direkciós erejű és azonos nyújtatlan hosszal rendelkező rugóra van felfüggesztve. Az első rugó legfeljebb K erőt tud kifejteni, a második $2K$-t, $\ldots$, az n-edik $n \cdot K$-t anélkül, hogy elszakadna. Legfeljebb mekkora tömegű testet helyezhetünk el a pallón? Hova kell helyeznünk? (Tételezzük fel, hogy a rugók alig nyúlnak meg.)

(*5 pont*) Közli: *Szentivánszki Soma*, Budapest

P. 5540. Két azonos méretű poharat szobahőmérsékletű teával töltünk meg, majd az egyiket a hűtőbe, a másikat pedig a jóval hidegebb mélyhűtőbe helyezzük. Egy perc elteltével a poharakat kicseréljük, majd egy további percig új helyükön hagyjuk, végül mindkettőt kivesszük. Melyik pohár tartalma hűl le jobban a kísérlet során? A releváns hőátadási folyamatokra alkalmazható a Newton-féle lehűlési törvény, továbbá a hőátadási tényező a hűtő, illetve a mélyhűtő esetén azonosnak tekinthető.

(*5 pont*) Dürer Verseny feladata nyomán

P. 5541. A ^{222}Rn az urán-rádium bomlási sor tagja: 3,8 napos felezési idővel alfa-bomló izotóp.

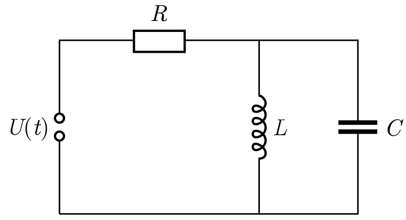
a) Ha az épp átalakuló radonmagot nyugvónak tekintjük, mekkora sebességre tesz szert a leánytermék?

b) Hány MeV az energiája a bomlás során keletkező alfa-részecskének?

Útmutatás: Az izotóptömegek táblázata megtalálható a következő oldalon: https://www.komal.hu/cikkek/atomtomegek.pdf

(*4 pont*) Közli: *Kis Tamás*, Heves

P. 5542. Egy R ellenállásból, egy L induktivitású tekercsből, egy C kapacitású kondenzátorból és egy $U(t)=U_0\sin(\omega t)$ feszültségű generátorból az *ábrán* látható egyszerű áramkört hozzuk létre.



a) Mekkora az ellenálláson átfolyó áram amplitúdója?

b) Hogyan válasszuk meg az ω körfrekvenciát ahhoz, hogy az ellenálláson ne folyjon áram?

(*5 pont*) Közli: *Németh Róbert*, Budapest

P. 5543. Borús időben egy, az égbolt felé fordított fénymérővel méréseket végzünk. Azt tapasztaljuk, hogy a felhőtakaró fényszórása miatt az egységnyi felületre beeső teljesítmény jó közelítéssel I_0 értékű, függetlenül a fénymérő irányítottságától. Egy átlátszatlan, belül kormozott, R sugarú, vékony falú gömbhéj tetején egy kicsiny r sugarú lyuk van (melynek mérete sokkal nagyobb a látható fény hullámhosszánál). Adjuk meg a szabadba helyezett gömbhéj belső felületén a megvilágítás intenzitását!

(*6 pont*) Közli: *Vigh Máté*, Biatorbágy

❄

Beküldési határidő: 2024. február 15.

Elektronikus munkafüzet: https://www.komal.hu/munkafuzet

❄

MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL FOR SECONDARY SCHOOLS
(Volume 74. No. 1. January 2024)

Problems in Mathematics

New exercises for practice – competition K (see page 27): **K. 794.** We have invested 10 0000 Euros for one year, 4000 Euros of which for an interest rate of 5% per year, and 3500 Euros of which for an interest rate of 4% per year. Find the interest rate for the remaining sum, if the total profit of our investment is 500 Euros. **K. 795.** The product of four distinct positive prime numbers is n. Find the number of different rectangular prisms that can be created using n identical little cubes. **K. 796.** Which 2D shape has the larger area? (See figure on page 27.) **K. 797.** Let us consider an isosceles right triangle with legs of length 10 cm, and let us draw three circles over the two legs and the hypotenuse as diameters. We colour one of the disks red, the other one blue and the third one green. Find the total area of those parts of the plane which are coloured with at least two colours. **K. 798.** The main door of the house of the Smiths' is 2 meters high and 1 meters wide.

Above the door at the height of 3 meters (measured from the floor) there is a horizontal canopy extending to 1 meter with the shape of a rectangle that has the same width as the door. In the middle of the edge of the canopy that is the furthest away from the door there is a lamp that emits light in all possible directions. Find the area of the part of the floor that is illuminated through the door by the lamp, when the door is completely open. (The ante-room behind the door is wide and long enough so that its floor contains the complete image of the door.)

New exercises for practice – competition C (see page 28): Exercises up to grade 10: **K/C. 797.** See the text at Exercises K. **K/C. 798.** See the text at Exercises K. **Exercises for everyone: C. 1793.** Function f defined on the real numbers satisfies the following two conditions (for all $x \in \mathbb{R}$): (1) $f(x) = f(147-x)$; (2) $f(x+100) = f(46-x)$. Find the value of $f(200) + f(201) + f(202)$, if we also know that $f(50) + f(51) + f(52) + f(53) = 2024$. (Proposed by *Katalin Abigél Kozma*, Győr) **C. 1794.** Circles k_1 and k_2 are externally tangent to each other at point A, circles k_2 and k_3 are externally tangent to each other at point B, and finally circles k_1 and k_3 are externally tangent to each other at point C. Line AB intersect circle k_3 at point D (different from B). Prove that line segments AC and CD are perpendicular to each other. (*German competition problem*) **C. 1795.** Let p be a real parameter. Find the number of solutions of the following equation as a function of p: $|x^2-6x+5| = px^2-6px+9p+4$. (Proposed by *Gergely Szmerka*, Budapest) **C. 1796.** A regular octahedron with edges of unit length is placed on the plane of one of its triangular face. Find the distance of this plane and the vertices of the octahedron that are not contained in this plane. (Proposed by *Bálint Bíró*, Eger) **C. 1797.** Find the largest integer value of x for which $x > 2$ and the values $\log_2(x)$, $\log_4(2x)$ and $\log_8(3x)$ can be the side lengths of a triangle. (Proposed by *Bálint Bíró*, Eger)

New exercises – competition B (see page 29): **B. 5358.** Find the largest number of distinct positive integers that can be chosen in a way that the sum of any two chosen integers is a perfect power of 2 (with a non-negative exponent). (*3 points*) (Proposed by *Bálint Hujter*, Budapest) **B. 5359.** *a*) Does there exist a triangle such that all of its sides have integer length, and its area is less than 1/10? *b*) Does there exist a quadrilateral such that all of its sides have integer length, and its area is less than 1/10? (*3 points*) (Proposed by *Vígh Viktor*, Sándorfalva) **B. 5360.** The largest angle of scalene triangle ABC is at vertex C. Let T denote the foot of altitude from vertex C, and let the angle bisector from vertex C intersect side AB at point F. Prove that $\frac{AT}{TB} = \left(\frac{AF}{FB}\right)^2$ if and only if $\angle ACB = 90^\circ$. (*4 points*) (Based on the idea of *Mihály Hujter*, Budapest) **B. 5361.** Let a_n denote the number of ways $2n$ can be obtained as a sum of two positive prime numbers. Is it true that sequence (a_n) will be monotonically increasing from somewhere? (*4 points*) (Proposed by *Péter Pál Pach*, Budapest) **B. 5362.** In triangle ABC it is given that $\angle BAC = 50^\circ$ and $\angle ABC = 70^\circ$. On sides AC and BC points E and D are chosen satisfying the following properties: $\angle ABE = \angle BAD = 30^\circ$. Let M denote the intersection point of line segments AD and BE. Find the magnitude of angles $\angle ACM$ and $\angle BED$. (*4 points*) (Proposed by *Sándor Róka*, Nyíregyháza) **B. 5363.** Square $ABCD$ is the base of a right square pyramid, and point E is its apex. Let F be the midpoint of lateral edge CE, and let point H be the trisection point of lateral edge BE closer to point B. Find the ratio of the volumes of the two parts created by plane AHF in pyramid $ABCDE$. (*5 points*) (Proposed by *Géza Kiss*, Csömör) **B. 5364.** We label the two sides of a coin with integers 1 and 2, and the faces of a cube with integers 1, 2, 3, 4, 5 and 6. Find all weightings of the coin and the cube in a way that tossing both will give the same probabilities for sums 2, …, 8 as two regular tetrahedrons labeled with 1, 2, 3 and 4. (Tossing a tetrahedron will result in the number appearing on the face that rests on the table; and weighting means that the weight distribution of an object can be altered in a way that it will land on its sides with different probabilities.) (*6 points*) (Proposed by *Mátyás Barczy*, Szeged and *Gábor Nyul* Debrecen) **B. 5365** Find the smallest real number α for which it is possible to find infinitely many positive integers n with the property that the difference of $\sqrt{13}\cdot n$ and the nearest integer is less than α/n. (*6 points*) (Proposed by *Ákos Somogyi*, London)

New problems – competition A (see page 30): **A. 869.** Let A and B be given real numbers. Let the sum of real numbers $0 \le x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n$ be A, and let the sum of real numbers $0 \le y_1 \le y_2 \le \ldots \le y_n$ be B. Find the largest possible value of $\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2$. (Proposed by *Péter Csikvári*, Budapest) **A. 870.** We label every edge of a simple graph with the difference of the degrees of its endpoints. If the number of vertices is N, what can be the largest value of the sum of the labels on the edges? (Proposed by *Dániel Lenger* and *Gábor Szűcs*, Budapest) **A. 871.** Let ABC be an obtuse triangle, and let H denote its orthocenter. Let ω_A denote the circle with center A and radius AH. Let ω_B and ω_C be defined in a similar way. For all points X in the plane of triangle ABC let circle $\Omega(X)$ be defined in the following way (if possible): take the polars of point X with respect to circles ω_A, ω_B and ω_C, and let $\Omega(X)$ be the circumcircle of the triangle defined by these three lines. With a possible exception of finitely many points find the locus of points X for which point X lies on circle $\Omega(X)$. (Proposed by *Vilmos Molnár-Szabó*, Budapest)

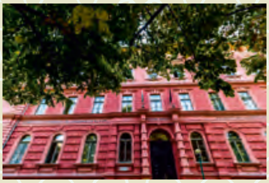
Problems in Physics

(see page 58)

M. 428. Measure how much power is required to heat water in a microwave oven. What can this value depend on?

G. 837. Consider the liquid and gaseous phases of water at 100 °C and at atmospheric pressure. On average, how many times farther apart are the centres of adjacent water molecules in the vapour phase than in the liquid phase? **G. 838.** In the photo, taken from a drone, and shown below, people walk on the level ground along the riverbank of Rio Grande at the border between Mexico and the United States. Estimate how high the Sun was when the photo was taken. **G. 839.** Two motorcycles are travelling behind each other at a speed of 30 m/s on a racetrack, the distance between them is 23 m, and the length of the motorcycles is 2 m. At some point, the motorcyclist at the back starts overtaking the other, he accelerates at 1 m/s^2 until he is 23 m ahead the other, and then continues at a constant speed. At the moment he finishes overtaking, the other rider starts overtaking him at an acceleration of 1 m/s^2, which he also finishes 23 m ahead the other motorcyclist. What are the speeds of the motorcyclists after this double overtaking? **G. 840.** What is the minimum speed of a room-temperature lead ball at which it must hit a wall in order that it melts? Assume that half of the heat released during the inelastic collision heats the wall and half heats the lead ball.

P. 5535. The surface of a 2 m^2 shade sail is nearly horizontal. Suddenly, it starts raining at a steady pace. There is a small hole in the middle of the sail through which the rainwater flows off. A cylindrical container, which has a hole of cross section 5 mm^2 at its bottom, is placed under the jet of water. The rise of the water level in the container stops at 20 cm. Determine how many mm of precipitation fell during the 10 minutes of rain. **P. 5536.** In a football match, a free kick is taken from a point P at a distance d from the goal. Point P is on the perpendicular bisector of the goal line. The player kicks the ball at an angle of α just towards the centre of the upper goalpost, but after a time t_1 it falls to the ground in the middle of the goal line. The kick has to be repeated for some reason. The second time, the player kicks the ball harder, at an angle of 2α, and after t_2 it hits the middle of the top goalpost. (The size of the goal is slightly different from the regular size of a goal.) *a*) What was the angle α? *b*) What was the distance d? *c*) What were the initial speeds of the ball at the first and at the second kick? (Consider the ball as a point-like body and neglect air resistance.) *Data:* $t_1 = 1.90$ s, $t_2 = 1.93$ s, $g = 9.81\ \mathrm{m/s^2}$. **P. 5537.** In an adventure park, adventurers can roll down freely (without brakes) in a small car from point A, which is at the top of a $R = 20$ m high slope. The slope has an $\alpha = 30^\circ$ inclination angle, the car's initial speed is zero. The slope is connected smoothly to a circular arc-shaped track of radius R at point B, then the track continues horizontally from its lowest point C. On the horizontal part of the track, the car is properly braked, decelerates uniformly in time, and stops at D after covering a distance of $\ell = 2R$. Calculate how many times the their normal weight do the passengers in the car feel during the motion. Graph this ratio as a function of the travelled distance. **P. 5538.** In many playgrounds you will find a rotating climbing frame similar to the one *in the figure*. On such a climbing frame, an ant climbs up while the frame is rotating uniformly. The upward climbing ant constantly feels that it is climbing "vertically upwards". The radius of the lower red circular ring that hold the ropes of the climbing frame is 2 m, whilst the upper red ring has a radius of 1 m. The distance between the rings is 3 m. What is the angular speed of the climbing frame? **P. 5539.** A long, rigid plank of negligible mass is suspended by n equally spaced springs of the same spring constants, and the same unstretched lengths. The first spring can exert a maximum force of K, the second can exert a maximum force of $2K$, $\ldots$, the n^{th} a force of $n \cdot K$ without breaking. What is the maximum mass of a body that can be placed on the plank? Where should it be placed? (Assume that the springs are barely stretched.) **P. 5540.** Two glasses, which have the same size are filled with room-temperature tea, then one of them is placed into the refrigerator, and the other into the much colder freezer. After a minute elapsed, the glasses are swapped, and left in their new places for a further minute and then both are removed. The content of which glass will cool down more during the experiment? Newton's law of cooling can be applied to the relevant heat transfer processes, and the heat transfer coefficient can be considered to be the same for the refrigerator and the freezer. **P. 5541.** ^{222}Rn is a member of the uranium-radium decay series: it is an alpha decaying isotope with a half-life of 3.8 days. *a*) If the radon nucleus in transition is assumed to be at rest, what is the speed of its daughter product? *b*) What is the energy of the alpha particle produced in the decay in MeV? *Hint:* See the isotopic masses at `https://www.komal.hu/cikkek/atomtomegek.pdf` **P. 5542.** From a resistor of resistance R, a coil of inductance L, a capacitor of capacitance C and a generator with voltage $U(t) = U_0 \sin(\omega t)$ we build the simple circuit shown in the figure. *a*) What is the amplitude of the current flowing through the resistor? *b*) How should we choose the angular frequency ω in order that no current should flow through the resistor? **P. 5543.** In cloudy weather, measurements are taken with a light meter pointed towards the sky. We find that, due to the scattering of light by the clouds, the incident power per unit area is approximately I_0, regardless of the orientation of the light meter. On top of an opaque thin-walled spherical shell of radius R, there is a small hole of radius r (much larger than the wavelength of visible light). The inner side of the wall of the spherical shell is coated with soot. Give the intensity of illumination on the inner surface of the shell, which is placed in the open air.



SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM

BOLYAI INTÉZET

http://www.math.u-szeged.hu
studentinfo@math.u-szeged.hu

A Szegedi Tudományegyetem Bolyai Intézete 1921 óta a matematika oktatásának és kutatásának jelentős európai centruma. Szeged az egyik legjobbnak tartott egyetemi város – nemcsak hazai mércével mérve –, kulturális és szellemi központ. A Bolyai Intézet tantermei egy modern, hallgatóbarát, akadálymentesített épületben találhatók.

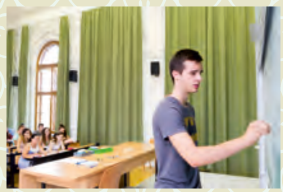
Államilag finanszírozott képzéseink

Matematika BSc (Alapképzés)

A felsőfokú matematikai végzettség számos állás betöltésének feltétele. Alapképzésünk olyan diplomát nyújt, amely egyrészt könnyű elhelyezkedést tesz lehetővé a munkaerőpiacon, másrészt kiváló lehetőséget teremt magasabb fokú egyetemi tanulmányokhoz, itthon és külföldön egyaránt. Államilag finanszírozott hat féléves képzésünk három félév közös alapozással kezdődik. Ezt követően a hallgatók az alábbi ötféle lehetőség közül választhatnak érdeklődési körük és további terveik szerint (Alkalmazott matematikus specializáció, Gazdasági specializáció, Informatikai specializáció, Matematikus specializáció, Specializáció nélküli képzés).

Tanárképzés

A képzés során középiskolai, illetve általános iskolai kétszakos tanárokat képezünk. A matematika mellé másik szak a Szegedi Tudományegyetem kínálatából választható. Szegeden a matematikatanár képzésnek nagyon nagy hagyománya van. Az itt végzett matematikatanárok jelenleg is a közoktatás, ezen belül a matematikatanítás meghatározó és mértékadó szereplői országszerte.



Alkalmazott matematikus MSc (Mesterszak)

Az itt szerzett mesterszakos diploma birtokosát karrierlehetőségek várják mind a versenyszférában, mind a tudományos pályán, elsősorban azokon a területeken, ahol a matematika alkalmazásainak magas szintű használata szükséges konkrét gyakorlati problémák megoldásához (Alkalmazott analízis specializáció, Műszaki matematika specializáció, Pénzügy-matematika specializáció, Adattudomány specializáció (2024-től tervezett)).

Matematikus MSc (Mesterszak)

E mesterképzésben diplomát szerzett matematikusok biztosítják majd zömében a szakember-utánpótlást a hazai felsőoktatásban és kutatásban.

Doktori képzés

A tudományos fokozatot szerezni szándékozók az SZTE Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskolájában is folytathatják tanulmányaikat, ahol a doktori képzés után megszerezhetik a doktori (PhD) fokozatot.

C. Neményi Eszter
matematika

Dr. Kosztolányi József
matematika

Punyiné
Kandrács Erzsébet
fizika

Tófalusi Péter
fizika

Rátz Tanár Úr Életműdíj 2023

Lovasi Ildikó
kémia

Dr. Petz Andrea
kémia

Csombóné
Szaniszló Margit
biológia

Gergely Tibor
biológia

Petőfi Kulturális Ügynökség
Nemzeti Együttműködési Alap
nka Nemzeti Kulturális Alap
Bethlen Gábor Alapkezelő Zrt.
Miniszterelnökség