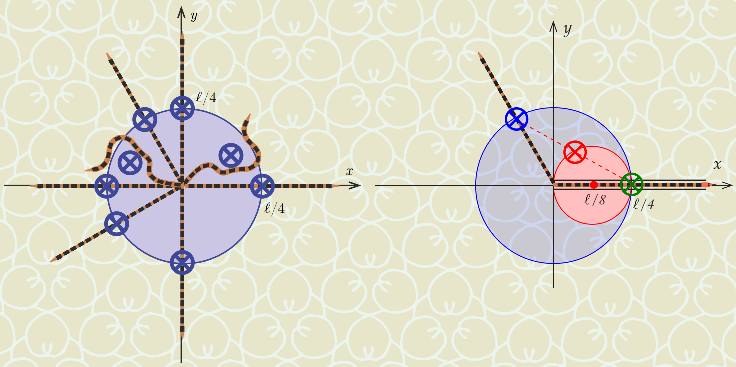
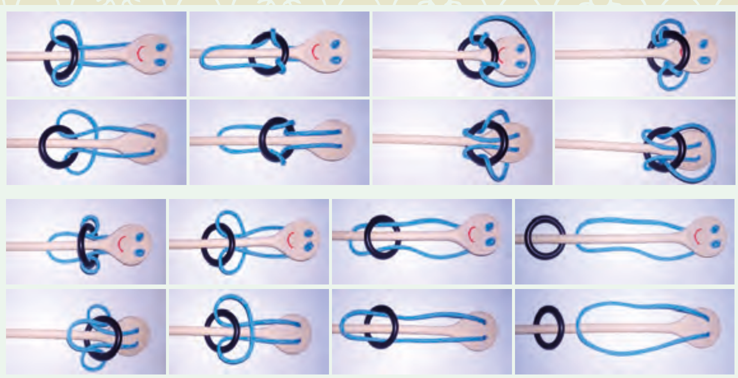
Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok

Informatika rovattal



A csőbe szorult kígyó kétségbeesett tekergőzése a G. 824-es feladatban



Képek a januári ördöglakat feladvány megoldásához

Beszámoló a 2023. évi Kürschák József matematika versenyről | Felkészítő emelt szintű érettségire | Matematika feladatok megoldásai | Mérési feladat megoldása | Képek speciális felfüggesztései

KöMaL

74. évfolyam
2. szám
2024.
február

Képek a 2023. évi Kürschák József Matematikai Tanulóversenynek a Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézetben tartott eredményhirdetéséről

Fleiner Tamás, a Versenybizottság elnöke

II. díj **Móricz Benjamin**, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Ált. isk és Gimn. érettségizett tanulója

III. díj **Szakács Ábel**, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Ált. isk és Gimn. 10. osztályos tanulója

III. díj **Varga Boldizsár**, a Békásmegyeri Veres Péter Gimn. 11. osztályos tanulója

A KöMaL támogatói
Nemzeti Tehetség Program
Nemzeti Kulturális Támogatáskezelő
Kulturális és Innovációs Minisztérium

KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK
INFORMATIKA ROVATTAL BŐVÍTVE

ALAPÍTOTTA: **ARANY DÁNIEL** 1894-ben

74. évfolyam 2. szám — Budapest, 2024. február

Megjelenik évente 9 számban, januártól májusig és szeptembertől decemberig havonta 64 oldalon. ÁRA: 1250 Ft

TARTALOMJEGYZÉK

Főszerkesztő: KORÁNDI JÓZSEF
Fizikus szerkesztő: VANKÓ PÉTER
Műszaki szerkesztő: FRIED KATALIN
Borító: BURGHARDT ZSUZSA
Kiadja: MATFUND ALAPÍTVÁNY
Alapítványi képviselő: KÓS RITA
Felelős kiadó: KATONA GYULA
Nyomda: OOK-PRESS Kft.
Felelős vezető: SZATHMÁRY ATTILA
INDEX: 25 450 ISSN 1215-9247

A szerkesztőség címe: 1117 Budapest,
Pázmány Péter sétány 1/C III. emelet 3.405.
Telefon: + 36 20 320-1143

A lap megrendelhető az Interneten:
`www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.h.shtml`.
Előfizetési díj egy évre: 10 400 Ft

E-mail: `szerk@komal.hu`
Internet: `http://www.komal.hu`

This journal can be ordered from the Editorial office:
Pázmány Péter sétány 1/C III. emelet 3.405.
1117–Budapest, Hungary
telephone: +36 20 320-1143
or on the Postal address
H–1518 Budapest 112, P.O.B. 32, Hungary,
or on the Internet:
`www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.h.shtml`.

Jelentés a 2023. évi Kürschák József Matematikai Tanulóversenyről

A Bolyai János Matematikai Társulat a 2023. évi Kürschák József Matematikai Tanulóversenyt október 6-án, közép-európai idő szerint 14 órai kezdettel rendezte meg a következő tizenkét helyszínen: Budapest, Cambridge, Debrecen, Kaposvár, Kecskemét, Miskolc, Nyíregyháza, Pécs, Szeged, Székesfehérvár, Tatabánya és Zalaegerszeg.

A Társulat elnöksége a verseny lebonyolítására az alábbi bizottságot kérte fel: Biró András, Fleiner Tamás (elnök), Frenkel Péter, Harangi Viktor, Kós Géza, Kovács Benedek, Maga Péter, Pach Péter Pál és Tóth Géza. A bizottság szeptember 20-i ülésén a következő feladatokat tűzte ki:

1. *Legyen* $f(x)=\sum_{i=0}^{d} a_i x^i$, *ahol* $d\geq 1$, *az* $a_0, \ldots, a_d$ *együtthatók nemnegatív egészek,* $a_d>0$. *Igazoljuk, hogy végtelen sok olyan* n *pozitív egész szám van, amelyre* $f(n)$ *az* $f(2), f(3), \ldots, f(n-1)$ *számok egyikével sem osztható.*

2. *Legyen* n *pozitív egész szám. Nevezzük* csúcs*nak a síkbeli derékszögű koordinátarendszer azon pontjait, amelyeknek mindkét koordinátája az* $1, 2, \ldots, n$ *számok közül kerül ki. Nevezzük* él*nek azon egységnyi hosszúságú szakaszokat, amelyeknek mindkét végpontja csúcs. Néhány élt pirosra színeztünk úgy, hogy bármely két különböző csúcs között pontosan egy piros töröttvonal vezessen. Az* f *piros él* fontos *az* e *él számára, ha az* e *két végpontját összekötő piros töröttvonal áthalad* f*-en. Bizonyítandó, hogy van olyan piros él, amely legalább* n *él számára fontos.*

3. *Adott egy* $ABCDE$ *konvex húrötszög és egy belső* P *pontja úgy, hogy* $AB=AE=AP$ *és* $BC=CE$. *Az* AD *és* BE *egyenesek metszéspontja* Q. *Az* R *és* S *pontok a* CP, *illetve a* BP *szakaszokon fekszenek úgy hogy* $DR=QR$ *és* $SR \parallel BC$. *Mutassuk meg, hogy a* BEP *és* PQS *körök érintik egymást.*

A bizottság a beérkezett dolgozatok átnézése után, december 6-i ülésén a következő jelentést fogadta el:

„A verseny minden helyszínen rendben zajlott le, 116 regisztrált versenyzőtől összesen 90 dolgozat érkezett be.

Az idei versenyen 14-en oldották meg (esetleg kisebb hiányossággal) az első feladatot. A második feladat esetén 7-en értek el hasonló eredményt, és további 8 versenyzőnek van értékelhető részeredménye. A harmadik feladat bizonyult a legnehezebbnek: erre mindössze egyetlenegy helyes megoldás érkezett, további két versenyző pedig jó irányba indult, de elakadt.

Egy versenyző helyesen oldotta meg az első és a harmadik feladatot, a másodikra adott megoldása pedig lényegében helyes. Ezért

I. díjat és 60 000 Ft pénzjutalmat nyer

Molnár-Szabó Vilmos, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium érettségizett tanulója (tanárai Dobos Sándor, Fazakas Tünde, Ádám Réka, Hujter Bálint, Bán-Szabó Áron, Szűcs Gábor, Fey Dávid és Seres-Szabó Márton).

Két versenyző oldotta meg helyesen az első két feladatot. Ezért a teljesítményért

II. díjban és fejenként 30 000 Ft pénzjutalomban részesül

Móricz Benjamin, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium érettségizett tanulója (tanárai Dobos Sándor, Fazakas Tünde, Ádám Réka és Hujter Bálint) és

Szakács Ábel, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 10. osztályos tanulója (tanárai Hujter Bálint, Kiss Géza és Terpai Tamás).

Egy versenyző az első feladat helyes megoldása mellett javítható hibától eltekintve megoldotta a második feladatot is. Ennek megfelelően

III. díjat és 20 000 Ft pénzjutalmat kap

Varga Boldizsár, a Békásmegyeri Veres Péter Gimnázium 11. osztályos tanulója (tanára Holló Gábor).

Egy versenyző megoldotta az első feladatot, és a második feladatra olyan javítható megoldást adott, amiből lényeges elemek hiányoznak. Ez alapján

1. dicsérettel és 10 000 Ft pénzjutalommal díjazzuk

Czanik Pált, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 11. osztályos tanulóját (tanárai Lenger Dániel és Kocsis Szilveszter).

Végül három versenyző az első feladatra adott helyes megoldás mellett érdemi részeredményt ért el a második vagy harmadik feladatban. Így

2. dicsérettel jutalmazzuk

Bognár András Károlyt, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium érettségizett tanulóját (tanárai Ádám Réka, Dobos Sándor, Fazakas Tünde, Hujter Bálint és Rubóczky György),

Forrai Boldizsárt, az SZTE Gyakorló Gimnázium és Általános Iskola 10. osztályos tanulóját (tanárai Matos Zoltán és Torma Bence), valamint

Tarján Bernátot, a Békásmegyeri Veres Péter Gimnázium 12. osztályos tanulóját (tanárai Holló Gábor, Dobos Sándor és Nagy Zoltán Lóránt).

A versenybizottság ezúton köszöni meg minden versenyző, felkészítő tanár és a lebonyolításban közreműködő kolléga munkáját, a díjazottaknak pedig további sikereket kívánva gratulál.”

Fleiner Tamás

A 2023. évi Kürschák József Matematikai Tanulóverseny feladatainak megoldásai

1. *Legyen* $f(x)=\sum_{i=0}^{d} a_i x^i$*, ahol* $d \geq 1$*, az* $a_0, \ldots, a_d$ *együtthatók nemnegatív egészek,* $a_d>0$*. Igazoljuk, hogy végtelen sok olyan* n *pozitív egész szám van, amelyre* $f(n)$ *az* $f(2), f(3), \ldots, f(n-1)$ *számok egyikével sem osztható.*

A megoldás során az alábbi segédtételt is felhasználjuk.

Lemma. Ha $f=\sum_{i=0}^{d} a_i x^i$ egész együtthatós polinom és $n \equiv k \pmod{m}$, akkor $f(n) \equiv f(k) \pmod{m}$.

A Lemma bizonyítása. Az ismert azonosság szerint

$$n^i-k^i=(n-k)(n^{i-1}+n^{i-2}k+\ldots+nk^{i-2}+k^{i-1}),$$

ezért ha n és k egészek, akkor $n-k \mid n^i-k^i$ teljesül minden pozitív egész i-re. Következésképp $n-k \mid \sum_{i=0}^{d} a_i(n^i-k^i)=f(n)-f(k)$. Ha tehát $m \mid n-k$, akkor $m \mid f(n)-f(k)$ is fennáll, és nekünk pontosan ezt kellett igazolnunk. $\square$

Az 1. feladat megoldása. Nevezzük a $p \geq 2$ egész számot f-prímnek, ha nincs olyan $2 \leq k<p$ egész szám, amelyre $f(k) \mid f(p)$. Például $p=2$ triviálisan f-prím. Azt kell bizonyítanunk, hogy végtelen sok f-prím létezik. Ezt a végtelen sok prím létezésére vonatkozó, Euklidész-féle bizonyítás mintájára tehetjük meg.

Ha $n \geq 2$ egész, akkor van olyan p f-prím, amelyre $f(p) \mid f(n)$. Ha ugyanis az n szám f-prím, akkor $p=n$ megfelelő. Ha n nem f-prím, akkor van olyan $2 \leq$ $\leq k<n$, amelyre $f(k) \mid f(n)$. Ha p a legkisebb ilyen tulajdonságú k szám, akkor p olyan f-prím, amelyre $f(p) \mid f(n)$.

Elég megmutatni, hogy tetszőleges $p_1, \ldots, p_r$ f-prímek esetén létezik tőlük különböző f-prím. Legyen $n=1+\prod_{i=1}^{r} f(p_i)$ és p_j az imént felsorolt f-prímek bármelyike. Ekkor $n \equiv 1 \pmod{f(p_j)}$, ezért a fenti Lemma miatt $f(n) \equiv f(1) \pmod{f(p_j)}$. Mivel az f polinom az $x \geq 0$ félegyenesen szigorúan monoton növekedő, ezért $0<a_d \leq \sum_{i=0}^{d} a_i=f(1)<f(p_j)$, tehát $f(1) \not\equiv 0 \pmod{f(p_j)}$, és így $f(p_j) \nmid f(n)$. Láttuk, hogy van olyan p f-prím, amelyre $f(p) \mid f(n)$. A legutolsó megállapításunk miatt ekkor p különbözik a $p_1, \ldots, p_r$ f-prímek mindegyikétől. Ezzel a bizonyítást befejeztük. $\square$

Holló Martin és Németh Márton másik utat talált a megoldáshoz, mégpedig a polinom egész helyeken felvett értékei legnagyobb közös osztójának segítségével. Az itt közölt gondolatmenet a számelmélet alaptétele mellett azt is felhasználja, hogy a prímek száma végtelen. A módszerrel a feladat állításának alábbi általánosítása is igazolható.

Állítás. Tegyük fel, hogy $f(x)=\sum_{i=0}^{d} a_i x^i$ egész együtthatós polinom, és K olyan küszöb, hogy $n>K$ esetén $f(n) \neq \pm D$, ahol D az $\{f(n)\colon n \in \mathbb{Z}\}$ halmaz elemeinek legnagyobb közös osztója. Ekkor végtelen sok olyan $n>K$ egész szám létezik, amelyre $f(n)$ nem osztható az $f(K+1), f(K+2), \ldots, f(n-1)$ helyettesítési értékek egyikével sem.

Világos, hogy a versenyen kitűzött feladatban szereplő f polinomra $D \leq f(1) < < f(2) < \ldots$ miatt $K = 1$ választás mellett fennállnak a fenti állításban megkívánt feltevések.

Bizonyítás. Tetszőleges i pozitív egészre jelölje p_i a prímek 2, 3, 5, 7, ... sorozatának i-edik tagját, és legyen D kanonikus alakjában a p_i prím kitevője h_i. (Tehát ha $p_i \nmid D$, akkor $h_i = 0$.) A D definíciója miatt minden pozitív egész i-hez van olyan n_i egész szám, amelyre $p_i^{h_i+1} \nmid f(n_i)$.

A kínai maradéktétel szerint minden pozitív egész j-re van olyan k_j egész szám, amelyre minden $i \leq j$ esetén $k_j \equiv n_i \pmod{p_i^{h_i+1}}$ áll. Sőt: az ilyen tulajdonságú egész számok egyetlen maradékosztályt alkotnak modulo $p_1^{h_1+1} \cdot p_2^{h_2+1} \cdot \ldots \cdot p_j^{h_j+1}$. Az imént definiált k_j tehát választható K-nál nagyobbnak.

A fenti Lemma miatt $f(k_j) \equiv f(n_i) \mod p_i^{h_i+1}$, így $p_i^{h_i+1} \nmid f(k_j)$ minden $1 \leq i \leq j$ egészre. Jelölje q_j a legkisebb olyan K-nál nagyobb egész számot, amelyre $p_i^{h_i+1} \nmid f(q_j)$ teljesül minden $1 \leq i \leq j$ egészre. Mivel k_j rendelkezik a q_j-től elvárt oszthatósági tulajdonsággal, ezért q_j jól definiált.

Legyen n egy K és q_j közötti egész szám. A D definíciója és a K választása miatt $f(n) = r \cdot D$, ahol $|r| \neq 1$. Ha r-nek nem volna a $p_1, \ldots, p_j$ prímek között osztója, akkor az ellentmondana q_j választásának. Van tehát olyan $1 \leq i \leq j$, amelyre $p_i \mid r$, azaz amelyre $p_i^{h_i+1} \mid f(n)$. Mivel $p_i^{h_i+1} \nmid f(q_j)$, ezért minden $K < n < q_j$ esetén $f(n) \nmid f(q_i)$ teljesül. Azt kaptuk tehát, hogy a q_1, q_2, ... számok mindegyike rendelkezik az Állításban elvárt tulajdonsággal.

A bizonyítás befejezéséhez már csak azt kell megmutatni, hogy a $\{q_1, q_2, \ldots\}$ halmaz végtelen. Ennek érdekében azt igazoljuk, hogy bármely N egészhez található olyan q_j, amelyre $|f(q_j)| > N$. Ekkor ugyanis az $f(q_j)$ értékek végtelen sokfélék lesznek, így a q_j-k is végtelen sokan vannak. Figyeljük meg, hogy q_j választása, $D \mid f(q_j)$ és $D < |f(q_j)|$ miatt $f(q_j)$-nek van p_j-nél nagyobb prímosztója. Ha tehát $p_j > N$, akkor $|f(q_j)| \geq p_j > N$, nekünk pedig pontosan erre van szükségünk a bizonyítás befejezéséhez. $\square$

2. *Legyen n pozitív egész szám. Nevezzük* csúcs*nak a síkbeli derékszögű koordinátarendszer azon pontjait, amelyeknek mindkét koordinátája az 1, 2, ..., n számok közül kerül ki. Nevezzük* él*nek azon egységnyi hosszúságú szakaszokat, amelyeknek mindkét végpontja csúcs. Néhány élt pirosra színeztünk úgy, hogy bármely két különböző csúcs között pontosan egy piros töröttvonal vezessen. Az f piros él* fontos *az e él számára, ha az e két végpontját összekötő piros töröttvonal áthalad f-en. Bizonyítandó, hogy van olyan piros él, amely legalább n él számára fontos.*

Megjegyzés. Az alább közölt megoldások során az $n > 1$ feltevéssel élünk, ugyanis a feladatban szereplő állítás $n = 1$ esetén nem igaz. Sajnos a feladat pontatlanul lett kitűzve.

I. megoldás a 2. feladatra. Tekintsük az $A = (1, 1)$, $B = (n, 1)$, $C = (n, n)$ és $D = (1, n)$ csúcsokhoz a piros élekből álló AC és BD töröttvonalakat. Mivel B és D a piros AC töröttvonal két ellentétes oldalára esik, ezért a piros AC és BD töröttvonalaknak találkozniuk kell, így bizonyosan van legalább egy közös csúcsuk.

Ha P és Q ilyen közös csúcsok, akkor a piros AC és a BD töröttvonalak mindegyike tartalmaz egy piros PQ töröttvonalat is. A piros PQ töröttvonal egyértelműségéből az következik, hogy a piros AC, illetve BD töröttvonalak mindegyike ugyanazt a piros PQ töröttvonalat tartalmazza. Ez pedig azt jelenti, hogy a piros AC és BD töröttvonalak metszete egyetlenegy piros töröttvonal, ami – mondjuk – egy X és egy Y csúcsot köt össze.

Ha $X \neq Y$, akkor legyen f a piros XY töröttvonal egy éle. Azt állítjuk, hogy f legalább n él számára fontos.

Ha egy csúcsból A-ba és C-be is vezetne f-et nem tartalmazó töröttvonal, akkor A és C között is lenne f-et nem tartalmazó töröttvonal, ami lehetetlen. Hasonlóan, ha egy csúcsból az A-ba és C-be vezető töröttvonal is tartalmazná f-et, akkor is lenne A és C között f-et nem tartalmazó töröttvonal. Tehát minden csúcsból az A-ba és C-be vezető egyértelmű töröttvonalak egyike tartalmazza f-et, a másik nem.

Színezzük kékre azokat a csúcsokat, ahonnan A-ba, sárgára pedig azokat a csúcsokat, ahonnan C-be vezet f-et nem tartalmazó piros töröttvonal. Vegyük észre, hogy ha egy e él egyik végpontja kék, a másik pedig sárga, akkor e számára fontos az f él, ugyanis ellenkező esetben vezetne A és C között az f élt elkerülő piros töröttvonal.

Ha a most definiált színezésben a B és D csúcsok azonos színűek lennének, akkor mindkét csúcsból vezetne egy-egy f élt elkerülő piros töröttvonal vagy az A vagy a C csúcsba, ezért vezetne B és D között is egy f élt nem használó piros töröttvonal. Tudjuk azonban, hogy az f él rajta van a B-t D-vel összekötő egyetlen piros töröttvonalon, ezért a B és D csúcsok közül az egyik kék, a másik pedig sárga.

Ha B kék, akkor van egy f-et elkerülő piros AB töröttvonal, és ezért az $(i,1)$ csúcs kék minden $1 \leq i \leq n$ esetén. Hasonlóan, az f-et elkerülő piros CD töröttvonal miatt az (i,n) csúcs minden $1 \leq i \leq n$ esetén sárga. Ezért minden ilyen i-re van olyan $1 \leq j < n$, amelyre az (i,j) csúcs kék, az $(i,j+1)$ csúcs pedig sárga. Láttuk, hogy az e két csúcsot összekötő él számára az f él fontos. Mivel $1 \leq i \leq n$ tetszőleges lehet, találtunk n olyan élt, amelyik számára az f él fontos.

Hasonlóan, ha B sárga és D kék, akkor minden $1 \leq i \leq n$ esetén az $(1,i)$ csúcs kék, az (n,i) csúcs pedig sárga. Így aztán minden $1 \leq i \leq n$ esetén van olyan $1 \leq j < n$, amelyre a (j,i) csúcs kék, a $(j+1,i)$ csúcs pedig sárga. Ezért az ezen csúcsokat összekötő él számára az f él fontos, és mivel az i-t n-féleképp választhatjuk, ismét találtunk n olyan élt, amelyik számára f fontos.

Végül az $X=Y=(a,b)$ eset marad. Az ábra esetleges elforgatásával elérhető, hogy $a \geq \frac{n+1}{2}$ és $b \geq \frac{n+1}{2}$ legyen. Mi annyit fogunk ebből használni, hogy $a+b \geq n+1$. Legyen f az XA piros töröttvonal első (X-re illeszkedő) éle, és legyen $X'=(a',b')$ az f él X-től különböző végpontja. Világos, hogy $a'+b' \geq a+b-1 \geq n+1-1=n$.

Színezzük kékre most azokat a csúcsokat, amelyekből található A-ba piros élekből álló, f-et nem tartalmazó töröttvonal, és legyen minden más csúcs sárga. Ekkor minden $1 \leq i \leq a'$ esetén az $x=i$ egyenes kék csúcsban metszi az $X'A$ piros töröttvonalat és sárga csúcsban metszi az XD piros töröttvonalat. Ezért az $x=i$

egyenesen van olyan függőleges él, amelyiknek az egyik csúcsa kék, a másik pedig sárga. Láttuk, hogy ezen élek mindegyike számára fontos az f él. Hasonlóan, minden $1 \leq j \leq b'$ esetén az $y = j$ egyenes kék csúcsban metszi az $X'A$ piros töröttvonalat és sárga csúcsban metszi az XB piros töröttvonalat. Ezért az $y = j$ egyenesen van olyan vízszintes él, amelyiknek az egyik csúcsa kék, a másik pedig sárga, és persze minden ilyen él számára is fontos az f él. Azt kaptuk, hogy az f él legalább a' függőleges és legalább b' vízszintes él számára fontos. A feladatbeli állítás a korábban látott $a' + b' \geq n$ megfigyelésből közvetlenül adódik. □

II. megoldás a 2. feladatra. A gráfelméletben használt terminológiát segítségül hívva bemutatunk egy másik lehetséges bizonyítást is. Legyen G a feladatban definiált csúcsok és élek alkotta gráf. Világos, hogy a piros élek a G gráf egy F feszítőfáját határozzák meg, továbbá, hogy az F fa egy f éle a G gráf e éle számára akkor fontos, ha e végpontjai az $F - f$ különböző komponenseibe esnek.

Irányítsuk F minden e élét úgy, hogy e az $F - e$ több csúcsot tartalmazó komponense felé mutasson; ha $F - e$ mindkét komponense pontosan $\frac{n^2}{2}$ csúcsot tartalmaz, akkor e-t nem irányítjuk. Tekintsük F egy tetszőleges v csúcsát, és induljunk el v-ből az imént irányított élek irányítását követve. Mivel F körmentes, ezért ilyen módon nem juthatunk el olyan csúcsba, ahol korábban már jártunk. A $V(F)$ csúcshalmaz végessége folytán előbb-utóbb tehát olyan u csúcsba érkezünk, ahonnan nem tudunk tovább lépni, azaz u-ból nem lép ki irányított él. Az u csúcsra illeszkedő legfeljebb 4 él mindegyikénél vizsgáljuk meg, hogy az adott él elhagyása után hány csúcsa van az u-t nem tartalmazó komponensnek. A kapott értékek összege az F fa u-tól különböző csúcsainak száma, azaz $n^2 - 1$. A skatulyaelv miatt illeszkedik tehát u-ra olyan f él, amelyre az $F - f$ gráf u-t nem tartalmazó komponense legalább $\frac{n^2-1}{4}$ csúcsot tartalmaz. Ráadásul $(F - f)$-nek az u-t tartalmazó komponense legalább $\frac{n^2}{2}$ csúcsú, mivel az f él vagy u-ba van irányítva vagy irányítatlan. Az így konstruált f élről a továbbiakban csupán annyit fogunk felhasználni, hogy $F - f$ mindkét komponensének legalább $\frac{n^2-1}{4}$ csúcsa van.

Színezzük zöldre a $G - f$ gráf egyik komponensének, fehérre pedig a másik komponensének a csúcsait. A célunk annak igazolása, hogy G-nek legalább n olyan éle van, amely zöld csúcsot fehér csúccsal köt össze.

Vizsgáljuk meg, hogy a zöld, illetve fehér csúcsok első és második koordinátái hányfélék lehetnek. Figyeljük meg, hogy ha nincs olyan zöld csúcs, amelyiknek az első koordinátája j, akkor minden olyan csúcs fehér, amelyiknek j az első koordinátája, és ezért a fehér csúcsok második koordinátái minden lehetséges 1 és n közötti értéket felvesznek. Ha tehát a zöld csúcsok második koordinátái n-féle értéket vehetnek fel, de az első koordinátáik nem lehetnek n-félék, akkor a fehér csúcsok második koordinátái szintén n-félék lehetnek. Ebből az következik, hogy a csúcsok által meghatározott minden vízszintes egyenes tartalmaz zöld és fehér csúcsot összekötő élt. Az így kapott n él mindegyike számára fontos az f él.

Hasonló módon fejezhető be a bizonyítás, ha a zöld és fehér színek valamelyikére igaz, hogy az ezen színre színezett csúcsok egyik koordinátája n-féle lehet, a másik pedig n-nél kevesebb értéket vehet fel. Ha pedig ez a tulajdonság a két szín egyikére sem teljesül, akkor van olyan szín (mondjuk a fehér), hogy a fehérre színezett csúcsok első és második koordinátái is n-félék lehetnek. Tegyük fel, hogy ekkor a zöld csúcsok első koordinátái k-félék, a másodikak pedig ℓ-félék lehetnek. A zöld csúcsok száma ekkor legfeljebb $k \cdot \ell$. A zöld és fehér csúcsokat összekötő élek között van legalább k függőleges és legalább ℓ vízszintes, hiszen minden zöld csúcsra illeszkedő vízszintes és függőleges egyenesen kell lennie ilyen élnek. A számtani és mértani közép közti összefüggés és a zöld csúcsok számáról tett korábbi megfigyelés miatt

$$\frac{n^2-1}{4} \leq k \cdot \ell \leq \left(\frac{k+\ell}{2}\right)^2,$$

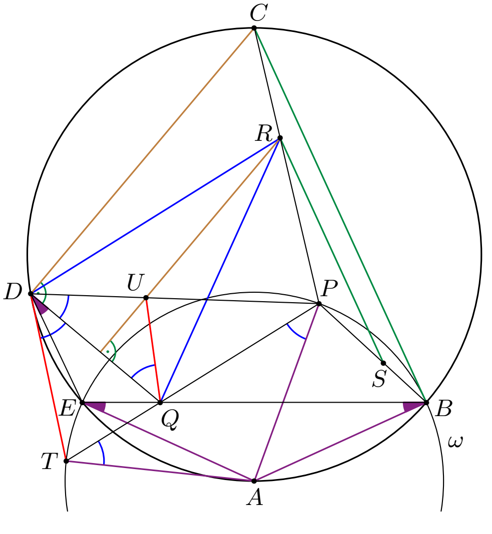
ahonnan $k+\ell \geq \sqrt{n^2-1} > \sqrt{n^2-2n+1} = n-1$ adódik. Innen $k+\ell \geq n$, így a zöld és fehér csúcsot összekötő élek száma ebben az esetben sem lehet n-nél kevesebb. $\square$

Megjegyzés. A 2. feladat állítása nem élesíthető abban az értelemben, hogy nem biztos, hogy olyan piros él is van, amelyik $n+1$ él számára fontos. Ha például $n = 2k-1$ páratlan, és a piros élek halmaza $P_v \cup P_f$, ahol

$$\begin{aligned} P_v &= \{(x,y)(x+1,y)\colon 0 < x < k, 1 < y \leq k\} \cup \\ &\qquad \cup \{(x,y)(x+1,y)\colon k \leq x < 2k-1, k \leq y < 2k-1\}, \\ P_f &= \{(x,y)(x,y+1)\colon 1 < x \leq k \leq y < 2k-1\} \cup \\ &\qquad \cup \{(x,y)(x,y+1)\colon 0 < y < k \leq x < 2k-1\}, \end{aligned}$$

akkor a (k,k) csúcsra illeszkedő 4 piros él pontosan n él számára, minden más piros él pedig n-nél kevesebb él számára fontos. Ha $n = 2k$ páros, akkor ennek a konstrukciónak alkalmas módosításával megadható az élek olyan pirosra színezése, amelyik mindössze három olyan piros élt tartalmaz, amelyik n él számára fontos.

3. *Adott egy $ABCDE$ konvex húrötszög és egy belső P pontja úgy, hogy $AB = AE = AP$ és $BC = CE$. Az AD és BE egyenesek metszéspontja Q. Az R és S pontok a CP, illetve a BP szakaszokon fekszenek úgy hogy $DR = QR$ és $SR \parallel BC$. Mutassuk meg, hogy a BEP és PQS körök érintik egymást.*



A 3. feladat megoldása. Jelölje ω a BPE háromszög köré írt kört; az $AB = AE = AP$ feltétel miatt ennek középpontja az A pont. Legyen T az ω és a PQ egyenes második, P-től különböző metszéspontja, továbbá legyen U a QD szakasz felezőmerőlegesének metszéspontja a PD egyenessel. Mivel $DR = QR$, a QD szakasz felezőmerőlegese az R ponton is átmegy. A Thalész-tétel miatt $CD \perp AD$, így CD és UR is merőleges AD-re, tehát $CD \parallel RU$.

Azt állítjuk, hogy a TD és QU egyenesek párhuzamosak vagy egybeesnek.

Vizsgáljuk először azt az esetet, amikor az AQD egyenes nem megy át a P ponton. Vegyük észre, hogy az AEQ és ADE háromszögek hasonlók és ellentétes irányításúak, mert $AEQ\sphericalangle = AEB\sphericalangle = EBA\sphericalangle = EDA\sphericalangle$, és így $\frac{AE}{AD} = \frac{AQ}{AE}$. Mivel $AE = AP = AT$, az is igaz, hogy $\frac{AP}{AD} = \frac{AQ}{AP}$ és $\frac{AT}{AD} = \frac{AQ}{AT}$, ami miatt az ADP és az APQ háromszögek is hasonlók és ellentétes irányításúak, illetve az ADT és az ATQ háromszögek is hasonlók és ellentétes irányításúak. Továbbá az APT és DQU háromszögek egyenlő szárúak, így

$$TDQ\sphericalangle = TDA\sphericalangle = ATQ\sphericalangle = ATP\sphericalangle = TPA\sphericalangle =$$
$$= QPA\sphericalangle = ADP\sphericalangle = QDU\sphericalangle = UQD\sphericalangle,$$

és ezeknek a szögeknek az irányítása is megegyezik. A DT és a QU egyenesek tehát ugyanakkora irányított szöget zárnak be a DQ szakasszal, vagyis párhuzamosak.

Ha az AQD egyenes átmegy a P ponton, akkor ez az egyenes tartalmazza a T és U pontokat is, emiatt a TD és QU egyenesek egybeesnek. Ezzel tehát igazoltuk, hogy TD és QU párhuzamosak vagy egybeesnek.

Végül a párhuzamos szelők tételét háromszor alkalmazva,

$$\frac{PQ}{PT} = \frac{PU}{PD} = \frac{PR}{PC} = \frac{PS}{PB}.$$

Ebből következik, hogy a PQS kör az ω kör P középpontú nagyítása, tehát a közös P pontban érintik egymást. □

Megjegyzések. 1. Két versenyző is megtalálta a T pontot és az $APDT$ kört, de – talán a rendelkezésre álló idő rövidsége miatt – nem tudták befejezni a megoldást.

2. Több versenyző is a *mozgópont-módszer* alkalmazásával próbálta megoldani a feladatot, ez azonban csak egyiküknek sikerült. A mozgópont-módszer segítségével geometriai illeszkedéseket lehet igazolni. A módszer szóbanforgó változatánál az ábrát meghatározó egyik pontot úgy mozgatjuk a síkon, hogy mindkét koordinátája az időnek racionális törtfüggvénye legyen. Ennek a pontnak a mozgásából meghatározható, hogy hogyan mozog az adott konfiguráció többi pontja, illetve vonala, és mindegyiket (így az illeszkedőnek gondoltakat is) racionális törtfüggvények segítségével lehet felírni. A bizonyítandó illeszkedés végül úgy fogalmazható meg, hogy egy bizonyos egyváltozós polinom azonosan nulla. Ha e polinom fokszámát ügyesen megbecsüljük, akkor – mivel n-edfokú polinomnak legfeljebb n gyöke lehet – azt kapjuk, hogy a bizonyítandó illeszkedést elég a mozgó pontnak csak véges sok (a szóban forgó polinom becsült fokszámánál 1-gyel több), akár elfajuló esetére ellenőrizni. Ha ezt megtesszük, akkor ezzel igazoljuk, hogy a mozgó pont minden helyzetében fennáll a bizonyítandó illeszkedés, és ezzel a bizonyítást befejeztük.

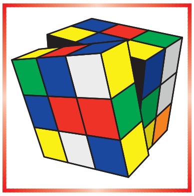
Hangsúlyozzuk, hogy bár a mozgópont-módszer rendkívül hatékony eszköz az illeszkedés típusú összefüggések bizonyítására, általában nem ad olyan geometriai megértést, mint egy szintetikus bizonyítás (pl. a fenti), hanem ezt algebrai megértéssel helyettesíti.

3. A 3. feladat egy lehetséges mozgópontos megoldásának vázlata (Molnár-Szabó Vilmos dolgozata alapján):

Legyen O a PQS kör középpontja; azt kell igazolnunk, hogy O az AP egyenesen van.

Az A, B, C, E, P pontokat rögzítjük. A Q pontot és vele együtt a D, R és S pontokat mozgatjuk. A Q pont elsőfokú, és megmutatható, hogy D, R, S legfeljebb másodfokúak, O pedig legfeljebb negyedfokú. Így az, hogy $O \in AP$, egy legfeljebb negyedfokú polinom eltűnésével ekvivalens. Végül ezt abban az öt esetben ellenőrizzük, amikor $D = A$, $D = B$, $D = E$, illetve amikor D valamelyik „abszolút pont” (azaz $(1, \pm i)$ irányú komplex végtelen távoli pont).

a Versenybizottság



Rejtvények, ördöglakatok

Képek és szögek

Rovatunkban minden hónapban valamilyen szórakoztató matematikai fejtörőt mutatunk be. Ezek között fontos helyet foglalnak el a különböző kirakós játékok, topológiai feladványok, ördöglakatok és a matematikát felhasználó bűvészmutatványok.

Manapság szinte mindent meg lehet találni az interneten, de az igazi élményt az adja, ha a feladatokat magunk oldjuk meg, a bűvészmutatványok trükkjeit mi találjuk ki, és a szükséges kellékeket is mi tervezzük meg és készítjük el. Próbáljuk meg a feladatokat továbbgondolni, általánosítani, igyekezzünk új feladatokat kitalálni.

A megoldásokat, általánosításokat a `rejtveny.komal@gmail.com` címen várjuk. A legjobbakat – akár cikk vagy videó formájában – a honlapunkon vagy itt a Lapban örömmel közöljük.

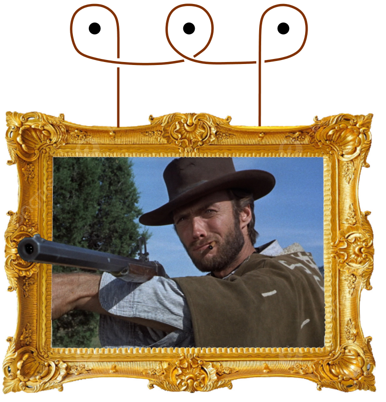
A következő fejtörőt *A. Spivak* közölte a Quantum magazin 1997. május-júniusi számában:

Dr. Smile rendelőjének várótermében egy kép lóg a falon. A kép különlegessége abban rejlik, ahogy fel lett akasztva. Dr. Smile egy helyett kettő szöget vert a falba, és úgy akasztotta fel rájuk a képet, hogy ha bármelyik szöget kihúzzuk a falból, a kép leesik. Hogyan csinálta?

Spivak eredeti kérdésében nincs expliciten kimondva, de ez alapvetően egy logikai feladat, súrlódás nincs, a képet tartó madzag kellően hosszú. A megoldásra több-kevesebb próbálkozással rá lehet jönni, és világos, hogy a kérdést többféleképpen nehezíthetjük.

1. (Az eredeti feladat.) Akasszuk fel a képet két szögre úgy, hogy bármely szöget kihúzva a falból a kép leessen.

2. Akasszuk fel a képet három szögre úgy, hogy bármely szöget kihúzva a falból a kép leessen.
3. Akasszuk fel a képet három szögre úgy, hogy egy szöget kihúzva a kép ne essen le, de bármely két szöget kihúzva a falból a kép leessen.



A játék kipróbálásához használható berendezést nem nehéz összeállítani, de aki nem szeret barkácsolni, annak igazán *kézre álló* megoldás lehet az is, ha a zsinórt az ujjaira hurkolva próbálkozik.

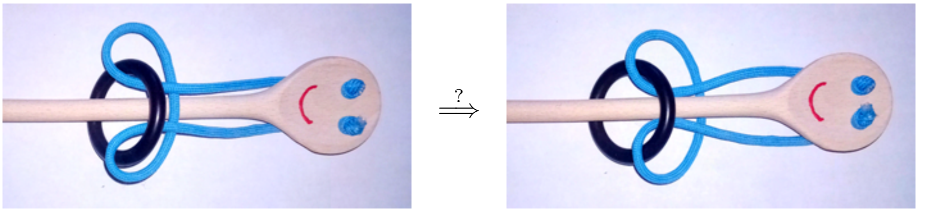
A következő számunkban megtárgyaljuk a feladat megoldását és további általánosításait, és bemutatjuk ezek matematikai hátterét.

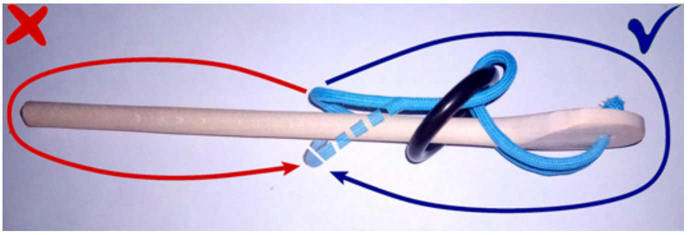
A fakanalas ördöglakat megoldása

A múlt havi feladat Kirill Grebnevnek a bal oldali ábrán látható játéka volt. A megoldást a jobb oldalon látható, fakanalas változaton mutatjuk be.

A fő ötlet

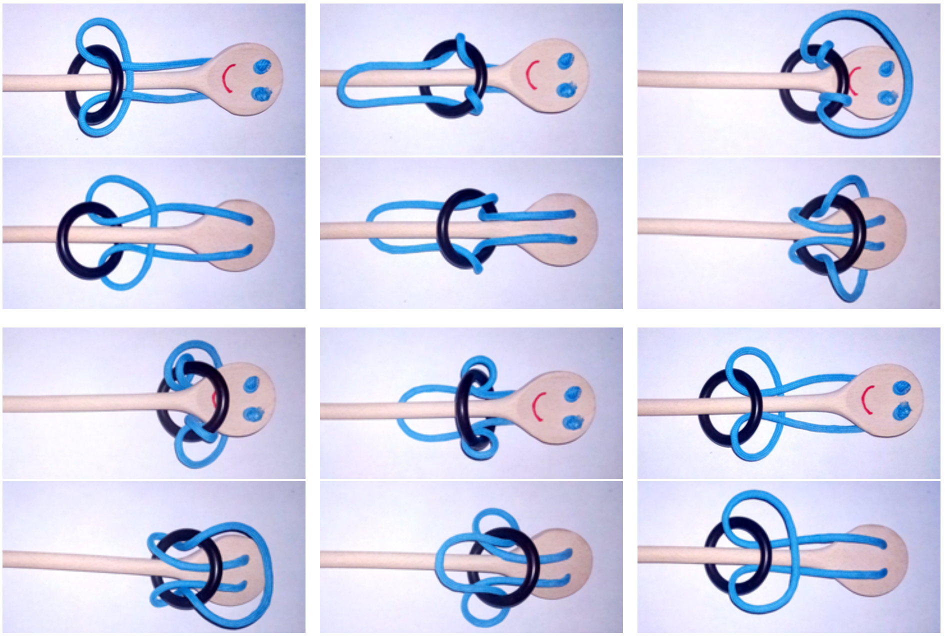
Miután kicsit meglazítottuk a madzagot, hamar rájövünk, hogy a fő feladat az, hogy a zsinórnak a fakanál fölött keresztben (a képen függőleges irányban) haladó, középső részét valahogy átvigyük a fakanál másik oldalára:

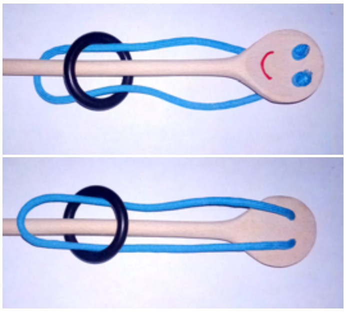


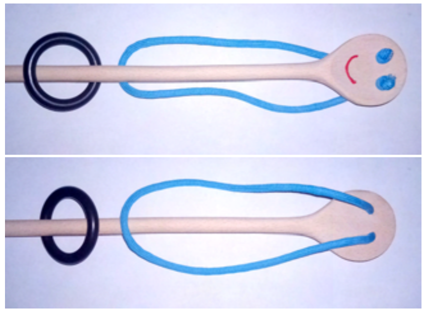


Ha a zsinór elég hosszú lenne, akkor a zsinór középső pontját áthúzva a karikán, a piros nyilat követve körbehaladhatnánk a fakanál nyele mentén, és így megkerülhetnénk vele a fakanalat. A zsinór ehhez nem elég hosszú, nem ér el a fakanál végéig, de itt egy újabb lehetőséget vehetünk észre: a zsinórral a fakanalat nem balra kerüljük meg, hanem jobbra, a kék nyíl mentén. Ehhez rövidebb zsinór is elég.

A teljes megoldás, képekben







További bonyolítások

Ha tényleg megértettük a megoldást, próbálkozhatunk nehezebb és összetettebb változatokkal:

Kós Géza, Vígh Viktor

Gyakorló feladatsor
emelt szintű matematika érettségire

I. rész

1. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

a) $4^{x+\frac{1}{2}}+5\cdot 2^{x}-3=0$, *(6 pont)*

b) $2\cos(2x)+2\sin^{2}x+5\cos x=3$. *(6 pont)*

2. Egy mértani sorozat első három tagjának az összege 39. Ha az elsőhöz kettőt, a másodikhoz hatot adunk, a harmadikból pedig elveszünk kettőt, akkor ugyanebben a sorrendben egy számtani sorozat három egymást követő tagját kapjuk. Mennyi a két sorozat állandója? *(13 pont)*

3. Matematikaórán a statisztika adatok egyes jellemzői kiszámításának gyakorlásához a jelenlévő tanulók magasság adatait használták fel. Ezek egész centiméterben a következők voltak: 176; 171; 180; 176; 178; 173; 174; 173; 177; 175; 173; 179; 173 és 175.

a) Mennyi a tanulócsoport átlagmagassága centiméterben? Az eredményt egy tizedesjegy pontossággal adjuk meg. *(3 pont)*

b) Mennyi a magasságok mediánja, módusza és felső kvartilise? *(3 pont)*

c) Mennyi az adatok szórása? *(2 pont)*

d) Ábrázoljuk oszlopdiagramon az adatokat. *(4 pont)*

4. Az ABC derékszögű háromszög befogói $AC = 4$ és $BC = 3$ egység hosszúak. A háromszög csúcsai, mint középpontok körül olyan köröket rajzolunk, amelyek páronként kívülről érintik egymást.

a) Határozzuk meg a körök sugarainak hosszát. *(5 pont)*

b) Mekkora annak a körnek a sugara, amely a háromszögön belül van és mindhárom kört kívülről érinti? *(9 pont)*

II. rész

5. Egy parabola tengelypontja a $T(4;4)$ pont, a $P(3;3)$ pont pedig illeszkedik a parabolára.

a) Határozzuk meg a parabola egyenletét. *(4 pont)*

A parabola és az x tengely által meghatározott korlátos, zárt síkidomba olyan kört írunk, amely érinti a parabolát és az x-tengelyt is. A síkidom pontjai közül véletlenszerűen kiválasztunk egyet.

b) Mekkora a valószínűsége annak, hogy a kiválasztott pont a körlap pontja lesz? *(12 pont)*

6. Milyen hosszúak annak szabályos négyoldalú gúlának az élei, amely mind az öt lapjával érint egy 2 cm sugarú gömböt, és az ilyen gúlák közül a legkisebb térfogatú? *(16 pont)*

7. A világ legmagasabb csúcsa a Himalája hegységben található Mount Everest a maga 8848 méterével. 71 évvel ezelőtt, 1953-ban sikerült először feljutni a csúcsra az új-zélandi Edmund Hillary-nek és Tendzing Norgaj nepáli serpának. Azóta már többeknek is sikerült ez, de sajnos vannak, akik nem élték túl a hegymászást. A körülmények nagyon mostohák, sok minden nehezíti a próbálkozók dolgát. Ezek közül az egyik a légnyomás változása, amit a barometrikus magasságformula ír le: $p = p_0 \cdot e^{\frac{-\rho_0 \cdot g}{p_0} \cdot h}$, ahol $p_0 = 10^5$ Pa a tengerszinten a levegő nyomása, $\rho_0 = 1{,}3\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$ a levegő sűrűsége és h a tengerszinttől mért magasság. (Az egyszerűség kedvéért a hőmérséklettől való függést nem vesszük figyelembe, valamint a g nehézségi gyorsulást $10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$-nek tekintjük.)

a) Mekkora a légnyomás a csúcson? *(3 pont)*

Az út során alaptáborok segítik a hegymászók akklimatizációját.

b) A tengerszinthez képest milyen magasan van az az alaptábor, ahol a légnyomás a tengerszinti légnyomás felével egyenlő? A végeredményt méter pontossággal adjuk meg. *(13 pont)*

8. Legyen

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{x-1} + \sqrt{2-x} \geq 0\} \quad \text{és} \quad B = \{x \in \mathbb{R} \mid \log_{0,5}(3x+2) \geq -3\}.$$

Határozzuk meg az $A \setminus B$, az $A \cap B$ és az $A \cup B$ halmazokat. *(16 pont)*

9. Matematikaórán közeleg a 100. óra, amikor is matematikai játékokat játszik a 12 fős faktos csoport.

a) Hányféle különböző sorrendben érkezhetnek meg a tanulók az órára, ha két tanuló egyszerre, a többiek pedig egyenként lépnek be a tanterembe? *(2 pont)*

A 12 fő 3 négyes csoportot alkot, és ezeken belül küzdenek meg egymással. Majd újabb, az előzőtől különböző négyes csoportokat alakítanak (nem lehet olyan négyes, amelynek tagjai egy az egyben megegyeznek az előző négyesek valamelyikének tagjaival), és újra játszanak.

b) Hányféleképpen alkothatnak három négyfős csoportot a tanulók az első játékhoz? *(4 pont)*

Az egyes játékok győztesei jutalmul csokiszeletet kapnak minden csoportban, minden játék után. A csokiszeletek vásárlásakor éppen egy „Minden 10. nyer." akció volt. (Ez úgy tekinthető, hogy minden egyes csokiszelet 0,1 valószínűséggel nyereményakciós, az akciós csokiszelet pedig 0,1 valószínűséggel nyerő, és egy csoki a többitől függetlenül akciós, illetve nyerő.)

c) Mennyi a valószínűsége annak, hogy az első két forduló győzteseinek kiosztott hat jutalomcsoki között pontosan két csoki nyereményakciós lesz, de azok egyike sem nyerő? *(10 pont)*

Egyed László
Baja

Megoldásvázlatok a 2024./1. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához

I. rész

1. *a*) *Határozzuk meg a valós számok halmazának lehető legbővebb részhalmazán értelmezett, az*

$$f(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2}$$

hozzárendelési szabállyal megadott f függvény értelmezési tartományát, értékkészletét és zérushelyeit. (5 pont) *b*) *Oldjuk meg a*

$$\log_2 x + \log_x 4 \leq 3$$

egyenlőtlenséget a valós számok halmazán. (6 pont)

Megoldás.

a) A függvény értelmezési tartománya: $\mathbb{R}$, értékkészlete: $\left[\frac{1-\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}+1}{2}\right]$, hiszen az alapfüggvény maximuma 1, de a függvényt transzformáljuk, negatív számmal szorozzuk, így a minimumok értékét kapjuk meg: $-\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 1 + \frac{1}{2} = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$. A koszinuszfüggvény minimumértéke -1, a transzformációk miatt az f függvény maximumának értéke $-\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (-1) + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}+1}{2}$.

A zérushelyek meghatározása során k és n tetszőleges egész számok.

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2} = 0,$$

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + 2 \cdot k \cdot \pi, \qquad x = -\frac{\pi}{12} + 2 \cdot k \cdot \pi,$$

vagy

$$x + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{4} + 2 \cdot n \cdot \pi, \qquad \text{tehát} \qquad x = -\frac{7\pi}{12} + 2 \cdot n \cdot \pi.$$

b) A logaritmus definíciója miatt $x > 0$, $x \neq 1$. Ekkor

$$\log_2 x + \log_x 4 \leq 3,$$

$$\log_2 x + \frac{\log_2 4}{\log_2 x} \leq 3.$$

Legyen $a := \log_2 x$, eszerint a megoldandó egyenlőtlenség $a + \dfrac{2}{a} \leq 3$, ahonnan

$$\frac{a^2 - 3a + 2}{a} \leq 0.$$

Egy tört értéke akkor negatív, ha a számláló és a nevező különböző előjelű. A számláló pozitív, ha $a < 1$ vagy $a > 2$; negatív, ha $1 < a < 2$, ezért $a < 0$ vagy $1 \leq a \leq 2$. Tehát $\log_2 x < 0$ vagy $1 \leq \log_2 x \leq 2$. Mivel a kettes alapú logaritmusfüggvény szigorúan monoton növő, a megoldás:

$$0 < x < 1 \qquad \text{vagy} \qquad 2 \leq x \leq 4.$$

2. *Egy* 32 *méter széles, téglalap alakú telek közepére (átlóinak metszéspontjába) elhelyeznek egy körbeforgó öntözőberendezést, amely egy* 20 *méter sugarú, kör alakú területet öntöz. A kerítésen belüli vizes rész területe a telek területének* 60 *százaléka.*

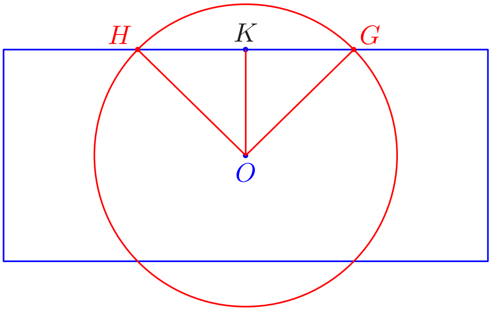
a) *Mekkora a telken belüli megöntözött rész?* (5 pont)

b) *Milyen hosszú a telek másik oldala? A választ két tizedesjegyre kerekítve adjuk meg.* (5 pont)

Megoldás. *a*) A HOG körcikk segítségével meghatározzuk a telken kívüli vizes részek területét. Ehhez először kiszámítjuk a középponti HOG szög (α) mértékét:

$$\frac{KO}{OG} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5} = \cos\frac{\alpha}{2},$$

tehát a HOG szög nagysága $\alpha = 73{,}74°$, így a HOG körcikk területe: 257,4 m^2. A HOG háromszög területe: $0{,}5 \cdot OH \cdot OG \cdot \sin 73{,}74° = 192{,}00$ m^2. Ezért a két –



kerten kívüli – rész együttes területe: 130,8 m^2. A kör teljes területe $T = 20^2 \cdot \pi = 1256{,}64$, így a telken belüli vizes rész területe: $T = 1256{,}64 - 130{,}8 = 1125{,}84$ m^2.

b) A telken belüli vizes rész a terület 60 százaléka, ezért a telek területe: $1125{,}84/0{,}6 = 1876{,}4$ m^2. A telek 32 méter széles, így a telek másik oldala 58,64 méter hosszú.

3. *a*) *Adjuk meg azokat a pozitív egész számokat, amellyel az $5n^2 - 5n$ kifejezés minden pozitív n egész esetén osztható.* (4 pont)

b) *Igazoljuk, hogy az $5n^2 - 5n + 8$ kifejezés semmilyen pozitív egész n esetén sem lehet négyzetszám.* (4 pont)

c) *Igazoljuk, hogy az $a_n = 5n^2 - 5n + 8$ $(n \geq 1)$ sorozat szigorúan monoton növő.* (6 pont)

Megoldás. *a*) Kiemeléssel szorzattá alakítva $5n^2 - 5n = 5n(n-1)$ látszik, hogy a kifejezés osztható öttel és kettővel, mert n vagy $n-1$ páros, azaz biztosan mondhatjuk, hogy a kifejezés – az 1-en kívül – osztható 2-vel, 5-tel, 10-zel. Utolsó lépésként belátjuk, hogy más pozitív egész számmal nem osztható a kifejezés. Legyen $n = 2$, ekkor a kifejezés értéke 10, amelynek tényleg nincs más pozitív osztója, mint a felsoroltak, tehát legfeljebb azok oszthatnak minden helyettesítési értéket.

b) A négyzetszámok utolsó számjegye 0, 1, 4, 9, 6, 5 lehet, ám az $5n^2 - 5n + 8$ kifejezés 8-ra végződik, ezért nem lehet négyzetszám.

c) Képezzük a sorozat két szomszédos, általános tagjának különbségét:

$$a_{n+1} - a_n = 5(n+1)^2 - 5(n+1) + 8 - (5n^2 - 5n + 8) = 10n.$$

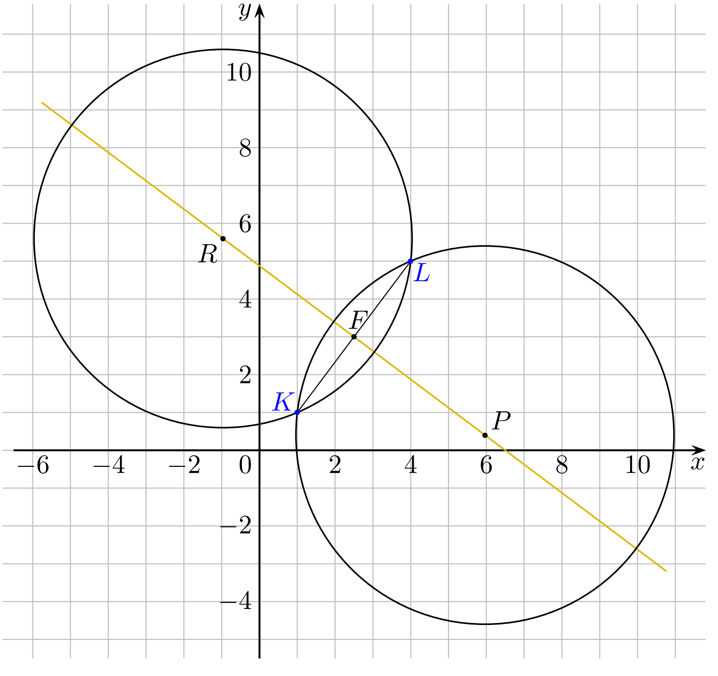
Mivel n pozitív egész szám, így $10n$ is pozitív, ezért a sorozat szigorúan monoton nő.

4. a) *Egy háromszögben az ABC szög 44 fok 17 perces, az ACB szög nagysága 105 fok 43 perc. Mekkora szögben látszik a háromszög BC oldala a háromszög köré írt körvonal – B-től és C-től különböző – pontjaiból?* (4 pont)

b) *Adott a KL szakasz a koordinátasíkon, ahol $K(1;1)$ és $L(4;5)$. Adjuk meg azoknak a pontoknak a halmazát a koordinátasíkon, amelyekből az KL szakasz 150 fokos, vagy 30 fokos szög alatt látszik.* (10 pont)

Megoldás. a) A háromszög hiányzó szöge az adatokból számolható: BAC szög 30 fokos, ezért a háromszög BC oldala a köré írt kör nagyobbik ívéből 30 fok, a kisebb ívből 150 fok alatt látszik.

b) Látóköríveket keresünk, a 30 fokos és 150 fokos körívek egy-egy körré egészítik ki egymást.



A körök középpontját megkapjuk, ha KL oldalhosszúságú szabályos háromszögeket írunk a KL szakasz fölé. A két lehetséges kör középpontja legyen R és P. Az R és P koordinátáinak egy lehetséges meghatározási módja lehet, hogy a KL szakasz felezőpontja: $F(2{,}5;3)$, az origó pedig $O(0;0)$. Ekkor $\overrightarrow{OF}(2{,}5;3)$, az $\overrightarrow{FL}$ vektor koordinátái: $(1{,}5;2)$, amelynek 90 fokos elforgatottjai: $\overrightarrow{FL}'(-2;1{,}5)$ és $\overrightarrow{FL}''(2;-1{,}5)$. Mivel FL a KL szakasz fele, amelynek $\sqrt{3}$-szorosa az RKL és PKL szabályos háromszögek magassága, ezért az R pont koordinátáit a következőképpen tudjuk felírni: $\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OF}+\sqrt{3}\overrightarrow{FL}'$, tehát $\overrightarrow{OR}\big(2{,}5-2\sqrt{3};3+1{,}5\sqrt{3}\big)$, illetve $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OF}+$ $+\sqrt{3}\overrightarrow{FL}''$, ahonnan $\overrightarrow{OP}\big(2{,}5+2\sqrt{3};3-1{,}5\sqrt{3}\big)$. Tudjuk, hogy $\overrightarrow{OR}$ és $\overrightarrow{OP}$ helyvektorok, az R és P pontok koordinátáinak pontos értéke $R(2{,}5-2\sqrt{3};3+1{,}5\sqrt{3})$ és

$P(2{,}5+2\sqrt{3};3-1{,}5\sqrt{3})$. Az előzőek alapján a keresett ponthalmazok: a két körvonal pontjai, kivéve a K és L pontokat.

$$\left(x-2{,}5+2\sqrt{3}\right)^2+\left(y-3-1{,}5\sqrt{3}\right)^2=25,$$

$$\left(x-2{,}5-2\sqrt{3}\right)^2+\left(y-3+1{,}5\sqrt{3}\right)^2=25.$$

II. rész

5. *a) Egy társaságban érkezéskor mindenki mindenkivel kezet fogott egyszer. Ha kétszer annyian lettek volna és ugyanígy üdvözlik egymást, akkor 477-tel több kézfogás lett volna. Hányan voltak a társaságban?* (6 pont)

b) Döntsük el, hogy az alábbi állítás igaz-e, vagy hamis. A választást indokoljuk. (5 pont)

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}=2^n \quad (n \textit{ természetes szám}).$$

c) Írjuk fel egyetlen $\binom{n}{k}$ *alakban a* $\binom{2022}{100}+\binom{2022}{101}+\binom{2023}{102}$ *összeget.* (5 pont)

Megoldás. *a)* Jelölje n a társaság létszámát. Ekkor a feladat szövege szerint

$$\binom{n}{2}+477=\binom{2n}{2},$$
$$\frac{n(n-1)}{2}+477=\frac{2n(2n-1)}{2},$$
$$n^2-n+954=4n^2-2n,$$
$$3n^2-n-954=0.$$

Az egyenlet pozitív gyöke a 18, tehát a társaságban 18-an voltak.

b) Az állítás igaz. A binomiális tétel szerint

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b^1+\ldots+\binom{n}{n-1}a^1b^{n-1}+\binom{n}{n}b^n,$$

amiből $a=1$ és $b=1$ helyettesítéssel éppen a bizonyítandó állítást kapjuk.

c) A binomiális együtthatók összefüggése szerint

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1},$$

amelynek alapján átalakítva a kívánt összeget:

$$\binom{2022}{100}+\binom{2022}{101}+\binom{2023}{102}=\binom{2023}{101}+\binom{2023}{102}=\binom{2024}{102}.$$

6. *a) Egyszerűsítsük a*

$$\frac{4n^2+54n-90}{2n^2+n-6}$$

törtet (n pozitív természetes szám.) (5 pont)

b) Tagja-e az $a_n = \dfrac{4n^2+54n-90}{2n^2+n-6}$ *sorozatnak a 4?* (5 pont)

c) Határozzuk meg az a_n *sorozat határértékét.* (6 pont)

Megoldás. *a)* A másodfokú egyenlet gyöktényezős alakját felhasználva

$$\frac{4n^2+54n-90}{2n^2+n-6} = \frac{4(n-1{,}5)(n+15)}{2(n-1{,}5)(n+2)} = \frac{2(n+15)}{(n+2)}.$$

b) Ha tagja az $a_n = \frac{4n^2+54n-90}{2n^2+n-6}$ sorozatnak a 4, akkor valamely $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$\frac{4n^2+54n-90}{2n^2+n-6} = 4,$$

azaz

$$2n^2 - 25n + 33 = 0.$$

Innen $n = 11$ vagy $n = 1{,}5$ (de ez nem lehet, mert n pozitív egész), ezért a 4 tagja a sorozatnak, $a_{11} = 4$.

c)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n^2+54n-90}{2n^2+n-6} = \lim_{n\to\infty} \frac{4+\frac{54}{n}-\frac{90}{n^2}}{2+\frac{1}{n}-\frac{6}{n^2}} = 2,$$

azaz a határérték a főegyütthatók hányadosa.

7. *Egy különleges logó elkészítéséhez három függvényt használnak fel:*

$$f(x) = -0{,}5x^2 + 6x - 5{,}5; \qquad g(x) = -x^2 + 7x - 6; \qquad h(x) = -x^2 + 17x - 66.$$

a) Határozzuk meg az f függvény szélsőértékét. (4 pont)

b) Igazoljuk, hogy a g és h függvény az x tengelyen metszi egymást. (5 pont)

c) A három függvény grafikonja körbe zár egy véges síkidomot, amelyet arany-színűre fognak festeni. Hány forintba kerül a terület kifestéséhez szükséges festék, ha tudjuk, hogy egy területegység 0,12 *dm*^{2} *területű, és a festék ára* 1 *négyzetméterre számolva* 20 000 *Ft?* (7 pont)

Megoldás. *a)*

$$f(x) = -0{,}5x^2 + 6x - 5{,}5 = -0{,}5\left(x^2 - 12x + 11\right) =$$
$$= -0{,}5\left[(x-6)^2 - 25\right] = -0{,}5\,(x-6)^2 + 12{,}5,$$

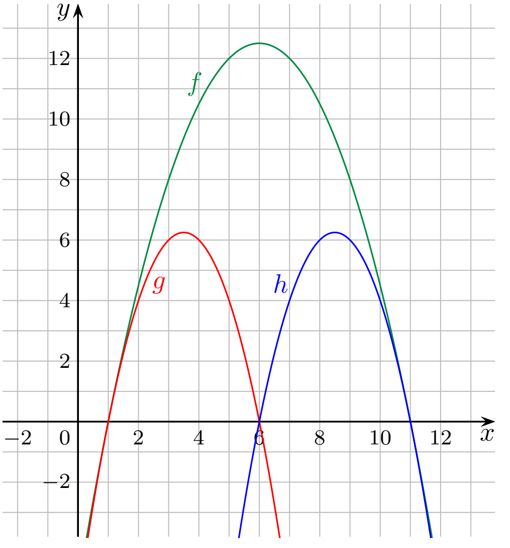
ezért az f függvénynek az $x = 6$ helyen maximuma van, a maximum értéke 12,5.

b) A g és a h függvény metszéspontjában a függvényérték egyenlő:

$$-x^2+7x-6=-x^2+17x-66,$$

innen $x=6$. Ekkor $g(6)=0$ és $h(6)=0$, tehát valóban az x tengelyen metszik egymást.

c) A g és az f függvény metszéspontja $(1;0)$, a h és az f függvény metszéspontja $(11;0)$.



A terület:

$$\int\limits_1^{11}\big(-0{,}5x^2+6x-5{,}5\big)\,dx-\int\limits_1^{6}\big(-x^2+7x-6\big)\,dx-\int\limits_6^{11}(-x^2+17x-66)dx=$$

$$=\left[-\frac{x^3}{6}+3x^2-5{,}5x\right]_1^{11}-\left[-\frac{x^3}{3}+3{,}5x^2-6x\right]_1^{6}-\left[-\frac{x^3}{3}+8{,}5x^2-66x\right]_6^{11}=$$

$$=\frac{250}{3}-2\cdot\frac{125}{6}=\frac{250}{3}-\frac{125}{3}=\frac{125}{3}\text{ területegység,}$$

amelyet átszámolva $\dfrac{125}{3}\cdot 0{,}12=5\ \mathrm{dm}^2$-t kapunk. Az $1\ \mathrm{m}^2=100\ \mathrm{dm}^2$, erre a felületre számolva a festék ára 20 000 Ft, ezért $5\ \mathrm{dm}^2$ ára $\frac{20\,000}{20}=1000$ Ft.

8. *A Varázslóiskolában Dumbledore igazgató kiválaszt* 6 *tanulót, akik különleges és nagyon veszélyes feladatot kapnak a Tiltott Rengetegben. Az igazgató egy zsákból húzza ki a kiválasztottak nevét. A zsákba* 10 *griffendéles és* 5 *mardekáros tanuló neve kerül. Sorban húzza ki a neveket tartalmazó cédulákat, és nem teszi vissza.*

a) *Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kihúzott* 6 *név között pontosan* 3 *mardekáros lesz?* (5 pont)

b) *A kiválasztott hat tanuló kap egy-egy szabályos dobókockát. Egyszerre feldobják. Mennyi a valószínűsége, hogy mindenki más számot dob?* (4 pont) *c*) *A nap végén mind a hat tanuló egy* 1*-től* 10*-ig terjedő egész számmal értékeli a napját, az* 1*-es a legrosszabb, a* 10*-es a legjobb. Hány pontos értékelések születtek, ha tudjuk, hogy*

– *csak két azonos szám szerepel a* 6 *szám között,*

– *a statisztikából ezt olvashatjuk ki: a hat szám módusza* 4*, mediánja* 5*, átlaga* 6*, terjedelme* 7*.* (7 pont)

Megoldás. *a*) Annak a valószínűsége, hogy a kihúzott 6 név között pontosan 3 mardekáros lesz:

$$\frac{\binom{10}{3}\cdot\binom{5}{3}}{\binom{15}{6}}=\frac{240}{1001}\approx 0{,}24.$$

b) Annak a valószínűsége, hogy mind a hatan más számot dobnak:

$$\frac{6!}{6^6}=\frac{5}{324}\approx 0{,}0154.$$

c) Mivel az adathalmaz módusza 4, és csak két egyforma szám van az értékek között, ezért pontosan két 4-es van. Kell egy 4-nél kisebb értéknek is lennie a terjedelem (7) miatt. Ezek után a hat érték mediánja csak úgy lehet 5, ha a 4-es mellé 6-os kerül. Így már megvan három szám. A hat szám összege csak úgy lehet 36 (az átlag 6), ha a legkisebb szám a 3, mert különben 2 db 10-es kellene az összegbe. Így a 3, 4, 4, 6 mellé csak a 9 és a 10 kerülhet, hogy az összeg 36 legyen és a terjedelem 7. Tehát a pontszámok: 3; 4; 4; 6; 9; 10.

9. *3D nyomtatóval elkészítünk egy testet, amelyet a következőképpen tervezünk meg: veszünk egy négyzetet, amelynek átlója* $\sqrt{200}$ *cm hosszúságú, és ekörül az átló körül megforgatjuk a négyzetet. A keletkező testből a forgástengelyétől* 5 *cm-nél nagyobb távolságra lévő részeket géppel eltávolítjuk.*

a) *Milyen testekből lehet összeállítani az így elkészült forgástestet?* (4 pont)

b) *Mekkora a test térfogata?* (5 pont)

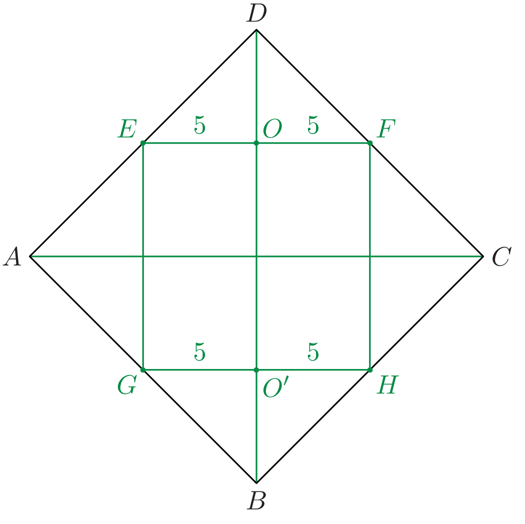
c) *Mekkora a felszíne?* (4 pont)

d) *Megpróbáljuk különböző nyomtatókkal elkészíteni a testet, ám az első példányoknál még sok a hiba. Az alábbi gyakorisági táblázatba foglaltuk az egyes mintadarabok térfogatának százalékos eltérését az általunk elképzelt ideális térfogathoz képest. Készítsünk az adatokból dobozdiagramot.* (3 pont)

százalékos eltérés	1	2	3	5	7	8
gyakoriság	1	2	1	3	3	1

Megoldás. *a*) Ha a négyzet átlója $\sqrt{200}$ cm, akkor oldala 10 cm hosszúságú. Ha a BD átló körül forgatjuk meg az $ABCD$ négyzetet, és a tengelytől 5 cm-nél nagyobb részeket levágjuk, a keletkező testet például a következő darabokból állíthatnánk össze:

- Két egybevágó forgáskúpból, amelyek alapkörének sugara és a magassága egyaránt 5 cm, hiszen a feladat leírása szerint a BD tengelytől 5 cm-rel nagyobb távolságra levő részeket levágjuk. Ezért az $OF = O'H$ alapkörök sugara 5 cm. Az EFD és a GHB háromszögek egyenlő szárúak, 45 fokos és 90 fokos szögük van, tehát a kúpok magassága $OD = O'B$ is 5 cm lesz;
- továbbá a két forgáskúp között létrejövő forgáshengerből, amely alapkörének sugara 5 cm, magassága pedig $10\sqrt{2} - 10$ cm.



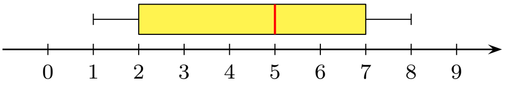
b) A test térfogata az adatok alapján:

$$V = 2 \cdot 5^2 \cdot \pi \cdot 5 \cdot \frac{1}{3} + 5^2 \cdot \pi \cdot (10\sqrt{2} - 10) = 587{,}12\ \text{cm}^3.$$

c) A test felszíne két darab kúppalástból és egy hengerpalástból tehető össze. A kúppalástok alkotója $5\sqrt{2}$, így

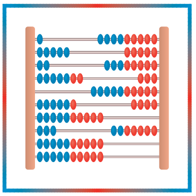
$$A = 2 \cdot 5 \cdot \pi \cdot 5\sqrt{2} + 2 \cdot 5 \cdot \pi \cdot (10\sqrt{2} - 10) = 150\pi\sqrt{2} - 100\pi = 352{,}27\ \text{cm}^2.$$

d) Az adatok növekvő sorrendbe sorolva: 1, 2, 2, 3, 5, 5, 5, 7, 7, 7, 8. A minimum 1, a maximum 8, az adatsokaság 11 elemből áll, ezért a medián $Q_2 = 5$. A medián előtt 5 elem áll, ezek mediánja az alsó kvartilis: $Q_1 = 2$, a medián után szintén 5 elem áll, ezek mediánja a felső kvartilis: $Q_3 = 7$. A számegyenesen bejelölve a szükséges adatokat kapjuk a diagramot.



Tatár Zsuzsanna Mária

Esztergom



K/C gyakorlatok megoldása

			X
X		**X**	
	X		

K/C. 793. *Az ábrán szereplő* 3×4*-es táblázatot kell kitöltenünk* ***X****-ekkel. A szabály az, hogy ha egy sorban vagy oszlopban pontosan két* ***X*** *van, akkor ezekkel egy vonalba valamelyik üres cellába beírhatunk egy harmadikat. Mutassuk meg, hogy bármilyen sorrendben is haladunk, a végén mindig marad legalább* 2 *üres cella.*

(5 pont)

Megoldás. Amikor beírunk egy X-et valahová, akkor mindig pontosan egy oszlopban és pontosan egy sorban változik az ott található X-ek száma, és az egyikben elromlik az, hogy két X van benne, a másikban pedig létrejön. Mivel a kiindulási helyzetben csak egy sorban van két X (oszlopban pedig egyikben sem), ezért a sorok, illetve oszlopok felváltva kerülnek a szabály alkalmazására megfelelő helyzetbe, és mindig csak egy. Vagyis váltakozik az, hogy sor miatt ír(hat)unk be X-et vagy oszlop miatt. A feladatban megadott szabály miatt a kitöltés során minden sor, illetve oszlop legfeljebb egyszer kerülhet olyan helyzetbe, hogy alkalmazható legyen rá a szabály, hiszen csak akkor írhatunk bele egy X-et, ha éppen két X-et tartalmaz, utána pedig már mindig legalább három darab X-et fog tartalmazni.

Nézzük most a megadott táblázatot. Összesen 3 sora és 4 oszlopa van, ezért $3\cdot 4=12$ cella van. Mivel a középső sorral kell kezdenünk és a megoldás elején tett megállapítások miatt az X-elés szerint a sorok és az oszlopok váltakoznak, ezért kizárólag a

SOR-OSZLOP-SOR-OSZLOP-SOR-OSZLOP

sorrendben haladhatunk. Mivel csak három sor van, így legfeljebb a fenti 6 lépésben összesen 6 darab X-et tudunk beírni a táblázatba, vagyis az eredetileg ott lévő 4 darab X-szel együtt legfeljebb összesen $4+6=10$ darab X-et fog tartalmazni, azaz legalább 2 cella üresen marad. Ezzel a feladat állítását beláttuk.

Hajna Ádám (Budapest, Berzsenyi Dániel Gimn., 9. évf.) ötlete alapján

X_6	X_2	X_3	**X**
X	X_1	**X**	
X_5	**X**	X_4	

Megjegyzés. El is lehet érni, hogy csak két üres mező maradjon, például az *ábrán* látható módon.

Összesen 213 dolgozat érkezett. 5 pontos 137, 4 pontos 32, 3 pontos 6 dolgozat. 2 pontot 18, 1 pontot 10, 0 pontot 8 versenyző kapott. Nem értékelhető: 2 dolgozat.

Matematika C gyakorlatok megoldása

C. 1728. *Határozzuk meg a*

$$-\frac{1}{6}x+\frac{1}{2}=\{x\}$$

egyenlet megoldásainak pontos értékét.

($\{x\}$ az x törtrésze, vagyis az x-nek és x-nél nem nagyobb egészek legnagyobbikának különbsége.)

(5 pont)

Megoldás. Az egyenlet mindkét oldalát 6-tal beszorozzuk, majd rendezzük:

$$3=6\{x\}+x.$$

Ekkor alkalmazzuk a $6\{x\}=7\{x\}-\{x\}$ helyettesítést, így az

$$3=7\{x\}+x-\{x\} \tag{1}$$

egyenlethez jutunk. Vegyük észre, hogy az $x-\{x\}$ éppen x egész részével egyenlő, ezért egész szám, ebből következően $7\{x\}$ is egész szám kell, hogy legyen. A tört rész definíciója miatt tudjuk, hogy $0\le\{x\}<1$, amiből $0\le 7\{x\}<7$ következik, így hét esetet vizsgálunk.

1. eset. Ha $7\{x\}=0$, akkor $\{x\}=0$, amit (1)-be visszahelyettesítve azt kapjuk, hogy $3=0+x$, tehát $x_1=3$.

2. eset. Ha $7\{x\}=1$, akkor $\{x\}=\frac{1}{7}$, amiből – az előző esethez hasonló módon – kapjuk, hogy $3=1+x-\frac{1}{7}$, tehát $x_2=\frac{15}{7}$.

3. eset. Ha $7\{x\}=2$, akkor $\{x\}=\frac{2}{7}$, amiből $3=2+x-\frac{2}{7}$, tehát $x_3=\frac{9}{7}$.

4. eset. Ha $7\{x\}=3$, akkor $\{x\}=\frac{3}{7}$, amiből $3=3+x-\frac{3}{7}$, tehát $x_4=\frac{3}{7}$.

5. eset. Ha $7\{x\}=4$, akkor $\{x\}=\frac{4}{7}$, amiből $3=4+x-\frac{4}{7}$, tehát $x_5=-\frac{3}{7}$.

6. eset. Ha $7\{x\}=5$, akkor $\{x\}=\frac{5}{7}$, amiből $3=5+x-\frac{5}{7}$, tehát $x_6=-\frac{9}{7}$.

7. eset. Ha $7\{x\}=6$, akkor $\{x\}=\frac{6}{7}$, amiből $3=6+x-\frac{6}{7}$, tehát $x_7=-\frac{15}{7}$.

Több eset nincs, így hét megoldást kaptunk, amelyek helyességéről behelyettesítéssel győződtünk meg.

Volford Barnabás (Szeged, Szegedi Radnóti M. Kísérleti Gimn., 10. évf.) dolgozata alapján

Összesen 237 dolgozat érkezett. 5 pontos 119, 4 pontos 17, 3 pontos szintén 17 dolgozat. 2 pontot 13, 1 pontot 11, 0 pontot 34 versenyző kapott. Nem versenyszerű vagy nem értékelhető: 26 dolgozat.

Matematika feladatok megoldása

B. 5344. *Anti és Bandi Balatonmáriafürdőről szeretnének az onnan* 30 *km-re lévő Balatonlellére eljutni részben futva, részben biciklizve. Egyszerre indulnak, csak egyetlen biciklijük van. Anti* 30 *km/h sebességgel biciklizik, és* 15 *km/h sebességgel fut. Bandi* 20 *km/h sebességgel biciklizik, és* 12 *km/h sebességgel fut. Legalább hány percre van szükségük ahhoz, hogy mindketten odaérjenek? (Az út során akárhányszor cserélhetik, ki ül a biciklin, amely az út bármely pontján le is tehető.)*

(*5 pont*) Javasolta: *Pach Péter Pál* (Budapest)

1. megoldás. A keresett minimális időmennyiség $\frac{7}{4}$ óra, azaz 105 perc.

Először azt mutatjuk meg, hogy ez el is érhető.

Szervezzék meg a futást a következőképpen: Anti indul a biciklin, megtesz 7,5 km-t, majd leteszi a biciklit, és az út maradék részét futja. Mivel biciklin gyorsabb, mint Bandi futva, így Bandi később fogja megtenni az első 7,5 km-t, és így ő akkor felveheti a biciklit, és tovább végig biciklizik. Ekkor Anti 7,5 km-t biciklizik, $30-7{,}5=22{,}5$ km-t fut, így neki ez $\frac{7{,}5}{30}+\frac{22{,}5}{15}=\frac{7}{4}$ órába telik, míg Bandi 7,5 km-t fut és 22,5 km-t biciklizik, így ez neki szintén $\frac{7{,}5}{12}+\frac{22{,}5}{20}=\frac{7}{4}$ órát jelent. Tehát eképp mindketten egyszerre, $\frac{7}{4}$ óra leforgása alatt érnek el Balatonlellére.

Most lássuk annak bizonyítását, hogy miért kell legalább $\frac{7}{4}$ óra, hogy mindketten odaérjenek. Tegyük fel, hogy Anti x km-t biciklizik abszolút értékben, míg Bandi y km-t (abszolút értékben olyan értelemben, hogy a Balatonlelle irányába, illetve ellentétes irányba megtett biciklizés hosszainak abszolút értékében). Mivel Anti legalább 30 km-t tesz meg, ezért legalább $30-x$ km-t fut abszolút értékben. Hasonlóan, ha Bandi y km-t biciklizik előre, akkor legalább $30-y$ km-t fut abszolút értékben (Balatonlelle felé). Ekkor Antinak legalább $\frac{x}{30}+\frac{30-x}{15}=2-\frac{x}{30}$ órára van szüksége, hogy eljusson Balatonlellére. Hasonlóan, Bandi legalább $\frac{y}{20}+\frac{30-y}{12}=\frac{5}{2}-\frac{y}{30}$ óra alatt ér el Balatonlellére.

Emellett, mivel egyszerre csak egy ember biciklizik, így világos, hogy mivel a bicikli abszolút értékben legfeljebb 30 km-t tesz meg Balatonlelle felé, ezért $x+y\le 30$.

Tegyük fel, hogy Anti ér hamarabb Balatonlellére. Ez azt jelenti, hogy $2-\frac{x}{30}\le\frac{5}{2}-\frac{y}{30}$, azaz $\frac{y-x}{30}\le\frac{1}{2}$, vagy másképp $y-x\le 15$. Mivel azonban $x+y\le 30$, a két egyenlőtlenséget összeadva azt kapjuk, hogy $x+y+y-x\le 15+30$, tehát $2y\le 45$, vagyis $y\le 22{,}5$.

Ekkor Bandinak legalább $\frac{5}{2}-\frac{y}{30}\ge\frac{5}{2}-\frac{22{,}5}{30}=\frac{7}{4}$ órára van szüksége ahhoz, hogy Balatonlellére érjen.

Most tegyük fel, hogy Bandi ér oda előbb, azaz $\frac{5}{2}-\frac{y}{30}\le 2-\frac{x}{30}$, vagy, ami ezzel egyenértékű, $\frac{y-x}{30}\ge\frac{1}{2}$, tehát $y-x\ge 15$, ami azt jelenti, hogy $x-y\le -15$.

De $x+y\le 30$, így a két egyenlőtlenséget összeadva: $x-y+x+y\le -15+30=$ $=15$, ami azzal egyenértékű, hogy $x\le 7{,}5$.

Ekkor Antinak legalább $2-\frac{x}{30}\ge 2-\frac{7{,}5}{30}=\frac{7}{4}$ órára van szüksége, hogy Balatonlellére érjen.

Tehát mindkét esetben azt kaptuk, hogy legalább az egyik fiúnak szüksége van legalább $\frac{7}{4}$ órára, hogy megtegye a távot, ami igazolja az állításunkat.

Bodor Mátyás (Csíkszereda, Márton Áron Líceum, 10. o.)

Anti és Bandi végtelen sokféleképpen teheti meg a 30 km-es utat a feladat feltételeinek eleget téve; belátható, hogy ezeknek az utazásoknak az időtartamai pozitív számok egy korlátos és zárt halmazát alkotják. Ebből következik, hogy ennek a halmaznak létezik legkisebb eleme, azaz létezik legkisebb időtartamú utazás. A következő megoldás közvetlenül határozza meg ezt a legkisebb időtartamot egy hozzá tartozó optimális útiterv vizsgálatával.

2. megoldás 1. Ahhoz, hogy mindketten a lehető legrövidebb idő alatt érjenek célba, egyszerre kell megérkezniük. Ha ugyanis az egyikük előbb érkezik be, akkor a másikuk ideje csökkenthető azzal, hogy nála annyival tovább legyen a kerékpár, hogy a társával egyszerre érkezzenek célba.

2. A kerékpár nyilván megtette a két hely közti utat, pontosan egyszer. Máskülönben a futók egész útra vonatkozó átlagos haladási sebessége kisebb, az út megtételéhez felhasznált idő pedig több lett volna a minimálisnál.

3. Nyilván mindegyik útszakaszon egyikük futott, a másikuk pedig kerékpárral haladt. Így Anti összesen x távolságot biciklizett és $30-x$ km-t futott, Bandi pedig x távolságot futott és $30-x$ km-t biciklizett. Tehát a teljes utat Anti $\dfrac{x}{30}+\dfrac{30-x}{15}$, Bandi pedig $\dfrac{x}{12}+\dfrac{30-x}{20}$ óra alatt tette meg. Mivel egyszerre érkeztek meg,

$$\frac{x}{30}+\frac{30-x}{15}=\frac{x}{12}+\frac{30-x}{20},$$

amiből $x=7,5$, ezért leggyorsabban

$$\frac{7,5}{30}+\frac{30-7,5}{15}=\frac{7}{4}$$

óra alatt tehették meg az utat. (Egy lehetséges optimális útiterv például az, hogy az első $7,5$ km-en Anti kerékpározik, majd leteszi a biciklit, és onnantól Bandi kerékpározik, miután odaér.)

Csató Hanna Zita (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 9. o.)

132 dolgozat érkezett. 5 pontos 42, 4 pontos 45, 3 pontos 25, 2 pontos 7, 1 pontos 5 dolgozat. 0 pontot kapott 8 beküldő.

B. 5347. *Igazoljuk, hogy ha egy pozitív racionális r számra r^r is racionális, akkor r egész.*

(5 pont) Javasolta: *Sándor Csaba* (Budapest)

1. megoldás. A számelmélet alaptételéből következik, hogy ha $\frac{a}{b}$ egy pozitív racionális szám, ahol a és b egymáshoz relatív prím pozitív egészek, és n is pozitív egész, akkor $\frac{a}{b}$ pontosan akkor n-edik hatványa egy alkalmas racionális számnak, ha a és b prímtényezős alakjában mindegyik prím kitevője osztható n-nel, tehát ha a és b egyaránt n-edik hatvány.

Legyen $r=\frac{p}{q}$, ahol p és q pozitív egészek és egymáshoz relatív prímek. Ekkor $r^r=\sqrt[q]{\left(\frac{p}{q}\right)^p}$ racionális lévén $\left(\frac{p}{q}\right)^p=\frac{p^p}{q^p}$ egy racionális szám q-adik hatványa, ezért p^p és q^p is q-adik hatvány. Mivel p és q egymáshoz relatív prímek, azért (p és) q is q-adik hatvány: alkalmas t pozitív egésszel $q=t^q$. Tegyük föl, hogy itt $t\ge 2$, akkor $q\ge 2^q>q$, ami ellentmondás. Tehát $t=1$, $q=1$, azaz $r=\frac{p}{1}$ valóban egész.

Kis Ágoston (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 9. o.)

2. megoldás. A számelmélet alaptételének azt a következményét használjuk, miszerint ha n és k pozitív egész, és $s=\sqrt[n]{k}$ racionális, akkor s szükségképpen egész.

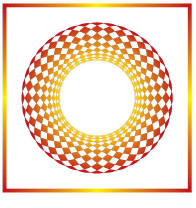
Legyen ismét $r=\frac{p}{q}$, ahol p és q egymáshoz relatív prím pozitív egészek. Mivel $\frac{p^p}{q^p}$ egy racionális szám q-adik hatványa, azért

$$p^p\cdot q^{p(q-1)}=\frac{p^p}{q^p}\cdot q^{pq}$$

is egy racionális szám q-adik hatványa, ezért, egész lévén, a fentiek szerint q-hatvány. Így az egymáshoz relatív prím p^p és $q^{p(q-1)}$ tényezők prímtényezős alakjában mindegyik kitevő a q-nak többszöröse. Mivel q és $p(q-1)$ is egymáshoz relatív prímek, azért q prímtényezős alakjában is mindegyik kitevő a q-nak többszöröse, azaz q egy q-hatvány. Innen az állítás bizonyítása az 1. megoldásban látott módon fejezhető be.

Szakács Ábel (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. o.)

102 dolgozat érkezett. 5 pontos 50, 4 pontos 8, 3 pontos 3, 2 pontos 14, 1 pontos 12 dolgozat. 0 pontot kapott 14 beküldő. Nem versenyszerű (nem értékelhető) 1 dolgozat.



Nehezebb feladatok megoldása

A. 863. *Legyen adott egy $n\ge 2$ egész szám. Legfeljebb mekkora lehet N, ha tudjuk, hogy végtelen sokféleképpen választható ki N egymást követő egész szám úgy, hogy egyiknek se legyen 1-nél nagyobb n-edik hatvány osztója?*

(7 pont) Javasolta: *Pach Péter Pál* (Budapest)

1. megoldás. Válasz: N legfeljebb $2^n - 1$ lehet.

Nyilván N nem lehet 2^n vagy több, mert 2^n egymást követő egész szám között van egy 2^n-nel osztható.

Belátjuk, hogy van olyan valós $0 < C < 1$ szám, amellyel minden pozitív egész k-ra $k \cdot 2^n$-ig legfeljebb $C \cdot k$ olyan n-edik hatvány van, ami nem többszöröse 2^n-nek – ezek éppen a páratlan n-edik hatványok. Ha ez igaz, akkor tekintsük a következő, egymást követő számokból álló k darab szám N-est:

$$\begin{aligned}
&\{1, 2, \ldots, 2^n - 1\},\\
&\{2^n + 1, 2^n + 2, \ldots, 2 \cdot 2^n - 1\},\\
&\{2 \cdot 2^n + 1, 2 \cdot 2^n + 2, \ldots, 3 \cdot 2^n - 1\},\\
&\{3 \cdot 2^n + 1, 3 \cdot 2^n + 2, \ldots, 4 \cdot 2^n - 1\},\\
&\vdots,\\
&\{(k-1) \cdot 2^n + 1, (k-1) \cdot 2^n + 2, \ldots, k \cdot 2^n - 1\}.
\end{aligned}$$

Ezek egyikében sincs páros n-edik hatvánnyal (azaz 2^n-nel) osztható, és közülük legalább $(1-C)k$-ban nincs (páratlan) n-edik hatvány többszörös. Ahogy k végtelenbe tart, úgy $(1-C)k$ is végtelenbe tart, és ezzel belátnánk az állítást.

(Elég páratlan m-ekre az m^n többszöröseit vizsgálni, mert ha m páros, akkor $2^n \mid m^n$.) Legyen k tetszőleges pozitív egész. Ekkor $x = k \cdot 2^n$-ig m^n-nek legfeljebb $\frac{x}{m^n}$ darab többszöröse található, így x-ig kevesebb, mint

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x}{(2i+1)^n}$$

olyan szám van, aminek létezik páratlan n-edik hatvány osztója. Erre emlékezve válasszuk meg C értékét a következőképpen: $n > 2$ esetén legyen

$$C = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2^n}{(2i+1)^n}.$$

Ekkor valóban minden pozitív egész k-ra $k \cdot 2^n$-ig legfeljebb $C \cdot k$ olyan szám található, amely egy páratlan n-edik hatvány többszöröse. Továbbá

$$\begin{aligned}
C &= 2^n \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(2i+1)^n} \right) < 2^n \left(\sum_{i=3}^{\infty} \frac{1}{i^n} \right) \le 2^n \left(\int_2^{\infty} \frac{1}{t^n} dt \right) = \\
&= 2^n \left[-\frac{1}{(n-1)t^{n-1}} \right]_2^{\infty} = \frac{2^n}{(n-1)2^{n-1}} \le \frac{2^n}{2^n} = 1.
\end{aligned}$$

Hasonlóan, $n = 2$-re, az előbbinek megfelelően a

$$C = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{4}{(2i+1)^2}$$

választással

$$\frac{C}{4}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{(2i+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}-1<\frac{1}{4},$$

így ebben az esetben is teljesül, hogy $C<1$.

Szakács Ábel (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. o.)

2. megoldás. Jelöljük az elkerülendő kitevőt k-val. Nyilván ekvivalens azt elkerülni, hogy a prímek k-adik hatványa ossza az adott számot, hiszen ekkor semmilyen szám k-adik hatványa se oszthatja, viszont egyben nyilván szükséges feltétel is. Vegyük észre, hogy 2^k egymás utáni szám között mindenképpen lesz legalább (sőt, pontosan) egy, ami osztható 2^k-nal. Ezért legfeljebb csupán 2^k-1 számot választhatunk ki így. Belátjuk, hogy viszont ennyi egymás utáni végtelen sok módon választható ki, vagyis a válasz: 2^k-1. Legyen $N=2^k-1$. Indirekten fogunk bizonyítani, mostantól feltesszük, hogy csak véges sok ilyen szám-N-es van. (A pozitívak között nézzük, tehát itt tesszük fel, hogy véges sok van, és jutunk ellentmondáshoz. Könnyen átgondolható, hogy ez elegendő.)

Jelöljön mostantól p és P mindig prímet. Legyen $L_P=\prod_{2\le p\le P}p^k$. A P növekedtével L_P tetszőlegesen nagy lehet. Jelölje $f(n)$ azoknak a jó szám N-eseknek a számát, amelyek tagjai 1 és n közöttiek. Jelölje továbbá $f_P(n)$ azon 1 és n közötti tagokból álló szám N-esek számát, amelyek tagjait nem osztja p^k, semelyik $p\le P$-re. (Tehát gyakorlatilag csak az első valahány prím hatványait vesszük figyelembe a szám N-esek kizárásakor.) Most a kínai maradéktétel segítségével belátjuk, hogy

$$\frac{f_P(L_P)}{L_P}=\frac{1}{2^k}\cdot\prod_{2<p\le P}\left(1-\frac{N}{p^k}\right), \tag{1}$$

illetve L_P-vel való felszorzással

$$f_P(L_P)=\prod_{2<p\le P}(p^k-N). \tag{2}$$

Ha egy P szerint jó szám N-es x-szel kezdődik, akkor x nyilván p^k-N-féle maradékot adhat p^k-nal osztva, hiszen az összes lehetőség közül pontosan N rossz – azok, ahol az egyik szám az N közül 0-t ad maradékul. Ha veszünk egy maradékot minden p^k-ra a $2<p\le P$ feltételt kielégítő p prímekkel, és vesszük az 1 maradékot modulo 2^k (minden jó szám N-es első tagja 1 maradékot ad 2^k-nal osztva), akkor ezek tetszőleges kombinációja meghatároz egy maradékot modulo L_P, a kínai maradéktétel szerint. Így minden jó szám N-es bijektíven megfeleltethető a kezdőtagjának, ami pedig bijektíven megfeleltethető egy modulo L_P „jó" maradéknak, az viszont bijektíven megfeleltethető néhány modulo p^k „jó" maradék kombinációjának, amiből pontosan annyi van, mint ami a (2) jobb oldala. Így a fenti állítást bizonyítottuk.

Ezután az (1) alapján megmutatjuk, hogy van olyan $\ell>0$, amelyre $\frac{f_P(LP)}{L_P}\ge\ell$, minden P-re. Nyilván a szorzat minden tényezője a $(0,1)$ nyílt intervallumon van, így a végtelen szorzat (minden p-re) vagy 0 vagy teljesül az állításunk. Az első, $\frac{1}{2^k}$ tényező nyilván elhagyható. Vegyük észre, hogy

$$\prod_{2<p\le P}\left(1-\frac{N}{p^k}\right)\ge\prod_{2<p\le P}\left(1-\frac{2^k}{p^k}\right)\ge\prod_{2<p\le P}\left(1-\frac{2^2}{p^2}\right),$$

hiszen a megfelelő tényezőkre fennáll a kívánt egyenlőtlenség. Továbbá

$$\prod_{2<p\le P}\left(1-\frac{2^2}{p^2}\right)\ge\prod_{\substack{2<n\le P,\\ n\text{ páratlan}}}\left(1-\frac{2^2}{n^2}\right),$$

mivel csak még több $(0,1)$ intervallumbeli tényezőt szorzunk össze. Végül

$$\prod_{\substack{2<n\le P,\\ n\text{ páratlan}}}\left(1-\frac{2^2}{n^2}\right)=\prod_{\substack{2<n\le P,\\ n\text{ páratlan}}}\left(\frac{n-2}{n}\right)\cdot\left(\frac{n+2}{n}\right)=$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{7}{5}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{9}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{P-2}{P}\cdot\frac{P+2}{P}=\frac{1}{3}\cdot\frac{P+2}{P}\ge\frac{1}{3}.$$

(Itt $P\ge 3$, de a $P=2$ esetet is nyilván hozzávehetjük.) Láthatjuk, hogy teleszkópos szorzat alakul ki, miután a négyzetek különbségét szorzattá alakítjuk, és így az első és utolsó tényező kivételével minden kiesik. A fentivel tehát bebizonyítottuk az állítást.

Most nézzük, hogy $f_P(L_P)$ és $f(L_P)$ mennyire különbözik egymástól. f_P-ben csak azt nem figyeltük, hogy P-nél nagyobb prímek „el tudnak rontani" egy szám N-est. A p prímnek összesen $[\frac{L_P}{p^k}]\le\frac{L_P}{p^k}$ többszöröse lehet L_P -ig. Minden $p>P$ prím k-adik hatványának minden többszöröse elront egy-egy különböző szám N-est, de még akkor is azt kapjuk, hogy

(3) $$f(L_P)\ge f_P(L_P)-L_P\sum_{p>P}\frac{1}{p^k},$$

azaz

(4) $$\frac{f(L_P)}{L_P}+\sum_{p>P}\frac{1}{p^k}\ge\frac{f_P(L_P)}{L_P}.$$

Végül

$$\sum_{p>P}\frac{1}{p^k}\le\sum_{n>P}\frac{1}{n^k}\le\sum_{n>P}\frac{1}{n^2}.$$

Jól ismert, hogy a négyzetszámok reciprokösszege véges, így a jobb oldali összeg tetszőlegesen kicsi lehet. Ezért a bal oldali összeg is tetszőlegesen kicsi értéket felvehet, ahogy P egyre nagyobb. Az indirekt feltevésünk szerint csak véges sok „jó" szám N-es van, így f felülről korlátos, tehát ahogy P egyre nagyobb lesz, L_P is az lesz, de $f(L_P)$ egy idő után már nem; így $\frac{f(L_P)}{L_P}$ is tetszőlegesen kis értéket felvehet. Összegezve: a (4) bal oldalán két olyan érték van, amelyekről a fentiekben beláttuk, hogy tetszőlegesen kis értéket felvehetnek (és egy idő után,

P növekedésével monoton csökkennek). Viszont a jobb oldalon egy olyan érték van, amiről beláttuk, hogy nem megy egy pozitív alsó korlát alá. Ez ellentmondást eredményez, hiszen ha P-t olyan nagynak választjuk, hogy mindkét bal oldali tag nagyon kicsi legyen – mondjuk a jobb oldali tag alsó korlátjának a felénél kicsit kisebb – akkor ellentmondást kapunk az egyenlőtlenségből. Így készen vagyunk.

Czanik Pál (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. o.)

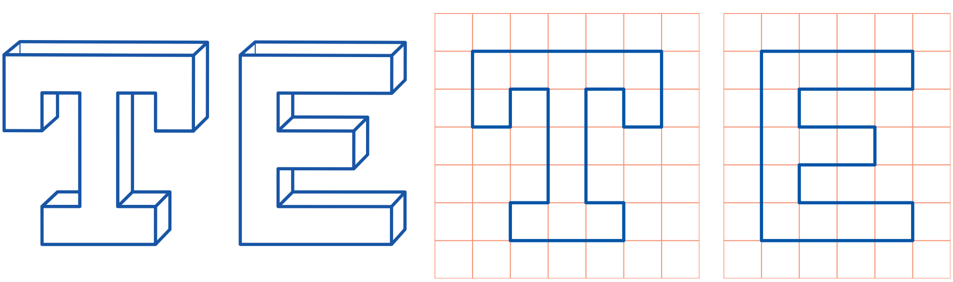
Összesen 21 dolgozat érkezett. 7 pontot kapott 14, 5 pontot 2, 4 pontot 1, 3 pontot 1, 1 pontot 2, 0 pontot 1 versenyző.

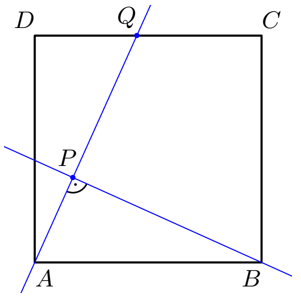
A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok ABACUS-szal közös pontverseny 9. osztályosoknak (799–803.)

K. 799. Misi egy olyan utcában lakik, amelyben csupa családi ház van. Ha az utca elejétől elindulunk, és megszámoljuk, hogy Misiék azon az oldalon hányadik házban laknak, akkor pontosan kétszer akkora eredményt kapunk, mint ha azt számoljuk meg, hogy az utca végétől számítva hányadik házban laknak. Az utcában a házakat az utca elejétől kezdve folyamatosan számozzák 1-től úgy, hogy a páratlan számú házak a bal oldalon, a páros számú házak a jobb oldalon vannak. Misiék az utca elejétől indulva a bal oldalon laknak. Ha az utca végétől kezdve számoznák a házakat, akkor Misiék házszáma 25-tel lenne kisebb, mint amennyi jelenleg. Hány ház van Misiék oldalán az utcában összesen?

K. 800. Négy különböző pozitív prímszám összege 50. Melyik négy prímszám lehet ez?

K. 801. Az alábbi két edénynek oldalról nézve olyan alakja van, mint egy-egy betűnek. Az edények oldalnézeti képe látható a másik ábrán, egy 10 cm oldalhosszúságú négyzetekből álló rács elé állítva. Az edények felül nyitottak, vastagságuk 10 cm. Mindkettőbe belehelyezünk egy-egy vékony kis gumicsövet, amelyek leérnek az aljukig, és ezeken keresztül vízzel töltjük meg mindkét edényt. Percenként 1 liter víz folyik be a csövön keresztül mindegyik edénybe. Hány perc alatt telik meg az egyik, illetve a másik edény? Ábrázoljuk az egyes edényekben lévő víz magasságának időbeli alakulását grafikonon. (Az edények falának vastagságát hagyjuk figyelmen kívül.)





K./C. 802. Legyen az $ABCD$ négyzet CD oldalának tetszőleges belső pontja Q. Az AQ egyenesre állítsunk merőlegest a B csúcsból, legyen ennek AQ-val vett metszéspontja P. Legyen továbbá a négyzet átlóinak metszéspontja K. Mutassuk meg, hogy a PK egyenes felezi a QPB szöget.

K./C. 803. Egy táborban 24 gyerek kivételével mindenki egyke (nincs testvére), 18 gyerek kivételével mindenkinek egy testvére van, 14 gyerek kivételével pedig mindenkinek két testvére van. Hányan lehetnek azok ebben a táborban, akiknek 2-nél több testvérük van, ha tudjuk, hogy van legalább egy egyke, és mindenkinek az összes testvére is ott nyaral a táborban?

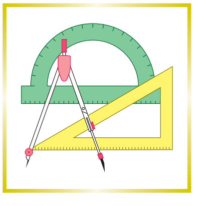
Javasolta: *Kozma Katalin Abigél* (Győr), *Korándi József* (Budapest)

❄

Beküldési határidő: 2024. március 10.

Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄



A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (802–803., 1798–1802.)

Feladatok 10. évfolyamig

K/C. 802. A szövegét lásd a **K** feladatoknál.

K/C. 803. A szövegét lásd a **K** feladatoknál.

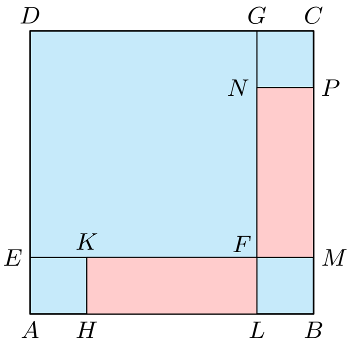
Feladatok mindenkinek

C. 1798. Határozzuk meg a

$$\left(p+\frac{1}{p}\right)\cdot\left(x-\frac{1}{x}\right)+\left(p-\frac{1}{p}\right)\cdot\left(x+\frac{1}{x}\right)=4px+5+\frac{1}{p}$$

egyenlet összes egész megoldását, ha a p paraméter egész szám.

Javasolta: *Bíró Bálint* (Eger)



C. 1799. Az egységnyi oldalú $ABCD$ négyzetben megrajzoltuk a $DEFG$, $AHKE$, $BMFL$ és $CGNP$ négyzeteket az ábra szerint.

Az $LFKH$ és $MPNF$ téglalapok területének összege legfeljebb hányadrésze lehet az $ABCD$ négyzet területének?

Adjuk meg ebben az esetben az $\dfrac{ED}{AD}$ arány pontos értékét.

Javasolta: *Bíró Bálint* (Eger)

C. 1800. Mutassuk meg, hogy ha n természetes szám, akkor a

$$\left[\sqrt{16n+21}; \sqrt{16n+24}\right]$$

intervallumban nincs egész szám.

Javasolta: *Holló Gábor* (Budapest)

Feladatok 11. évfolyamtól

C. 1801. Legyen az a_n sorozat a következő: $a_1 = 2$ és $a_n = a_{n-1} + 2n$. Mennyi a sorozat első 2024 tagjának reciprokösszege? (Vagyis mennyi az $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_{2024}}$ kifejezés értéke?)

Javasolta: *Szmerka Gergely* (Budapest)

C. 1802. Az $ABCDEF$ szabályos hatszögben M az AC, N pedig a CE átló belső pontja úgy, hogy

$$\frac{AM}{AC} = \frac{CN}{CE} = k.$$

A k szám milyen értékeire lesznek a B, M és N pontok kollineárisak?

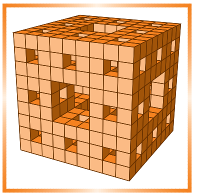
Matlap, Kolozsvár (2017)

❄

Beküldési határidő: 2024. március 10.

Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄



A B pontversenyben kitűzött feladatok (5366–5373.)

B. 5366. Van-e olyan $n>1$ összetett egész szám, amely rendelkezik a következő tulajdonsággal: ha $1=d_1<d_2<\ldots<d_k=n$ jelölik n pozitív osztóit, akkor d_i osztható $(d_{i-1}+d_{i-2})$-vel minden $3\le i\le k$ esetén?

(3 pont) (IMO 2023/1 módosítása)

B. 5367. *a*) Az egységnyi sugarú nyílt körlapban elhelyeztünk egymásra merőlegesen két ℓ hosszúságú nyílt szakaszt úgy, hogy a szakaszoknak nincs közös pontjuk. Mennyi lehet ℓ?

b) Az egységnyi sugarú nyílt gömbben elhelyeztünk három ℓ hosszúságú nyílt szakaszt úgy, hogy páronként merőlegesek, és semelyik kettőnek nincs közös pontja. Mennyi lehet ℓ?

(4 pont) Javasolta: *Vígh Viktor* (Sándorfalva)

B. 5368. Egy pingpongbajnokságon teljes körmérkőzést játszottak, azaz mindenki mindenkivel pontosan egyszer játszott. A győzelemért 1, a vereségért 0 pont járt (döntetlen nincs a pingpongban). Érdekes módon volt egy olyan játékos, aki pontosan azokat az ellenfeleit győzte le, akik nála több pontot szereztek a bajnokság végére, és pontosan azoktól kapott ki, akik nála kevesebb pontot szereztek.

Legalább hány résztvevője lehetett a bajnokságnak?

(Lehetséges, hogy több versenyzőnek is ugyanannyi pontja lett a verseny végén. A bajnokságon legalább ketten vettek részt.)

(4 pont) Javasolta: *Nagy Kartal* (Budapest) és *Hujter Bálint* (Budapest)

B. 5369. Az ABC szabályos háromszög P belső pontjára $APB\sphericalangle=150^\circ$. Mutassuk meg, hogy $PA^2+PB^2=PC^2$.

(4 pont) Javasolta: *Vígh Viktor* (Sándorfalva)

B. 5370. Legyen k pozitív egész, és tegyük fel, hogy az $a_1,\ldots,a_k$ valós számokra $\sum_{i=1}^{k}(k-i+1)a_i=0$. Mutassuk meg, hogy van olyan $m\le k$ pozitív egész szám, amelyre

$$2m\sum_{i=1}^{m}a_i\le\sum_{i=1}^{m}ia_i.$$

(5 pont) Javasolta: *Vígh Viktor* (Sándorfalva)

B. 5371. Legyen P pont az ABC háromszög belső pontja. Jelölje a P pont merőleges vetületét a BC, CA és AB oldalakra rendre D, E és F. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{PE+PF}{PA}+\frac{PF+PD}{PB}+\frac{PD+PE}{PC}\le 3.$$

(5 pont) Javasolta: *Bencze Mihály* (Brassó)

B. 5372. Egy gömb felszínét néhány főkörrel gömbi háromszögekre és négyszögekre daraboltuk úgy, hogy semelyik három főkör nem megy át egy ponton, továbbá keletkezett legalább egy négyszög. Mutassuk meg, hogy pontosan nyolc gömbháromszöget és hat gömbi négyszöget kaptunk.

(6 pont) Javasolta: *Vígh Viktor* (Sándorfalva)

B. 5373. Legyen n pozitív egész szám. Igazoljuk, hogy az $a_{7n}x^{7n}+\dots+a_1x+a_0=(x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)^n$ polinom páratlan együtthatóinak száma legalább 8.

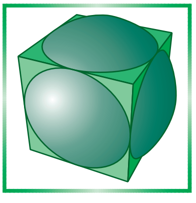
(6 pont) Javasolta: *Pach Péter Pál* (Budapest)

❄

Beküldési határidő: 2024. március 10.

Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄



Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (872–874.)

A. 872. Minden k pozitív szám esetén legyen $a_{k,1}$, $a_{k,2}$, ... egy pozitív egész számokból álló sorozat. Minden k pozitív egész szám esetén legyen az $\{a_{k+1,i}\}$ sorozat az $\{a_{k,i}\}$ sorozat különbségsorozata, azaz minden k és i pozitív egészre teljesül, hogy $a_{k,i+1}-a_{k,i}=a_{k+1,i}$.

Lehetséges-e, hogy minden pozitív egész pontosan egyszer szerepel az $a_{k,i}$ számok között?

Javasolta *Matolcsi Dávid* (Berkeley)

A. 873. Az $ABCD$ egy konvex húrnégyszög, melyben $AB\cdot CD=AD\cdot BC$ teljesül. Az ABC háromszög I középpontú ω beírt köre a BC, CA és AB oldalakat rendre az A', B' és C' pontokban érinti. Legyen K az ID egyenes és az $A'B'C'$ háromszög Feuerbach-körének azon metszéspontja, amely az ID szakasz belsejében van.

Mutassuk meg, hogy ha S az $A'B'C'$ háromszög súlypontja, akkor az SK egyenes és a BB' egyenes ω-n metszi egymást.

Javasolta *Bán-Szabó Áron* (Budapest)

A. 874. Nyihaha és Bruhaha két egymás melletti sziget, mindkettőn n ember él.

Nyihaha lakói mind Lovagok, akik mindig igazat mondanak, vagy Lókötők, akik mindig hazudnak. Bruhaha lakói normális emberek, akik mondhatnak igazat és hazugságot is. Mindkét szigeten hagyomány egy rituálé: amikor egy hajós érkezik a szigetre, akkor minden lakó véletlenszerűen (egyenletes eloszlással és egymástól függetlenül) rámutat egy másik szigetlakóra, és azt mondja „Ő Lovag” vagy „Ő Lókötő”. Nyihaha szigetén a Lovagok az igazat, a Lókötők hazugságot mondanak arról, akire mutatnak. Bruhaha szigetén pedig mindenki, egymástól függetlenül 1/2 valószínűséggel mondja ezt vagy azt.

Szindbád megérkezik Bruhaha szigetére, de eredetileg nem tudja, melyik szigeten van. Megfigyelve a rituálét, p_n valószínűséggel lát olyat, amiből egyértelműen meg tudja állapítani, hogy nem Nyihahán van. Igaz-e, hogy $p_n \to 1$, ha $n \to \infty$?

Javasolta *Matolcsi Dávid* (Berkeley)

❄

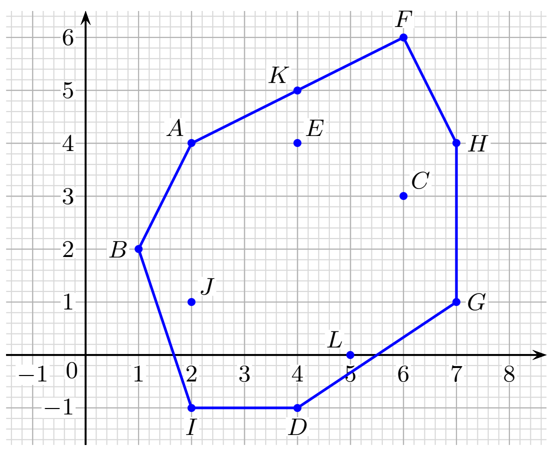
Beküldési határidő: 2024. március 10.

Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄

Informatikából kitűzött feladatok (615–618.)

I. 615. Adott a koordinátarendszerben néhány pont, amelyek mindkét koordinátája egész szám. A pontok nem mind esnek egy egyenesre. Körbevesszük ezeket a pontokat egy olyan konvex sokszöggel, amelyet a csúcsok egy része határoz meg és minden pont e sokszög határán vagy belsejében van (a keletkező alakzatot konvex buroknak hívjuk). Adjuk meg a sokszög csúcsainak számát!



A standard bemenet első sorában a pontok `N` száma található ($5 \leq$ `N` ≤ 100), a következő sorok mindegyikében egy-egy csúcs két egész koordinátája szerepel szóközzel elválasztva.

A program a standard kimenet egyetlen sorába írja ki a körbevételhez szükséges sokszög csúcsainak számát.

Példa:

`Bemenet (a / jel sortörést helyettesít)`	`Kimenet`
`12` `2 4 / 12 / 63 / 4 -1 / 4 4 / 6 6 / 7  1 / 7 4 / 2 -1 / 2 1 / 4 5 / 5 0`	`7`

Beküldendő egy tömörített `i615.zip` állományban a program forráskódja és rövid dokumentációja, amely megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben fordítható.

(10 pont)

I. 616. Egy gyöngysorba különböző színű gyöngyöket fűztek fel a gyerekek. A gyöngyök színét az angol ábécé nagybetűivel adjuk meg.

Készítsünk programot `i616` néven, amely a megadja a gyöngysor olyan `K` hosszú szakaszát, amelyben a legkevesebb a gyöngyök színének száma.

A program standard bemenetének első sorában a gyöngysor elemszáma $\mathtt{N}$ ($1 \leq \mathtt{N} \leq 10\,000$) és a gyöngysorszakasz hossza ($1 < \mathtt{K} < \mathtt{N}$) van. Az ezt követő sorban a gyöngyök színeit jelölő nagybetűk vannak szóközzel elválasztva.

A program a standard kimenetre írja ki annak a `K` hosszú gyöngysorrészletnek a kezdő sorszámát, amelyen belül a legkevesebb szín van. Több megoldás esetén a kisebb kezdősorszámút írjuk ki.

Példa a bemenetre:	**Kimenetre**
10 5 K K P Z P S P P S Z	5

Beküldendő egy tömörített `i616.zip` állományban a program forráskódja és rövid dokumentációja, amely megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben futtatható.

(10 pont)

I. 617. A születéskor várható élettartam változását vesszük górcső alá a 2000-től 2021-ig születettek között a Föld néhány országában.

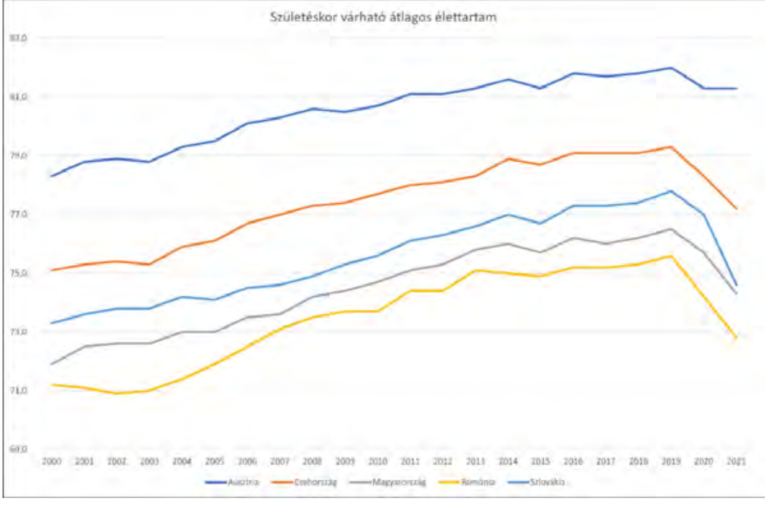
1. Nyissunk egy üres táblázatkezelő munkafüzetet.
2. Töltsük be egy üres munkalapra az **A1**-es cellától kezdve az UTF-8 kódolású, tabulátorokkal tagolt `adatok.txt` fájl tartalmát. Munkánkat mentsük **`elettartam`** néven a táblázatkezelő alapértelmezett formátumában.
3. Az **A57**-es cellába kerüljön válasz az **A56**-os cellában olvasható kérdésre.
4. Az **X3:X46** tartomány celláiban jelenítsük meg, hogy az egyes országokban hány százaléka a 2019-es adat a 2000-es évinek. Az eredmények százalék formátumúak legyenek két tizedesjegy pontossággal.
5. Számítsuk ki a **B47:W47** tartomány celláiban, hogy mennyi az európai országok (3–33. sor) éves átlaga.
6. A **B48:W48** tartomány celláiba kerüljön a „Jó” felirat, ha az adott évben az európai átlag elérte vagy meghaladta az Egyesült Államok adatát; különben a cella maradjon üres.

7. Az **A50**-es cellába kerüljön válasz az **A49**-es cellában olvasható kérdésre.

8. Az **A51**-es cella kérdésére válaszként az országok neve a **B53**-es, a **B54**-es és a **B55**-ös cellákba kerüljön, az életkor pedig az **E53**-as, az **E54**-es és az **E55**-ös cellákba.

9. Az **Y3:Y46** tartomány celláiba kerüljön a „+” jel, ha az adott országban 2019-től 2021-ig folyamatosan nőtt a várható életkor, „−” jel, ha folyamatosan csökkent, egyéb esetekben a cella maradjon üres.

10. Készítsük el a minta szerinti grafikont ***Ausztria***, ***Csehország***, ***Magyarország***, ***Románia*** és ***Szlovákia*** adatairól. A diagramot helyezük új, diagram típusú munkalapra.



Segédszámításokat az **AA** oszloptól, illetve a **60**. sortól kezdve végezhetünk. A megoldásban saját függvény vagy makró nem használható.

Forrás: `https://www.ksh.hu/stadat_files/nep/hu/nep0060.html`

Beküldendő egy tömörített `i617.zip` állományban a táblázatkezelő munkafüzet, illetve egy rövid dokumentáció, amelyben szerepel a megoldáskor alkalmazott táblázatkezelő neve, verziószáma.

A megoldáshoz szükséges letölthető állomány: *adatok.txt.*

(10 pont)

I. 618. Középosztósnak nevezik azokat a legalább háromjegyű számokat, ahol a szám első és utolsó jegyét elhagyva a kapott szám osztható az első és utolsó jegy összegével. Duplaközéposztósnak nevezik azokat a legalább ötjegyű középosztós számokat, ahol a szám első és utolsó jegyét elhagyva a kapott szám szintén középosztós.

Például 2124 középosztós, mert a közepén lévő szám, ami 12, osztható $(2+4=)$6-tal. A 321243 dupla középosztós, mert 2124 középosztós, és osztható

$(3+3=)$6-tal. A leírásból következik, hogy a duplaközéposztós számok legalább ötjegyűek.

Állítsuk elő táblázatkezelő segítségével az összes legfeljebb hatjegyű duplaközéposztós számot, és válaszoljunk néhány ezekkel kapcsolatos kérdésre!

1. Nyissunk meg egy üres munkafüzetet, generáljuk a kívánt számokat a munkalap **A** oszlopába. Mentsük el a munkafüzetet ***gener*** néven.
2. Nyissuk meg a **kozep.xlsx** munkafüzetet és másoljuk át a generált számokat ebbe a munkafüzetbe függőlegesen az **A3**-as cellától kezdve. Az első szám az **A3-as** cellában legyen, a számok között ne legyen üres cella.
3. Válaszoljunk az **I3:I9** tartomány celláiban függvény segítségével a tőlük balra feltett kérdésekre.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2										
3	10010		A talált számok száma:							
4	10020			Közülük a 0 számjegyet nem tartalmazók száma:						
5	10021			A legkisebb ilyen:						
6	10030			A legnagyobb ilyen:						
7	10032		A talált ötjegyű számok száma:							
8	10040		A csupa különböző számjegyből állók száma:							
9	10041			Ebből ötjegyű:						
10	10043									

Magyarázatként nézzük a 10 032 számot: a szélei 1 és 2, ezek összege 3. A szám közepe 003, ami valójában 3; 3 osztható 3-mal. A középső 003 szélei 0 és 3, összegük 3. A szám közepe 0, és 0 is osztható 3-mal. Vagy például a 797 562 szám szélső jegyei 7 és 2, összegük 9, és a közepe, 9756 osztható 9-cel, a 9756 szélei 9 és 6, összegük 15, és a közepe 75 osztható 15-tel.

Segédszámításokat a ***gener*** munkafüzetben a **B** oszloptól jobbra, a ***kozep*** munkafüzetben a **J** oszloptól jobbra végezhetünk. A megoldásban saját függvény vagy makró nem használható.

Beküldendő egy tömörített `i618.zip` állományban a **gener** és a **kozep** táblázatkezelő munkafüzet, illetve egy rövid dokumentáció, amelyben szerepel a generáláskor alkalmazott módszer, a táblázatkezelő neve, verziószáma.

Letölthető fájl: `kozep.xlsx`.

(10 pont)

❄

Beküldési határidő: 2024. március 15.

Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄

Mérési feladatok megoldása

M. 426. *Mérjük meg gyári műszer használata nélkül három különböző, a háztartásban található anyag viszkozitását! Például: étolaj, méz, mosogatószer, motorolaj, tusfürdő stb.*

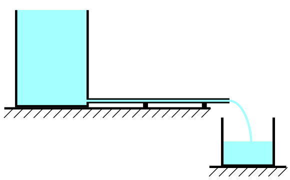
(*6 pont*) Közli: *Széchenyi Gábor,* Budapest

Megoldás. A feladat három különböző, háztartásban megtalálható folyadék viszkozitásának megmérése. A kiválasztott anyagok viszkozitása jelentősen eltér egymástól, így két különböző módszert használtam. Az egyik a Hagen–Poiseuille-törvényen, a másik a Stokes-törvényen alapul. Az elsőt a „hígabb” folyadék (olaj), a másodikat a nagyobb viszkozitású folyadékok (mosogatószer és méz) méréséhez használtam. A teremben, ahol a méréseket végeztem, végig 20 °C volt a hőmérséklet. Rendelkezésemre állt egy analitikai mérleg és mérőhengerek. A további eszközöket az egyes módszereknél ismertetem.

I. mérési módszer. A Hagen–Poiseuille-törvény egy hengeres csövön átfolyó anyag térfogatáramát adja meg lamináris áramlás esetén:

$$\frac{\Delta V}{\Delta t}=\frac{R^4\pi}{8\ell\eta}\Delta p,$$

ahol R és ℓ rendre a cső sugara és hossza, Δp a nyomáskülönbség a cső két vége között és η a folyadék (vagy gáz) viszkozitása.



1. ábra

Az *1. ábrán* látható a mérési elrendezés: egy műanyag vödör oldalának alján kis lyukat fúrtam, amibe először egy szívószálakból álló csövet rögzítettem. Azonban a szívószálak illesztésénél nem tudtam megakadályozni a szivárgást, és a mérés nem volt reprodukálható, így a szívószálakat kicseréltem egyetlen vékony műanyag csőre, ezzel ezek a problémák megoldódtak. A csövet egy edénybe vezetve meg tudtam mérni egy adott idő alatt kiáramló folyadék térfogatát. A nyomáskülönbséget a vödörben lévő folyadék hidrosztatikai nyomása okozza, amelyet a folyadék folyamatos pótlásával tartottam állandó értéken. A műanyagcső hosszának változtatásával egy méréssorozatot végeztem (*1. táblázat*).

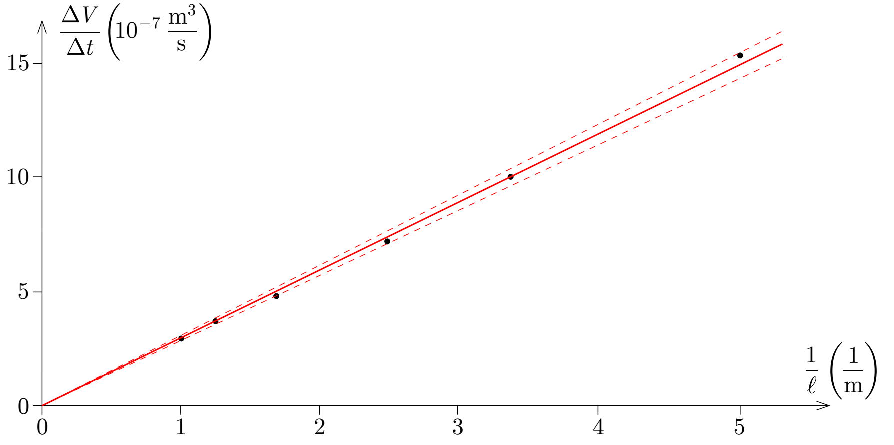
A műanyag cső belső sugara $R=2{,}5\cdot 10^{-3}$ m (a csőbe hézagmentesen beleilleszkedik egy 5 mm-es fúrószár), az olaj sűrűsége mérőhenger és az analitikai

ℓ (m)	$\frac{1}{\ell}$ $\left(\frac{1}{\mathrm{m}}\right)$	Δt (s)	ΔV $\left(10^{-4}\ \mathrm{m}^3\right)$	$\frac{\Delta V}{\Delta t}$ $\left(10^{-7}\ \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}}\right)$
1,00	1,00	1800	5,24	2,91
0,80	1,25	1200	4,43	3,69
0,60	1,67	900	4,30	4,78
0,40	2,5	600	4,28	7,13
0,30	3,3	450	4,43	9,83
0,20	5,0	450	6,90	15,3

1. táblázat

mérleg segítségével megmérve $\varrho_{\mathrm{olaj}} = 917\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$, az állandóan tartott folyadékoszlop magassága $h = 0{,}15$ m, a nyomáskülönbség $g = 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ értékkel számolva $\Delta p = \varrho g h = 1350$ Pa.

A grafikonon $\frac{\Delta V}{\Delta t}$-t ábrázoltam $\frac{1}{\ell}$ függvényében (*2. ábra*). A mérési pontokra illesztett origón átmenő egyenes meredekségéből a többi mért adat ismeretében a Hagen–Poiseuille-törvény alapján a viszkozitás meghatározható.



2. ábra

Az illesztett egyenes meredeksége $m = (2{,}92 \pm 0{,}14) \cdot 10^{-7}\ \frac{\mathrm{m}^4}{\mathrm{s}}$, amiből az olaj viszkozitása:

$$\eta = \frac{\Delta p R^4 \pi}{8m} = (7{,}09 \pm 0{,}35) \cdot 10^{-2}\ \mathrm{Pa\,s},$$

amelynek nagyságrendje jól egyezik az irodalmi adatokkal (az angol Wikipedia szerint 25 °C-on kb. $5 \cdot 10^{-2}$ Pa s).

A módszerrel először a víz viszkozitását akartam megmérni, de a vízből kiváló apró buborékok miatt a mérés nem volt reprodukálható. Ez esetleg a víz forralásával és visszahűtésével kiküszöbölhető, de végül inkább más folyadékot választottam. (A módszer további korlátairól lásd az *1. megjegyzést.*)

II. mérési módszer. Egy *„végtelen” kiterjedésű* közegben egy *„lassan” mozgó* gömbre a Stokes-törvény szerint

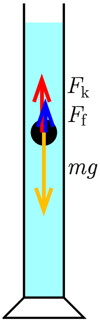
$$F_\mathrm{k} = 6\pi r v \eta$$

közegellenállási erő hat a folyadékhoz viszonyított sebességével ellentétes irányban. Az összefüggésben r a gömb sugara, v a relatív sebesség és η a közeg viszkozitása. (A véges közegben szükséges korrekcióról és arról, hogy mi számít elegendően lassúnak, lásd a *2. megjegyzést.*)

Ha egy m tömegű és V térfogatú golyót ϱ sűrűségű folyadékba ejtünk, akkor a golyóra az mg nehézségi erő, az $F_\mathrm{f} = \varrho V g$ felhajtóerő és az F_k közegellenállási erő hat. Ez utóbbi sebességfüggő, így idővel kialakul egy állandósult sebesség, amikor a három erő eredője nulla lesz. Feltételezve, hogy a Stokes-törvény érvényes, az erőegyensúly:

$$mg - \varrho \frac{4r^3\pi}{3} g = 6\pi r v \eta. \tag{1}$$

Mérni kell a golyó átmérőjét (ebből számolható a sugara és a térfogata), az egyenletes süllyedés sebességét (azt az időt, amely alatt egy adott távolságot megtesz), valamint a folyadék sűrűségét. A méréseket mosogatószerrel (*2. táblázat*) és mézzel (*3. táblázat*), mindkét anyagnál öt-öt különböző üveggolyóval végeztem el. A tapasztalat szerint a nagyobb golyók kevésbé egyenletesen süllyedtek. Ennek oka lehet, hogy a golyók és a henger fala között kevés hely volt, amely befolyásolta a folyadék áramlását. A golyók átmérőjét tolómérővel, tömegét analitikai mérleggel mértem. A folyadékok sűrűségét most is mérőhengerrel és az analitikai mérleggel határoztam meg: $\varrho_\text{mosogatószer} = 1040\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, $\varrho_\text{méz} = 1450\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.

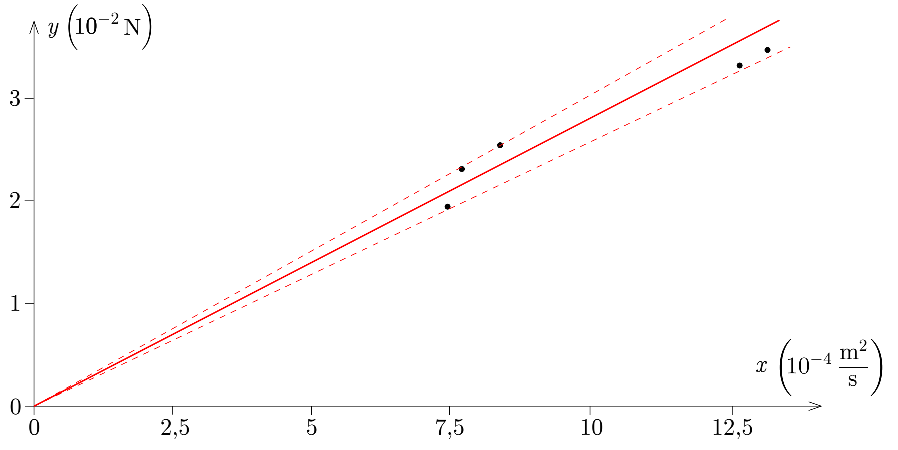


3. ábra

Az adatok kiértékelését most is grafikonok segítségével végeztem (a *3. ábra* a mosogatószer, a *4. ábra* a méz mérésének grafikonja). Bevezetve az $x = 6\pi r v$ és az $y = mg - \varrho \frac{4r^3\pi}{3} g$ jelöléseket az (1) egyenlet $y = \eta x$ alakra egyszerűsödik. Ha ábrázoljuk y-t x függvényében, és a mérési pontokra origón átmenő egyenest illesztünk, annak meredeksége megadja a folyadék viszkozitását.

d (10^{-2} m)	r (10^{-3} m)	m (10^{-3} kg)	t (s)	s (m)	v $\left(10^{-3}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)$	x $\left(10^{-4}\ \frac{\text{m}^2}{\text{s}}\right)$	y (10^{-2} N)
1,35	6,75	3,3	40	0,23	5,75	7,32	1,92
1,42	7,1	3,9	40	0,23	5,75	7,7	2,29
1,55	7,75	4,6	40	0,23	5,75	8,4	2,52
1,58	7,9	5,5	27	0,23	8,52	12,7	3,29
1,67	8,35	6,05	27,5	0,23	8,36	13,2	3,44

2. táblázat

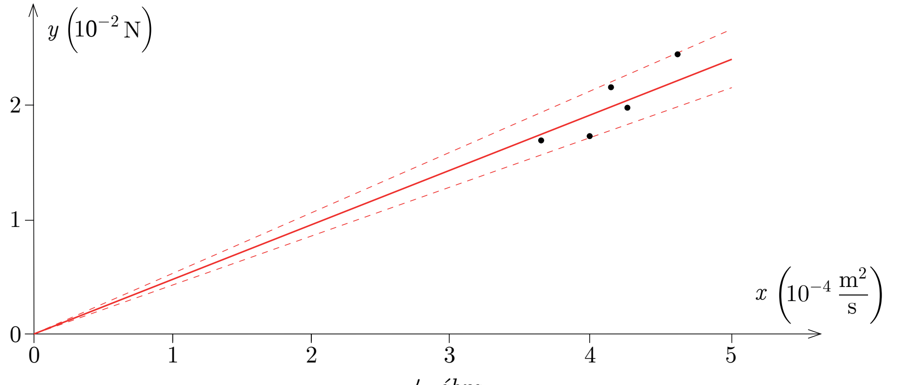


3. ábra

A mérési pontokra illesztett egyenes meredeksége a mosogatószer viszkozitása: $\eta_{\text{mosogatószer}} = (27{,}4 \pm 2{,}8)$ Pa s.

d $(10^{-2}$ m)	r $(10^{-3}$ m)	m $(10^{-3}$ kg)	t (s)	s (m)	v $\left(10^{-3}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)$	x $\left(10^{-4}\ \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}}\right)$	y $(10^{-2}$ N)
1,42	7,1	3,9	84,6	0,23	2,72	3,64	1,69
1,55	7,75	4,6	83,8	0,23	2,74	4,00	1,74
1,60	8,0	5,15	81,3	0,23	2,83	4,27	2,00
1,63	8,15	5,5	85	0,23	2,71	4,16	2,17
1,67	8,35	6,05	78	0,23	2,95	4,64	2,46

3. táblázat



4. ábra

Az illesztett egyenes meredeksége a méz viszkozitása: $\eta_{\text{méz}} = (48{,}6 \pm 4{,}8)$ Pa s.

Csapó András (Budapest, Baár-Madas Ref. Gimn., 9. évf.)

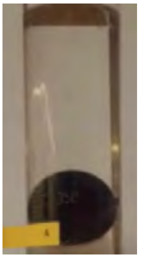
Megjegyzések. 1. Az első módszert akkor lehet használni, ha a kiáramló folyadék vagy gáz aránylag lassan mozog – ez „hosszú” és „vékony” cső esetén teljesül. Ellenkező esetben a nyomáskülönbség egy része a kiáramló közeg felgyorsítását biztosítja. Ha a kiáramlás egy kis lyukon (vagy egész rövid csövön) történik, akkor a viszkozitásnak egyáltalán nincs szerepe, a kiáramlási sebességet a Bernoulli-törvény alapján lehet kiszámítani:

$$v=\sqrt{\frac{2\Delta p}{\varrho}}.$$

Ha a nyomáskülönbséget a h magasságú folyadékoszlop hidrosztatikai nyomása okozza, akkor pedig a közismert Torricelli-féle kiömlési törvénnyel: $v=\sqrt{2gh}$. Amennyiben a mérésünknél a kiáramló folyadék átlagos sebessége (amelyet a térfogatáram és a cső keresztmetszetének hányadosaként számolhatunk ki) jóval kisebb, mint ez az érték, akkor a Hagen–Poiseuille-törvény jól használható a viszkozitás mérésére.

2. A második módszernél az okoz szinte az összes megoldó esetében akár több nagyságrendnyi eltérést is az eredményekben, hogy olyan mozgásoknál számolnak a Stokes-törvénnyel, ahol az csak közelítőleg, vagy egyáltalán nem teljesül. A Stokes-törvény az ismertebb, egyszerű alakjában ($F_\mathrm{k}=6\pi rv\eta$) csak végtelen (a gömb méreténél nagyságrendekkel nagyobb) közegben használható. Több megoldó is megtalálta és használta azt a korrigált formulát, amelyet akkor lehet alkalmazni, ha egy r sugarú gömb egy R sugarú hengeres edényben, annak szimmetriatengelye mentén mozog:

$$F_\mathrm{k}=6\pi rv\eta\left(1+2{,}4\frac{r}{R}\right).$$



6. ábra

Ugyanakkor, ha a golyó szinte teljesen kitölti a hengeres edényt (mint az egyik megoldásból származó *6. ábrán* látható), akkor a golyó és a cső fala között nagyon gyors lesz a folyadék visszaáramlása, és a Stokes-törvény még ezzel a korrekcióval se használható.

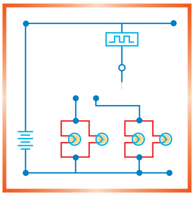
A másik, jelentősebb hibaforrást az okozza, hogy a Stokes-törvény csak egészen lassú lamináris áramlások esetén érvényes. Azt, hogy a mozgás elég lassú-e, egy folyadékok áramlásánál használt dimenziótlan mennyiség, a *Reynolds-szám* segítségével lehet eldönteni. A Reynolds-szám a közeg (folyadék vagy gáz) ϱ sűrűségétől és η viszkozitásától, valamint az áramlás v relatív sebességétől és a közegben mozgó test (vagy az áramló közeget körbevevő cső) méretétől, esetünkben a gömb sugarától függ:

$$Re=\frac{\varrho rv}{\eta}.$$

Az áramlások kb. 1200-as Reynolds-szám felett biztosan turbulenssé válnak. Ilyenkor a közegellenállási erő a sebesség négyzetével (vagy még magasabb hatványával) arányos, és nem függ a viszkozitástól. 1200-nál kisebb Reynolds-szám esetén alakulhat ki lamináris (réteges) áramlás, és ekkor a közegellenállási erő már arányos a sebességgel. Azonban a Stokes-törvény levezetésekor alkalmazott közelítések csak egészen kicsi, $Re<1$ Reynolds-számnál érvényesek, így a képletet csak ekkor lehet a mérések kiértékeléséhez használni.

Hogyan lehet ezt teljesíteni? Láthatjuk, hogy nagy viszkozitás, kis méret és kis sebesség eredményez kis Reynolds-számot. Méz esetében nem túl nagy méretű (néhány mm átmérőjű) golyókkal ez már könnyen elérhető. Kisebb viszkozitású folyadékoknál azonban egész apró, és a folyadéknál nem sokkal nagyobb sűrűségű (emiatt aránylag kis sebességgel süllyedő) golyókra van szükség. Ekkor viszont egyrészt a golyók átmérőjének és tömegének mérése okoz nehézséget, másrészt a közel azonos sűrűségeket is nagyon pontosan kell mérni, hiszen a számításban ezek különbsége szerepel. (A víz esetében ez tizedmilliméteres átmérőt jelentene, így ez a módszer a víz viszkozitásának mérésére nem használható – viszont a viszkozitás ismeretében mérni lehet így apró szemcsés anyagok átmérőjét.)

13 dolgozat érkezett. Helyes 7 megoldás. Kicsit hiányos (5 pont) 2, hiányos (3–4 pont) 4 dolgozat.

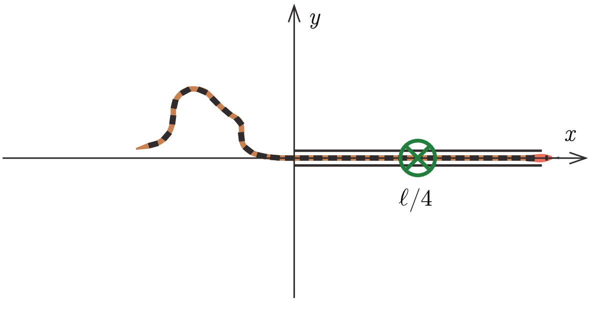


Fizika gyakorlatok megoldása

G. 824. *Egy ℓ hosszúságú kígyó a hosszának feléig besiklott egy keskeny, egyenes csőbe. A kígyó kint lévő vége tetszőlegesen kanyaroghat a vízszintes talajon. Ha a kígyót homogén tömegeloszlású, ℓ hosszúságú, hajlékony kötéllel modellezzük, akkor a sík mely pontjaiban lehet a kígyó tömegközéppontja?*

(*4 pont*)

Megoldás. Helyezzük a kígyót koordináta-rendszerbe az *1. ábrán* látható módon!



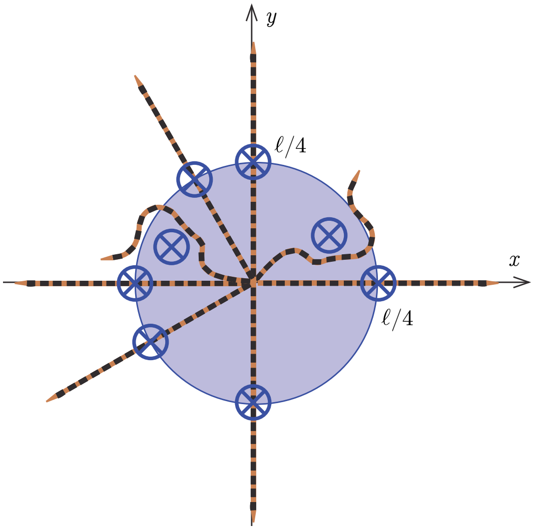
1. ábra

A csőben lévő kígyófél tömegközéppontja a

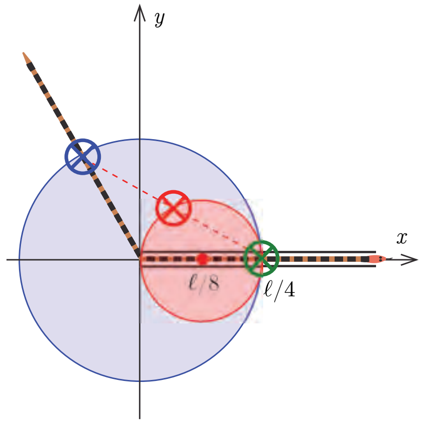
$$T_{\text{bent}} = (x_{\text{b}}, y_{\text{b}}) = \left(\frac{\ell}{4}, 0\right) \tag{1}$$

pontban található.

A kígyó kint lévő felének lehetséges tömegközéppontjait a kinyújtott helyzetű félkígyók tömegközéppontjai határolják (ennek bizonyítását lásd a *Megjegyzésben*). Tehát a kint lévő kígyófél tömegközéppontja egy origó középpontú, $\ell/4$ sugarú körlap valamelyik pontja lehet (*2. ábra*).



2. ábra



3. ábra

A teljes kígyó tömegközéppontja a két kígyófél tömegközéppontját összekötő szakasz felezőpontja. A lehetséges pontok (a *3. ábrán* pirossal jelölt) határvonalát a kinti kígyófél kinyújtott helyzetei által meghatározott (kék) körvonal segítségével szerkeszthetjük meg. Néhány ilyen pont alapján már sejthetjük, hogy a síkidom egy $(\ell/8, 0)$ középpontú, $\ell/8$ sugarú kör. Ezt az alábbi módon láthatjuk be. A kinti kinyújtott helyzetű kígyórész tömegközéppontja $T_{\mathrm{kint}} = (x_{\mathrm{k}}, y_{\mathrm{k}})$ mindig egy $\ell/4$ sugarú $(0,0)$ középpontú körvonalra illeszkedik:

$$x_{\mathrm{k}}^2 + y_{\mathrm{k}}^2 = \left(\frac{\ell}{4}\right)^2. \tag{2}$$

A teljes kígyó tömegközéppontjának $T = (x, y)$ koordinátái a kígyófelek tömegközéppontjai megfelelő koordinátáinak számtani közepe:

$$x = \frac{x_{\mathrm{k}} + x_{\mathrm{b}}}{2}, \tag{3}$$

$$y = \frac{y_{\mathrm{k}} + y_{\mathrm{b}}}{2}. \tag{4}$$

A (3)-as és (4)-es egyenletből x_{k}-t és y_{k}-t kifejezve, majd (1)-ből x_{b}-t, illetve y_{b}-t behelyettesítve:

$$x_{\mathrm{k}} = 2x - x_{\mathrm{b}} = 2x - \frac{\ell}{4}, \tag{5}$$

$$y_{\mathrm{k}} = 2y - y_{\mathrm{b}} = 2y. \tag{6}$$

Helyettesítsük be az (5) és (6) kifejezéseket a (2)-es egyenletbe:

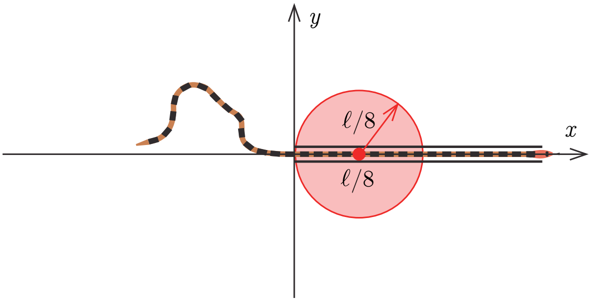
$$\left(2x - \frac{\ell}{4}\right)^2 + (2y)^2 = \left(\frac{\ell}{4}\right)^2,$$

majd mindkét oldalt 4-gyel elosztva:

$$\left(x-\frac{\ell}{8}\right)^2+y^2=\left(\frac{\ell}{8}\right)^2.$$

Ez valóban egy $(\ell/8, 0)$ középpontú, $\ell/8$ sugarú kör egyenlete.

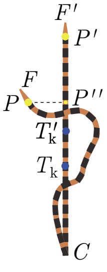
Tehát a kígyó tömegközéppontja a cső nyílását érintő, a cső vonalára illeszkedő középpontú, $\ell/8$ sugarú körlapon lehet (*4. ábra*).



4. ábra

Fülöp Magdaléna (Pécsi Leőwey K. Gimn., 9. évf.)

Megjegyzés. Tekintsük a kígyó kint lévő felét a cső vége (C) és a kígyó farka (F) pontok között kanyargó görbe vonalnak, aminek tömegközéppontja T_k (*5. ábra*). Ha a „félkígyó” kiegyenesedne, és CF' a CT_k félegyenesen lenne, akkor a T'_k tömegközéppontja C-től $\ell/4$ távolra kerülne.



5. ábra

Hasonlítsuk össze a kanyargós kígyó tetszőleges P pontját ugyanezen pontnak a kiegyenesedett kígyón megtalálható P' megfelelőjével. Nyilván $CP \le CP'$, továbbá $CP'' \le CP$ (ahol P'' a P pont merőleges vetülete a CF' egyenesen), és így

$$CP'' \le CP \le CP'.$$

A görbe félkígyó tömegközéppontját a CP'' távolságok határozzák meg. Mivel a fenti egyenlőtlenség minden P pontra érvényes, a tömegközéppontokra is fennáll:

$$CT_\mathrm{k} \le CT'_\mathrm{k} = \frac{\ell}{4},$$

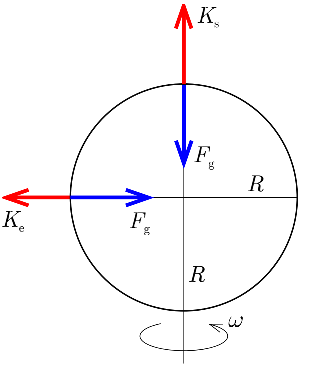
és éppen ezt akartuk bizonyítani.

42 dolgozat érkezett. Helyes 18 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 4, hiányos (1–2 pont) 14, hibás 6 dolgozat.

G. 828. *Tételezzük fel, hogy a Föld tökéletesen gömb alakú, tömegeloszlása gömbszimmetrikus, sugara 6400 km, tömege és tengely körüli forgásideje megegyezik az igazi Föld adataival. Egy jól megtermett fizikus az Északi-sarkon dekagramm pontos fürdőszobamérlegével éppen* 100,00 *kg-osnak méri magát. Mennyit mutatna ugyanez a mérleg, ha az Egyenlítőn végezné a mérést?*

(*3 pont*)

Megoldás. A fizikus *mért* tömege a sarkon $m_\mathrm{s} = 100{,}00$ kg. Az idealizált Föld sugara $R = 6{,}4 \cdot 10^6$ m, a tömege és (csillagokhoz viszonyított) forgási ideje a valódi Földével megegyezően $M = 5{,}974 \cdot 10^{24}$ kg, illetve $T = 23$ h $56'$ $4'' = 86164$ s.



1. ábra

A sarkon a testre ható erők eredője 0, az erőegyensúly egyenlete:

$$\gamma \frac{mM}{R^2} - K_\mathrm{s} = 0, \tag{1}$$

ahol $\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \mathrm{Nm}^2\mathrm{kg}^{-2}$ a gravitációs állandó, m a fizikus (ismeretlen) tömege és K_s a nyomóerő a sarkon.

Az Egyenlítőnél a Föld forgása miatt a test gyorsul a Föld középpontja felé, a mozgásegyenlete:

$$\gamma \frac{mM}{R^2} - K_\mathrm{e} = m\omega^2 R, \tag{2}$$

ahol $\omega = 2\pi/T = 7{,}293 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{s}^{-1}$ a Föld forgásának szögsebessége és K_e a nyomóerő az Egyenlítőn.

Az Egyenlítőn a mérleg által mutatott tömeg (1) és (2) felhasználásával:

$$m_\mathrm{e} = \frac{K_\mathrm{e}}{K_\mathrm{s}} m_\mathrm{s} = \frac{\gamma \frac{mM}{R^2} - m\omega^2 R}{\gamma \frac{mM}{R^2}} m_\mathrm{s} = \left(1 - \frac{\omega^2 R^3}{\gamma M}\right) m_\mathrm{s} = 99{,}65 \text{ kg}.$$

Bús László Teodor (Ceglédi Kossuth Lajos Gimn., 10. évf.) dolgozata alapján

Megjegyzések. 1. A fizikus tényleges tömegét csak akkor tudnánk megmondani, ha ismernénk, hogy hol kalibrálták dekagramm pontossággal a mérleget.

2. Az idealizált Földön a nehézségi gyorsulás a sarkon $g_\mathrm{s} = \gamma \frac{M}{R^2} = 9{,}728\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, az Egyenlítőn pedig $g_\mathrm{e} = \gamma \frac{M}{R^2} - \omega^2 R = 9{,}694\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ lenne. A feladat eredményét azonban csak két érték különbsége ($g_\mathrm{s} - g_\mathrm{e} = \omega^2 R = 0{,}034\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$) befolyásolja jelentősen, így ha valaki a számolása során a valódi Föld (Budapesten mérhető) $g = 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ nehézségi gyorsulásával számol, akkor is hibahatáron belül ugyanezt az eredményt kapja.

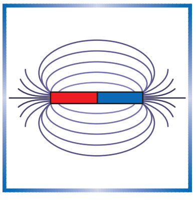
3. Ha a Föld tényleges forgási ideje helyett 24 órával számolunk, akkor is hibahatáron belül ugyanezt az eredményt kapjuk.

4. A Földdel együtt forgó vonatkoztatási rendszerben a test az Egyenlítőn is nyugalomban van. Ebben a rendszerben (amely nem inerciarendszer) azonban fel kell vennünk az $m\omega^2 R$ nagyságú, kifele mutató centrifugális erőt. A (2) összefüggés akkor így módosul:

$$\gamma \frac{mM}{R^2} - m\omega^2 R - K_\mathrm{e} = 0,$$

az eredmény természetesen nem változik.

54 dolgozat érkezett. Helyes 29 megoldás. Kicsit hiányos (2 pont) 11, hiányos (1 pont) 6, hibás 8 dolgozat.



Fizika feladatok megoldása

P. 5509. *Vízszintes talaj közelében lévő játékpuskából kilőtt kicsiny gumilövedék röppályájának emelkedési magassága megegyezik a lőtávolsággal.*

a) A vízszintestől mérve milyen szögben lőttük ki a lövedéket?

b) Mekkorák ezek a távolságok, ha a test kezdősebessége 10 *m/s volt?*

c) Mekkora a pálya görbületi sugara a kilövés utáni pillanatban, illetve a pálya legmagasabb pontjában?

(A közegellenállást elhanyagolhatjuk.)

(*5 pont*) Közli: *Holics László,* Budapest

I. megoldás. *a*) A kezdősebességet fel tudjuk bontani v_x vízszintes és v_y függőleges komponensekre. A hajítás során a testre nem hat vízszintes irányban erő, ezért vízszintesen végig v_x sebességgel mozog. Függőleges irányban az mg nehézségi erő hat rá (m a lövedék tömege), ezért függőlegesen egyenletesen változó mozgást végez. A hajítás teljes t időtartama kétszerese annak az időnek, amely alatt a test függőleges sebessége 0-ra csökken:

$$t = 2\frac{v_y}{g}.$$

A hajítás h magasságának kiszámolásához használhatjuk a négyzetes úttörvényt (mert a tetőponton a függőleges sebesség 0):

$$h = \frac{g}{2}\left(\frac{t}{2}\right)^2 = \frac{v_y^2}{2g}.$$

Vízszintesen a test a hajítás teljes ideje alatt egyenletes mozgást végez, így a hajítás távolsága:

$$d = v_x t = \frac{2v_x v_y}{g}.$$

Legyen a kezdősebesség v_0 és a vízszintessel bezárt szög α. Ekkor a kezdősebesség komponensei:

$$v_x = v_0 \cos\alpha,$$
$$v_y = v_0 \sin\alpha,$$

a hajítás magassága és távolsága pedig:

$$h = \frac{v_y^2}{2g} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g},$$
$$d = \frac{2v_x v_y}{g} = \frac{2v_0^2 \sin\alpha\cos\alpha}{g}.$$

A feladat szerint ez a két távolság egyenlő, ebből:

$$\frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} = \frac{2v_0^2 \sin\alpha\cos\alpha}{g},$$
$$\sin\alpha = 4\cos\alpha,$$
$$\operatorname{tg}\alpha = 4,$$
$$\alpha \approx 76^\circ.$$

b) Ha a kezdősebesség $v_0 = 10$ m/s és $g = 9{,}81$ m/s^2, akkor a hajítás magassága és távolsága:

$$h = d = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} = \frac{8}{17}\frac{v_0^2}{g} \approx 4{,}8 \text{ m}.$$

c) A görbületi sugarat abból a fizikai meggondolásból kaphatjuk meg, hogy ha a test a parabola adott darabjához simuló körpályán mozogna, akkor a centripetális gyorsulása éppen a nehézségi gyorsulás pályára merőleges komponense lenne:

$$g_\perp = a_{\mathrm{cp}} = \frac{v^2}{R},$$

ahol $g_\perp$ a nehézségi gyorsulás pályára merőleges komponense, v a test pillanatnyi sebessége és R a görbületi sugár.

A kilövés pillanata után a sebesség v_0, a nehézségi gyorsulás merőleges komponense $g\cos\alpha$, így:

$$g\cos\alpha = \frac{v_0^2}{R_1},$$
$$R_1 = \frac{v_0^2}{g\cos\alpha} = \sqrt{17}\,\frac{v_0^2}{g} \approx 42 \text{ m}.$$

A hajítás tetőpontján a sebesség v_x, a nehézségi gyorsulás pedig merőleges a pályára, ez alapján:

$$g = \frac{v_x^2}{R_2},$$
$$R_2 = \frac{v_0^2 \cos^2\alpha}{g} = \frac{1}{17}\frac{v_0^2}{g} \approx 0{,}6 \text{ m}.$$

Beke Botond (Budapest, Békásmegyeri Veres Péter Gimn., 11. évf.)

II. megoldás. A feladat c) része differenciálszámítással is megoldható. A test pályáját az

$$y(x) = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2$$

függvény adja meg. Ez az összefüggés megtalálható a *Négyjegyű függvénytáblázatokban*, de könnyen kifejezhető az

$$x(t) = v_0 \cos \alpha \, t,$$
$$y(t) = v_0 \sin \alpha \, t - \frac{g}{2} t^2$$

időfüggvényekből is. Bevezetve a

$$\lambda = \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}$$

jelölést a függvény az egyszerűbb $y(x) = x \operatorname{tg} \alpha - \lambda x^2$ alakba írható.

A görbületi sugár kiszámításához a BME `bmedifferencial.pdf` jegyzetének 9. oldalán[1] talált összefüggést használjuk, amely megadja a görbületet, azaz a görbületi sugár reciprokát:

$$\frac{1}{R(x)} = \kappa(x) = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

A szükséges deriváltak:

$$y' = \operatorname{tg} \alpha - 2\lambda x,$$
$$y'' = -2\lambda,$$

amelyeket felhasználva a görbületi sugár x függvényében:

$$R(x) = -\frac{\left(1 + (\operatorname{tg} \alpha - 2\lambda x)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{2\lambda}.$$

A negatív előjel csak azt mutatja, hogy a pályagörbe konkáv, a keresett görbületi sugarakat $|R(x)|$ adja meg.

A kilövés után közvetlenül $x = 0$, a görbületi sugár az $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = 1/(\cos^2 \alpha)$ azonosságot és λ kifejezését felhasználva, majd az adatokat behelyettesítve:

$$R_1 = |R(0)| = \frac{\left(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha\right)^{\frac{3}{2}}}{2\lambda} = \frac{v_0^2}{g \cos \alpha} \approx 42 \text{ m};$$

[1] elérhető ezen a rövidített linken: `https://rb.gy/geyqnj`

a pálya tetőpontján $x = \frac{d}{2}$, esetünkben $\operatorname{tg}\alpha - \lambda d = 0$, a nevezőbe beírva λ kifejezését, végül az adatokat behelyettesítve a görbületi sugár:

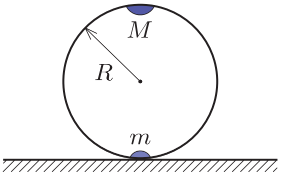
$$R_2 = \left|R\left(\tfrac{d}{2}\right)\right| = \frac{\left(1 + (\operatorname{tg}\alpha - \lambda d)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{2\lambda} = \frac{v_0^2 \cos^2\alpha}{g} \approx 0{,}6\ \mathrm{m},$$

mindkét esetben az előző megoldásban kapott értékkel megegyezően.

Szabó Donát (Miskolci Herman O. Gimn., 11. évf.)

93 dolgozat érkezett. Helyes 47 megoldás. Kicsit hiányos (3–4 pont) 31, hiányos (1–2 pont) 11, hibás 4 dolgozat.

P. 5511. *Egy elhanyagolható tömegű, R sugarú abroncs egyik átmérőjének két végpontjába egy m, illetve egy $M = 2m$ tömegű, pontszerű nehezéket erősítettünk. A függőleges síkú abroncsot asztallapra helyezzük úgy, hogy kezdetben a két nehezék azonos függőleges egyenesen helyezkedik el (a nehezebb van felül). Az abroncsot ebből az instabil egyensúlyi állapotból elengedjük. Az abroncs és az asztallap közötti súrlódás elegendően nagy ahhoz, hogy az abroncs csúszásmentesen gördüljön az asztallapon.*



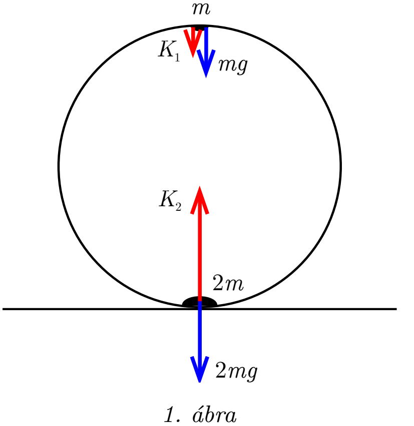
a) Mekkora az abroncs középpontjának sebessége, amikor az M tömegű nehezék eléri pályájának legalsó pontját?

b) Mekkora az a) esetben az asztalra ható nyomóerő?

(*5 pont*) Közli: *Vigh Máté*, Biatorbágy

Megoldás. *a*) Legyen a középpont keresett sebessége v. Mivel az abroncs tisztán gördül az asztallapon, ezért a forgómozgásból származó kerületi sebesség megegyezik a tengely haladási sebességével (csak így lehetséges, hogy a talajjal érintkező pont nyugalomban legyen, ami a tisztán gördülés feltétele). Ez alapján az abroncs legfelső pontjában elhelyezkedő test sebessége $2v$.

A tapadási súrlódási erő nem végez munkát, ezért alkalmazhatjuk a mechanikai energiamegmaradás törvényét:



1. ábra

$$2mg \cdot 2R = mg \cdot 2R + \frac{1}{2}m(2v)^2,$$

amiből az abroncs középpontjának sebessége $v = \sqrt{gR}$.

b) A vizsgált pillanatban az abroncs középpontja éppen nem gyorsul, így az ahhoz rögzített vonatkoztatási rendszer inerciarendszer. Ebben az m és $2m$ tömegű testek v kerületi sebességgel körmozgást végeznek. A felső testre a mozgásegyenlet:

$$K_1 + mg = m\frac{v^2}{R},$$

amiből v értékét felhasználva $K_1 = 0$ adódik. Tehát a felső test nem nyomja az abroncsot. Hasonlóan az alsó test mozgásegyenlete:

$$K_2 - 2mg = 2m\frac{v^2}{R},$$

amiből $K_2 = 4mg$ adódik. Mivel a felső test nem nyomja az abroncsot, így az asztalra ható nyomóerő nagysága megegyezik annak az erőnek a nagyságával, amivel az abroncs nyomja az alsó testet, tehát a keresett nyomóerő $4mg$.

Klement Tamás (Pécsi Leőwey Klára Gimn., 11. évf.)

55 dolgozat érkezett. Helyes 17 megoldás. Kicsit hiányos (3–4 pont) 5, hiányos (1–2 pont) 19, hibás 14 dolgozat.

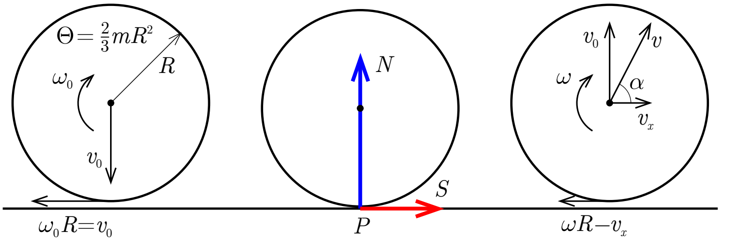
P. 5516. *Egy vízszintes tengely körül megpörgetett pingponglabda függőlegesen az asztallapra esik. A vékony gömbhéjnak tekinthető labda tömege m, sugara R, sebessége a leérkezéskor v_0, szögsebessége $\omega_0 = v_0/r$, tehetetlenségi nyomatéka $\Theta = \frac{2}{3}mR^2$. A csúszási és a tapadási súrlódási együttható egyaránt μ. Tekintsük az ütközést pillanatszerűnek és tökéletesen rugalmasnak (azaz legyen a labda tömegközépponti sebességének asztalra merőleges vetülete ütközés előtt és után azonos nagyságú).*

Mekkora és milyen irányú lesz a labda sebessége az ütközés után? Mekkora lesz a szögsebessége?

(*6 pont*) Közli: *Balogh Péter,* Gödöllő

(A nyomtatott szövegben az egyik képlet hibásan jelent meg, helyesen $\omega_0 = v_0/R$.)

Megoldás. Jelölje az ütközés ideje alatt az asztal által a labdára kifejtett átlagos nyomóerőt $\overline{N}$, a labdára ható átlagos súrlódási erőt $\overline{S}$, az ütközés időtartamát Δt. A labda ütközés utáni sebességének nagysága legyen v, annak vízszintes komponense v_x, vízszintessel bezárt szöge α, a labda ütközés utáni szögsebessége ω. Az *1. ábrán* az ütközés előtti pillanat, az ütközés közbeni állapot és az ütközés utáni pillanat látható a számításokhoz szükséges mennyiségek jelölésével. Az ütközés rövid ideje miatt $\overline{N} \gg mg$, ezért a nehézségi erő hatását az ütközés alatt elhanyagoljuk. A súrlódási együttható értékétől függően az ütközés két különböző módon történhet: ha az ütközés időtartama alatt végig csúszik a labda az asztalon (I. eset), illetve ha az ütközés során létrejön a tapadás (II. eset).



1. ábra

I. eset. Ha az ütközés során folyamatosan csúszik a labda az asztalon, akkor minden pillanatban $S = \mu N$, és így $\overline{S} = \mu\overline{N}$. Az impulzustétel vízszintes és függőleges irányban, valamint az impulzusmomentum-tétel a labdára az ütközés időtartamára:

$$\mu\overline{N}\Delta t = mv_x, \tag{1}$$

$$\overline{N}\Delta t = 2mv_0, \tag{2}$$

$$\mu\overline{N}R\Delta t = \tfrac{2}{3}mR^2(\omega_0 - \omega). \tag{3}$$

A csúszás feltétele a P pontra:

$$v_x - \omega R < 0. \tag{4}$$

(1) és (2), illetve (2) és (3) alapján:

$$v_x = 2\mu v_0, \tag{5}$$

$$\omega = (1 - 3\mu)\omega_0. \tag{6}$$

Az (5) és (6) eredményeket behelyettesítve (4)-be és azt rendezve a súrlódási együtthatóra a labda folyamatos csúszásához a feltétel:

$$\mu < 0{,}2.$$

A sebesség nagysága és iránya (vízszintessel bezárt szöge) az ütközés után:

$$v = \sqrt{v_0^2 + v_x^2} = v_0\sqrt{1 + 4\mu^2},$$

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{v_0}{v_x} = \operatorname{arctg}\frac{1}{2\mu}.$$

II. eset. Ha $\mu \geq 0{,}2$, akkor az ütközés során (vagy legvégén) kialakul a tapadás. A megtapadás előtt ugyanúgy $S = \mu N$, de utána a labda tisztán gördül és $S = 0$ lesz, így $\overline{S} \leq \mu\overline{N}$. Az I. esetben felírt (1), (2), (3) egyenletek most így módosulnak:

$$\overline{S}\Delta t = mv_x, \tag{7}$$

$$\overline{N}\Delta t = 2mv_0, \tag{8}$$

$$\overline{S}R\Delta t = \tfrac{2}{3}mR^2(\omega_0 - \omega), \tag{9}$$

a (4) összefüggés (a folyamatos csúszás feltétele) helyére pedig a megtapadás feltételét kell felírnunk:

$$v_x - \omega R = 0,$$

ebből:

$$\omega = \frac{v_x}{R}. \tag{10}$$

(7)-et (9)-be helyettesítve:

$$m v_x R = \tfrac{2}{3} m R^2 (\omega_0 - \omega), \tag{11}$$

amiből (10) felhasználásával:

$$v_x = 0{,}4 v_0.$$

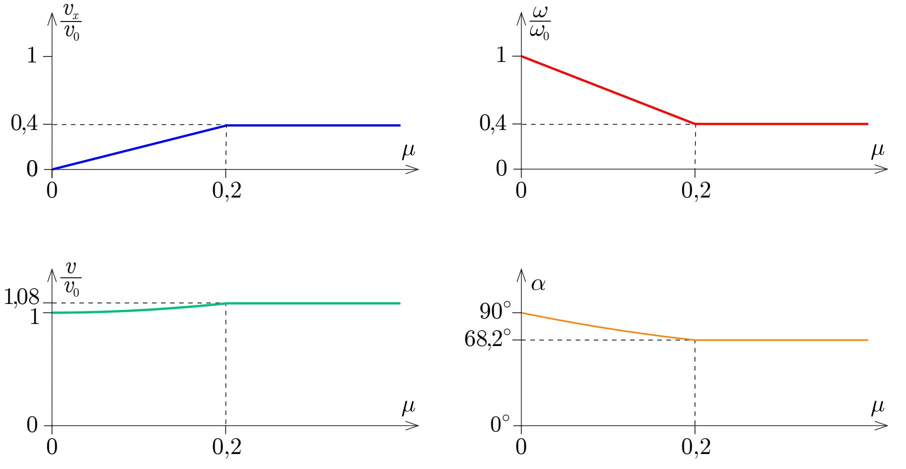
Ezek után a végeredmény ebben az esetben:

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{v_0^2 + v_x^2} = v_0 \sqrt{1 + 0{,}4^2} \approx 1{,}08 v_0, \\ \alpha &= \operatorname{arctg} \frac{v_0}{v_x} = \operatorname{arctg} \frac{1}{0{,}4} \approx 68{,}2^\circ, \\ \omega &= \frac{v_x}{R} = \frac{0{,}4 v_0}{R} = 0{,}4 \omega_0. \end{aligned}$$

Megjegyzés. A (11) egyenlet a P pontra felírt impulzusmomentum-megmaradás törvényét fejezi ki (az alapján közvetlenül is felírhattuk volna). A P ponton az összes erő hatásvonala átmegy, így az erre vonatkoztatott perdület az ütközés során állandó:

$$\Theta \omega_0 = \Theta \omega + m v_x R.$$

A *2. ábrán* v_x, ω, v és α látható μ függvényében.



2. ábra

Hegedüs Márk (Budapest, ELTE Apáczai Csere J. Gyakorló Gimn., 9. évf.)

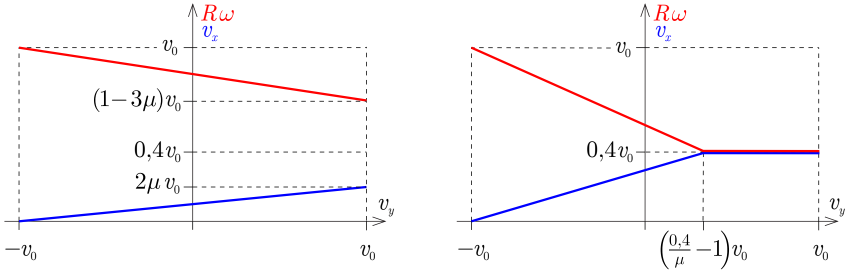
Megjegyzés. Az I. és II. eset közötti különbség jól látható, ha v_x és $R\omega$ értékét közös grafikonon ábrázoljuk v_y (a függőleges sebességkomponens) függvényében (*3. ábra*). A bal oldali grafikonon $\mu = 0{,}1$ (I. eset), a jobb oldalin pedig $\mu = 0{,}3$ (II. eset).

Mekkora v_t függőleges sebességnél történik a megtapadás? Az ütközés első, a megtapadásig, Δt_t ideig tartó részében kis módosítással érvényesek az (1) és (2) egyenletek:

$$\mu\overline{N}\Delta t_\mathrm{t} = 0{,}4mv_0,$$
$$\overline{N}\Delta t_\mathrm{t} = m(v_\mathrm{t} + v_0).$$

A két egyenletet egymással elosztva és rendezve:

$$v_\mathrm{t} = \left(\frac{0{,}4}{\mu} - 1\right) v_0.$$



3. ábra

26 dolgozat érkezett. Helyes 7 megoldás. Kicsit hiányos (3–4 pont) 10, hiányos (1–2 pont) 9 dolgozat.

Felhívás az idei Kunfalvi Rezső Olimpiai Válogatóversenyre

A 2023/24-es tanévi olimpiai válogatóverseny első fordulója 2024. február 26-án, hétfőn 15:00-tól lesz online formában. A versenyre nevezni előzetesen nem kell, bárki részt vehet rajta. A feladatsor az `ipho.physics.bme.hu` oldalon lesz elérhető.

A megoldásra és a szkennelésre 3 óra áll rendelkezésre. A megoldásokat egyetlen pdf dokumentumban kell elküldeni az `iphoteamhun@gmail.com` címre. A határidő után érkezett dolgozatokat nem fogadjuk el.

A versenyen nem-grafikus számológépen, író- és rajzeszközökön kívül semmilyen más segédeszköz (pl. könyv, füzet, táblázatok, internet) nem használható. A feladatok megoldását kézírással papírra kell elkészíteni, minden feladat megoldása új oldalon kezdődjön. Az első oldalon szerepeljen a versenyző neve, évfolyama, felkészítő tanárainak és iskolájának neve. Törekedni kell a jól áttekinthető külalakra, az olvasható kézírásra, a megoldások fizikai alapjainak ismertetésére, valamint a magyaros, világos és tömör fogalmazásra.

Fizikából kitűzött feladatok

M. 429. Egy másfél literes, hengeres üvegpalack kupakját lyukasszuk ki. Töltsük meg a palackot kb. félig vízzel, majd csavarjuk vissza rá a kupakot. Fordítsuk a nyakával lefelé, és mérjük meg, hogy mennyi víz folyik ki belőle. Mérjük meg azt is, hogy a kicsurgás leállásakor mekkora a víz magassága a palackban. A mérési eredmények felhasználásával határozzuk meg, hogy mekkora volt a légnyomás a mérés elvégzésekor.

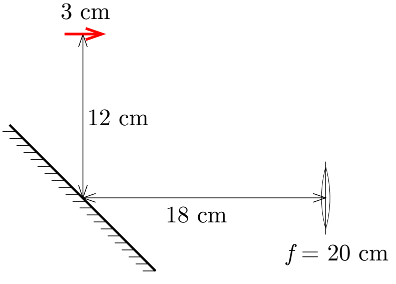
(*6 pont*) Közli: *Simon Péter*, Pécs

G. 841. Ha 20-30 hurkapálcát összegumizunk szorosan, akkor miért vesz föl a köteg közel henger alakot?

(*3 pont*) Közli: *Gelencsér Jenő*, Kaposvár

G. 842. Űrkutatók reményei szerint hamarosan ember által lakott űrbázis épül a Holdon. Képzeljük el, hogy az űrbázis létrehozásának egy éves évfordulóját speciális tűzijátékkal ünneplik meg az űrhajósok. A lövedéket 45°-os szögben lövik ki, ami 100 m magasan, a pálya tetőpontján robban szét apró részekre, melyek a lövedék tömegközéppontjához képest 10 m/s sebességgel, hosszasan, fényesen világítva repülnek szét. A kilövés helyéhez és idejéhez viszonyítva mikor és hol ér talajt legelőször és legutoljára fényesen világító darabka?

(*4 pont*)



G. 843. Egy 45°-os szögben ferdén elhelyezett síktükör fölött 12 cm magasan egy 3 cm hosszú, vízszintes helyzetű világító nyilat helyezünk el. Adjuk meg, hogy mekkora és milyen helyzetű képet hoz létre a tükörtől 18 cm-re lévő, 20 cm fókusztávolságú gyűjtőlencse!

(*4 pont*)

G. 844. Egy gőzfürdőben lényegében 42 °C-os felhőben üldögélnek az emberek. Ezzel szemben egy 95 °C-os finn szaunában a levegő relatív páratartalma mindössze 12%. Hol magasabb a levegő abszolút páratartalma?

(*4 pont*)

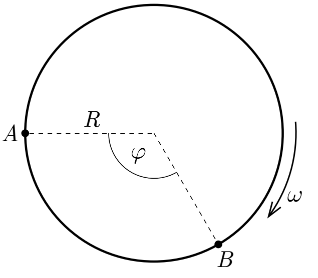
P. 5544. Egy különleges krumpliágyú esetében a vízszinteshez képest α szögben kilőtt krumpli kezdősebessége $v_0 = (20\ \mathrm{m/s}) \cdot \cos\alpha$. A lövedékre ható közegellenállási erőt hanyagoljuk el! Milyen messzire lehet lőni ezzel a krumpliágyúval vízszintes talajon?

(*4 pont*) Közli: *Széchenyi Gábor*, Budapest

P. 5545. Könnyen mozgó dugattyúval elzárt hengerben 180 g tömegű, héliumból és hidrogénből álló gázkeverékkel állandó nyomáson 156 kJ hőt közlünk. Ennek hatására a gázkeverék 56 kJ munkát végzett. Hány g hidrogén volt a hengerben? Mekkora a gázkeverék hőmérséklet-változása?

(*4 pont*) Közli: *Holics László*, Budapest

P. 5546. Az Eszkimók Csodák Palotájában található egy függőleges tengely körül $\omega = \pi/6\ \mathrm{s}^{-1}$ szögsebességgel forgó, $R = 3$ m sugarú, kör alakú jégpályára épített iglu. A forgó igluban két gyerek ül az ábrán látható helyzetben, egymáshoz képest $\varphi = 120°$-os szögben. Az A pontban ülőnek sikerül úgy elindítania egy kis méretű korongot, hogy az pont a B helyen ülő társa kezébe érkezzen az indítást követően $t = 2$ s múlva.



a) Az igluhoz képest mekkora sebességgel és milyen irányba kellett a korongot az A pontban ülő gyermeknek ellöknie?

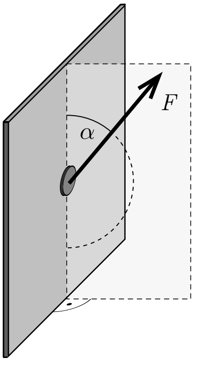
b) Mekkora távolságra közelíti meg a korong a mozgása során az iglu középpontját?

(*5 pont*) Közli: *Szász Krisztián*, Budapest

P. 5547. Egy kicsi fagolyót 30 cm hosszú fonálra kötünk, és a fonál szabad végét egy vödör fenekén, a középponttól 20 cm távolságban rögzítjük. A vödörbe vizet töltünk, és a szimmetriatengelye körül forgatni kezdjük. (A víz mindvégig ellepi a golyót.) Mekkora szögsebességgel kell a vödröt forgatnunk, hogy hosszú idő után a fonál a függőlegessel 30°-os szöget zárjon be?

(*5 pont*) Quantum Magazine nyomán

P. 5548. Egy kicsiny, lapos hűtőmágnes súlya G. A mágnest a hűtőszekrény függőleges oldalára helyezzük, majd a fémlapra merőleges, függőleges síkban valamilyen irányba húzni kezdjük. A legkisebb erő, amivel meg tudjuk mozdítani a mágnest függőlegesen felfelé, F_1, lefelé pedig F_2.



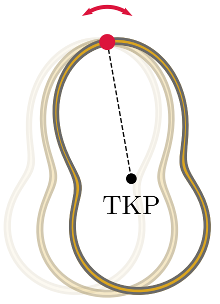
a) Mekkora a mágnes és a hűtőszekrény oldala közötti tapadási súrlódási együttható?

b) Mekkora húzóerővel hat a fémlemez a mágnesre, amikor azt nem húzzuk semerre?

Adatok: $G = 0{,}10$ N, $F_1 = 0{,}20$ N és $F_2 = 0{,}05$ N.

(Lásd még a **G. 702.** számú gyakorlatot a KöMaL 2020. évi 3. számában.)

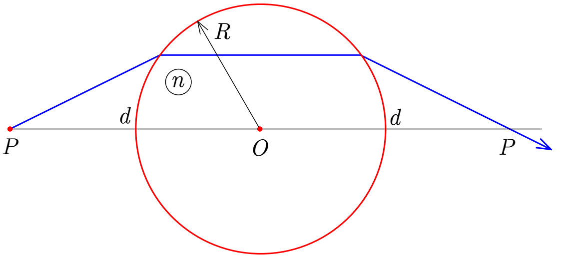
(*5 pont*) Közli: *Gnädig Péter*, Vácduka



P. 5549. Homogén tömegeloszlású, M tömegű, vékony huzalból zárt síkgörbét hajlítunk. Az így kapott keret tehetetlenségi nyomatéka a tömegközéppontján áthaladó, síkjára merőleges tengelyre vonatkozóan Θ_0. A testtel ezután kísérletet végzünk az *ábrán* vázolt módon: különböző pontjai mentén felfüggesztjük, majd mérjük a kis amplitúdójú, saját síkjába eső lengéseinek periódusidejét. Mekkora a lehetséges legkisebb lengésidő?

(*5 pont*) Dürer Verseny feladata nyomán

P. 5550. Lézerfénnyel megvilágítjuk az R sugarú, n törésmutatójú gömblencsét. Merre kell irányítani az optikai tengelyen a lencse középpontjától d távolságra lévő pontból kiinduló fénysugarat, hogy az a lencsén megtörve a lencse másik oldalán a középponttól ugyancsak d távolságra metssze az optikai tengelyt? Adott törésmutató mellett milyen d estén lehetséges ez a fénysugármenet? Számoljuk ki a kérdéses irány szögét a $d=2R$, $n=3/2$ adatokkal!

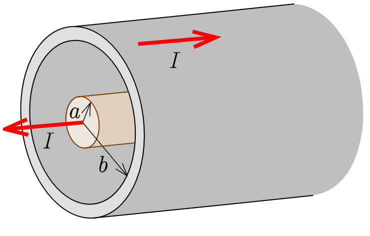


(*4 pont*) Közli: *Cserti József*, Budapest

P. 5551. Egy nagy rendszámú atommag mellett elhaladó, 2 MeV energiájú fotonból elektron-pozitron pár keletkezik. (A nehéz atommag csak impulzust vesz fel, energiát szinte semmit.) A mágneses térben elhelyezett Wilson-kamrában mindkét részecske ugyanabban a síkban, 5 cm sugarú köríven mozog. Mekkora a mágneses indukcióvektor nagysága?

(*5 pont*) Példatári feladat nyomán

P. 5552. Képzeljük el, hogy az *ábrán* látható koaxiális kábelen P teljesítményt szállítunk ℓ távolságra. A kábel elhanyagolható ellenállású belső vezetékének sugara a, a vékony falú, hasonlóan ellenállásmentesnek tekinthető külső cső sugara pedig b. Mind a kábelen kívül, mind a belső vezeték és a külső cső között vákuum van, a kábelen egyenáram folyik.



a) Mekkora a távvezeték árama, ha a külső cső falát sem befelé, sem kifelé nem feszíti erő?

b) A koaxiális kábel melyik végén – jobbra vagy balra – van a generátor (tápegység), illetve a fogyasztó (terhelés)?

(*6 pont*) Közli: *Honyek Gyula*, Veresegyház

❄

Beküldési határidő: 2024. március 15.

Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL FOR SECONDARY SCHOOLS
(Volume 74. No. 2. February 2024)

Problems in Mathematics

New exercises for practice – competition K (see page 96): **K. 799.** Misi lives in a street with detached houses only. If we count which house Misi lives in from the beginning of the street on his side, we get twice as many as if we counted which house Misi lives in from the end of the street on the same side. The houses are numbered consecutively from 1 starting at the beginning of the street, with odd numbers on the left and even numbers on the right. Misi's house is on the left side when looking at it from the beginning of the street. Had the houses been numbered from the end, the number of Misi's house would be 25 less than it is now. How many houses are there on that side of the street where Misi lives? **K. 800.** The sum of four distinct prime numbers is 50. What can these four primes be? **K. 801.** Each of the two pots in the figure (see page 96) have the shape of a letter. On the other diagram the side view of the pots can be seen, placed before a square lattice with a side length of 10 cm. The pots are open from above, and they spread 10 cm to the back. We place small rubber tubes in each pot that touch the bottom of the pots, and fill them with water. Both pots are filled up at the speed of 1 liter per minute. Find the time required to fill each pot. Plot the graph of the height of the water in each pot as a function of the time elapsed. (Ignore the thickness of the dishes' wall.) **K. 802.** Let point Q be an arbitrary inner point of side CD in square $ABCD$. Let the perpendicular from vertex B to line segment AQ intersect AQ at P. Let K denote the intersection point of the diagonals of the square. Prove that line PK bisects angle QPB. **K. 803.** In a summer camp, all children except for 24 of them are "only children" (have no siblings), all children except for 18 have one sibling, and all children except for 14 have two siblings. How many children in this camp can have more than 2 siblings, if we know there is at least one only child, and all the siblings of all the children are also in the camp? (Proposed by *Katalin Abigél Kozma*, Győr and *József Korándi*, Budapest)

New exercises for practice – competition C (see page 97): Exercises up to grade 10: **K/C. 802.** See the text at Exercises **K**. **K/C. 803.** See the text at Exercises **K**. **Exercises for everyone: C. 1798.** Let parameter p be a given integer. Find all integer solutions of the equation $\left(p+\frac{1}{p}\right)\cdot\left(x-\frac{1}{x}\right)+\left(p-\frac{1}{p}\right)\cdot\left(x+\frac{1}{x}\right)=4px+5+\frac{1}{p}$. (Proposed by *Bálint Bíró*, Eger) **C. 1799.** In the unit square $ABCD$ we draw squares $DEFG$, $AHKE$, $BMFL$ and $CGNP$ according to the diagram below. (See figure on page 98.) Find the largest possible value of the ratio of the sum of the areas of rectangles $LFKH$ and $MPNF$ to the area of square $ABCD$. Find the exact value of ratio $\frac{ED}{AD}$ in the extremal case. (Proposed by *Bálint Bíró*, Eger) **C. 1800.** Prove that if n is a natural number, then the interval $\left[\sqrt{16n+21},\sqrt{16n+24}\right]$ contains no integers. (Proposed by *Gábor Holló*, Budapest) **Exercises upwards of grade 11: C. 1801.** Let sequence a_n be defined as $a_1=2$ and $a_n=a_{n-1}+2n$. Find the sum of the reciprocals of the first 2024 terms of the sequence (i.e. find the value of $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\dots+\frac{1}{a_{2024}}$). (Proposed by *Gergely Szmerka*, Budapest) **C. 1802.** In regular hexagon $ABCDEF$ point M is chosen on diagonal AC and point N is chosen on diagonal DE satisfying $\frac{AM}{AC}=\frac{CN}{CE}=k$. For which values of k will points B, M and N be collinear? (*Matlap, Kolozsvár*, 2017)

New exercises – competition B (see page 99): **B. 5366.** Is it possible to find a composite number $n>1$ with the following property: if $1=d_1<d_2<\ldots<d_k=n$ denote the positive divisors of n, then d_i is divisible by $(d_{i-1}+d_{i-2})$ for all $3\le i\le k$? *(3 points)* (Based on IMO problem 2023/1) **B. 5367.** a) In the open unit disk we place two open line segments of length ℓ with no common points, perpendicularly to each other. What can be the value of ℓ? b) In the open unit ball we place three line segments of length ℓ such that any two are disjoint (have no common points) and perpendicular to each other. What can be the value of ℓ? (*4 points*) (Proposed by *Vígh Viktor*, Sándorfalva) **B. 5368.** In a table tennis championship any two contestants played with each other exactly once. In each match, the winner got 1 point, and the loser got 0 points (there is no tie in table tennis). Interestingly, one contestant has won against exactly those who scored more than him in the championship and lost to exactly those who scored less than him in the championship. Find the smallest possible number of contestants participating in the championship. (It is possible that several contestants got the same score at the end of the championship. At least two contestants participated in the championship.) (*4 points*) (Proposed by *Kartal Nagy*, Budapest and *Bálint Hujter*, Budapest) **B. 5369.** Inside an equilateral triangle ABC, point P is chosen such that $\angle APB=150^\circ$. Prove that $PA^2+PB^2=PC^2$. (*4 points*) (Proposed by *Viktor Vígh*, Sándorfalva) **B. 5370.** Let k be a positive integer, and assume that real numbers $a_1, \ldots, a_k$ satisfy $\sum_{i=1}^{k}(k-i+1)a_i=0$. Prove that there exists positive integer $m\le k$ for which $2m\sum_{i=1}^{m}a_i\le\sum_{i=1}^{m}ia_i$. (*5 points*) (Proposed by *Viktor Vígh*, Sándorfalva) **B. 5371.** Let point P be chosen inside triangle ABC. Let D, E and F denote the orthogonal projections of point P onto sides BC, CA and AB, respectively. Prove that $\frac{PE+PF}{PA}+\frac{PF+PD}{PB}+\frac{PD+PE}{PC}\le 3$. (*5 points*) (Proposed by *Mihály Bence*, Brasov) **B. 5372.** A sphere has been partitioned into spherical triangles and quadrilaterals by drawing some great circles. No three of the great circles pass through the same point, and at least one quadrilateral was created. Prove that there must be exactly eight spherical triangles and six spherical quadrilaterals. (*6 points*) (Proposed by *Viktor Vígh*, Sándorfalva) **B. 5373.** Let n be a positive integer. Prove that there are at least 8 odd coefficients in polynomial $a_{7n}x^{7n}+\cdots+a_1x+a_0=(x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)^n$. (*6 points*) (Proposed by *Péter Pál Pach*, Budapest)

New problems – competition A (see page 100): **A. 872.** For every positive integer k let $a_{k,1}, a_{k,2}, \ldots$ be a sequence of positive integers. For every positive integer k let sequence $\{a_{k+1,i}\}$ be the difference sequence of $\{a_{k,i}\}$, i.e. for all positive integers k and i the following holds: $a_{k,i+1}-a_{k,i}=a_{k+1,i}$. Is it possible that every positive integer appears exactly once among numbers $a_{k,i}$? (Proposed by *Dávid Matolcsi*, Berkeley) **A. 873.** Let $ABCD$ be a convex cyclic quadrilateral satisfying $AB\cdot CD=AD\cdot BC$. Let the inscribed circle ω of triangle ABC be tangent to sides BC, CA and AB at points A', B' and C', respectively. Let point K be the intersection of line ID and the nine-point-circle of triangle $A'B'C'$ that is inside line segment ID. Let S denote the centroid of triangle $A'B'C'$. Prove that lines SK and BB' intersect each other on circle ω. (Proposed by *Áron Bán-Szabó*, Budapest) **A. 874.** *Nyihaha* and *Bruhaha* are two neighbouring islands, both having n inhabitants. On island *Nyihaha* every inhabitant is either a Knight or a Knave. Knights always tell the truth and Knaves always lie. The inhabitants of island *Bruhaha* are normal people, who can choose to tell the truth or lie. When a visitor arrives on any of the two islands, the following ritual is performed: every inhabitant points randomly to another inhabitant (indepently from each other with uniform distribution), and tells "He is a Knight" or "He is a Knave". On island *Nyihaha*, Knights have to tell the truth and Knaves have to lie. On island *Bruhaha* every inhabitant tells the truth with probability 1/2 independently from each other. Sinbad arrives on island *Bruhaha*, but he does not know whether he is on island *Nyihaha* or island *Bruhaha*. Let p_n denote the probability that after observing the ritual he can rule out being on island *Nyihaha*. Is it true that $p_n \to 1$ if $n \to \infty$? (Proposed by *Dávid Matolcsi*, Berkeley)

Problems of the 2023 Kürschák competition

1. Let $f(x) = \sum_{i=0}^{d} a_i x^i$, where $d \geq 1$, the coefficients $a_0, \ldots, a_d$ are nonnegative integers, and $a_d > 0$. Show that there exist infinitely many positive integers n such that $f(n)$ is not divisible by any of the numbers $f(2)$, $f(3)$, $\ldots$, $f(n-1)$.

2. Let n be a positive integer. We call a point (x, y) of the Euclidean plane a *vertex* if $x, y \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Furthermore, we call a unit segment connecting two vertices an *edge*. Suppose that we color some edges to red in such a way that for any two distinct vertices there exists a unique red broken line connecting them. We say that the red edge f is *important* to the edge e if the red broken line connecting the endpoints of e contains f. Prove that there exists a red edge which is important to at least n edges.

3. Suppose that for an inner point P of the cyclic pentagon $ABCDE$ we have $AB = AE = AP$ and $BC = CE$. Let the lines AD and BE meet at Q. Furthermore, the points R and S lie on the segments CP and BP, respectively, such that $DR = QR$ and $SR \parallel BC$. Show that the circles BEP and PQS are tangent to each other.

Problems in Physics

(see page 122)

M. 429. Make a hole on the cap of a one-and-a-half litre cylindrical glass bottle. Fill the bottle about half full with water and screw the cap back on. Turn the bottle upside down and measure how much water comes out. Also measure the height of the water in the bottle when the spout stops. Using the results of the measurement, determine the air pressure when the measurement was done.

G. 841. If you tie 20-30 wooden skewers tightly together with a rubber band, why does the bundle take on a nearly cylindrical shape? **G. 842.** Space researchers hope to build a human moonbase on the Moon soon. Imagine the astronauts celebrating the one-year anniversary of the moonbase with a special fireworks display. A projectile is fired at an angle of 45°, which explodes at an altitude of 100 m at the top of its path into tiny fragments that fly apart at 10 m/s relative to the projectile's centre of mass, glowing brightly for a long time. With respect to the time and position of the launch, when and where do the first and last brightly glowing fragments hit the ground? **G. 843.** 12 cm above a plane mirror, inclined at an angle of 45°, there is a luminous horizontal arrow of length 3 cm. Find the size and position of the image produced by a converging lens of focal length 20 cm, which is at a distance of 18 cm from the mirror. **G. 844.** In a steam bath, people are essentially sitting in a cloud of temperature 42 °C. In contrast, a 95 °C Finnish sauna has a relative humidity of just 12%. In which of them is there a higher absolute humidity?

P. 5544. In the case of a special potato cannon, the initial velocity of a potato fired at an angle of α, measured from the horizontal is $v_0 = (20\ \mathrm{m/s}) \cdot \cos\alpha$. The drag force exerted on the projectile can be neglected. How far can you shoot with this potato gun on the horizontal ground? **P. 5545.** There is a mixture of helium and hydrogen gas in a cylinder, sealed by an easily moveable piston. The mass of the mixture is 180 g. At constant pressure. 156 kJ thermal energy is added to the gas. This causes the gas mixture to do 56 kJ of work. How many grams of hydrogen were in the cylinder? What is the temperature change of the gas mixture? **P. 5546.** In the Eskimos' Palace of Wonders, there is an igloo of radius of $R = 3$ m which is built on a circular ice ink, rotating at an angular speed of $\omega = \pi/6\ \mathrm{s}^{-1}$ around a vertical axis. Two children are sitting in the rotating igloo in the position shown in the figure, at an angle of $\varphi = 120^\circ$ with respect to each other. The child sitting at A manages to launch the puck so that it arrives at the hand of the other child sitting at B, in a time of $t = 2$ s after the launch. *a*) With respect to the igloo at what speed and in what direction did the child at A have to start the puck? *b*) What distance does the puck approach the centre of the igloo as it moves? **P. 5547.** A small wooden ball is attached to one end of a 30 cm long thread, and the free end of the thread is fixed to the bottom of a bucket at a distance of 20 cm from the centre. The bucket is filled with water and rotated around its axis of symmetry. (The water covers the ball during the motion.) What is the angular velocity at which the bucket must be spun so that after a long time the thread makes an angle of 30° with the vertical? **P. 5548.** A small, flat fridge magnet weighs G. The magnet is placed on the vertical side of the refrigerator and pulled in some direction in a vertical plane perpendicular to the plane of the metal side. The minimum force to move the magnet vertically upwards is F_1 and the force to move it vertically downwards is F_2. *a*) What is the coefficient of static friction between the side of the refrigerator and the magnet? *b*) What is the force exerted by the metal side on the magnet, when the magnet is not pulled? *Data:* $G = 0.10$ N, $F_1 = 0.20$ N and $F_2 = 0.05$ N. (See also the exercise numbered **G. 702.** in KöMal, issue 3, 2020.) **P. 5549.** We bend a closed planar curve from a piece of thin wire of uniform mass distribution and of mass M. The moment of inertia of the resulting frame is Θ_0 with respect to an axis which passes through the centre of mass and is perpendicular to its plane. The frame is then subjected to an experiment as shown in the *figure* (the centre of mass is denoted with the letter combination "TKP"): the frame is suspended at various points and the period of its small amplitude oscillations in its own plane is measured. What is the minimum possible period of the oscillation? **P. 5550.** A sphere-shaped lens of radius R and of refractive index n is illuminated with a beam of laser light. Into which direction should the beam of light be directed from a point on the principal axis at a distance d from the centre of the lens, in order that after it refracts on the lens, it crosses the principal axis of the lens also at a distance d from the centre on the other side of the lens? For a given refractive index, for which distance d is this possible? Calculate the angle of the direction of the beam described above using the data of $d = 2R$, $n = 3/2$. **P. 5551.** An electron-positron pair is produced from a photon of energy 2 MeV, when it passes next to a nucleus, which has a high atomic number. (The heavy nucleus gains only momentum, and absorbs almost no energy.) In the Wilson chamber, placed into magnetic field, both particles travel in the same plane, along circular arcs of radius 5 cm. What is the magnitude of the magnetic induction vector? **P. 5552.** Imagine that power P is delivered through the coaxial cable of length ℓ as shown in the figure. The radius of the inner conductor of the cable, which has negligible resistance, is a, and the radius of the thin-walled outer tube, which can be considered to have similarly negligible resistance, is b. There is a vacuum both outside the cable and between the inner conductor and the outer tube, and a direct current flows through the cable. *a*) What is the value of the current if there is no outward and inward force exerted on the outer tube? *b*) At which end of the coaxial cable – left or right – is the generator (voltage supply) and at which end is the resistor (load)?

Képek a 2023. évi Kürschák József Matematikai Tanulóversenynek a Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézetben tartott eredményhirdetéséről

1. dicséret **Czanik Pál**, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Ált. isk és Gimn. 11. oszt. tanulója

2. dicséret **Bognár András Károly,** a Budapesti Fazekas Mihály Gyak. Ált. isk és Gimn. érettségizett tanulója

2. dicséret **Forrai Boldizsár**, az SZTE Gyakorló Gimn. és Ált. Isk. 10. osztályos tanulója

2. dicséret **Tarján Bernát**, a Békásmegyeri Veres Péter Gimn. 12. osztályos tanulója

A díjakat átadta Simon Péter, a Bolyai János Matematikai Társulat főtitkára

Természettudományi Kar

Az ELTE Természettudományi Kara (TTK) minden felmérés szerint az egyik legjobb egyetemi kar Magyarországon. A képzések a természettudományok teljes spektrumát felölelik: *matematika, biológia, fizika, földrajz, földtudományi, kémia, környezettan* alapszakok (BSc) – ezeken belül különböző szakirányok (biofizikus, csillagász, meteorológus...) – kerülnek meghirdetésre. **https://ttk.elte.hu/**

Matematikai Intézet

A matematika alapszak (BSc) egyaránt felkészít a kutatói életpályára és a matematika különböző területeken történő magas szintű alkalmazására is – kiváló karrierlehetőségeket nyújtva.
Az intézetben nagy hangsúlyt helyezünk a tehetséggondozásra és arra, hogy a választható szintek és blokkok révén mindenki megtalálja a neki megfelelő kurzusokat.
Az intézetben általános- és középiskolai tanárképzést is folytatunk osztatlan *matematikatanári* szakon. **http://www.math.elte.hu/**

Az ELTE TTK ebben a tanévben december 12-én tartotta a nyílt napját. A program ezen a linken megnézhető: **https://ttk.elte.hu/nyiltnap2023**.

Petőfi Kulturális Ügynökség
Nemzeti Együttműködési Alap
nka Nemzeti Kulturális Alap
Bethlen Gábor Alapkezelő Zrt.
Miniszterelnökség