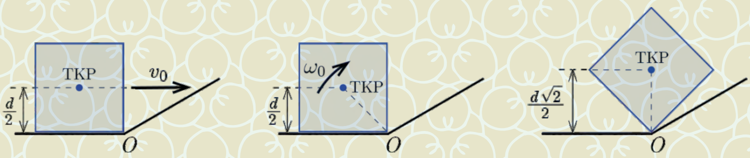
Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok

Informatika rovattal



Képek a P. 5528-as feladat megoldásához

A februári ördöglakat feladvány megoldása

A képakasztós játék matematikája | Két lány az elsők közül | Feladatok emelt szintű érettségire készüléshez | Matematika feladatok megoldásai | Mérési feladat megoldása | A Meleda

KöMaL

74. évfolyam
3. szám
2024.
március

A Meleda játék különféle változatai

(Forrás: https://ordoglakat.blog.hu/2009/03/29/meleda)

A KöMaL támogatói

Nemzeti Tehetség Program

Nemzeti Kulturális Támogatáskezelő

Kulturális és Innovációs Minisztérium

KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK
INFORMATIKA ROVATTAL BŐVÍTVE

ALAPÍTOTTA: **ARANY DÁNIEL** 1894-ben

74. évfolyam 3. szám — Budapest, 2024. március

Megjelenik évente 9 számban, januártól májusig és szeptembertől decemberig havonta 64 oldalon. ÁRA: 1250 Ft

TARTALOMJEGYZÉK

INDEX: 25 450 ISSN 1215-9247

A szerkesztőség címe: 1117 Budapest,
Pázmány Péter sétány 1/C III. emelet 3.405.
Telefon: + 36 20 320-1143
A lap megrendelhető az Interneten:
`www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.h.shtml`.
Előfizetési díj egy évre: 10 400 Ft

E-mail: `szerk@komal.hu`
Internet: `http://www.komal.hu`
This journal can be ordered from the Editorial office:
Pázmány Péter sétány 1/C III. emelet 3.405.
1117–Budapest, Hungary
telephone: +36 20 320-1143
or on the Postal address
H–1518 Budapest 112, P.O.B. 32, Hungary,
or on the Internet:
`www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.h.shtml`.

Rejtvények, ördöglakatok
Átbújtatás a köbön: a Meleda játék

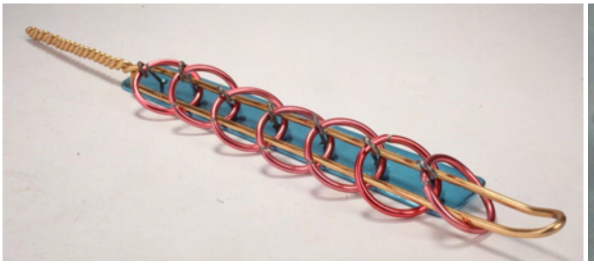
Rovatunkban minden hónapban valamilyen szórakoztató matematikai fejtörőt mutatunk be. Ezek között fontos helyet foglalnak el a különböző kirakós játékok, topológiai feladványok, ördöglakatok és a matematikát felhasználó bűvészmutatványok.

Manapság szinte mindent meg lehet találni az interneten, de az igazi élményt az adja, ha a feladatokat magunk oldjuk meg, a bűvészmutatványok trükkjeit mi találjuk ki, és a szükséges kellékeket is mi tervezzük meg és készítjük el. Próbáljuk meg a feladatokat továbbgondolni, általánosítani, igyekezzünk új feladatokat kitalálni.

A megoldásokat, általánosításokat a `rejtveny.komal@gmail.com` címen várjuk. A legjobbakat – akár cikk vagy videó formájában – a honlapunkon vagy itt a Lapban örömmel közöljük.

Valamikor régen, talán hetedik osztályban történt, hogy Julika néni, az orosztanár azzal jellemezte valakinek a tudását, hogy *nulla a köbön.* (Ezen a ponton rám nézett, és megkérdezte, van-e ilyen. Megnyugtattam, hogy van.) A hatványozást szeretjük a dolgok, tulajdonságok fokozására használni: valami még hatalmasabb, ha nem csak hosszú és széles, hanem még magas is. Megfordítva, egy tárgy még kisebb, ha rövid, keskeny és alacsony is. Így van a rejtvények és ördöglakatok esetében is, amikor ugyanabban a játékban többféle lépést, trükköt kombinálunk. Külön-külön ezek a lépések könnyűek, kombinálva azonban egészen nehéz feladványokat lehet kitalálni.

A játék, amiről most szó lesz, egy ősi kínai játék, a neve *Meleda.* Ez ugyananannak az elemi lépésnek több példányát, az egyszerű átbújtatást kombinálja egymással. A bal oldali ábrán egy fém, a jobb oldali ábrán egy vegyes fa-fém változatot láthatunk. A feladat kiszabadítani a karikákon átfűzött keretet.



Forrás: `https://mkvm.hu/meleda-kinai-karikak`

Forrás: `https://ordoglakat.blog.hu/2009/03/29/meleda`

A Meleda játéknak rengeteg változata létezik. Az alábbi és a belső borítón látható képeket Gál Péter *Ördöglakat* blogjáról másoltam a szerző engedélyével. A jobb oldali képen látható változatot Magyarországon *Bogi* néven árusították.


Forrás: `https://ordoglakat.blog.hu/2009/03/29/meleda`

Végezetül, az utolsó képen Gergényi Ede *Billencs I.* nevű játéka látható, amellyel II. díjat nyert a tavalyi *Zagyvai András játéktervező versenyen.*

Forrás:
`https://qubit.hu/2023/11/30/billencs-szuszek-hangyaboly-zsenialis-palyamunkak-erkeztek-a-zagyvai-andras-jatektervezo-versenyre-itt-az-eredmenyhirdetes`

A szerkezet merev, eltekintve a két narancssárga madzagtól. A feladat a ráfűzött hosszúkás zárt fém idom eltávolítása.

Ha a leghosszabb pálcikára nem lenne ráerősítve a drót és a fagolyó, akkor ez éppen egy kettes szintű Meleda játék lenne. Viszont a fagolyó miatt az utolsó (legbelső) átbújtatás helyett kerülő utat kell választanunk.

Feladat. Oldjuk meg a klasszikus Meleda játékot. Hogyan függ a szükséges átbújtatások száma a karikák számától?

Tervezzünk más Meleda változatokat, amelyekben a megoldás hossza másképpen (pl. a Fibonacci-sorozat szerint) növekszik.

Kós Géza

Képakasztó játék

1. Bevezetés

A következő fejtörőt A. Spivak a Quantum magazin 1997. május–júniusi számában [12] közölte: „Dr. Smile rendelőjének várótermében egy kép lóg a falon. A kép különlegessége abban rejlik, ahogy fel lett akasztva. Dr. Smile egy helyett két szöget vert a falba, és úgy akasztotta fel rájuk a festményt, hogy ha bármelyik szöget kihúzzuk a falból, a festmény leesik. Hogyan csinálta?”

A feladvány újszerű megfogalmazású, de hamar kiderült, hogy valójában több korábbi rejtvénnyel lényegében ekvivalens. Demaine és szerzőtársai 2012-ben [6] messzemenően általánosították a fejtörőt, és egzakt matematikai problémákat fogalmaztak meg, amelyek közül többet meg is oldottak.

Mi ebben a cikkben Demaine és társai egyik fő eredményére adunk az eredetitől különböző (és megítélésünk szerint egyszerűbb) bizonyítást. Ennek alapötlete a szerzőtől származik, részletes kidolgozása Oszlánczi Orsolya szakdolgozatában [11] is olvasható. Később, ettől függetlenül Wästlund [13] is publikált egy ezzel lényegében ekvivalens gondolatmenetet kicsit más megközelítéssel.

2. Játsszunk egy kicsit!

A 2024. februári KöMaL „Rejtvények, ördöglakatok” rovatában kitűztük Spivak eredeti kérdését és annak két további nehezítését (lásd lejjebb az 1., 3. és 4. feladatokat), amelyeket most további két feladvánnyal toldunk meg. Ahogy ott is megjegyeztük, ezek alapvetően logikai feladatok, minden esetben eltekintünk a súrlódástól, a madzag kellően hosszú, a kép leesése fizikailag nem akadályozott. Továbbá a gyakorlatban mindig feltesszük, hogy a szögek egy sorban egymás mellett vagy egy alulról konvex íven helyezkednek el (lásd az *1.* és a *2. ábrán* a fényképeket). Ez a feltevés értéskönnyítő, későbbi szemléletes fogalmak bevezetését segíti. Aki még nem gondolkozott a februári fejtörőkön, annak mindenképp javasoljuk, hogy a most következő feladatokat próbálja megoldani még mielőtt a cikket továbbolvasná.

Kihúzható szögekkel rendelkező eszközt gyártani nem túl nehéz, egy megfelelő méretű fadarab, egy fúró és néhány szög kell csupán hozzá. Ezenkívül már csak egy hosszabb zsinórra van szükség (ha nem tesszük messze a szögeket egymástól, egy jobb cipőfűző is megteszi), a kép súlyát lefelé húzással imitálhatjuk. Aki nem szeret barkácsolni, annak igazán *kézre álló* megoldás lehet, ha az ujjaira hurkolva próbálkozik.

1. feladat. Akasszuk fel a festményt két szögre úgy, hogy bármelyik szöget kihúzva a falból a festmény essen le.

2. feladat. Akasszuk fel a festményt három szögre úgy, hogy ha az első és a második szöget kihúzzuk, a festmény essen le, illetve essen le a festmény akkor is, ha a harmadik szöget kihúzzuk, de ha csak az első vagy csak a második szöget húzzuk ki, akkor maradjon fenn. (Vagyis a festmény pontosan akkor essen le, ha kihúztuk az 1. és 2. szöget, vagy kihúztuk a 3. szöget.)

1. ábra. Képakasztás két szögre

3. feladat. Akasszuk fel a festményt három szögre úgy, hogy bármelyik szöget kihúzva a falból a festmény essen le.

4. feladat. Akasszuk fel a képet három szögre úgy, hogy egy szöget kihúzva a kép ne essen le, de bármely két szöget kihúzva a falból a kép essen le.

5. feladat. Akasszuk fel a festményt három szögre úgy, hogy a festmény pontosan akkor essen le, ha kihúztuk az 1. és a 3. szöget, vagy kihúztuk a 2. és a 3. szöget.

3. Általánosítás és kódolás

A fenti feladatok alapján megfogalmazhatjuk a képakasztási problémát általánosabban is. Látni fogjuk később, hogy célszerű két lépésben általánosítanunk. A 3. feladat direkt általánosítása a következő:

6. probléma. Adott n szög a falban. Akasszuk fel a festményt a szögekre oly módon, hogy bármelyik szöget kihúzva a falból, a festmény essen le.

Ezt a problémát a továbbiakban *n-szöges alapjátéknak* fogjuk nevezni. Jegyezzük meg, hogy az $n=1$ eset bár értelmes, de nem túl izgalmas, hiszen a szokásos módon felakasztott kép leesik, ha kihúzzuk a falból az őt tartó szöget. A 4. és 5. feladatok mutatják, hogy ez a kérdés még tovább általánosítható.

7. probléma. Adott n szög a falban, és legyenek $S_1, S_2, \ldots, S_k$ az n szög halmazának tetszőleges részhalmazai. Hogyan akasszuk fel a képet az n szögre úgy, a festmény pontosan akkor essen le, ha a kihúzott szögek halmaza tartalmazza valamely S_i halmazt?

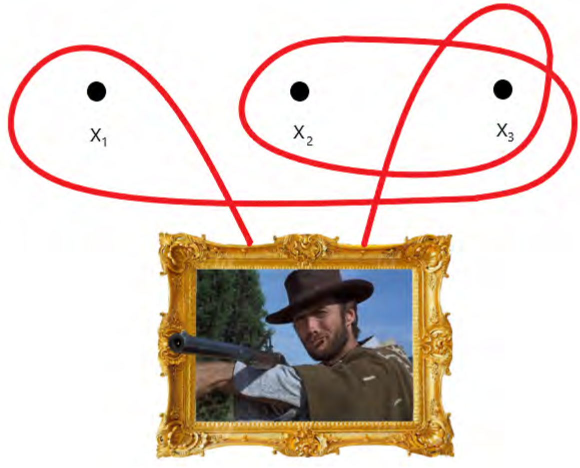
Ezt a problémát a továbbiakban *n-szöges általánosított játékként* emlegetjük majd. Jegyezzük meg, hogy ha valamely szögeket kihúzzuk a falból, és így a kép leesik, akkor további szögeket kihúzva a kép természetesen nem maradhat fenn, tehát a fentinél élesebb megfogalmazást nem várhatunk. Speciális esetként szokás

2. ábra. Képakasztás öt szögre

még külön tárgyalni azt a kérdést, ha az S_i halmazok páronként diszjunktak. Ezzel mi kiemelten nem foglalkozunk (bár a feladatok között oldunk meg ilyeneket, és a fő ötletet ismertetjük), de az ajánlott irodalomban [6] részletesen kidolgozva megtalálja az érdeklődő olvasó.

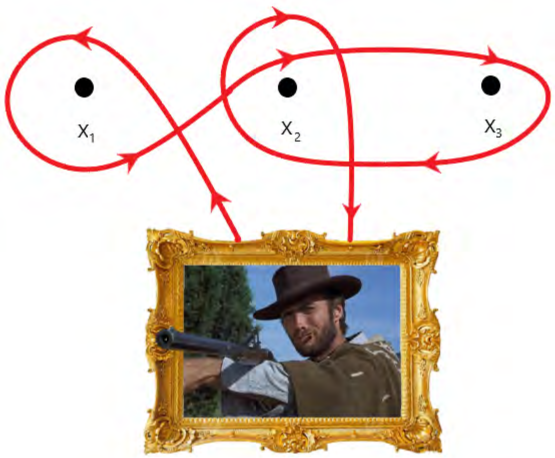
Az egyes problémákon gondolkodni legjobban persze a már említett módon, fizikailag megvalósítva a fűzéseket lehet, s így valóban kipróbálni, mi történik. Szintén jó lehetőség, ha a képakasztó zsinór útját lerajzoljuk; ilyenkor célszerű arra törekedni, hogy az ábra áttekinthető legyen (lásd *3. ábra*). Mindazonáltal a fizikai megvalósítás már öt-hat szög esetén nehézkessé válik a súrlódás és a zsinór fizikai merevsége, valamint szükséges hossza miatt. Rajzon pedig nehezen követhető, hogy egy szög kihúzása után a zsinór miként fűződik le. Ezért célszerű bevezetni az egyes felfűzések jelölésére egy kódolást.

Az egyes szögeket jelöljük különböző szimbólumokkal, pl. x_1, x_2, x_3, $\dots$ vagy a, b, c. Mi általában az elsőt használjuk, és az x_i szögre i-edik szögként is hivatkozunk. (A címkézés sorrendje lényegtelen, de célszerű a szokásos módon balról jobbra számozni.) A felakasztást úgy képzeljük el, hogy a zsinórt végigvezetjük a szögek között kanyarogva. Egy ilyen felfüggesztést a következőképpen kódolunk: x_i-t írunk, amikor az x_i szög fölött balról jobbra (az óramutató járásával megegyező irányban) és x_i^{-1}-t, amikor jobbról balra (az óramutató járásával ellenkező irányban) húzzuk el a madzagot. Ha a madzagot egy szög alatt húzzuk el, akkor nem írunk semmit, hiszen ilyenkor az adott szög nem tartja a képet. A megfelelő szimbólumokat egymás után írva kapjuk a felakasztás kódolását. A *4.* és *5. ábrán* láthatunk példákat a bevezetett jelölésre. A kapott jelsorozatokat egyszerűen *szavaknak* nevezzük a továbbiakban. (Ez a némileg pongyola, szemléletes leírás matematikailag precízzé



3. ábra. Egy képakasztás sematikus rajza

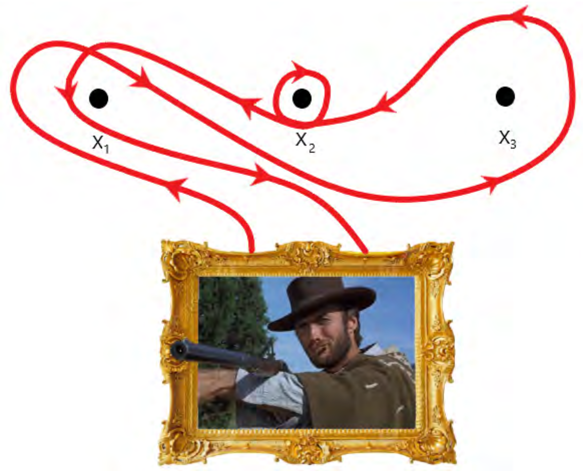
tehető a több helyen kipontozott sík fundamentális csoportjának segítségével, de ez túlmutat ezen cikk keretein.)



4. ábra. Az $x_1^{-1}x_2x_3x_2$ szóhoz tartozó fűzés

Az is világos, miért írtunk x_1-et és x_1^{-1}-t: ha egymás után elhúzzuk egy szög fölött a madzagot jobbra, majd balra, akkor ott nem történt semmi, csak „tettünk egy kanyart". Ez a jelölésünkben $x_1x_1^{-1}$, amelyet – az egymás után írást szorzásnak tekintve – a szokásos módon egyszerűsíthetünk. A továbbiakban feltesszük, hogy a szavainkban már nincs egyszerűsítési lehetőség.

Egy szög kihúzása azt jelenti, hogy a fűzésből a megfelelő szöget jelölő szimbólumot (és inverzét) minden helyről töröljük. A kép pedig pontosan akkor esik le,



5. ábra. Az $x_1x_3^{-1}x_2x_1^{-1}$ szóhoz tartozó fűzés

ha a fűzéshez tartozó szó az üres szóvá egyszerűsíthető, hiszen ez jelenti azt, hogy a zsinór egyetlen szög fölött sem halad el. Így az 1. alapfeladatunk a következőképpen fogalmazható meg: alkossunk olyan nem üres szót x_1 és x_2 szimbólumokból (és inverzeikből), amiből akár x_1, akár x_2 összes előfordulását törölve (beleértve az inverzeket is), a maradék szó az üres szóvá egyszerűsíthető.

Ezen a ponton javasoljuk a kedves olvasónak, hogy ha eddig nem boldogult a kitűzött feladatokkal, akkor térjen vissza hozzájuk, fogalmazza át őket a bevezetett szavak segítségével, és próbálja így megoldani őket.

4. Az n-szöges alapjáték megoldása

Az 1. feladat megoldása az 1. ábrán látható megvalósítva, a fűzést leíró szó: $x_1x_2x_1^{-1}x_2^{-1}$. Láthatjuk, hogy azonnali egyszerűsítés nincs, de bármely szimbólumot (és inverzét) törölve a szóból, a maradék az üres szóvá egyszerűsíthető. Természetesen bonyolultabb (hosszabb) megoldásokat is konstruálhatunk. Az $x_1x_2x_1^{-1}x_2^{-1}$ kifejezést szokás az x_1 és x_2 *kommutátorának* is nevezni, és $[x_1, x_2]$-vel jelölni.

Vegyük észre, hogy az 1. feladat megoldását felhasználva a 2. feladat is könnyen megoldható. Képzeljük azt, hogy az 1. és a 2. szöget egy nagy Z „szuperszöggé” egyesítjük, majd megoldjuk a Spivak-féle alapfeladatot a szuperszögre és a hármas szögre: $Zx_3Z^{-1}x_3^{-1}$. A Z szuperszöget akkor húzzuk ki, ha minden benne lévő szöget kihúzunk, így a $Z = x_1x_2$ helyettesítés a megfelelő. Ekkor $Z^{-1} = x_2^{-1}x_1^{-1}$. Figyeljük meg, hogy az x_1 és x_2 változók sorrendje az inverzben megfordul, különben ZZ^{-1} és $Z^{-1}Z$ nem egyszerűsödne. Így a 2. feladat megoldása $x_1x_2x_3x_2^{-1}x_1^{-1}x_3^{-1}$, amiről meggyőződhetünk, hogy valóban helyes.

Ezen két feladat tanulságaival felvértezve már megoldhatjuk az n-szöges alapfeladatot. Az ötlet az, hogy a megoldásokat konstruáljuk rekurzívan, azaz az n-

szöges feladat megoldását vezessük vissza kisebb szögszámú feladatok megoldására. Először a 3. feladaton keresztül mutatjuk be a technikát.

Legyen az x_1 és x_2 szögekre a 2-szöges alapjáték megoldása $M = [x_1, x_2] = x_1x_2x_1^{-1}x_2^{-1}$, és vegyük M és x_3 kommutátorát, másképpen fogalmazva írjuk fel a 2-szöges játék megoldását az M és x_3 szimbólumokra: $[M, x_3] = Mx_3M^{-1}x_3^{-1} = x_1x_2x_1^{-1}x_2^{-1}x_3x_2x_1x_2^{-1}x_1^{-1}x_3^{-1}$. Azt állítjuk, hogy ez megoldása a 3-szöges alapfeladatnak, azaz a 3.-nak.

Ennek meggondolásához célszerű az $Mx_3M^{-1}x_3^{-1}$ alakot tekinteni. Alaphelyzetben nincs egyszerűsítés, hiszen M-ben és így M^{-1}-ben nincs egyszerűsítési lehetőség, és M nem tartalmazza az x_3-at. Ha kihúzzuk x_1-et vagy x_2-t, akkor M (és így M^{-1}) önmagában üres szóvá egyszerűsödik, marad az $x_3x_3^{-1}$, ami szintén egyszerűsíthető. Ha x_3-at húzzuk ki, akkor pedig M és M^{-1} kerül egymás mellé.

Ezután térjünk rá az n-szöges alapjáték általános megoldására. Az $n = 1$, $n = 2$ és $n = 3$ eseteket már láttuk, így legyen $n \geq 4$, és tegyük fel, hogy $n - 1$ szögig már minden alapjátékot megoldottunk. Válasszunk egy $1 \leq k < n$ számot, és jelölje az $x_1, \ldots, x_k$ szögekre a k-szöges alapjáték megoldását M_k, továbbá az $x_{k+1}, \ldots, x_n$ szögekre kitűzött $(n - k)$-szöges alapjáték megoldását M_{n-k}.

Azt állítjuk, hogy ekkor $[M_k, M_{n-k}] = M_kM_{n-k}M_k^{-1}M_{n-k}^{-1}$ megoldása az n-szöges alapfeladatnak. Valóban, ha az $x_1, \ldots, x_k$ szögek bármelyikét kihúzzuk, M_k (és így M_k^{-1}) önmagában üres szóvá egyszerűsödik, hiszen M_k az $x_1, \ldots, x_k$ szögekre vonatkozó alapfeladat megoldása. Így M_{n-k} és M_{n-k}^{-1} egymás mellé kerül, a szavunk üres szóvá egyszerűsödik, és a kép leesik. Hasonlóan érvelhetünk, ha az $x_{k+1}, \ldots, x_n$ szögek valamelyikét húzzuk ki. Végül jegyezzük meg, hogy kezdetben sem M_k-ban, sem M_{n-k}-ban (és így inverzeikben) sincs egyszerűsítés, és a két megoldásban különböző szimbólumokat használunk, ezért a szavakat egymás után írva sem lehet egyszerűsítés. Ezzel beláttuk a következő tételt.

8. Tétel. *A n-szöges alapjáték minden pozitív egész n esetén megoldható.*

A fenti tételt valószínűleg [6]-ban publikálták először, de már korábban is ismert volt. A fent adott rekurzív konstrukciót alaposabban megértve belátható, hogy ha minél rövidebb szóval szeretnénk megoldani a játékot, akkor célszerű $k \approx n/2$-t választani. Ezzel a gondolattal egyszerűen igazolható, hogy az n-szöges alapjátéknak van legfeljebb $2n^2$ hosszú megoldása (ahol megoldás hosszán az őt leíró szó hosszát értjük), továbbá ha n kettőhatvány, akkor pontosan n^2 hosszú megoldás is létezik. Ennek részleteit az érdeklődő olvasóra bízzuk, [11]-ben megtalálható a teljes gondolatmenet.

A szakaszt egy [7]-ből származó egyszerű állítással zárjuk, amelynek igazolását szintén az olvasóra bízzuk.

9. Állítás ([7]). *Ha M az n-szöges alapjáték egy megoldása, akkor az M szó utolsó szimbólumát áthelyezve a szó elejére ismét egy megoldást kapunk.*

Ennek, illetve a konstrukciónknak a következménye, hogy az n-szöges alapjátéknak van olyan megoldása, amelynek sem az első, sem az utolsó szimbóluma nem inverz. Erre a későbbiekben még szükségünk lesz.

5. Az n-szöges általánosított feladat megoldása

Próbáljuk megoldani az 5. feladatot a korábban látott szuperszöges ötlettel! Készítsünk egy szuperszöget x_1-ből és x_3-ból, azaz legyen $Z_1 = x_1x_3$, valamint egy másik szuperszöget x_2-ből és x_3-ból: $Z_2 = x_2x_3$. Visszahelyettesítve

$$[Z_1, Z_2] = x_1x_3x_2x_3x_3^{-1}x_1^{-1}x_3^{-1}x_2^{-1} = x_1x_3x_2x_1^{-1}x_3^{-1}x_2^{-1}$$

adódik, ami sajnos nem oldja meg a feladatot, mert az x_1 és x_2 szögeket kihúzva is leesik a kép. A problémát az okozza, hogy az $S_1 = \{x_1, x_3\}$ és $S_2 = \{x_2, x_3\}$ szöghalmazok nem diszjunktak. Látható tehát, hogy a szuperszöges gondolat általánosan nem működik nem diszjunkt szöghalmazok esetén. (Bár [9] tévesen ezt állítja.) Korábbi ötleteink direktben, további kiegészítések nélkül nem oldják meg az általános feladatot. Más módon viszont célhoz érhetünk, a cikk hátralevő részében igazolni fogjuk a következő állítást:

10. Tétel (Demaine és szerzőtársai, 2012 [6])**.** *Az n-szöges általánosított játék minden pozitív egész n és tetszőleges S_i halmazok esetén megoldható.*

Tekintsünk egy tetszőleges P felfűzést (szót), és definiáljunk egy P-hez tartozó f_P függvényt a következőképpen. Az f_P-nek n darab változója van, ezeket $r_1, \ldots, r_n$ jelöli. A változók mindegyike *igaz* vagy *hamis* értéket vehet fel. Szemléletesen a r_i változó az x_i szög állapotát mutatja: r_i igaz, ha x_i-t kihúztuk, hamis, ha x_i a falban maradt. Továbbá f_P értéke is igaz vagy hamis lehet, amelyet a P fűzésből határozunk meg: az igaz értéket felvevő r_i változókhoz tartozó x_i szögeket kihúzzuk, a hamis értéket felvevő r_i változókhoz tartozó x_i szögeket a helyükön hagyjuk, és megnézzük, a kép leesik-e. Ha a kép leesik, akkor f_P értéke igaz; ha fennmarad, akkor hamis.

Tekintsük például a $P = x_1x_2x_1^{-1}x_3x_2x_1x_3^{-1}x_1^{-1}$ felfűzést. Az ehhez tartozó f_P (háromváltozós) függvényt a következő táblázat adja meg. Szokásos módon a hamis helyett 0-t, igaz helyett 1-et írtunk.

r_1	r_2	r_3	f_P
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

A negyedik sorban például azt írtuk ki, hogy ha pontosan a második és harmadik szögeket húzzuk ki, akkor a kép leesik (hiszen P üres szóvá egyszerűsíthető x_2 és x_3 törlése után). Vegyük észre, hogy a kapott f_P függvény *minden változójában monoton nemcsökkenő*, azaz ha egy változóját nulláról egyesre változtatjuk, attól az értéke nem csökkenhet (azaz nem változhat egyről nullára) – ez pontosan annak felel meg, hogy újabb szöget kihúzva a már leesett kép nem kerülhet vissza a falra.

A kapott f_P függvény egy ún. *Boole-függvény.* A megoldás hátralevő része jelentősen rövidíthető a monoton Boole-függvények tulajdonságainak ismeretében (lásd például az [5] könyvet), de itt most ezekre az ismeretekre nem építünk, részletesen bemutatjuk a lépéseket, miközben csak néhány alapvető logikai fogalmat használunk fel.

Vegyük észre, hogy az f_P függvényből kiolvasható, hogy a P fűzés megold-e egy konkrét n-szöges általánosított játékot.[1] Ezért a bizonyítási módszerünk a következő lesz: tetszőleges S_i halmazokhoz konstruálunk egy f Boole-függvényt úgy, hogy P pontosan akkor oldja meg az S_i halmazokhoz tartozó n-szöges általános feladatot, ha $f_P = f$. Ezután az $f = f_P$ függvényt átalakítjuk, és ennek segítségével adunk egy megfelelő P felfűzést. Használni fogunk néhány jól ismert logikai fogalmat, az *és* és a *vagy*[2] műveleteket rendre $\wedge$ és $\vee$ jelöli, a negálás (tagadás) műveletet felülvonással jelöljük majd (pl. $\overline{r}$).

A könnyebb érthetőség érdekében a bizonyítást csak egy példán keresztül mutatjuk be, az általános leírás ebből már megadható, de a precíz végigszámolása eléggé körülményes. Legyen $n=6$, továbbá $S_1=\{x_1, x_2, x_3\}$, $S_2=\{x_2, x_3, x_4\}$, $S_3=\{x_4, x_5\}$ és $S_4=\{x_6\}$ az adott halmazaink. Ekkor a P fűzés pontosan akkor oldja meg az S_i halmazok által megadott 6-szöges általánosított játékot, ha

$$f_P(r_1, \ldots, r_6) = (r_1 \wedge r_2 \wedge r_3) \vee (r_2 \wedge r_3 \wedge r_4) \vee (r_4 \wedge r_5) \vee r_6.$$

Ez valóban jó, ha valamelyik S_i halmaz összes szögét kihúzzuk, akkor a neki megfelelő („és"-ekkel összekapcsolt) zárójeles kifejezés igaz lesz, ezért f_P is igaz, ha viszont egyik S_i-t sem húzzuk ki teljesen, akkor minden zárójeles kifejezés hamis, ezért f_P is hamis. A felírt f_P függvény úgynevezett diszjunktív normálformában van. Vegyük észre, hogy a felírásban sehol nem használtunk tagadást (negálást).

A feladatunk már csupán annyi, hogy találjunk egy olyan P fűzést, amelyhez pontosan ez a Boole-függvény tartozik. Ehhez át fogjuk alakítani az f_P függvényt úgy, hogy a felírásban az egyes zárojeleken belül csak „vagy" műveletek szerepeljenek, a zárójelek között pedig csupa „és" műveletek (azaz ún. konjunktív normálformára hozzuk f_P-t). Felhasználjuk a logikai De Morgan-azonosságokat:

$$\overline{a \wedge b} = \overline{a} \vee \overline{b} \quad \text{és} \quad \overline{a \vee b} = \overline{a} \wedge \overline{b}.$$

Végezzük el a következő átalakításokat:

$$\begin{aligned} f_p(r_1, \ldots, r_6) &= (r_1 \wedge r_2 \wedge r_3) \vee (r_2 \wedge r_3 \wedge r_4) \vee (r_4 \wedge r_5) \vee r_6 = \\ &= \overline{\overline{(r_1 \wedge r_2 \wedge r_3)} \wedge \overline{(r_2 \wedge r_3 \wedge r_4)} \wedge \overline{(r_4 \wedge r_5)} \wedge \overline{r_6}} = \\ &= \overline{(\overline{r_1} \vee \overline{r_2} \vee \overline{r_3}) \wedge (\overline{r_2} \vee \overline{r_3} \vee \overline{r_4}) \wedge (\overline{r_4} \vee \overline{r_5}) \wedge \overline{r_6}} \overset{\text{(i)}}{=} \\ &= \overline{((\overline{r_1} \wedge \overline{r_4}) \vee \overline{r_2} \vee \overline{r_3}) \wedge (\overline{r_4} \vee \overline{r_5}) \wedge \overline{r_6}} \overset{\text{(ii)}}{=} \end{aligned}$$

[1] A táblázatban példaként bemutatott függvényhez tartozó fűzés melyik feladatot oldja meg?

[2] A „vagy" művelet az úgynevezett „megengedő vagy", idegen szóval diszjunkció. Ha ezzel kapcsolunk össze két állítást, akkor az összetett állítás akkor lesz igaz, ha a két összekapcsolt állítás közül legalább az egyik igaz.

$$= \overline{((\overline{r_1} \wedge \overline{r_4}) \vee (\overline{r_2} \wedge \overline{r_4}) \vee (\overline{r_2} \wedge \overline{r_5}) \vee (\overline{r_3} \wedge \overline{r_4}) \vee (\overline{r_3} \wedge \overline{r_5})) \wedge \overline{r_6}} =$$

$$= \overline{(\overline{r_1} \wedge \overline{r_4} \wedge \overline{r_6}) \vee (\overline{r_2} \wedge \overline{r_4} \wedge \overline{r_6}) \vee (\overline{r_2} \wedge \overline{r_5} \wedge \overline{r_6}) \vee (\overline{r_3} \wedge \overline{r_4} \wedge \overline{r_6}) \vee (\overline{r_3} \wedge \overline{r_5} \wedge \overline{r_6})} =$$

$$= (r_1 \vee r_4 \vee r_6) \wedge (r_2 \vee r_4 \vee r_6) \wedge (r_2 \vee r_5 \vee r_6) \wedge (r_3 \vee r_4 \vee r_6) \wedge (r_3 \vee r_5 \vee r_6).$$

Az (i) és (ii) egyenlőségeknél az első két zárójelet „és"-eljük össze, ezeknek a részletes kiszámolását az olvasóra bízzuk. (Aki nem jártas a logikai műveletekkel való számolásokban, az igazságtáblázattal ellenőrizheti, hogy a számolás helyes.) Vegyük észre, hogy a kapott konjunktív normálformában már egyik változó sem szerepel tagadott alakban. (Itt a monoton Boole-függvények egy jól ismert tulajdonságát mutattuk meg.)

Tekintsük a kapott konjunktív normálforma zárójeles kifejezéseit, először $(r_1 \vee r_4 \vee r_6)$-t. Legyen a P_1 fűzés az, amit úgy kapunk, hogy megoldjuk a x_1, x_4 és x_6 szögekre vonatkozó alapproblémát (bármelyiket kihúzzuk, leesik a kép). Utána legyen P_2 az x_2, x_4 és x_6 szögekre (második zárójel) vonatkozó alapprobléma megoldása. Így folytatva minden zárójelen végigmegyünk, s végül a kapott szavakat egymás után írjuk, így kapjuk a P fűzéshez tartozó szót: $P = P_1 P_2 \dots P_5$. (Ez a példában 50 hosszú, a konkrét felírásától eltekintünk.) Az előző szakasz legvégén tett megjegyzés szerint feltehetjük, hogy minden részproblémánál olyan P_1, P_2, …, P_5 megoldást választunk, amelyeknek első és utolsó szimbóluma nem inverz elem.

Megmutatjuk, hogy ez a P fűzés megoldja az S_i halmazokhoz tartozó problémát. Először is, kezdetben nincs triviális egyszerűsítés, mert a zárójelekhez tartozó megoldások végei sehol sem inverzek.

Egyrészt $f_P =$ igaz pontosan akkor teljesül, ha a konjunktív normálforma minden zárójeles kifejezésében valamely r_i igaz. De ez azt jelenti, hogy minden „zárójelből kihúztunk egy szöget", vagyis minden zárójelnek megfelelő részfűzés önmagában leegyszerűsödik, és a kép leesik.

Most tegyük fel, hogy $f_P =$ hamis. Ekkor néhány (legalább egy) zárójel logikai értéke hamis, azaz a zárójelhez tartozó szögekből egyáltalán nem húzunk ki szöget. Azokból a zárójelekből, ahonnan húztunk ki szöget, a hozzá tartozó részfeladatot megoldó szó üres szóvá egyszerűsödik. A többi zárójelhez tartozó teljes fűzések (szavak) egymás mellé kerülnek. De mivel nincsenek inverz végek, így további egyszerűsítés nincs, és a kép fennmarad.

Bár a bizonyítást csak egy példán keresztül mutattuk be, de a gondolatmenet alapján látható, hogy tetszőleges n és S_i halmazok esetén f_P felírható diszjunktív normálformában. Ezután a bemutatott számolás általános módon is elvégezhető, és a kapott (tagadást nem tartalmazó) konjunktív normálforma alapján a keresett P fűzés megadható. Ezzel a 10. tételt beláttuk.

6. Zárógondolatok

Aki szeretné jól megérteni a bemutatott bizonyítást, annak javasoljuk, hogy számolja végig a 4. és 5. feladatok megoldását. Mint általában, néhány ügyes észrevétellel ezek is megfejthetőek az általános eljárás használata nélkül is.

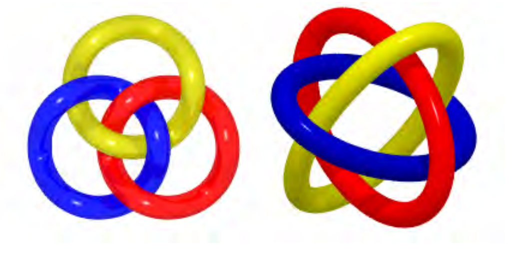
A 4. feladat esetén gondolhatunk arra, hogy ha bármely szimbólum törlése után a Spivak-féle alapfeladat megoldása marad, akkor készen vagyunk, s így viszonylag könnyű rátalálni az $x_1x_2x_3x_1^{-1}x_2^{-1}x_3^{-1}$ megoldásra.

Az 5. feladatnál pedig azt érdemes megfigyelni, hogy a 3. szöget mindenképp ki kell húzzuk, a maradékra pedig ismét az alapmegoldásnak kell teljesülnie, azaz egy lehetséges jó fűzés az $x_1x_2x_1^{-1}x_2^{-1}x_3$.

Végezetül röviden bemutatjuk az alapjáték kapcsolatát egy sokat vizsgált topológiai területtel. Kezdésnek nézzünk egy újabb fejtörőt:

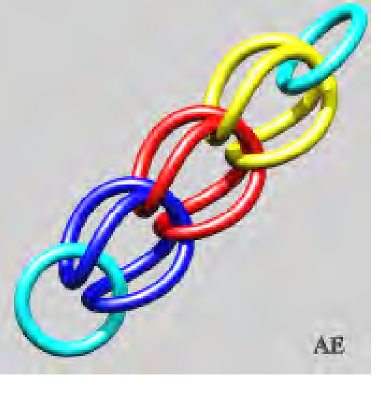
11. feladat. Akasszunk össze három biztosítótűt egy „csomóvá” úgy, hogy ha bármelyiket közülük kinyitjuk, akkor a három biztosítótűt szét lehessen egymástól választani.

A megoldás motívuma évszázadok óta ismert (lásd *6. ábra*), leginkább Borromeo-gyűrűk néven szokták emlegetni, mivel az itáliai Borromeo-ház címerében megjelenik [1, 2].



6. ábra. A Borromeo-gyűrűk két lerajzolása. (A kép forrása: [2].)

Ha a három összekapcsolódó karika közül bármelyiket elvágjuk, a maradék kettő nincs összekapcsolódva, szétválasztható. Biztosítótűkkel a megvalósítást nehezíti a tűk fizikai merevsége, de egyébként világos, hogy az elrendezés „logikája” (topológiája) a Borromeo-gyűrűkével azonos. Az olvasóra hagyjuk a részletek meggondolását, de a Spivak-féle alapfeladat megoldása is lényegében a Borromeo-gyűrűk. (A felfűzött madzag az egyik gyűrű, a szögek pedig a másik két gyűrű.)



7. ábra. Egy öt szemből álló Brunn-lánc. (A kép forrása: [4].)

A Borromeo-gyűrűk speciális Brunn-láncok [3]. Szemléletesen a Brunn-láncok olyan láncok, amelyeknek bármely szemét szétvágva (a láncból eltávolítva) a lánc szemeire esik szét. Ismert fejtörő ilyen lánc konstruálása, egy megoldás látható a *7. ábrán.* A Brunn-láncok karakterizációját John Milnor Abel-, Fields- és Wolf-díjas matematikus adta meg 1954-ben. Szintén nem túl nehéz meggondolni, hogy egy n-szemű Brunn-láncból megkonstruálható az $(n-1)$-szöges alapjáték egy megoldása.

Ebben a munkában terjedelmi okok miatt sok érdekes matematikai kapcsolatot csak nagyon érintőlegesen tárgyaltunk, ezért a téma iránt mélyebben érdeklődő olvasóknak ajánljuk a [11], [6], [7], [9] és [8] dolgozatok elolvasását (ebben a sorrendben).

Hivatkozások

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Borromean_rings, utolsó elérés: 2024. február 10.

[2] https://mathcurve.com/courbes3d.gb/borromee/borromee.shtml, utolsó elérés: 2024. február 10.

[3] https://en.wikipedia.org/wiki/Brunnian_link, utolsó elérés: 2024. február 10.

[4] https://mathcurve.com/courbes3d.gb/brunnien/brunnien.shtml, utolsó elérés: 2024. február 10.

[5] Czédli G.: Boole-függvények, POLYGON, 2020.

[6] Erik D. Demaine, Martin L. Demaine, Yair N. Minsky, Joseph S. B. Mitchell, Ronald L. Rivest, Mihai Patrascu, Picture-hanging puzzles, Theory Comput. Syst., 54 (2014), no. 4, 531—550. https://doi.org/10.1007/s00224-013-9501-0

[7] R. Fulek, S. Avvakumov: A note on a picture-hanging puzzle. In Ambrus G., Böröczky K., Füredi Z. (szerk): Discrete Geometry and Convexity in Honour of Imre Bárány, Typotex, 137. o. https://real.mtak.hu/86263/1/barany70kotet_VEGLEGES.pdf#page=137

[8] P. Gartside, S. Greenwood: Brunnian links. Fundamenta Mathematicae 193.3 (2007): 259–276. http://eudml.org/doc/282667

[9] A. Horváth: An algebraic topology based secret sharing scheme, Procedia Manufacturing, vol 22 (2018): 1051–1058. https://doi.org/10.1016/j.promfg.2018.03.149

[10] J. Milnor: Link groups, Annals of Mathematics, Vol. 59, No. 2 (Mar., 1954), pp. 177–195. https://doi.org/10.2307/1969685

[11] Oszlánczi O.: Képakasztójáték. BSc szakdolgozat, SZTE (2020). https://diploma.bibl.u-szeged.hu/id/eprint/111944/

[12] A. Spivak. Brainteasers B 201: Strange painting, *Quantum* May/June 1997, 13. oldal a probléma, 60. oldal (figure 5) a megoldás.

[13] J. Wästlund: Faulty picture-hanging improved, preprint (2021), https://arxiv.org/pdf/2102.00984.pdf

Vígh Viktor

Gyakorló feladatsor
emelt szintű matematika érettségire

I. rész

1. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán. A *b)* egyenletnél a megoldás(oka)t $x=\log_a b$ alakban adjuk meg.

a) $\sqrt{x^3+64}=x+8$ *(6 pont)*

b) $\log_2 3\cdot x^2-\dfrac{5}{2}x+\log_3 2=0.$ *(5 pont)*

2. *a)* Az a_n számtani sorozat első három tagjának összege 21, szorzata pedig 280. Adjuk meg az összes ilyen sorozat első tagját és differenciáját. *(6 pont)*

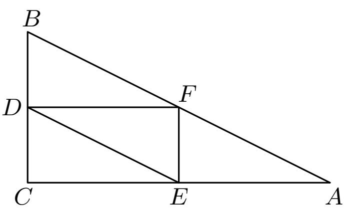
Legyen a b_n egy olyan számsorozat, amely szigorúan monoton növekvő és amelynek első három tagja egy-egy pozitív prímszám. Ha az első taghoz 2-t, a második taghoz 1-et hozzáadunk, míg a harmadik tagból 1-et elveszünk, akkor egy c_n számtani sorozat első három tagját kapjuk meg, amelyekre teljesül, hogy összegük 24.

b) Határozzuk meg a b_n sorozat első három tagját. *(5 pont)*

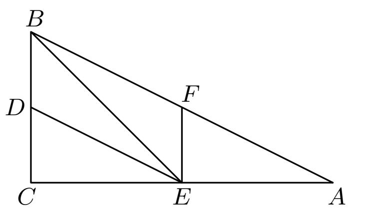
3. Adott az ABC derékszögű háromszög. Tudjuk, hogy az átfogóhoz tartozó magasság hossza $\sqrt{2023}$ cm, valamint hogy ez a magasság az átfogót két olyan részre osztja, amelyek hossza cm-ben mérve egész szám.

a) Mekkora lehet a háromszög köré írható körnek a sugara? *(5 pont)*

A legkisebb átfogójú háromszög oldalfelező pontjait jelöljük D, E és F-fel az alábbi ábrákon látható módon. Anna és Bea is lerajzolt egy-egy egymással egybevágó derékszögű de nem egyenlő szárú ABC háromszöget. Anna megrajzolta az ABC háromszöge három középvonalát, míg Bea összekötötte az AC oldal felezőpontját a CB és az AB oldal felezőpontjaival, valamint a B csúccsal. Így mindketten négy kisebb háromszöget kaptak (*1.* és *2. ábra*).



1. ábra



2. ábra

b) Bizonyítsuk be, hogy mind a nyolc kis háromszög területe egyenlő. *(4 pont)*

A lányok kiszínezik a kisebb háromszögeket. Három színes ceruza van náluk: egy sárga, egy piros és egy kék. Azt a szabályt találják ki, hogy derékszögű háromszöget csak pirossal vagy kékkel színezhetnek ki, illetve hogy két, közös oldallal rendelkező háromszög nem lehet ugyanolyan színű.

c) Hányféleképpen lehet kiszínezni a nyolc darab háromszöget a szabályok betartásával? *(5 pont)*

4. Elizabet egy dobozba tett hat darab számkártyát, amelyek a következők: -1; 1; 3; -2; 2; 4.

a) Határozzuk meg a dobozban található számkártyák értékének mediánját és szórását. *(3 pont)*

b) A dobozban található számkártyák közül véletlenszerűen kiválasztunk kettőt. Mekkora annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott számkártyák összegének abszolút értéke legfeljebb 2? *(3 pont)*

c) Egy négyszög oldalai pozitív körüljárás szerint sorban a, b, c és d. A négy oldal hosszát úgy kaptuk, hogy az 1, 2, 3, 4 számkártyák közül, visszatevés nélkül véletlenszerűen húztunk, és az első érték az a oldal hossza lett cm-ben, a második érték a b oldal hossza, a harmadik a c oldalé, míg a negyedik a d oldalé. Mekkora annak a valószínűsége, hogy a kapott négyszögnek van beírható köre? *(4 pont)*

d) Elizabet a dobozba tett egy hetedik számkártyát is, amelynek értékét jelöljük k-val. Határozzuk meg k értékétől függően a dobozban található számkártyák értékeinek felső kvartilisét. *(5 pont)*

II. rész

5. Adott az $f(x)=-\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{2023}{2}x^2+2024x+k$ függvény ($k>0$).

a) Bizonyítsuk be, hogy a függvény a $]-1;2024[$ intervallumon szigorúan monoton növekvő. *(4 pont)*

b) Határozzuk meg a k valós paraméter értékét úgy, hogy a függvénynek pontosan két zérushelye legyen. *(6 pont)*

Adottak az alábbi értékek: $A=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4+5x}{6x-7}$ és $B=\displaystyle\int_1^3(x^2-2x+2)\,dx$.

c) Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:

$$\sqrt{Ax+4}=\frac{1}{4}Bx-4. \qquad \textit{(6 pont)}$$

6. Adott a H alaphalmaz, amelynek azok a négyjegyű pozitív egész számok az elemei, amelyekre egyszerre teljesülnek az alábbi feltételek:

(1) az utolsó számjegyük 4,

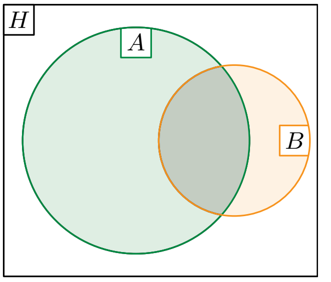
(2) a számjegyeik összege 8,

(3) a számjegyeik szorzata 0.

a) Igazoljuk, hogy a H alaphalmaz elemeinek a mediánja 2204. *(3 pont)*

A H alaphalmazon belül az A halmaz elemei azok a számok, amelyeknél az első két számjegyből alkotott kétjegyű szám nagyobb, mint az utolsó két számjegyből alkotott kétjegyű szám, míg a B halmaz elemei a néggyel osztható számok.

b) Töltsük ki a Venn-diagramot. *(3 pont)*



A halmazábrán a nagyobb kör sugara 5 egységgel hosszabb a kisebb kör sugaránál. A két kör középpontja 13 egységnyi távolságra található egymástól.

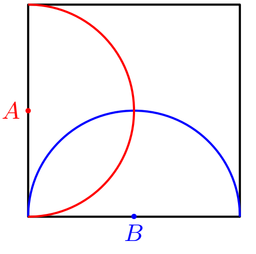
c) Megrajzoltuk a két kör egyik közös külső érintőjét. Mekkora a két érintési pont közötti távolság? *(5 pont)*

Egy hatpontú egyszerű gráf négy fokszámát ismerjük: 2; 0; 2; 4. Tudjuk, hogy a fokszámok mediánja nem egész szám.

d) Rajzoljuk le az összes ilyen gráfot. *(5 pont)*

7. A Roxfort Boszorkány- és Varázslóképző Szakiskolában a Weasley ikrek üzletet nyitottak, ahol különféle mágikus eszközöket árulnak.

Hermione éppen mágikus matematika tantárgy vizsgájára gyakorol, és az egyik seprűje végének a keresztmetszetét rajzolta le az ábrán látható módon.



Egy 2 cm oldalhosszúságú négyzet két szomszédos oldalának felezőpontját jelölte A-val és B-vel, majd ezekből rajzolt egy-egy 1 cm sugarú félkört a négyzeten belülre. A két félkör közös része által meghatározott síkidom alakja és mérete jó közelítéssel megegyezik a seprű végének keresztmetszetével.

a) Határozzuk meg ennek a síkidomnak a területét. *(4 pont)*

Az üzletben található 100 seprűből 13 hibás. A Griffendél csapata vásárol magának 7 darab seprűt.

b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy a megvásárolt seprűk közül legalább kettő hibás? *(7 pont)*

Az egyik mérkőzés után a klubházban gyülekeznek a legnagyobb rajongók, összesen 17-en. Tudjuk, hogy a fiúk a fiúkkal, míg a lányok a lányokkal fognak kezet megérkezéskor. Összesen 66 kézfogás történt. Tudjuk, hogy több fiú volt a klubházban, mint lány.

c) A klubházban tartózkodó diákok közül kettőt véletlenszerűen kiválasztva mekkora annak a valószínűsége, hogy egyikük fiú, a másik pedig lány? *(5 pont)*

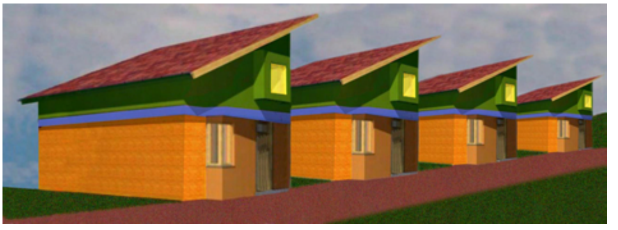
8. *a)* Mi lehet annak az egyenesnek az egyenlete, amely párhuzamos az y tengellyel és az $f(x)=\sin x$ függvény és az x tengely által a $[0;\pi]$ intervallumon határolt síkidom területének 1/4-ét vágja le. *(7 pont)*

b) Mely valós $x\in\,]0;\pi[$ érték esetén lesz az 1 és a $\operatorname{tg} x$ értékeinek négyzetes közepe $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$? *(4 pont)*

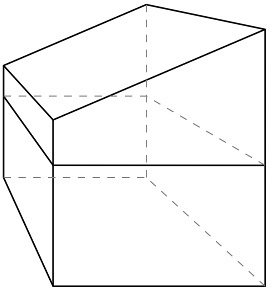
Egy konvex négyszög területe 1156 cm^2. A négyszög egymás melletti oldalfelező pontjait összekötöttük egymással, így egy újabb négyszöget kaptunk. Ezt az eljárást az új négyszöggel megismételtük, majd egészen addig ismételtük, amíg az így készült négyszögek területének mérőszámait az eredeti négyszögéhez rendre hozzáadva éppen 2023-at kaptunk.

c) Összesen hányszor végeztük el az eljárást? *(5 pont)*

9. Tökölön 24 darab új építésű sorház épül. Ezeknek a házaknak a teteje vagy piros, vagy szürke. Tudjuk, hogy pontosan 3 háznak piros a teteje.



a) Hány különböző színezése lehet a 24 háznak? (Két színezést akkor tekintünk különbözőnek, ha van olyan ház, amelynek más színű a teteje a két színezésben.) *(2 pont)*



A házak alsó szintje téglatest alakú, amelynek alapterülete 119 m^2, magassága 4 méter. A tetőtér egy derékszögű trapéz alapú, az ábrán látható módon fekvő hasáb, ahol a trapéz különböző hosszúságú, párhuzamos oldalainak számtani közepe 3 méter.

A trapéz alapokra merőleges szára 7 méter, és az ábrán látható módon illeszkedik az alsó szint téglatestének egyik éléhez. Tudjuk, hogy a téglatest és a trapéz alapú hasáb élei – egy kivételével – méterben mérve egész számok.

b) Mekkora lehet a trapéz hosszabbik szára, ha az méterben mérve nem egész szám? *(8 pont)*

c) Hány köbméter egy ház térfogata? *(6 pont)*

Teleki Olivér
Tököl

Megoldásvázlatok a 2024./2. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához

I. rész

1. *Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:*

a) $4^{x+\frac{1}{2}}+5\cdot 2^x-3=0,$ (6 pont)

b) $2\cos(2x)+2\sin^2 x+5\cos x=3.$ (6 pont)

Megoldás. *a)* $2\cdot 2^{2x}+5\cdot 2^x-3=0$. Legyen $a=2^x$, ekkor $2a^2+5a-3=0$. Innen $a_1=-3<0$ hamis gyök, $a_2=0{,}5$, amiből $2^x=2^{-1}$. Az exponenciális függvény szigorú monotonitása miatt $x=-1$.

Ekvivalens átalakításokat végeztünk, így az egyenlet megoldása az $x=-1$.

b) $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$, ezért $2\cos^2 x-2\sin^2 x+2\sin^2 x+5\cos x-3=0$, tehát $2\cos^2 x+5\cos x-3=0$.

Hasonlóan az *a)* részhez: $\cos x=-3<-1$ hamis gyök, $\cos x=\frac{1}{2}$, amiből $x=\pm\frac{\pi}{3}+k\cdot 2\pi$; $k\in\mathbb{Z}$.

Ekvivalens átalakításokat végeztünk, így az egyenlet megoldásai:

$$x=\pm\frac{\pi}{3}+k\cdot 2\pi;\quad k\in\mathbb{Z}.$$

2. *Egy mértani sorozat első három tagjának az összege* 39*. Ha az elsőhöz kettőt, a másodikhoz hatot adunk, a harmadikból pedig elveszünk kettőt, akkor ugyanebben a sorrendben egy számtani sorozat három egymást követő tagját kapjuk. Mennyi a két sorozat állandója?* (13 pont)

Megoldás. A mértani sorozatra fennáll, hogy $a_1+a_1q+a_1q^2=39$. A számtani sorozat tagjai: a_1+2, a_1q+6, a_1q^2-2, így $2(a_1q+6)=a_1+2+a_1q^2-2$. A két egyenletet rendezve $a_1(1+q+q^2)=39$ és $a_1(q^2-2q+1)=12$. Innen

$$\frac{q^2+q+1}{q^2-2q+1}=\frac{39}{12},\quad \text{ezért}\quad 12q^2+12q+12=39q^2-78q+39,$$

rendezés után $27q^2-90q+27=0$, vagyis $3q^2-10q+3=0$. $q_1=\frac{1}{3}$ vagy $q_2=3$.

Ha $q=\frac{1}{3}$, akkor $a_1\cdot(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9})=39$, vagyis $a_1=27$. Ekkor a mértani sorozat első három tagja 27; 9; 3, a számtani sorozat első három tagja pedig 29; 15; 1. Tehát $d=-14$.

Ha $q=3$, akkor $a_1(1+3+9)=39$, ahonnan $a_1=3$. Ekkor a mértani sorozat első három tagja 3; 9; 27 a számtani sorozat első három tagja pedig 5; 15; 25. Eszerint $d=10$.

3. *Matematikaórán a statisztika adatok egyes jellemzői kiszámításának gyakorlásához a jelenlévő tanulók magasság adatait használták fel. Ezek egész centiméterben a következők voltak:* 176*;* 171*;* 180*;* 176*;* 178*;* 173*;* 174*;* 173*;* 177*;* 175*;* 173*;* 179*;* 173 *és* 175.

a) Mennyi a tanulócsoport átlagmagassága centiméterben? Az eredményt egy tizedesjegy pontossággal adjuk meg. (3 pont)

b) Mennyi a magasságok mediánja, módusza és felső kvartilise? (3 pont)

c) Mennyi az adatok szórása? (2 pont)

d) Ábrázoljuk oszlopdiagramon az adatokat. (4 pont)

Megoldás. *a)* Foglaljuk táblázatba az adatokat.

magasság(cm)	171	173	174	175	176	177	178	179	180
darabszám	1	4	1	2	2	1	1	1	1

Kiszámítjuk az átlagot:

$$\frac{171+4\cdot 173+174+2\cdot 175+2\cdot 176+177+178+179+180}{14}=\frac{2453}{14}\approx 175{,}2\ \text{(cm)}.$$

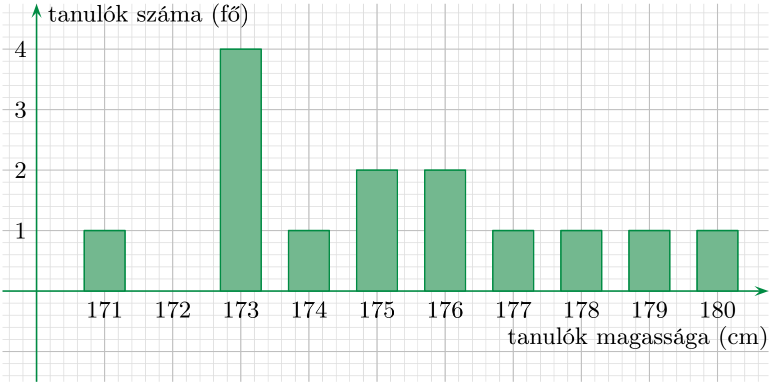
b) A medián: $\frac{175+175}{2}=175$ (cm), a módusz: 173 (cm), a felső kvartilis: 177 (cm).

c) A szóráshoz előbb a szórásnégyzetet számítjuk ki:

$$\frac{(171-175{,}2)^2+4\cdot(173-175{,}2)^2+\ldots+(179-175{,}2)^2+(180-175{,}2)^2}{14}\approx 6{,}31,$$

ahonnan $\sigma\approx 2{,}51$ (cm).

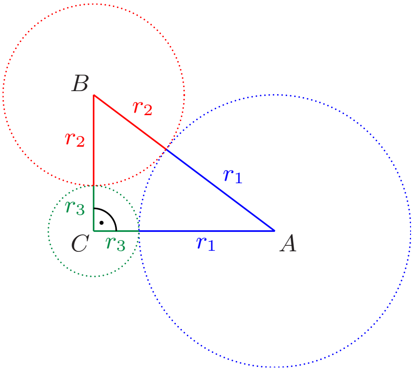
d)



4. *Az ABC derékszögű háromszög befogói $AC=4$ és $BC=3$ egység hosszúak. A háromszög csúcsai, mint középpontok körül olyan köröket rajzolunk, amelyek páronként kívülről érintik egymást.*

a) Határozzuk meg a körök sugarainak hosszát. (5 pont)

b) Mekkora annak a körnek a sugara, amely a háromszögön belül van és mindhárom kört kívülről érinti? (9 pont)



Megoldás. *a)* Pitagorasz tételét alkalmazzuk az $ABC\triangle$-ben: $AB^2=AC^2+BC^2$, ahonnan $AB=5$.

Az ábráról leolvashatjuk a következőket:

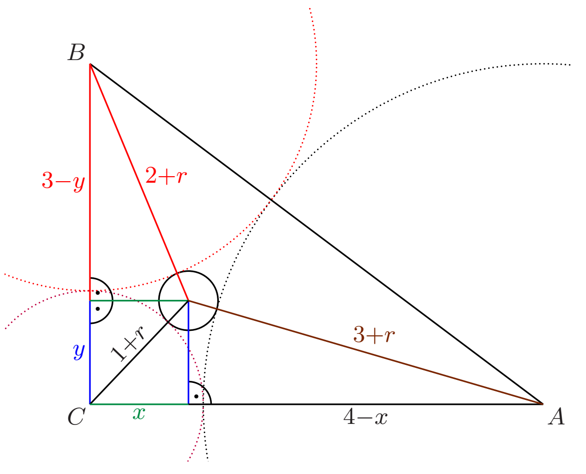
$$\begin{aligned} r_1+r_2&=5,\\ r_1+r_3&=4,\\ r_2+r_3&=3,\\ \hline r_1+r_2&=5,\\ r_1-r_2&=1,\\ \hline \end{aligned}$$

$2r_1=6$, azaz $r_1=3$, innen $r_2=2$, $r_3=1$.

A három kör sugara tehát

$$r_1=3,\quad r_2=2\quad \text{és}\quad r_3=1.$$

b) Legyen a keresett kör középpontja O, sugarának hossza pedig r. Készítsünk ábrát, és használjuk a jelöléseit. Alkalmazzuk a Pitagorasz-tételt abban a három



derékszögű háromszögben, amelyekben bejelöltük a derékszögeket:

$$x^2+y^2=(1+r)^2, \tag{1}$$

$$(4-x)^2+y^2=(3+r)^2, \tag{2}$$

$$(3-y)^2+x^2=(2+r)^2. \tag{3}$$

A (2) egyenletből kivonva az (1) egyenletet: $16-8x=8+4r$, ahonnan $x=\dfrac{2-r}{2}$.
A (3) egyenletből kivonva az (1) egyenletet: $9-6y=3+2r$, ahonnan $y=\dfrac{3-r}{3}$.

A kapott kifejezéseket behelyettesítjük (1)-be, majd rendezzük az egyenletet:

$$\left(\frac{2-r}{2}\right)^2+\left(\frac{3-r}{3}\right)^2=(1+r)^2,$$
$$36-36r+9r^2+36-24r+4r^2=36+72r+36r^2,$$
$$23r^2+132r-36=0,$$

$r_1=-6<0$ hamis gyök, $r_2=\frac{6}{23}$ megfelelő gyök.

A keresett kör sugarának hossza $\frac{6}{23}$ egység.

II. rész

5. *Egy parabola tengelypontja a $T(4;4)$ pont, a $P(3;3)$ pont pedig illeszkedik a parabolára.*

a) Határozzuk meg a parabola egyenletét. (4 pont)

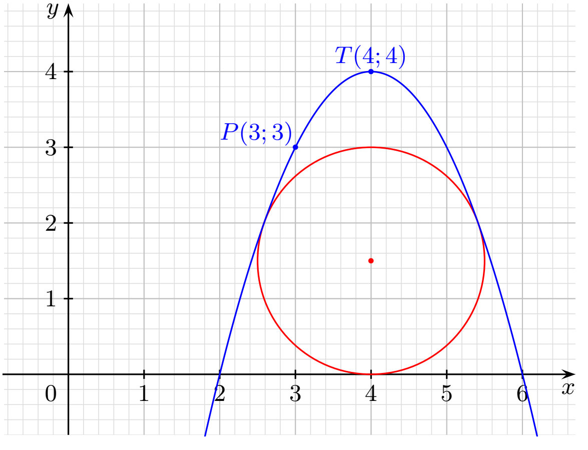
A parabola és az x tengely által meghatározott korlátos, zárt síkidomba olyan kört írunk, amely érinti a parabolát és az x tengelyt is. A síkidom pontjai közül véletlenszerűen kiválasztunk egyet.

b) Mekkora a valószínűsége annak, hogy a kiválasztott pont a körlap pontja lesz?

(12 pont)

Megoldás. *a)* A parabola egyenletét $y = a(x-u)^2 + v$ alakban keressük, ahol u és v a tengelypont koordinátái, azaz $u = 4$ és $v = 4$. Ekkor $y = a(x-4)^2 + 4$, valamint a P illeszkedik a parabolára, tehát $3 = a(3-4)^2 + 4$, azaz $a = -1$. A parabola egyenlete: $y = -(x-4)^2 + 4$.

b) Megrajzoljuk az alakzatokat. A parabola szimmetrikus az $x = 4$ egyenletű egyenesre, így a kör is az lesz. A kör középpontjának az első koordinátája 4. A kör érinti az x tengelyt is és az első negyedben van, tehát a kör középpontjának második koordinátája a kör sugarával (r) egyenlő, így a kör egyenlete $(x-4)^2 + (y-r)^2 = r^2$, a parabola egyenlete $y = -(x-4)^2 + 4$, az így kapott egyenletrendszernek y-ra pontosan egy megoldása kell, hogy legyen. Összeadjuk a megfelelő oldalakat: $4 - y + (y-r)^2 = r^2$, majd rendezzük az egyenletet: $y^2 - (2r+1)y + 4 = 0$. Egy megoldás pontosan akkor van, ha $D = 0$, azaz ha $(2r+1)^2 - 16 = 0$, amiből $2r + 1 = -4$ vagy $2r + 1 = 4$, tehát $r_1 = -2{,}5 < 0$, ám ez hamis gyök, $r_2 = 1{,}5$ megfelelő gyök.



A keresett valószínűség értékét a $\frac{T_{\text{kör}}}{T_{\text{parabola}}}$ hányados határozza meg, ahol T_{parabola} a kérdéses síkidom területét jelöli.

$$T_{\text{kör}} = r^2\pi = 1{,}5^2\pi = 2{,}25\pi.$$

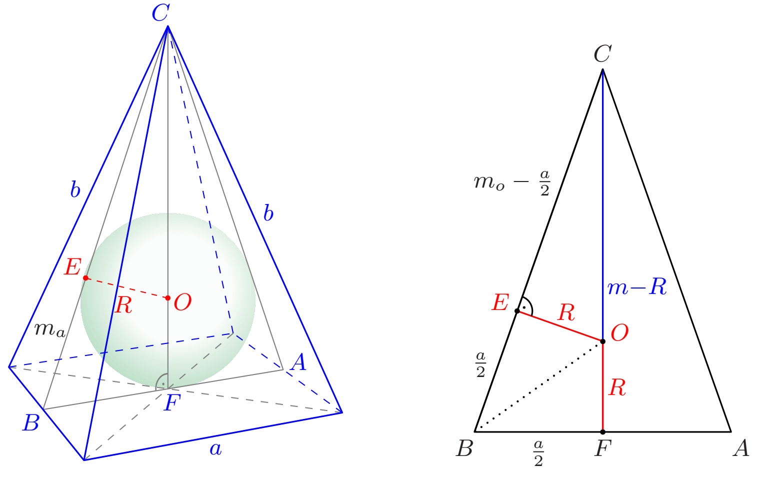
A parabola zérushelyei: $x_1 = 2$ és $x_2 = 6$.

$$T_{\text{parabola}} = \int_2^6 \left(-x^2 + 8x - 12\right) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{8x^2}{2} - 12x\right]_2^6 = \frac{32}{3},$$

így $p = \frac{2{,}25\pi\cdot 3}{32} = 0{,}6627$. Tehát a keresett valószínűség: 0,6627.

6. *Milyen hosszúak annak szabályos négyoldalú gúlának az élei, amely mind az öt lapjával érint egy 2 cm sugarú gömböt, és az ilyen gúlák közül a legkisebb térfogatú?* (16 pont)

Megoldás. Tekintsük a térbeli ábrát, illetve a megfelelő síkmetszetet, és használjuk a jelöléseiket.



A BFC és az OEC háromszögek hasonlók, hiszen a szögeik egyenlők, így

$$\frac{\frac{a}{2}}{R} = \frac{m_o}{m-R}, \qquad \text{azaz} \qquad m_o = \frac{a(m-R)}{2R}.$$

A $BFC\triangle$-ben a Pitagorasz-tétel alapján felírhatjuk, hogy $\dfrac{a^2}{4} + m^2 = m_o^2$, azaz

$$a^2 + 4m^2 = \frac{a^2(m-R)^2}{R^2}, \text{ ahonnan } a^2m(m-2R) = 4m^2R^2, \text{ ezért } a^2m = \frac{4m^2R^2}{m-2R}.$$

A gúla térfogata $V = \dfrac{a^2m}{3}$, azaz $V = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{4m^2R^2}{m-2R} = \dfrac{16}{3} \cdot \dfrac{m^2}{m-4}$.
Szélsőérték akkor lehet, ha a térfogat m szerinti deriváltja 0, vagyis ha

$$V' = \frac{16}{3} \cdot \frac{2m(m-4) - m^2}{(m-4)^2} = \frac{16}{3} \cdot \frac{m^2 - 8m}{(m-4)^2} = 0.$$

Ha $V' = 0$, akkor vagy $m = 0$, vagy $m = 8$, de a 0 hamis a geometriai tartalom miatt. Azt, hogy van-e szélsőérték $m = 8$ esetén az dönti el, mi itt a második derivált előjele.

$$V'' = \frac{16}{3} \frac{\cdot(2m-8)(m-4)^2 - (m^2-8m) \cdot 2 \cdot (m-4)}{(m-4)^2}.$$

Ha $m=8$, akkor $V''=\frac{128}{3}>0$, vagyis helyi minimum van ($m<4$ nem lehet). Tehát $m=8$, ahonnan $a=4\sqrt{2}$, továbbá $m_o=6\sqrt{2}$. Ekkor $\frac{a^2}{4}+m_o^2=b^2$, vagyis $b=4\sqrt{5}$. A minimális térfogatú gúla alapélének hossza $4\sqrt{2}$ cm, oldaléle $4\sqrt{5}$ cm hosszúságú.

7. *A világ legmagasabb csúcsa a Himalája hegységben található Mount Everest a maga* 8848 *méterével.* 71 *évvel ezelőtt,* 1953*-ban sikerült először feljutni a csúcsra az új-zélandi Edmund Hillary-nek és Tendzing Norgaj nepáli serpának. Azóta már többeknek is sikerült ez, de sajnos vannak, akik nem élték túl a hegymászást. A körülmények nagyon mostohák, sok minden nehezíti a próbálkozók dolgát. Ezek közül az egyik a légnyomás változása, amit a barometrikus magasságformula ír le:* $p=p_0\cdot e^{\frac{-\rho_0\cdot g}{p_0}\cdot h}$, *ahol* $p_0=10^5$ *Pa a tengerszinten a levegő nyomása,* $\rho_0=1{,}3\ \frac{kg}{m^3}$ *a levegő sűrűsége és* h *a tengerszinttől mért magasság. (Az egyszerűség kedvéért a hőmérséklettől való függést nem vesszük figyelembe, valamint a* g *nehézségi gyorsulást* $10\ \frac{m}{s^2}$*-nek tekintjük.)*

a) Mekkora a légnyomás a csúcson? (3 pont)

Az út során alaptáborok segítik a hegymászók akklimatizációját.

b) A tengerszinthez képest milyen magasan van az az alaptábor, ahol a légnyomás a tengerszinti légnyomás felével egyenlő? A végeredményt méter pontossággal adjuk meg. (13 pont)

Megoldás. *a)* Behelyettesítve a $h=8848$ métert:

$$p=10^5\cdot e^{\frac{-1{,}3\cdot 10}{10^5}\cdot 8848}=3{,}17\cdot 10^4\ \text{Pa}.$$

b) Jelölje h az alaptábor tengerszint feletti magasságát méterben kifejezve.

$$0{,}5p_0=p_0e^{\frac{-1{,}3\cdot 10}{10^5}\cdot h},$$
$$0{,}5=e^{\frac{-1{,}3\cdot 10}{10^5}\cdot h},$$
$$-0{,}693=-1{,}3\cdot 10^{-4}h,\quad \text{ahonnan}\qquad h=5330{,}77.$$

Tehát az alaptábor a tengerszinthez képest 5331 méter magasan van.

8. *Legyen*

$$A=\{x\in\mathbb{R}\mid\sqrt{x-1}+\sqrt{2-x}\geqslant 0\}\quad \textit{és}\quad B=\{x\in\mathbb{R}\mid\log_{0,5}(3x+2)\geqslant -3\}.$$

Határozzuk meg az $A\setminus B$, *az* $A\cap B$ *és az* $A\cup B$ *halmazokat.* (16 pont)

Megoldás. Az A halmazban az egyenlőtlenség értelmezve van, ha $x\geq 1$ és $x\leq 2$, azaz ha $1\leq x\leq 2$. A négyzetgyök definíciója miatt, ahol értelmezve van az egyenlőtlenség, ott mindig teljesül. Így $A=\{x\in\mathbb{R}\mid 1\leq x\leq 2\}$.

Most nézzük a B halmazt. A logaritmus értelmezve van, ha $3x+2>0$, vagyis ha $x>-\frac{2}{3}$. Az $\frac{1}{2}$ alapú logaritmusfüggvény szigorú monoton csökkenése miatt

$$3x+2\leq 0{,}5^{-3}=8\Rightarrow x\leq 2,$$

ezért $B=\{x\in\mathbb{R}\mid -\frac{2}{3}<x\leq 2\}$.

A fentiek alapján a keresett halmazok: $A \cap B = A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 2\}$, $A \cup B = B = \{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{2}{3} < x \leq 2\}$ és $A \setminus B = \emptyset$.

9. *Matematikaórán közeleg a* 100. *óra, amikor is matematikai játékokat játszik a* 12 *fős faktos csoport.*

a) Hányféle különböző sorrendben érkezhetnek meg a tanulók az órára, ha két tanuló egyszerre, a többiek pedig egyenként lépnek be a tanterembe? (2 pont)

A 12 *fő* 3 *négyes csoportot alkot, és ezeken belül küzdenek meg egymással. Majd újabb, az előzőtől különböző négyes csoportokat alakítanak (nem lehet olyan négyes, amelynek tagjai egy az egyben megegyeznek az előző négyesek valamelyikének tagjaival), és újra játszanak.*

b) Hányféleképpen alkothatnak három négyfős csoportot a tanulók az első játékhoz? (4 pont)

Az egyes játékok győztesei jutalmul csokiszeletet kapnak minden csoportban, minden játék után. A csokiszeletek vásárlásakor éppen egy „Minden 10. *nyer." akció volt. (Ez úgy tekinthető, hogy minden egyes csokiszelet* 0,1 *valószínűséggel nyereményakciós, az akciós csokiszelet pedig* 0,1 *valószínűséggel nyerő, és egy csoki a többitől függetlenül akciós, illetve nyerő.)*

c) Mennyi a valószínűsége annak, hogy az első két forduló győzteseinek kiosztott hat jutalomcsoki között pontosan két csoki nyereményakciós lesz, de azok egyike sem nyerő? (10 pont)

Megoldás. *a)* Az együtt érkező két tanulót $\binom{12}{2}$-féleképpen választhatjuk ki. Őket egy elemnek tekintjük az ismétlés nélküli sorbarendezésnél, tehát 11 elemet permutálunk. Összesen $\binom{12}{2} \cdot 11! = 2\,634\,508\,800$-féle sorrendben érkezhetnek meg.

b) $\binom{12}{4} \cdot \frac{\binom{8}{4}}{3!} = 5775.$

c) Annak a valószínűsége, hogy a 6 jutalomcsoki között két nyereményakciós lesz:

$$p_1 = \binom{6}{2} \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}9^4 = 0{,}0984.$$

Annak a valószínűsége, hogy a két akciós csoki egyike sem nyerő már:

$$p_2 = 0{,}9^2 = 0{,}81.$$

A két esemény független egymástól, így annak a valószínűsége, hogy a hat jutalomcsoki között két nyerő lesz, de azok már nem nyerők:

$$p = p_1 \cdot p_2 = 0{,}0984 \cdot 0{,}81 = 0{,}0797.$$

Egyed László
Baja

Két nő az elsők között

Nők a KöMaL-ban – Klein Eszter és Wachsberger Márta

„Nem szeretem, ha női matematikusnak hívnak.
Matematikus vagyok, aki történetesen nő.”[3]

Karen Uhlenbeck

Nemrég egy doktori védés utáni beszélgetés során a bizottság egyik tagja feltette a kérdést a maroknyi jelenlévőnek, hogy *Mi jut eszetekbe, ha azt halljátok, hogy „minden hónap tizenötödike”?* Meg is válaszolta rögtön saját kérdését: *Hát a KöMaL-határidő! Amikor az ember, pontosan tudva, hogy mennyi idő eljutni addig a postáig, amelyik késő éjszakáig vagy akár éjjel-nappal nyitva van, nyilvánvalóan az utolsó pillanatban ragasztotta fel a bélyeget a borítékra, hogy még aznapi dátum szerepeljen a feladott megoldásokon*[4]*.* A többiek egyetértően mosolyogtak, mert mindannyian ismerték a helyzetet. Mekkora lehet a valószínűsége annak, hogy a Földgolyó egy tetszőleges pontján néhány tetszőleges magyar matematikus közt egy ugyanilyen tartalmú beszélgetés játszódik le? Ha erre a kérdésre rögtön az ötlik fel bennünk, hogy *elég nagy*, akkor ez máris érzékelteti a KöMaL jelentőségét a magyar matematikai kultúrában – így az egyetemes magyar kultúrában – és egyúttal ritkaságszámba menő jellegét is a matematika univerzumában. Az egyik legrégebbi magyar folyóiratról van szó, amely nem csupán dokumentálója a matematikai kultúránknak, de befolyásoló tényezője, ösztönzője is egyben. Ami nem csupán a diákok versenyeredményében, később komoly kutatási tevékenységében, rangos eredményekben, díjakban mutatkozik meg. Az intézményekben, kutatócsoportokban folyó munka, a matematikai műhelyek hazai és nemzetközi hatása is jellemzi ezt a kultúrát.

Ha a KöMaL-ban szereplő problémák, cikkek között keresgélünk, vagy az *Arcképcsarnok*ot nézegetjük, akkor a magyar és gyakran nemzetközi matematika egy-egy szeletébe kapunk bepillantást, amelyet ezek a problémák és a fiatal versenyzők későbbi munkássága jelentősen befolyásolt.

Az Arcképcsarnokban az első években nagyon kevés női nevet olvashatunk, 1925 és 1938 közt mindössze tizenhét női versenyző nevére bukkanhatunk. Az első kettő *Klein Eszter* és *Wachsberger Márta*. Ők a KöMaL archívuma szerint is szorgalmas – talán nem túlzás azt állítani, hogy szenvedélyes – feladatmegoldók, később feladatkitűzők voltak. Erről tanúskodik Wachsberger Márta visszaemlékezése is 1994 áprilisából:

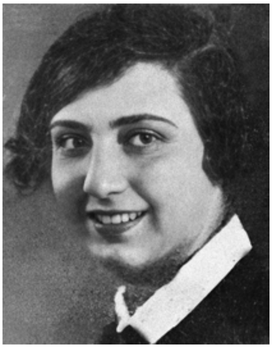
Az 1924-25-ös iskolai év közepén felejthetetlen matematikatanárunk, Rieger Richárd megjelent az osztályunk ajtajában, kezében a Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok egy friss példányát tartogatva. Klein Eszter és én osztálytársak vol-

[3]https://hvg.hu/elet/20190325_A_matematikai_Nobel_elso_noi_gyoztese_Matematikus_vagyok_nem_noi_matematikus

[4]Azóta a határidő 10-ére módosult, és megszűnt a postai levélben történő beküldés lehetősége.

tunk, ekkor a gimnázium ötödik osztályába jártunk[5]*. Mindketten rajongtunk a matematikáért. Tanárunk arra ösztönzött minket, hogy ne tanuljuk, hanem csináljuk a matematikát. Fedezzük fel magunk, minimálisra csökkentve a tankönyvek, vagy más által nyújtott segítséget. Mind Eszter, mind én rendszeres feladatmegoldói lettünk a Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapoknak. Rieger tanár úr hatására, ha nem tudtunk valamit, nem néztünk utána, hanem magunk próbáltuk kitalálni. Nem minden problémával sikerült megbirkóznunk. Eszter és én soha nem beszéltük meg a problémákat vagy megoldásokat, mégis a megoldásaink sokszor hasonlítottak. Később rendszerint a határidő utolsó napján írtam le a megoldásaimat, és rohantam velük a szerkesztőségbe. Ebben az időben jelent meg először a szorgalmas megoldók arcképe a lapokban. A legcsodálatosabb jutalom volt számunkra, hogy arcképeinket a fiúk között láthattuk, akikkel később egyetemi éveinkben személyesen is megismerkedtünk.*

Klein Eszter (Forrás: https://www.komal.hu/tablok/?fenykep=11)



Wachsberger Márta (Forrás: https://www.komal.hu/tablok/?fenykep=31)

Ekkortájt a női hallgatók aránya az egyetemeken jelentősen alacsonyabb volt, mint manapság. Az első nő 1896-ban iratkozhatott be hivatalosan magyarországi egyetemre, a Műegyetem 1918-tól fogadott nőket a hallgatók soraiba. Klein Eszter és Wachsberger Márta matematika iránti elkötelezettsége nemcsak a KöMaL-feladatok megoldásában, majd egyetemi tanulmányaikban nyilvánult meg. Mindketten tagjai voltak az Anonymus-csoportnak, annak a fiatalokból álló fontos szakmai körnek – és baráti társaságnak egyben –, amely generációjuk kiváló matematikusaiból állt. A legmeghatározóbb köztük Erdős Pál és Turán Pál volt, valamint tagja volt Gallai Tibor, Szekeres György, Lázár Dezső, Grünwald Géza és Svéd György is. A városligeti Anonymus-szobornál találkoztak heti rendszerességgel, innen választották a csoport nevét. Klein Eszter tehetségét mutatja az egyik, általa akkoriban felvetett probléma, mely általánosításai révén később világhírű lett. Az eredeti feladat öt pontról szólt:

Tekintsünk öt általános helyzetű pontot a síkon, vagyis öt olyan pontot, amelyek közül semelyik három nincs egy egyenesen. Igazolandó, hogy köztük mindig van négy, amely egy konvex négyszöget határoz meg.

[5]Ez ma a 9. évfolyamnak felel meg.

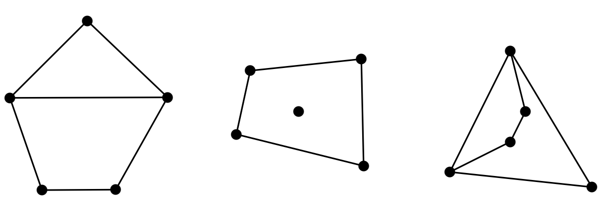
Az Anonymus-szobor a budapesti Városligetben

A bizonyítás rövid: Ha az öt pont konvex burka egy konvex ötszög vagy négyszög, akkor kész vagyunk. Ha a konvex burok háromszög, akkor a fennmaradó két pont a háromszögnek belső pontja lesz, és az általuk meghatározott egyenes a háromszögnek két oldalát metszi, hiszen az általános helyzet miatt nem mehet át csúcson. Így a két belső pont és az egyenesük által nem metszett oldal két végpontja konvex négyszöget fog alkotni.

Klein Eszter eredeti problémája számos újabb kérdést vetett fel, amelyek nagyban hozzájárultak a matematika egy új ágának, a kombinatorikus geometriának a létrejöttéhez, fejlődéséhez. Az eredeti probléma általánosításaként vethető fel például a következő kérdés:

Igaz-e, hogy bármely n természetes számhoz $(n > 2)$ létezik egy N szám, amelyre teljesül, hogy a sík N darab általános helyzetű pontjából mindig kiválasztható n db olyan pont, amely konvex helyzetű, vagyis olyan, hogy bármely pontja elválasztható a többitől egy egyenessel? Ha igen, határozzuk meg a legkisebb ilyen $N = K(n)$ számot! Utóbbit Erdős–Szekeres–problémának nevezzük. A legjobb alsó korlát is tőlük származik: $K(n) \geqslant 2^{n-2} + 1$.

A kiinduló problémát Erdős Pál nevezte el Happy End-problémának, mivel Klein Eszter és Szekeres György egymásba szerettek, és nem sokkal később össze is házasodtak. A másik lány is az Anonymus-csoportban találta rá a párjára, Wachsberger Mátra Svéd Györgyhöz ment feleségül. Mindkét házaspár külföldre menekült a negyvenes évek Magyarországáról, és különböző időben, de végül ugyanott állapodtak meg: Adelaide városában, Ausztrália Új-Dél-Wales államában. Az Adelaide-i



Egyetemen a mai napig is elnyerhető a Svéd Márta ösztöndíj, melyet matematika szakos hallgatónőknek alapítottak Wachsberger Márta emlékére[6]. Szakmai karrierjükből és munkásságukból most csak két mozzanatot emelek ki, amelyek a tehetséggondozással kapcsolatosak: 1964-ben a KöMaL mintájára megalapították a mai napig is létező *Parabola*[7] című matematikai lapot, és matematikaversenyt is indítottak. Vagyis abból a forrásból merítettek a Föld egyik túlsó pontján is, amit diákéveik alatt megismertek.

❄

Idén januárban volt 130 éve, hogy megjelent a KöMaL első teljes száma. Lehetetlenség áttekinteni ezt a hatalmas időszakot, de még érzékeltetni is nehéz azt a kulturális hatást, amit ez a folyóirat jelent. Ez a rövid írás Klein Eszter és Wachsberger Márta emlékére született, és tiszteleg mindazon női feladatmegoldók, szerzők és szerkesztőségi munkatársak előtt, akik a hosszú évtizedek alatt részt vettek ennek a műhelynek a működésében.

Hivatkozások

[1] „125 éve engedélyezték Magyarországon először a nők egyetemi tanulmányait”. *Országgyűlési Könyvtár*, 2020, https://konyvtar.parlament.hu/archiv/-/asset_publisher/OTYxpZQhAHFt/content/125-%C3%A9ve-enged%C3%A9lyezt%C3%A9k-magyarorsz%C3%A1gon-el%C5%91sz%C3%B6r-a-n%C5%91k-egyetemi-tanulm%C3%A1nyait.

[2] Dubreil-Jacotin, M.-L. (1984). Women Mathematicians. In D. M. Campbell (Szerk.), *Mathematics* (1. kiad.). Taylor & Francis Group.

[3] Larvor, B. (2016b). What are mathematical cultures? In S. Ju, B. Löwe, T. Müller, & Y. Xie (Szerk.), *Cultures of Mathematics and Logic* (o. 1–22). Birkhauser.

[4] Szekeres, György. „Egy ausztráliai matematikus visszaemlékezései a régi Matematikai Lapokra”. *KöMaL*, köt. 30., sz. 9., 1980, o. 97–100.

[5] Tardos Gábor és Tóth Géza. „Áttörés az Erdős–Szekeres problémában”. *Érintő – Elektronikus Matematikai Lapok*, sz. 7., 2018, https://ematlap.hu/tudomany-tortenet-2018-03/638-attores-az-erdos-szekeres-problemaban

[6] Wachsberger, Márta. „Nők a matematikusok között”. *KöMaL*, köt. 44., sz. 4., 1994, o. 154–55.

Szmerka Gergely

[6] https://set.adelaide.edu.au/news/list/2023/08/08/marta-sved-scholarship-applications-now-open

[7] https://www.parabola.unsw.edu.au/

Matematika C gyakorlatok megoldása

C. 1773. *Határozzuk meg a p egész szám értékét úgy, hogy a*

$$(p-3)x+p+5=(2-p)x$$

egyenlet x valós megoldásának értéke legalább 2 legyen. Adjuk meg minden lehetséges p értékre az egyenlet megoldását.

Javasolta: *Bíró Bálint* (Eger)

Megoldás. Az egyenletet azonos átalakítások után rendezzük:

$$2xp+p=5x-5,$$

majd a bal oldalon kiemeljük p-t:

$$p(2x+1)=5x-5.$$

A feladat szövege alapján $x\geq 2$, így $2x+1\geq 5$, ezért az egyenlet mindkét oldalát eloszthatjuk $(2x+1)$-gyel, így azt kapjuk, hogy

$$p=\frac{5x-5}{2x+1}=\frac{5x+2,5-7,5}{2x+1}=\frac{2,5(2x+1)-7,5}{2x+1}=2{,}5-\frac{7,5}{2x+1}=2{,}5-\frac{15}{4x+2}.$$

Mivel egy pozitív számot vonunk ki a 2,5-ből, ezért $p<2{,}5$. Az is nyilvánvaló, hogy p értéke akkor a legkisebb, ha $\frac{15}{4x+2}$ a lehető legnagyobb, ami pedig akkor következik be, ha a nevező értéke a lehető legkisebb, azaz $x\geq 2$ miatt $x=2$ esetén:

$$p=2{,}5-\frac{15}{4\cdot 2+2}=2{,}5-1{,}5=1.$$

Vagyis $1\leq p<2{,}5$. A feladat feltétele szerint p egész szám, így $p=1$ vagy $p=2$.

Ha $p=1$, akkor a fentiek miatt $x=2$.

Ha $p=2$, akkor az eredeti egyenletbe behelyettesítve azt kapjuk, hogy

$$(2-3)x+2+5=(2-2)x,$$

azaz

$$-x+7=0, \qquad \text{amiből} \qquad x=7.$$

Mivel $7\geq 2$, így ez is jó megoldás.

Tehát a feladatnak két megoldása van, $p=1$ és $p=2$. Ha $p=1$, akkor $x=2$, ha pedig $p=2$, akkor $x=7$.

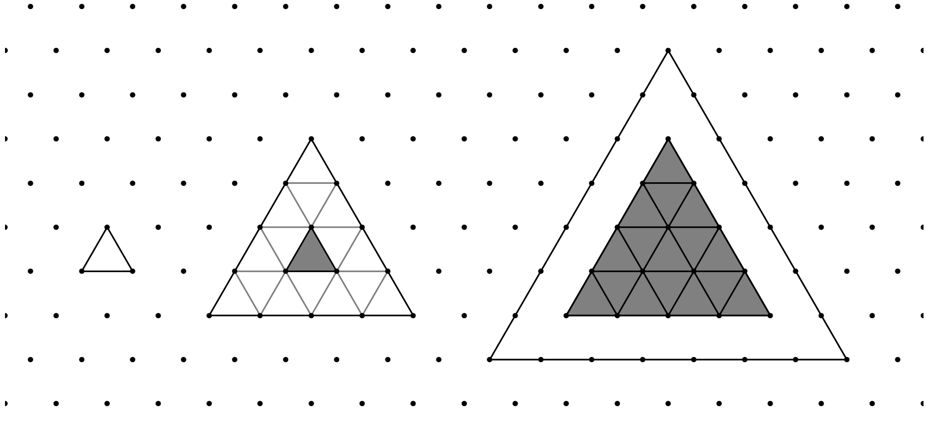
Széll Botond (Budapest, ELTE Radnóti M. Gyak. Ált. Isk. és Gyak. Gimn., 9. évf.)

Összesen 289 dolgozat érkezett. 5 pontos 102, 4 pontos 64, 3 pontos 38 dolgozat. 2 pontot 27, 1 pontot 28, 0 pontot 22 versenyző kapott. Nem versenyszerű: 8 dolgozat.

A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok ABACUS-szal közös pontverseny 9. osztályosoknak (804–808.)

K. 804. Egy focimérkőzés végeredménye 4 : 3 lett a hazai csapat javára. Hányféleképpen alakulhatott ki ez a végeredmény, ha volt olyan időszaka a mérkőzésnek, amikor a vendégcsapat vezetett?

K. 805. Rajzoljunk egy kis szabályos háromszöget, majd a következő ábrán ezt a háromszöget rakjuk körbe ugyanilyen kis háromszögekkel egy rétegben úgy, hogy egy nagyobb szabályos háromszöget kapjunk, majd ezt a második háromszöget is rakjuk körbe kis szabályos háromszögekkel úgy, hogy egy nagyobb szabályos háromszöget kapjunk, és így tovább.



a) Hány kis háromszögből áll a huszadik ilyen háromszög?

b) Hány kis háromszögből áll az n-edik ilyen háromszög?

K. 806. Gizinek a $\dfrac{4}{x-2} > 5$ egyenlőtlenséget kellett volna megoldania. A megoldás során azonban az 5 helyett egy másik pozitív egész számot írt, így – helyes lépések után – az általa kapott megoldás $2 < x < 4$ lett. Milyen pozitív egész számot írt az 5 helyett?

K./C. 807. Hányféleképpen színezhetünk ki egy 3×3-as rózsaszín táblán három mezőt zöldre, ha azokat a színezéseket nem tekintjük különbözőnek, amelyek tükrözéssel vagy elforgatással egymásba vihetőek?

Javasolta: *Fried Katalin* (Budapest), *Korándi József* (Budapest)

K./C. 808. Egy valós szám és reciproka összegének négyzete 5.

a) Határozzuk meg a szám négyzetének és négyzete reciprokának összegét a szám kiszámítása nélkül.

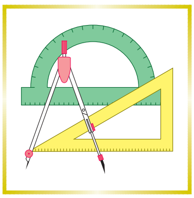
b) Határozzuk meg a szám köbének és köbe reciprokának összegét a szám kiszámítása nélkül.

❄

Beküldési határidő: 2024. április 10.

Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄



A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (807–808., 1803–1807.)

Feladatok 10. évfolyamig

K/C. 807. A szövegét lásd a **K** feladatoknál.

K/C. 808. A szövegét lásd a **K** feladatoknál.

Feladatok mindenkinek

C. 1803. Hány olyan pozitív egész számokból álló számhármas van, amelyben a három szám legnagyobb közös osztója 4, legkisebb közös többszöröse pedig 2024?

Javasolta: *Kozma Katalin Abigél* (Győr)

C. 1804. Az ABC háromszög BC, CA, AB oldalainak felezőpontja rendre D, E, F. Az AFE, BDF, CED háromszögek beírt köreinek középpontja rendre K_a, K_b, K_c. Bizonyítsuk be, hogy a K_aFDE, K_bDEF és K_cEFD négyszögek területének összege az ABC háromszög területével egyenlő.

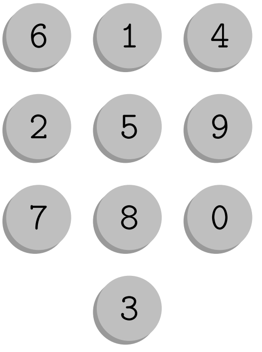
Javasolta: *Bíró Bálint* (Eger)

C. 1805. Oldjuk meg a $\dfrac{6x-3}{3x}-\left(3y^2-14xy+8x\right)^2=x$ egyenletet, ha x, y pozitív valós számok.

Javasolta: *Bíró Bálint* (Eger)

Feladatok 11. évfolyamtól

C. 1806. Egy okostelefon banki applikációja a belépéshez négyjegyű PIN-kódot kér, de biztonsági okokból mindig véletlenszerűen osztja ki a számjegyeket az ábrán látható billentyűhelyekre úgy, hogy minden lehetséges kiosztás valószínűsége azonos. (Egy lehetséges kiosztás szerepel az ábrán.) Ha négy különböző számjegyből áll a PIN-kódunk, akkor mekkora a valószínűsége annak, hogy két belépés során ugyanazokban a pozíciókban hagyunk ujjlenyomatot?



Javasolta: *Gáspár Merse Előd* (Budapest)

C. 1807. Legyen ABC egy olyan háromszög, amelyben igaz, hogy $2\beta = 3\gamma$. Legyenek a D és az E az AC oldal pontjai úgy, hogy BD és BE a β szöget harmadolják, és a D pont az A és az E közé essen. Továbbá F legyen az AB oldal és a γ szögfelezőjének metszéspontja. Igazoljuk, hogy BE és DF párhuzamosak.

Svájci versenyfeladat

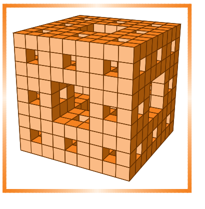
❄

Beküldési határidő: 2024. április 10.

Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄

A B pontversenyben kitűzött feladatok (5374–5381.)



B. 5374. Az AB szakasz egyik oldalára megrajzoltuk az $ABCD$ négyzetet, a másik oldalára pedig a $BAEF$ rombuszt. A négyzet középpontja legyen K, a rombuszé M. Bizonyítsuk be, hogy KM felezi az AMB szöget.

(3 pont) Javasolta: *Vígh Viktor* (Sándorfalva)

B. 5375. Oldjuk meg a nemnegatív egész számpárok halmazán az $(m-k)^2 = m+k$ egyenletet.

(4 pont) Javasolta: *Németh László* (Fonyód)

B. 5376. Tekintsük a pozitív egész n számot, és osszuk el maradékosan az összes nála kisebb pozitív egésszel. Jelölje $f(n)$ az osztás során fellépő osztási maradékok összegét. (Például $n=5$ esetén a maradékok 1-gyel, 2-vel, 3-mal és 4-gyel osztva rendre: 0, 1, 2 és 1, azaz $f(5)=4$.)

Oldjuk meg az $f(n)=n$ egyenletet.

(4 pont) Javasolta: *Sztranyák Attila* (Budapest)

B. 5377. Határozzuk meg azoknak a p valós számoknak a halmazát, amelyekre

$$\sqrt{a^2+b^2-ab}+\sqrt{b^2+c^2-bc} \geqslant \sqrt{a^2+c^2-p\cdot ac}$$

teljesül minden pozitív valós a, b, c számhármas esetén, ahol a kifejezések értelmezve vannak.

(4 pont) Javasolta: *Nagy Zoltán Lóránt* (Budapest)

B. 5378. Legyenek n és k pozitív egész számok. Bizonyítsuk be, hogy ha $n \leqslant k^{11}$, akkor n felírható tíz olyan pozitív egész szám szorzataként, melyek közt nincs k^2-nél nagyobb összetett szám.

(5 pont) Javasolta: *Pach Péter Pál* (Budapest)

B. 5379. Az ABC háromszög C csúcsánál derékszög van. A C-ből induló magasságvonal és szögfelező talppontja az AB átfogón H, illetve D. Az AHC szög felezője az AC oldalt az E, a CHB szög szögfelezője pedig a BC oldalt az F pontban metszi. Jelöljük ki a HE szakaszon az M, a HF szakaszon pedig az N pontot úgy, hogy $HM:HE=HN:HF$ teljesüljön. Mutassuk meg, hogy a CD, AM és BN egyenesek egy ponton mennek át.

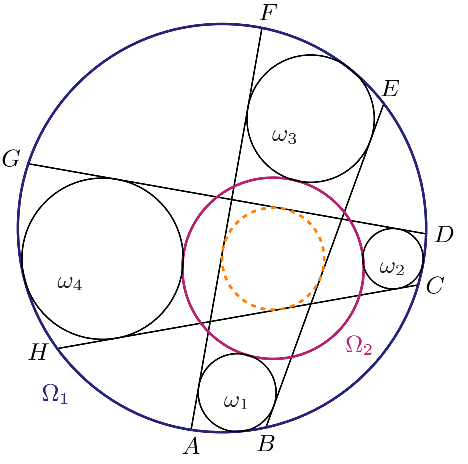
(5 pont) Javasolta: *Nguyen Duy Khanh* (Vietnám)

B. 5380. Legalább hányadfokú az f egyváltozós polinomfüggvény, ha értékkészlete különbözik $f\circ f$ értékkészletétől, de $f\circ f$ és $f\circ f\circ f$ értékkészlete megegyezik? (A $\circ$ a függvénykompozíció műveletét jelöli.)

(6 pont) Javasolta: *Hujter Bálint* (Budapest)

B. 5381. Adott az Ω_1 körbe írt $ABCDEFGH$ nyolcszög, és Ω_1 belsejében az Ω_2 kör. Tegyük fel, hogy az ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 körök kívülről érintik Ω_2-t, továbbá ω_1 belülről érinti az Ω_1 kör AB ívét, az AF és a BE szakaszt; ω_2 belülről érinti a CD ívet, a CH és a DG szakaszt; ω_3 belülről érinti az EF ívet, az AF és a BE

szakaszt; végül ω_4 belülről érinti a GH ívet, a CH és a DG szakaszt az ábra szerint. Mutassuk meg, hogy az AF, BE, CH és DG szakaszok által bezárt négyszögbe kört lehet írni.



(6 pont) Javasolta: *Kós Géza* (Budapest)

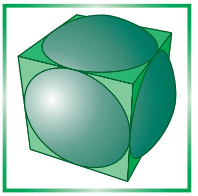
❄

Beküldési határidő: 2024. április 10.

Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄

Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (875–877.)



A. 875. *a)* Két játékos egy kooperatív játékot játszik. A játék előtt megbeszélhetnek egy stratégiát, de a kezdés után nem beszélhetnek, és nem tudnak egymásról semmit. A játékvezető minden kör előtt szabadon dönt, hogy abban a körben melyik játékos következzen. Egy körben a soron lévő játékos megtippelheti, hogy hányadik kör van. A játékos tudja, hogy ez hányadik kör, amikor őt választotta a játékvezető, de semmit nem tud arról, hogy a másik játékos hányszor került sorra. Ha helyes a tipp, akkor kapnak egy pontot. A játékosok arról sem kapnak visszajelzést, hogy szereztek-e pontot. A játékosok akkor nyernek, ha összegyűjtöttek 100 pontot. Létezik-e olyan stratégia, amellyel biztosan nyernek véges sok körön belül?

b) Mi a helyzet akkor, ha a többi feltételt nem változtatva a játékosok a körükben kettőt is tippelhetnek, és ha valamelyik tippük helyes, akkor kapnak egy pontot?

Javasolta: *Szűcs Gábor*, (Budapest)

A. 876. Keressük meg az összes a és b nemnegatív egész számot, amelyekre $5^a + 6 = 31^b$ teljesül.

Javasolta: *Füredi Erik* (Budapest)

A. 877. Az $ABCD$ konvex érintőnégyszög beírt köre ω. ω egyik AC-vel párhuzamos érintője a BD átlót a körön kívül lévő P pontban metszi. A P pontból az ω-hoz húzott másik érintő ω-t a T pontban érinti. Bizonyítsuk be, hogy ω és az ATC háromszög körülírt köre érintik egymást.

Javasolta: *Nikolai Beluhov* (Bulgária)

❄

Beküldési határidő: 2024. április 10.

Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄

Informatikából kitűzött feladatok (619–622.)

I. 619. Képezzünk egy pozitív egész számból egy újabb pozitív egész számot úgy, hogy a szám önmagán kívüli legnagyobb osztóját a szám végére írjuk, és a szám elejéről elhagyunk annyi számjegyet, ahányat a végére írtunk. Például `10` esetén a kapott szám a `05`, vagyis az `5` lesz, illetve `125` esetén az előállított szám az `525`. Ha a szám `1`, akkor a képzés nem változtat a számon, marad `1`.

Készítsünk programot, amely adott lépésszámmal alkalmazza a képzési szabályt a beolvasott számból kiindulva, majd adjuk meg a kimeneten az utoljára előállított számot.

A program a standard bemenet egyetlen sorából olvassa be az első számot ($1 \leqslant \mathtt{A} \leqslant 1\,000\,000$), amelyre a képzési szabályt alkalmazzuk, majd az ismétlések ($1 \leqslant \mathtt{N} \leqslant 100$) számát. A program a standard kimenet egyetlen sorában az utolsóként képzett számot jelenítse meg.

Példák:

Bemenet	Kimenet
125 5	71
1217 4	2463
359 20	123

Beküldendő egy tömörített `i619.zip` állományban a program forráskódja és rövid dokumentációja, amely megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben fordítható.

(10 pont)

I. 620. Legyen egy helyi értékes számrendszerben az első helyiérték 1, a további helyiértékeken pedig a prímszámok növekvő sorozata. Az ebben a számrendszerben felírt 10101_p ötjegyű szám esetén a helyi értékek 7, 5, 3, 2, 1, azaz a szám értéke $7 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 1 = 11$. Tetszőleges nemnegatív egész szám felírható az így megadott számrendszerben, de a felírás nem egyértelmű. Például a 11 felírható 100000_p alakban is. Tegyük egyértelművé az átváltást úgy, hogy minden esetben azt a felírást választjuk, amelyben csak 0-s és 1-es számjegy szerepel, és emellett a legkevesebb 1-es fordul elő. Így például minden prímszám pontosan egy 1-esből és 0-kból áll.

Készítsünk programot, amely bekér egy pozitív egész számot, majd megadja a szám felírását a bemutatott számrendszerben. A program a standard bemenet egyetlen sorából olvassa be a számot ($1 \leqslant a \leqslant 100\,000$), majd a standard kimenet egyetlen sorában adja meg a szám felírását a fent leírt módszerrel.

Példák:

Bemenet	Kimenet
26	1000000100
57	10000000000000101
100	1000000000000000000000100

A megoldáshoz felhasználható a `https://t5k.org/lists/small/10000.txt` címen megtalálható szöveges állomány, amely az első 10000 prímszámot tartalmazza. Az állomány letöltés után szerkeszthető, a feldolgozás szempontjából felesleges sorok törölhetők.

Beküldendő egy tömörített `i620.zip` állományban a program forráskódja és a prímszámokat tartalmazó állomány, valamint egy rövid dokumentáció, amely megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben fordítható.

(10 pont)

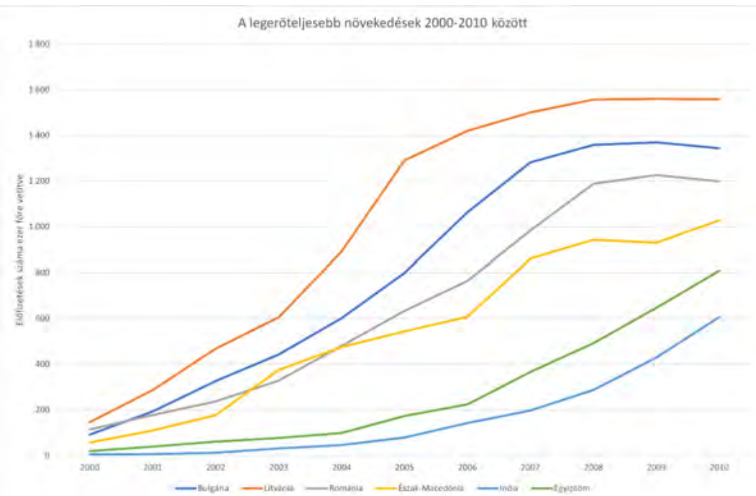
I. 621. Ebben a feladatban a Föld néhány országában az ezer főre vetített mobil-előfizetések számát vizsgáljuk 2000–2022 között.

1. Nyissunk egy üres táblázatkezelő munkafüzetet.
2. Töltsük be egy üres munkalapra az A1 cellától kezdve az UTF-8 kódolású, tabulátorokkal tagolt **`mobiladat.txt`** fájl tartalmát. Munkánkat mentsük **`mobil`** néven a táblázatkezelő alapértelmezett formátumában.
3. A munkalapon végezzük el az alábbi formázásokat, ügyelve arra, hogy minden oszlop legyen olyan széles, hogy minden adat teljes terjedelmében látható legyen.
   a. A munkalap alap betűtípusa ***Verdana*** legyen, a betűmérete 10 pontos.
   b. Egyesítsük az **A1:X1** cellákat, a cím legyen félkövér betűstílusú, a betűmérete legyen 14 pontos.

c. Az **A2 : X46** tartomány celláit keret válassza el egymástól, a tartomány első és második sora, illetve első és második oszlopa között a keret legyen vastag vonalú.
d. Az előző pontban említett tartomány első sora legyen dupla magas, a szövegek félkövéren, vízszintesen és függőlegesen középre igazítva jelenjenek meg, esetleg sortöréssel.
e. A berácsozott részre a **4.**, **6**. és minden további páros sorban állítsunk be halványkék háttérszínt.
f. A **B3 : X47** tartomány adatainak megjelenésénél legyen ezres tagolás.

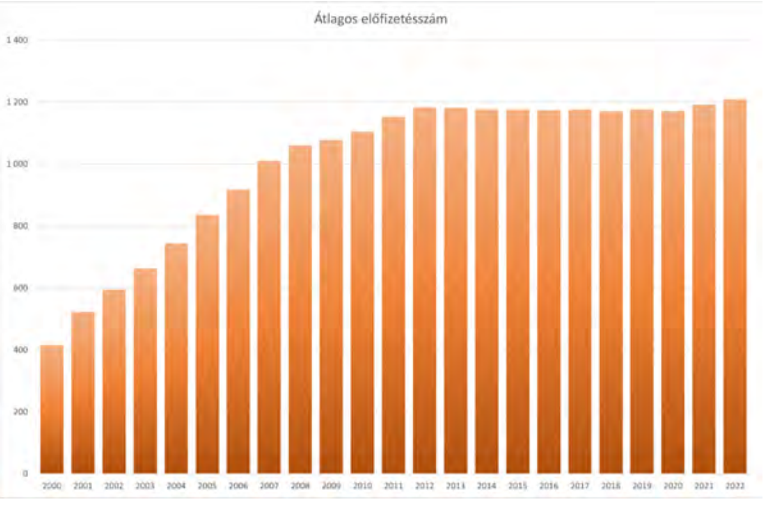
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1						**Mobiltelefon-előfizetések**					
2	**Ország, országcsoport**	**2000**	**2001**	**2002**	**2003**	**2004**	**2005**	**2006**	**2007**	**2008**	**2009**
3	Ausztria	764	814	834	896	978	1 053	1 123	1 195	1 300	1 371
4	Belgium	548	747	782	827	873	913	930	1 008	1 057	1 090
5	Bulgária	91	193	326	442	601	799	1 063	1 282	1 359	1 369
6	Csehország	425	679	841	947	1 051	1 146	1 204	1 280	1 328	1 253
7	Dánia	630	739	832	883	954	1 002	1 068	1 151	1 192	1 237
8	Észtország	399	469	639	766	922	1 067	1 232	1 255	1 215	1 177
9	Finnország	720	805	869	913	954	1 005	1 077	1 150	[illegible]	[illegible]

4. Az **Y1** cellába gépeljük be a „2010/2000” szöveget, és számítsuk ki alatta, hogy országonként hányszorosa lett a 2010-es adat a 2000-es évinek. Az adatok százalék formátumban, tizedesjegyek nélkül legyenek láthatók.
5. Emeljük ki feltételes formázással: sötétzöld háttérszínnel és félkövér betűstílussal és sárga betűszínnel az 1000%-ot meghaladó adatokat.
6. Készítsünk a minta szerinti vonaldiagramot új, diagram típusú munkalapra az előző pontban kiemelt országok 2000–2010 közti adatairól.



7. A **B47 : X47** tartomány celláiba számítsuk ki az adott év átlagát az adott országok tekintetében, az átlagok egészre kerekítve látszódjanak.

8. Készítsük el az átlagokból a minta szerinti vonaldiagramot, a **Z47**-es cellába gépeljük be azt az évszámot, amikortól a grafikonról leolvashatóan megkezdődött a stagnálás.



9. A **B48 : X48** tartomány celláiba kerüljön „+” jel, ha az adott év Magyarországi adata meghaladta az EU átlagát, különben a cella maradjon üres.
10. A **B49 : X49** tartomány celláiba kerüljön azon országok száma, amelyekben az adott év előfizetéseinek száma meghaladja a fejenként egy előfizetést.

A megoldásban saját függvény vagy makró nem használható.

Beküldendő egy tömörített `i621.zip` állományban a táblázatkezelő munkafüzet, illetve egy rövid dokumentáció, amelyben szerepel a megoldáskor alkalmazott táblázatkezelő neve, verziószáma.

Forrás: `https://www.ksh.hu/stadat_files/ikt/hu/ikt0027.html`

Letölthető fájl: **`mobiladat.txt`**

(10 pont)

I. 622. Téglalapokból álló és kevés színt tartalmazó ábrákat tömörítve tároljunk. Minden egyes sorról csak azt tartalmazza a tömörített állomány, hogy mi változott az előző sorhoz képest. Ha egy sor megegyezik az előzővel, akkor a tömörített állományban erről nem szerepel bejegyzés.

Készítsünk programot `i622` néven, amely előállítja az ábra `SVG` típusú vektorgrafikus képét.

A program standard bemenetének első sorában a kép sorainak `N` ($1 \leqslant$ `N` $\leqslant$ `100`) száma és oszlopainak `M` ($1 \leqslant$ `M` $\leqslant$ `100`) száma van. A következő sorok a kódolt képet tartalmazzák soronként és azon belül oszloponként növekvő sorrendben. Minden sorban az első szám a tömörítetlen kép megfelelő sorát jelenti, a második és a harmadik szám a kezdő és végpozíciót, majd a negyedik nagybetű a szín kódja.

A színeket jelölő nagybetűk: F = fehér, P = piros, K = kék, Z = zöld, S = sárga, N = narancs, L = lila, B = fekete.

A program a standard kimenetre írja ki az ábra SVG kódját.

Példa a bemenetre:	**Az eredeti kép:**	**Az SVG ábra (a görög zászló):**
9 14	K K F K K K K K K K K K K K	
1 1 2 K	K K F K K F F F F F F F F F	
1 3 3 F	F F F F F K K K K K K K K K	
1 4 14 K	K K F K K F F F F F F F F F	
2 6 14 F	K K F K K K K K K K K K K K	
3 1 2 F	F F F F F F F F F F F F F F	
3 4 5 F	K K K K K K K K K K K K K K	
3 6 14 K	F F F F F F F F F F F F F F	
4 1 2 K	K K K K K K K K K K K K K K	
4 4 5 K		
4 6 14 F		
5 6 14 K		
6 1 2 F		
6 4 14 F		
7 1 14 K		
8 1 14 F		
9 1 14 K		

Az SVG állomány szerkezetéről többek között a `http://svg.elte.hu/` címen olvashatunk.

Beküldendő egy tömörített `i622.zip` állományban a program forráskódja és rövid dokumentációja, amely megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben fordítható.

(10 pont)

❄

Beküldési határidő: 2024. április 15.

Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄

Helyesbítés

Az előző, februári számunk borítója sajnálatos módon sajtóhibával jelent meg. A 2023. évi Kürschák József Matematikai Tanulóversenyen Szakács Ábel, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 10. osztályos tanulója a képaláírással ellentétben nem III., hanem II. díjban részesült.

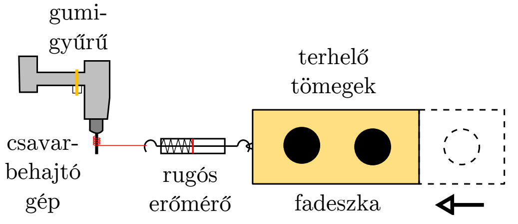
A hibáért az érintettek elnézését kérjük.

Mérési feladatok megoldása

M. 427. *Fizikaórán azt tanuljuk, hogy a csúszási súrlódási erő egyenesen arányos a felületeket összenyomó erővel, és az arányossági tényező nem függ a felület nagyságától. Vizsgáljuk meg (legalább kétféle anyagpárral), hogy mennyire pontosan teljesülnek ezek az állítások!*

(6 pont) Közli: *Gnädig Péter*, Vácduka

I. megoldás. Több lehetséges módszer közül az bizonyult a legmegbízhatóbbnak, amikor egy hosszú, egyenletes felületű fadeszkát állandó sebességgel húzva különböző vízszintes felületeken a súrlódási erőt rúgós erőmérővel mérem. Három különböző anyagpárral dolgoztam: ugyanazt a fadeszkát a szertár asztalának csempéjén, egy iskolai pad fafelületén és egy, a szertárban lejtőként használt szigetelőlapon mozgattam. Mindegyik felület sima és egyenletes volt. Az állandó sebességű húzást egy csavarbehajtó géppel biztosítottam: a gép, aminek bekapcsológombját egy gumigyűrűvel rögzítettem, egy vékony fonalat tekert fel, amely egy erőmérő közbeiktatásával húzta a deszkát. A nyomóerőt a deszkára helyezett súlyokkal változtattam, a súrlódási felület nagyságát pedig a deszka egyre kisebbre vágásával biztosítottam. Az egyenletes, akadálytalan csúszás érdekében a deszka éleit minden vágás után megcsiszoltam. A mérési elrendezés vázlata az *1. ábrán* látható.



1. ábra

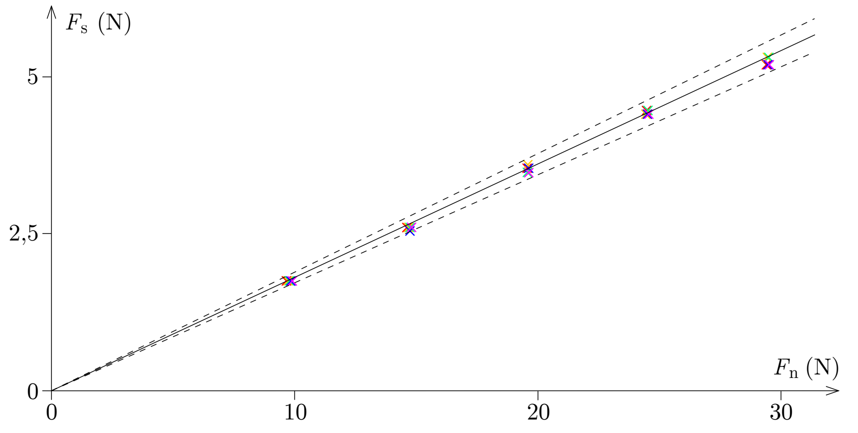
A deszka szélessége 15 cm, eredeti hossza 51,4 cm volt, méreteit mérőszalaggal milliméteres pontossággal mértem. A deszka eredeti tömege (a fonal rögzítéséhez használt csavarral együtt) hibahatáron belül éppen 1 kg volt. A levágott darabokat mindig ráraktam a deszkára, így a tömeg csak a fűrészeléskor elvesztett anyagmennyiséggel csökkent, négy vágás után összesen 28 g veszett el. (A tömegeket gramm pontosságú mérleggel mértem.) A súrlódási erő méréséhez kétféle erőmérőt használtam, mert nagyobb nyomóerő esetében a súrlódási erő nagyobbá vált, mint az érzékenyebb (0,05 N pontosságú) erőmérő 5 N-os méréshatára. A tapasztalat szerint minél gyorsabban húzta a gép a deszkát, annál stabilabb volt az erőmérő által mutatott érték, így azt a lehető legnagyobb sebességet állítottam be, ahol az erőmérőt még jól le tudtam olvasni. A fapadon végzett mérést meg kellett ismételnem, mert az első mérés közben a pad beszennyeződött.

Az *1. táblázat* foglalja össze a mérési eredményeket: 5 különböző nagyságú súrlódó felülettel mértem, minden esetben 3 különböző felületen húzva a deszkát, és minden esetben 5 különböző nyomóerővel.

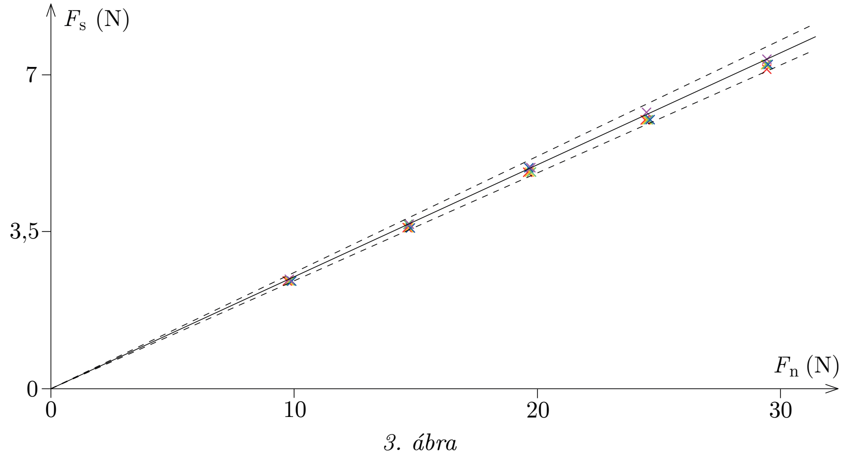
			csempe		fapad		szigetelő	
A (cm^2)	m (kg)	F_n (N)	F_s (N)	μ_1	F_s (N)	μ_2	F_s (N)	μ_3
771	1,0	9,8	1,75	0,179	2,40	0,245	3,50	0,357
	1,5	14,7	2,60	0,177	3,60	0,245	5,3	0,361
	2,0	19,6	3,55	0,181	4,80	0,245	7,0	0,357
	2,5	24,5	4,40	0,180	6,0	0,245	8,8	0,359
	5,2	29,4	5,2	0,177	7,1	0,241	10,4	0,354
618	1,0	9,8	1,75	0,180	2,40	0,245	3,50	0,361
	1,5	14,7	2,60	0,178	3,60	0,245	5,3	0,363
	2,0	19,6	3,60	0,185	4,80	0,245	7,0	0,359
	2,5	24,5	4,35	0,178	6,0	0,245	8,7	0,357
	5,2	29,4	5,3	0,181	7,2	0,245	10,5	0,358
464	1,0	9,8	1,75	0,180	2,40	0,245	3,50	0,361
	1,5	14,7	2,60	0,178	3,70	0,252	5,3	0,363
	2,0	19,6	3,50	0,179	4,80	0,245	7,1	0,364
	2,5	24,5	4,40	0,180	6,0	0,245	8,8	0,361
	5,2	29,4	5,3	0,181	7,2	0,245	10,4	0,355
309	1,0	9,8	1,75	0,182	2,40	0,245	3,50	0,365
	1,5	14,7	2,55	0,176	3,60	0,245	5,3	0,366
	2,0	19,6	3,55	0,183	4,90	0,250	7,0	0,361
	2,5	24,5	4,35	0,179	6,0	0,245	8,7	0,358
	5,2	29,4	5,2	0,178	7,2	0,245	10,4	0,356
154	1,0	9,8	1,75	0,184	2,45	0,250	3,50	0,368
	1,5	14,7	2,60	0,184	3,70	0,252	5,3	0,365
	2,0	19,6	3,50	0,181	4,90	0,250	7,0	0,363
	2,5	24,5	4,35	0,180	6,1	0,249	8,8	0,364
	5,2	29,4	5,2	0,179	7,3	0,249	10,4	0,357

1. táblázat

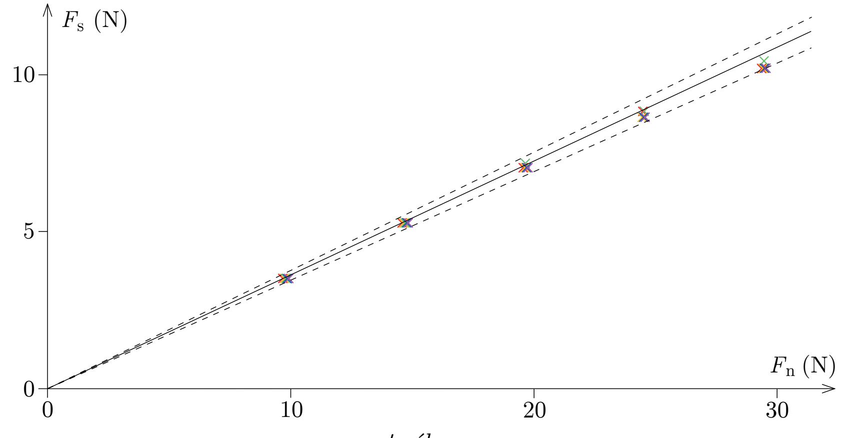
Mindhárom anyagpár esetében ábrázoltam a súrlódási erőt a nyomóerő függvényében. A különböző nagyságú súrlódó felületek adatait ugyanazon a grafikonon, de más-más színnel (a csökkenő felületek sorrendjében piros, narancs, zöld, kék, lila). Berajzoltam az illesztett egyeneseket és az illesztések hibáit is, amelyekből leolvashatók az egyes anyagpárok esetében a súrlódási együtthatók (*2–4. ábra*).



2. ábra



3. ábra



4. ábra

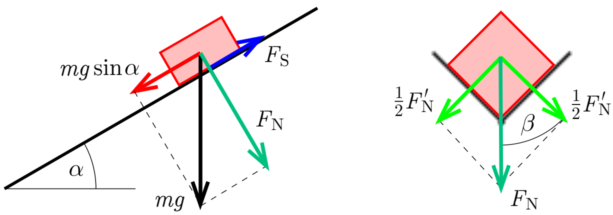
A leolvasott meredekségekből az egyes súrlódási együtthatók:

fadeszka – csempe: $\mu_1 = 0{,}181 \pm 0{,}006$,
fadeszka – fapad: $\mu_2 = 0{,}250 \pm 0{,}006$,
fadeszka – szigetelő: $\mu_3 = 0{,}36 \pm 0{,}01$.

Mindhárom grafikonon látható, hogy a mérési pontok hibahatáron belül az illesztett egyenesekre esnek, függetlenül a súrlódó felületek nagyságától. Ebből következik, hogy a súrlódási erő valóban arányos a nyomóerővel, másrészt viszont független a súrlódó felületek nagyságától.

Csapó András (Budapest, Baár-Madas Ref. Gimn., 9. évf.)

II. megoldás. A csúszási súrlódás vizsgálatához V-alakú lejtőt használtunk, ugyanis az ebbe belehelyezett hasábok két oldalukon is tudnak súrlódni, ezért több mérést tudtunk végezni a felületek változtatásával. Ezen kívül pedig ezzel azt is biztosítottuk, hogy a testek egyenes vonalban csússzanak le. A testre ható erőket az *5. ábrán* ábrázoltuk.



5. ábra

a) A súrlódási együttható függése a felületek anyagától és súrlódó felület méretétől. A test mozgását leíró egyenletek:

(1) $$F_N = mg\cos\alpha,$$
(2) $$ma = mg\sin\alpha - F_S,$$

ahol a V-alakú lejtő miatt, valamint (1)-et felhasználva:

(3) $$F_S = \mu F'_N = 2\mu F_N\cos\beta = 2mg\mu\cos\alpha\cos\beta.$$

Ezt beírva (2)-be és rendezve:

$$\mu = \frac{g\sin\alpha - a}{2g\cos\alpha\cos\beta}.$$

A test a lejtőn egyenletesen gyorsul, így gyorsulása a lejtő s hosszának és a lecsúszás t idejének mérésével megkapható:

$$a = \frac{2s}{t^2}.$$

A lejtő kialakítása miatt $\beta = 45°$, így a súrlódási együttható meghatározásához minden felület esetében α, s és t értékét kell mérni.

b) Azt kell vizsgálnunk, hogy az F_S súrlódási erő és az F'_N nyomóerő arányosak-e. (2), valamint (1) és (3) alapján:

$$F_\mathrm{S} = mg\sin\alpha - ma,$$
$$F'_\mathrm{N} = 2mg\cos\alpha\cos\beta.$$

Az erők kiszámításához meg kell mérnünk a testek m tömegét, ehhez konyhai mérleget használunk (lásd az *1. megjegyzést*).

A mérés kivitelezése. A V-alakú lejtőt úgy állítottuk be, hogy a lejtőn a testek könnyedén lecsússzanak, de a csúszás ideje ne legyen túl rövid, majd ebben a helyzetében rögzítettük, hogy a hajlásszöge ne változzon mérés közben. Megmértük a lejtő magasságát és hosszát, ebből meghatároztuk a lejtő α szögét. A két vizsgált anyagpár a fa – alumínium és a műanyag – alumínium. A különböző méretű hasábokat – amelyeket kisebb részekből kétoldalú ragasztóval állítottunk össze – minden esetben 3-szor csúsztattuk le. A testek lejtőn való mozgását videóra vettük, majd ezeket képkockákra bontva meghatároztuk a lecsúszási időket, amiből a megtett út ($s = 0{,}867$ m) ismeretében ki tudtuk számolni a gyorsulást.

A nyomóerő növelésére az eddigi hasábméretekből választottunk ki néhányat és azok tetejére (a felületet nem növelve) helyeztünk még további hasábokat, majd gyurmát és mágneseket rögzítettünk rájuk, hogy a felületeket összenyomó erőt tovább növeljük. Ezek mozgását szintén videóra vettük és ugyanúgy jártunk el, mint az előző esetben. A lecsúsztatott testek tömegét minden esetben megmértük. A *6. ábrán* a csúszásról készített videó egyik képkockája látható.

6. ábra

Mérési eredmények. a) A súrlódási együttható és a súrlódó felület nagyságának kapcsolata. A fa – alumínium anyagpárral végzett mérés eredményei a *2. táblázatban* láthatók, ekkor a lejtő hajlásszöge $\alpha_1 = 28{,}2°$ volt. A műanyag – alumínium anyagpár esetében a hajlásszög $\alpha_2 = 35{,}2°$, az eredményeket a *3. táblázat* foglalja össze. (Lásd a *2. megjegyzést.*)

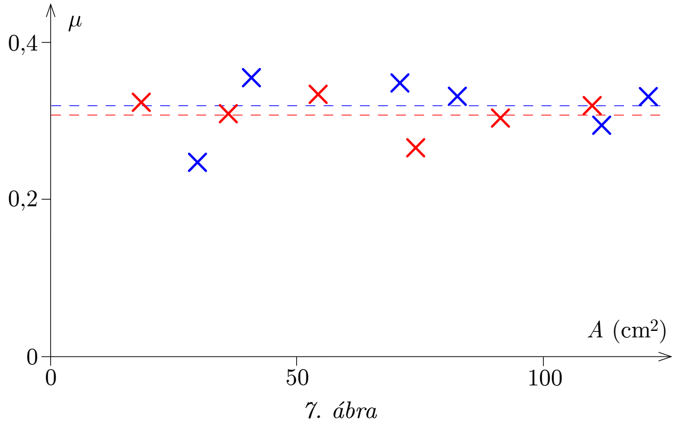
A *7. ábrán* látható grafikonon a mérési adatok alapján a csúszási súrlódási együtthatót a súrlódó felület nagyságának függvényében ábrázoltuk. A piros szín a fa – alumínium, a kék a műanyag – alumínium anyagpárt jelöli. A szaggatott vonalak az átlagértékek.

t (s)	a $\left(\mathrm{m/s^2}\right)$	A $(\mathrm{cm^2})$	m (g)	F'_{N} (N)	F_{S} (N)	μ
1,56	0,717	18,3	14	0,171	0,055	0,321
1,41	0,871	36,5	33	0,403	0,124	0,308
1,77	0,556	54,8	47	0,575	0,192	0,334
1,10	1,433	73,0	66	0,807	0,212	0,262
1,36	0,944	91,3	80	0,978	0,296	0,302
1,42	0,857	109,6	94	1,149	0,355	0,309

2. táblázat

t (s)	a $\left(\mathrm{m/s^2}\right)$	A $(\mathrm{cm^2})$	m (g)	F'_{N} (N)	F_{S} (N)	μ
0,78	2,87	29,9	9	0,102	0,025	0,246
1,03	1,62	40,9	18	0,204	0,073	0,356
0,99	1,76	70,8	27	0,306	0,105	0,343
0,96	1,90	81,7	36	0,408	0,135	0,332
0,87	2,31	111,7	45	0,510	0,151	0,295
0,96	1,90	122,6	54	0,612	0,203	0,332

3. táblázat



7. ábra

Ennél a mérésnél nehézséget okozott, hogy nem tudtuk a felületet úgy változtatni, hogy közben a nyomóerő változatlan maradt volna. Az állítást nem tudtuk egyértelműen igazolni. (Lásd a *3. megjegyzést.*)

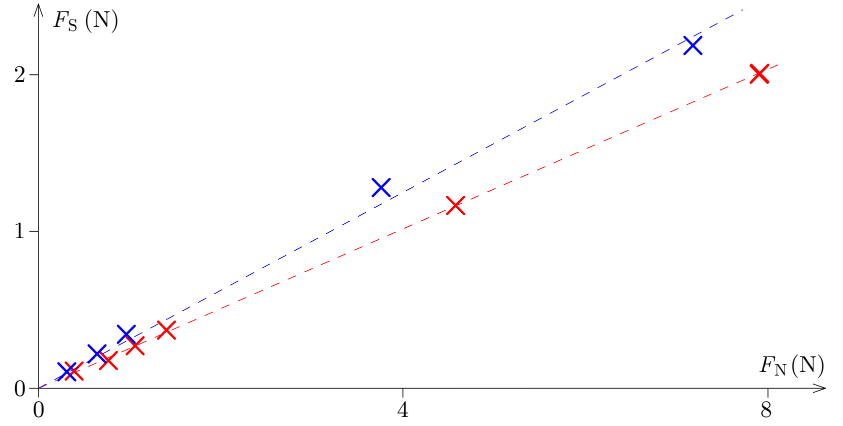
b) A súrlódási együttható és a nyomóerő összefüggése. A mérési adatok a fa – alumínium, illetve a műanyag – alumínium anyagpárra a *4. és 5. táblázatban* találhatók. Mindkét esetben $\alpha = 35{,}2°$. A súrlódási erő – nyomóerő grafikon a *8. ábrán* látható (a piros szín ismét a fa – alumínium, a kék a műanyag – alumínium anyagpárt jelöli).

t (s)	a $\left(\mathrm{m/s^2}\right)$	m (g)	F_{N}' (N)	F_{S} (N)
0,822	2,56	34	0,385	0,105
0,744	3,13	66	0,748	0,167
0,789	2,79	94	1,065	0,270
0,811	2,64	124	1,405	0,375
0,789	2,79	404	4,58	1,16
0,789	2,79	699	7,92	2,01

4. táblázat

t (s)	a $\left(\mathrm{m/s^2}\right)$	m (g)	F_{N}' (N)	F_{S} (N)
0,900	2,14	27	0,306	0,095
0,989	1,77	56	0,635	0,218
1,000	1,73	85	0,963	0,334
0,978	1,81	332	3,76	1,28
0,889	2,19	632	7,16	2,19

5. táblázat



8. ábra

A mérési adatokra illesztett egyenesek igazolják a súrlódási erő és a nyomóerő arányosságát.

A *Newtonméter csapat: Kiss Benedek, Sós Ádám*
(Sopron, Berzsenyi D. Ev. Gimn., 11. évf.)

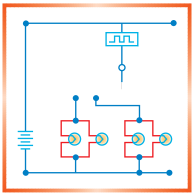
Megjegyzések. 1. Az arányosság vizsgálata a tömeg mérése nélkül is lehetséges, hiszen mindkét erő arányos a tömeggel.

2. Terjedelmi okokból a táblázatokban minden esetben csak a három-három mérés *átlagát* tüntetjük fel. Az eredeti jegyzőkönyvben – helyesen – minden mérés *és* az átlag is szerepel.

3. A mérési eredmények alapján akkor lehetne egyértelmű kijelentést tenni a csúszási súrlódási erő és a súrlódó felület nagyságának függetlenségére, ha az eredményekhez

számszerű hiba tartozna. Akkor mondhatnánk, hogy a súrlódási együttható *hibahatáron belül* független (vagy nem független) a felület nagyságától.

15 dolgozat érkezett. Helyes 7 megoldás. Kicsit hiányos (4-5 pont) 3, hiányos (2-3 pont) 3, nem versenyszerű 2 dolgozat.



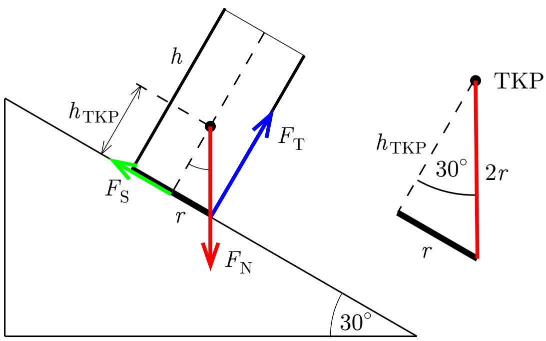
Fizika gyakorlatok megoldása

G. 830. *Egy vékony falú, 5 cm sugarú hengeres üvegedény fenéklapja kétszer vastagabb, mint a palástja. Legfeljebb milyen magas az edény, ha egy* 30 *fokos lejtőn a talpára állítva nem borul fel?*

(A súrlódás olyan nagy, hogy az edény nem csúszik meg a lejtőn.)

(4 pont)

Megoldás. A pohár akkor borul fel, ha a nehézségi erő hatásvonala a talpon kívül metszi a lejtőt.



A tömegközéppont távolsága a pohár talpától:

$$h_{\mathrm{TKP}}=\frac{m_{\mathrm{p}}\frac{h}{2}+m_{\mathrm{t}}v}{m_{\mathrm{p}}+m_{\mathrm{t}}},$$

ahol

$$m_{\mathrm{p}}=2r\pi h\cdot v\varrho,\qquad m_{\mathrm{t}}=r^2\pi\cdot 2v\varrho$$

a palást, illetve a talp tömege, v a palást, $2v$ pedig a talp vastagsága. Behelyettesítve, és felhasználva, hogy a vékony fal miatt $v\ll h$:

$$h_{\mathrm{TKP}}=\frac{\frac{h^2}{2}+rv}{h+r}\approx\frac{h^2}{2(h+r)}.$$

Határesetben a nehézségi erő hatásvonala épp a pohár szélén megy át. Ekkor a kinagyított ábrarészlet alapján:

$$h_{\mathrm{TKP}}^2 + r^2 = (2r)^2, \quad \text{amiből} \quad h_{\mathrm{TKP}} = \sqrt{3}r.$$

A két kifejezést egymással egyenlővé téve:

$$\frac{h^2}{2(h+r)} = \sqrt{3}r,$$
$$h^2 - 2\sqrt{3}rh - 2\sqrt{3}r^2 = 0.$$

A másodfokú egyenlet pozitív megoldása:

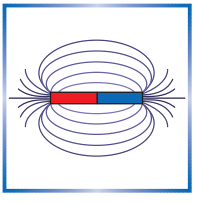
$$h = \left(\sqrt{3} + \sqrt{3 + 2\sqrt{3}}\right) \approx 21{,}4 \text{ cm}.$$

A pohár legfeljebb 21,4 cm magas lehet.

Csonka Áron (Budapest, Piarista Gimn., 9. évf.)

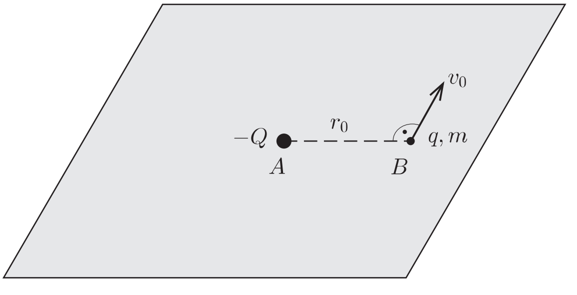
35 dolgozat érkezett. Helyes 9 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 6, hiányos (1–2 pont) 15, hibás 5 dolgozat.

Fizika feladatok megoldása



P. 5514. *Vízszintes, sík felület egyik, A pontjában egy pontszerűnek tekinthető, $-Q<0$ töltésű test van rögzítve. A síkon egy szintén pontszerűnek tekinthető, m tömegű, $q>0$ töltésű test súrlódásmentesen tud mozogni. Kezdetben az m tömegű test a B pontban van, ekkor a töltések távolsága r_0, és az m tömegű testnek az AB szakaszra merőlegesen, a síkkal párhuzamosan $v_0 = \sqrt{\frac{kqQ}{mr_0}}$ nagyságú sebessége van.*

(A mozgás közben a töltések nagysága nem változik.)



a) A mozgó test mennyi idő múlva jut ismét az AB pontok által meghatározott egyenesre?

b) Most a mozgó test kezdősebességének nagyságát felére csökkentjük. Az előbbi esetbeli időnek hányszorosa a kiindulási helytől a legtávolabbi helyig való legkorábbi eljutás ideje?

(*5 pont*) Közli: *Zsigri Ferenc,* Budapest

Megoldás. *a)* A B pontban található mozgó test a vízszintes síkon súrlódásmentesen mozog, a függőleges erők kiegyenlítik egymást, így csak az A pont felé mutató Coulomb-erő hatásával kell foglalkoznunk. Ennek nagysága:

$$F_{\mathrm{C}} = k\frac{qQ}{r_0^2}. \tag{1}$$

Mielőtt a test pályáját megkeresnénk, határozzuk meg, hogy a B pontban mekkora a pálya simulókörének sugara. A körmozgás alapfeltétele szerint:

$$F_{\mathrm{C}} = m\frac{v_0^2}{R},$$

ahol R a simulókör sugara. Ide v_0 értékét és (1)-et behelyettesítve:

$$k\frac{qQ}{r_0^2} = \frac{m}{R}\cdot\frac{kqQ}{mr_0},$$

amiből rendezve $R = r_0$ adódik. A test tehát egy tőle r_0 távolságra lévő rögzített töltés hatására egy olyan görbén kezd el mozogni, amelyhez r_0 sugarú kör simul. Ez egy r_0 sugarú körpályát jelent, amely energetikailag is megfelelő, hiszen sem a test sebességének nagysága, sem a rögzített ponttól vett távolsága nem fog változni a mozgás során.

Ahhoz, hogy a test ismét az AB pontok által meghatározott egyenesen legyen, pont egy félkört kell megtennie, az ehhez szükséges idő a periódusidő fele:

$$t_{\mathrm{a}} = \frac{T_0}{2} = \frac{r_0\pi}{v_0} = \pi\sqrt{\frac{mr_0^3}{kqQ}}.$$

b) Mivel a sebességet lecsökkentettük, ekkor a test egy ellipszispályán fog mozogni, melynek a B ponttól távolabbi fókusza lesz az A pont. A keresett időtartam ismét a keringési periódusidő fele. Célunk ezen ellipszis fél nagytengelyének meghatározása, hiszen ekkor Kepler III. törvénye alapján az *a)* esetet felhasználva ki tudjuk számítani a keringés periódusidejét.

I. megoldás. Használjuk most is az *a)* részben alkalmazott simulókör felírását:

$$m\frac{v_1^2}{R} = \frac{kqQ}{r_0^2}.$$

Behelyettesítve a $v_1 = \frac{1}{2}v_0$ értéket:

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{kqQ}{r_0 R} = \frac{kqQ}{r_0^2},$$

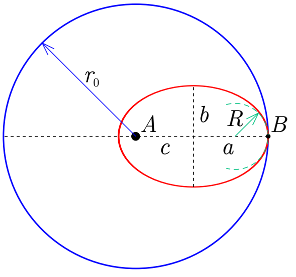
amiből most:

$$R=\frac{1}{4}r_0. \tag{2}$$

Jelölje az ellipszis fél nagytengelyét, fél kistengelyét, valamint a fókusz középponttól mért távolságát a szokásos módon a, b, illetve c, amelyekre teljesül a

$$b^2=a^2-c^2 \tag{3}$$

összefüggés. Nem közismert, azonban geometriailag levezethető, hogy a simulókör sugara egy ellipszis nagytengelyének végein:



$$R=\frac{b^2}{a}. \tag{4}$$

Az A pont az ellipszis B-től távolabbi fókusza, így:

$$r_0=a+c. \tag{5}$$

A (4) és (5) kifejezést (2)-be behelyettesítve:

$$\frac{b^2}{a}=\frac{1}{4}(a+c),$$

majd (3)-at behelyettesítve és rendezve a következő másodfokú egyenletet kapjuk:

$$4c^2+ac-3a^2=0.$$

Ennek pozitív megoldása:

$$c=\frac{3}{4}a,$$

amelyből (5) felhasználásával:

$$a=\frac{4}{7}r_0.$$

Innen Kepler III. törvényét alkalmazva:

$$\frac{T_1}{T_0}=\left(\frac{a}{r_0}\right)^{\frac{3}{2}},$$

ahol T_0 és r_0 rendre az első, „körpályás” esethez tartozó periódusidő és fél nagytengely. Az adatokat behelyettesítve az idők aránya

$$\frac{t_\mathrm{b}}{t_\mathrm{a}}=\frac{T_1}{T_0}=\left(\frac{4}{7}\right)^{\frac{3}{2}}\approx 0{,}432.$$

II. megoldás. A feladat *b)* része az előbbi, „geometriai” megfontolások helyett „fizikai” megfontolásokkal is megoldható. Mivel a mozgás során a mozgó testre csak centrális erő hat, a test A pontra vonatkozó perdülete állandó. Ezen kívül a rendszer konzervativitása miatt az energiamegmaradás is érvényes. Alkalmazzuk a megmaradási tételeket a kezdeti és a legtávolabbi helyzet között:

$$mv_1r_0 = mv_2r_2,$$
$$\frac{1}{2}mv_1^2 - k\frac{qQ}{r_0} = \frac{1}{2}mv_2^2 - k\frac{qQ}{r_2},$$

ahol r_2 a kérdéses „túloldali” helyzetben a két töltés távolsága, és v_2 a mozgó test ottani sebessége. Az első egyenletből kifejezzük v_2-t, és behelyettesítjük a második egyenletbe, majd $v_1 = \frac{1}{2}v_0$ megadott értékét is behelyettesítve és rendezve az

$$(r_2 - r_0)(7r_2 - r_0) = 0$$

egyenletet kapjuk. Az $r_2 = r_0$ triviális megoldás visszaadja a kezdeti állapotot, a számunkra érdekes megoldás:

$$r_2 = \frac{1}{7}r_0.$$

Mivel A az ellipszis fókuszpontja, és a mozgó test két vizsgált helyzete a nagytengely két végén van, $r_0 = a + c$, illetve $r_2 = a - c$, amiből az előző megoldással egyezően:

$$a = \frac{4}{7}r_0.$$

Innen ugyanúgy Kepler III. törvényét felhasználva jutunk el (természetesen ugyanahhoz) a megoldáshoz.

A megoldás általánosítása. A feladat *b)* részében megadott $\frac{1}{2}v_0$ helyett változtassuk a kezdősebességet $\sqrt{\kappa}v_0$-ra ($\kappa > 0$).

Ekkor (2) helyett az általános összefüggés:

$$R = \kappa r_0, \tag{6}$$

amelyből ugyanúgy (4) és (5) felhasználásával:

$$\frac{b^2}{a} = \kappa(a + c).$$

Ebbe (3)-at behelyettesítve és rendezve a

$$c^2 + \kappa ac + (\kappa - 1)a^2 = 0 \tag{7}$$

egyenletet kapjuk, melynek a feladat szempontjából értelmezhető megoldása:

$$c = (1 - \kappa)a.$$

Ismét felhasználva (5)-öt:

$$a = \frac{1}{2 - \kappa}r_0. \tag{8}$$

Vegyük észre, hogy (7)-ből $\kappa > 1$ esetén negatív értéket kapnánk c-re. Ez azzal magyarázható, hogy ebben az estben az A pont nem az ellipszis B pontjától távolabbi, hanem ahhoz közelebbi fókusza lesz, és így ekkor az (5) összefüggés helyett az

$$r_0 = a - c \tag{9}$$

összefüggést kell használnunk, ezt kell beírni (6)-ba. Emiatt (7) így módosul:

$$c^2 - \kappa ac + (\kappa - 1)a^2 = 0,$$

amelynek a feladat szempontjából értelmezhető megoldása:

$$c = (\kappa - 1)a,$$

(amely nem negatív, hiszen most $\kappa > 1$). Ebből, most (9)-et felhasználva ugyanúgy megkapjuk a (8)-as összefüggést, tehát az akkor is igaz, ha A nem a távolabbi, hanem a közelebbi fókusz. (Ellenőrzésképpen behelyettesíthetjük az *a)* eset $\kappa = 1$, valamint a *b)* eset $\kappa = \frac{1}{4}$ értéket, és az összefüggés megadja a várt $a = r_0$, illetve $a = \frac{4}{7} r_0$ értéket.)

Kepler III. törvényébe (8)-at behelyettesítve, valamint a körmozgáshoz tartozó T_0 periódusidőt és r_0 sugarat felhasználva megkapjuk az általános végeredményt:

$$\frac{t(\kappa)}{t_{\mathrm{a}}} = \frac{T(\kappa)}{T_0} = \left(\frac{1}{2 - \kappa}\right)^{\frac{3}{2}}. \tag{10}$$

Végezetül diszkutáljuk κ értelmezési tartományát. A $\sqrt{\kappa} v_0$ kezdősebesség miatt $\kappa \geqslant 0$ szükséges (de a mozgás szimmetriája miatt $-\sqrt{\kappa} v_0$ kezdősebességgel ugyanazt a megoldást kapnánk, mint $\sqrt{\kappa} v_0$ sebességgel). A (8)-as összefüggés csak $\kappa < 2$ esetén ad pozitív eredményt a fél nagytengelyre (utána negatívat, $\kappa = 2$-nél pedig nem értelmezhető a kifejezés). Ez a felső határ fizikailag is megmagyarázható és levezethető: eddigi gondolatmenünkben végig ellipszispályákkal dolgoztunk, azonban egy bizonyos kezdőebesség fölött nem jön létre periodikus mozgás és ellipszispálya, hanem a test „elszáll” a végtelenbe.

A kezdőállapotban a rendszer teljes mechanikai energiája:

$$E_0 = \frac{1}{2} m \kappa v_0^2 - k \frac{qQ}{r_0}.$$

Csak $E_0 < 0$ esetben fog a test periodikus mozgást végezni. Felírva a feltételt, és behelyettesítve v_0 értékét az eddigiekkel összhangban megkapjuk a $\kappa < 2$ feltételt. ($\kappa = 2$-nél parabolapályán, $\kappa > 2$ esetében hiperbolapályán fog mozogni a test.)

A teljességhez tárgyalnunk kell még a $\kappa = 0$ esetet is: ekkor a q töltésű testnek nem adunk kezdősebességet, és az gyorsulva nekiütközik a $-Q$ töltésű testnek. Meglepő módon a levezetett $t(\kappa)$ összefüggés ebben az esetben is működik (bár természetesen ilyenkor a $T(\kappa)$ periódusidőnek nincs értelme, mert csak egy fél „periódus” játszódik le). Ennek igazolása integrálszámítással lehetséges:

Tekintsük azt az állapotot, mikor a mozgó test x távolságra van az A ponttól. Legyen pillanatnyi sebessége ekkor v. Az energiamegmaradás törvénye alapján:

$$-k\frac{qQ}{r_0}=\frac{1}{2}mv^2-k\frac{qQ}{x},$$

amiből

$$v=-\sqrt{\frac{2kqQ}{m}}\sqrt{\frac{1}{x}-\frac{1}{r_0}}=-\sqrt{2}v_0\sqrt{\frac{r_0-x}{x}}.$$

(A sebesség előjele negatív, mert a test az $x=r_0$ helyről halad az $x=0$ felé.) Felhasználva, hogy $v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ és a változókat szétválasztva:

$$\mathrm{d}t=-\frac{1}{\sqrt{2}v_0}\sqrt{\frac{x}{r_0-x}}\,\mathrm{d}x.$$

A keresett időt a jobb oldal r_0-tól 0-ig történő integrálásával kapjuk:

$$t(0)=-\frac{1}{\sqrt{2}v_0}\int\limits_{r_0}^{0}\sqrt{\frac{x}{r_0-x}}\,\mathrm{d}x.$$

A határozott integrál értéke (az interneten megkeresve) $-r_0\frac{\pi}{2}$, amiből

$$t(0)=\frac{r_0\pi}{v_0}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}=t_\mathrm{a}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}},$$

összhangban azzal, amit (10)-ből $\kappa=0$-t helyettesítéssel kapunk.

Beláttuk tehát, hogy a feladat általánosítható: amennyiben a kezdősebesség

$$v(\kappa)=\pm\sqrt{\kappa}v_0\qquad(0\leqslant\kappa<2),$$

akkor a kiindulási helytől a legtávolabbi pont eléréséhez szükséges idő:

$$t(\kappa)=\frac{r_0\pi}{v_0}\left(\frac{1}{2-\kappa}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Csóka Péter (Pécsi Janus Pannonius Gimn., 12. évf.)

Megjegyzés. Az utolsónak tárgyalt, nulla kezdősebességgel indított esetben a „bezuhanási" időt a nehezen meghatározható integrál helyett éppen a feladat megoldásában szereplő ellipszispályák segítségével szokás kiszámítani. Az egyre kisebb kezdősebességeknél egyre elnyújtottabb alakú ellipszisek lesznek a pályák, és ezek határeseteként a bezuhanás felfogható egy olyan elfajult ellipszispályának (az ellipszispálya első felének), ahol $v=0$ esetén $b=0$ és $a=c=\frac{r_0}{2}$ lesz (azaz éppen annyi, amennyit a (8) összefüggés $\kappa=0$ értéknél ad). Ebből az időt a nem elfajult esetekhez hasonlóan (a megoldásban is használt módon) Kepler III. törvénye alapján lehet kiszámítani.

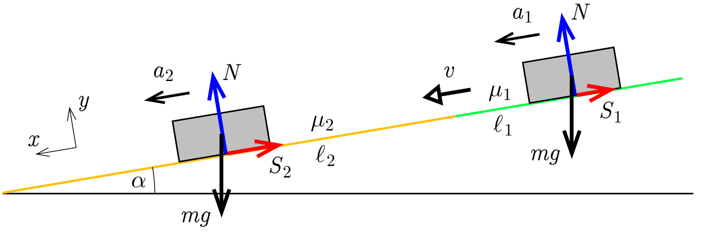
32 dolgozat érkezett. Helyes 12 megoldás. Kicsit hiányos (3–4 pont) 13, hiányos (1–2 pont) 7 dolgozat.

P. 5517. *Egy lejtő felső, ℓ_1 hosszúságú szakaszán a súrlódási együttható μ_1, az alsó, ℓ_2 hosszúságú szakaszán pedig μ_2. Egy kicsiny test nulla kezdősebességgel indulva a lejtő aljánál éppen megáll. Mekkora a lejtő hajlásszöge?*

Adatok: $\ell_1=20$ cm, $\ell_2=40$ cm, $\mu_1=0{,}1$ és $\mu_2=0{,}2$.

(4 pont) Közli: *Holics László*, Budapest

I. megoldás. A test a mozgás mindkét részében egyenes vonalú egyenletesen változó mozgást végez. A mozgás első részében a kezdősebessége $v_0 = 0$, a gyorsulása a_1, a végsebessége v, az ezalatt megtett út ℓ_1, a második részében a kezdősebessége v, a gyorsulása a_2, a végsebessége $v_\mathrm{v} = 0$, az ezalatt megtett út ℓ_2. Az *ábrán* a mozgás két részének egy-egy pillanata látható.



A mozgásegyenletek és a súrlódás összefüggései a mozgás egyes szakaszaira:

$$N = mg\cos\alpha,$$
$$S_1 = \mu_1 N, \qquad S_2 = \mu_2 N,$$
$$ma_1 = mg\sin\alpha - S_1, \qquad ma_2 = mg\sin\alpha - S_2,$$

amiből

$$a_1 = g(\sin\alpha - \mu_1\cos\alpha) \qquad \text{és} \qquad a_2 = g(\sin\alpha - \mu_2\cos\alpha).$$

A mozgás két részében a megtett utak:

$$\ell_1 = \frac{v^2 - v_0^2}{2a_1} = \frac{v^2}{2a_1}, \qquad \ell_2 = \frac{v_\mathrm{v}^2 - v^2}{2a_2} = -\frac{v^2}{2a_2},$$

amiből

$$a_1\ell_1 = -a_2\ell_2.$$

A gyorsulások kifejezéseit felhasználva, rendezve, majd a numerikus értékeket behelyettesítve a lejtő hajlásszöge:

$$g(\sin\alpha - \mu_1\cos\alpha)\ell_1 = -g(\sin\alpha - \mu_2\cos\alpha)\ell_2,$$
$$(\ell_1 + \ell_2)\sin\alpha = (\mu_1\ell_1 + \mu_2\ell_2)\cos\alpha,$$
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\mu_1\ell_1 + \mu_2\ell_2}{\ell_1 + \ell_2} = \frac{1}{6},$$
$$\alpha \approx 9{,}5^\circ.$$

II. megoldás. A munkatétel alapján $\Delta E = W$. A test mozgási energiája a mozgás elején és végén is 0, csak a helyzeti energiája változik (csökken), miközben a súrlódási erő végez (negatív) munkát:

$$\Delta E = \Delta E_\mathrm{pot} = mg\Delta h = -mg(\ell_1 + \ell_2)\sin\alpha,$$
$$W = -S_1\ell_1 - S_2\ell_2.$$

Az I. megoldásból S_1 és S_2 kifejezését felhasználva, felírva a munkatételt, majd rendezve:

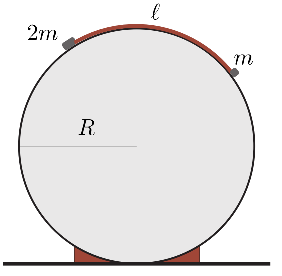
$$-mg(\ell_1+\ell_2)\sin\alpha = -\mu_1 mg\cos\alpha\cdot\ell_1 - \mu_2 mg\cos\alpha\cdot\ell_2,$$
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\mu_1\ell_1+\mu_2\ell_2}{\ell_1+\ell_2},$$

az I. megoldással összhangban.

Hegedüs Márk (Budapest, ELTE Apáczai Csere J. Gyak. Gimn., 9. évf.)

114 dolgozat érkezett. Helyes 77 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 14, hiányos (1–2 pont) 14, hibás 3, nem versenyszerű 6 dolgozat.

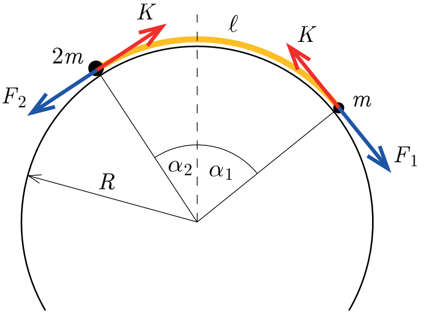
P. 5518. *Vízszintes helyzetben rögzített, $R=20$ cm sugarú, csúszós felületű hengeres testre ℓ hosszúságú hajlékony, könnyű fonalat fektettünk az* ábrán *látható módon.*



A fonál egyik végéhez m, a másikhoz $2m$ tömegű, pontszerűnek tekinthető testet erősítettünk. Legfeljebb mekkora ℓ esetén lehet egyensúlyban ez a rendszer?

(4 pont) Példatári feladat nyomán

Megoldás. Tekintsük az *ábrát*.



Mindkét test akkor lesz egyensúlyban, ha a rá ható erők érintőirányú komponenseinek eredője nulla:

$$F_2 = K \qquad \text{és} \qquad K = F_1,$$

ahol K a fonálerő, F_1 és F_2 pedig a nehézségi erők érintőirányú komponensei:

$$F_1 = mg\sin\alpha_1 \qquad \text{és} \qquad F_2 = 2mg\sin\alpha_2.$$

Ebből:

$$\sin\alpha_1 = 2\sin\alpha_2.$$

Maximális ℓ-hez a lehető legnagyobb α_1 és α_2 értékek tartoznak, de a nagyobb szög legfeljebb $\frac{\pi}{2}$ lehet. Mivel $\alpha_1 > \alpha_2$, így

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{2} \qquad \text{és} \qquad \alpha_2 = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}.$$

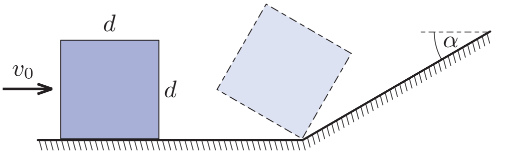
Ez alapján a fonál maximális hossza:

$$\ell = R(\alpha_1 + \alpha_2) = R\cdot\frac{2}{3}\pi \approx 42\ \text{cm}.$$

Seprődi Barnabás (Óbudai Árpád Gimn, 12. évf.)

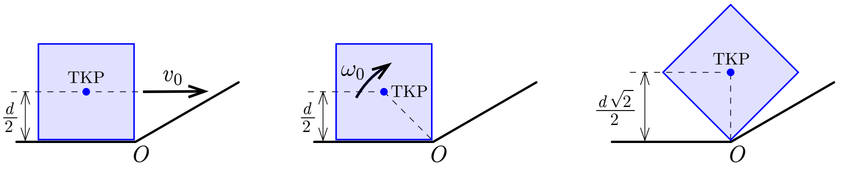
71 dolgozat érkezett. Helyes 36 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 17, hiányos (1–2 pont) 13, hibás 1, nem versenyszerű 4 dolgozat.

P. 5528. *Vízszintes, súrlódásmentesnek tekinthető talajon egy $d = 10$ cm oldalélű, homogén tömegeloszlású kocka csúszik v_0 sebességgel. Egyszer csak a kocka a talajhoz csatlakozó, $\alpha = 30°$ hajlásszögű lejtőhöz ér. A lejtő és a talaj „törésvonala” merőleges a kocka haladási irányára. A kocka talajjal érintkező, első oldaléle a törésvonalnál tökéletesen rugalmatlanul megakad, így a kocka megbillen. Legalább mekkora v_0 értéke, ha a kocka elülső oldallapja „rábillen” a lejtőre?*



(5 pont) Közli: *Vigh Máté,* Biatorbágy

Megoldás. Az *ábrán* a kockát a mozgásának három pillanatában ábrázoltuk: közvetlenül az ütközés előtt, közvetlenül az ütközés után és az átbillenés holtpontján.



Az ütközéskor a lejtő törésvonalánál rövid ideig nagy erő hat a kockára, melynek forgatónyomatéka azonban az O pontra vonatkoztatva nulla. A nehézségi erő sokkal kisebb az itt fellépő erőnél, ezért annak hatását az ütközés rövid ideje alatt elhanyagolhatjuk. Így a kocka perdülete az O pontra vonatkoztatva az ütközés alatt nem változik:

$$mv_0\frac{d}{2}=\Theta_O\omega_0, \tag{1}$$

ahol Θ_O a kocka tehetetlenségi nyomatéka az O pontra vonatkoztatva, amelyet a Steiner-tétel segítségével határozhatunk meg:

$$\Theta_O=\Theta_{\text{TKP}}+m\left(\frac{\sqrt{2}d}{2}\right)^2=\frac{1}{6}md^2+\frac{1}{2}md^2=\frac{2}{3}md^2.$$

Ezt behelyettesítve (1)-be a kocka szögsebessége közvetlenül az ütközés után:

$$\omega_0=\frac{3}{4}\,\frac{v_0}{d}.$$

Az ütközés *után* már konzervatív a rendszer, a teljes mechanikai energia állandó marad. A kocka akkor tud rábillenni a lejtőre, ha átjut az *ábra* jobb szélén látható holtponton, azaz az ütközés utáni mozgási energiája fedezi a helyzeti energia ehhez szükséges növekedését:

$$\frac{1}{2}\Theta_O\omega_0^2\geqslant mg\left(\frac{\sqrt{2}d}{2}-\frac{d}{2}\right),$$

$$\frac{3}{16}mv_0^2\geqslant\frac{\sqrt{2}-1}{2}mgd,$$

amiből a kocka átbillenéshez szükséges kezdeti sebessége:

$$v_0\geqslant\sqrt{\frac{8}{3}\left(\sqrt{2}-1\right)gd}\approx 1{,}04\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Hegedüs Márk (Budapest, ELTE Apáczai Csere J. Gyak. Gimn., 9. évf.) dolgozata alapján

51 dolgozat érkezett. Helyes 17 megoldás. Kicsit hiányos (3–4 pont) 5, hiányos (1–2 pont) 26, hibás 3 dolgozat.

Fizikából kitűzött feladatok

M. 430. Egy hurkapálca egyik végét fogjuk be vízszintesen, a másik végét pedig kezdjük el terhelni. Végezzük el a mérést különböző hosszúságú pálcákkal. Hogyan függ a pálca végének lehajlása a terhelés tömegétől és a pálca szabad részének hosszától? Határozzuk meg a hurkapálca anyagának Young-modulusát!

(6 pont) Közli: *Széchenyi Gábor,* Budapest

G. 845. Egy személyautó és egy tehergépkocsi egyszerre indul el egy derékszögű útkereszteződésből. A személyautó 20 m/s, a teherautó 15 m/s nagyságú sebességgel egyenletesen halad. A teherautó 10 perc múlva egy bekötőúthoz érve irányt változtat 90 fokkal, majd ott halad tovább korábbi sebességével. Mekkora távolságra lehet egymástól az autó és a tehergépkocsi a kiindulástól számított 20 perc múlva?

(3 pont) Tarján Imre Országos Emlékverseny, Szolnok

G. 846. Ha ismerjük a földfelszín méretét, a nehézségi gyorsulást, valamint a légnyomást, akkor ezek segítségével, jó közelítéssel meghatározhatjuk a Föld légkörének teljes tömegét. Végezzük el a számítást! Hogyan lehetséges, hogy a légnyomás időnként számottevően megváltozik, miközben a légkör tömege változatlan?

(3 pont)

G. 847. Egy $R_1 = 1\ \mathrm{M\Omega}$ ellenállással párhuzamosan kapcsolunk egy R_2 ellenállást, majd fokozatosan további $R_3, R_4, \ldots, R_n$ ellenállásokat kapcsolunk párhuzamosan hozzá. Az egyes lépésekben az eredő ellenállás rendre

a) $\frac{1}{2}\ \mathrm{M\Omega}$, $\frac{1}{3}\ \mathrm{M\Omega}$, $\frac{1}{4}\ \mathrm{M\Omega}$, …, $\frac{R_1}{n}$;

b) $\frac{1}{2}\ \mathrm{M\Omega}$, $\frac{1}{4}\ \mathrm{M\Omega}$, $\frac{1}{8}\ \mathrm{M\Omega}$, …, $\frac{R_1}{2^n}$;

c) $\frac{1}{1\cdot 2}\ \mathrm{M\Omega}$, $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\ \mathrm{M\Omega}$, $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\ \mathrm{M\Omega}$, …, $\frac{R_1}{n!}$.

Mekkorák az egyes esetekben az R_2, R_3, …, R_n ellenállások?

(4 pont)

G. 848. Hosszú, átlátszó anyagból készült, egyenes henger alaplapjának középpontjában vékony fénysugár lép be a hengerbe a környező levegőből. Milyen törésmutató esetében teljesül, hogy a fénysugár nem léphet ki a henger palástján át a levegőbe?

(4 pont)

P. 5553. Egy vékony korong az O középpontján átmenő, rá merőleges tengely körül állandó β szöggyorsulással forog. A korongon a középpontól r távolságra jelöljünk ki egy P pontot. Hogyan függ a P pont gyorsulásának nagysága és a gyorsulásvektorának az OP egyenessel bezárt szöge az r távolságtól?

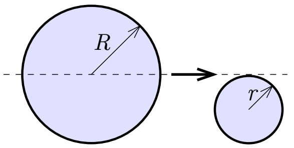
(3 pont) *Nagy Béla* (1881–1954) feladata nyomán

P. 5554. Egy 20 cm^2 alapterületű pohárban 120 g, 25 °C-os víz van. Beleteszünk egy 0 °C-os jégkockát. Amikor a jégkocka teljesen elolvad, a víz pontosan 0 °C-osra hűl. A pohár vízértéke 40 g, azaz a pohár hőkapacitása annyi, mint 40 g vízé. Egyéb hőveszteségtől és az üveg hőtágulásától tekintsünk el, de a víz sűrűségének hőmérsékletfüggését vegyük figyelembe.

a) Mennyi a jégkocka tömege?

b) Mennyit változik a pohárban a vízszint a jégkocka olvadása közben?

(4 pont) Közli: *Simon Péter,* Pécs



P. 5555. Vízszintes, nem teljesen sima asztallapon nyugszik egy r sugarú korong. A síkon egy nagyobb, $R=2r$ sugarú korong forgásmentesen csúszik úgy, hogy a középpontja a kis korong érintője mentén mozog. Mindkét korong ugyanabból az anyagból készült és a magasságuk is ugyanakkora.

A rugalmasnak tekinthető ütközés után a nagy korong a súrlódás miatt lelassul és $d=5$ cm út megtétele után megáll. Milyen irányban és milyen messzire jut el a kis korong az asztalon? A korongok közötti súrlódás elhanyagolható.

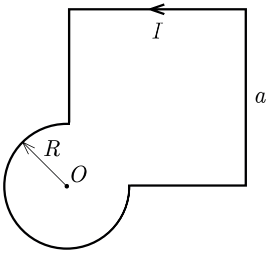
(4 pont) Közli: *Holics László,* Budapest

P. 5556. Egy távoli kettőscsillag egyik bolygóján értelmes lények élnek. A csillagászaik megállapították, hogy a két csillag távolsága időben állandó, ezt a távolságot választották „csillagászati egységnek” (CsE). Az űrkutatóik egy érzékeny űrtávcsövet juttattak el a kettős rendszer L_2 Lagrange-pontjába, amely a kisebb tömegű csillagtól $\frac{1}{2}$ CsE távolságra, a másik csillaggal ellentétes oldalon helyezkedik el. Mekkora a két csillag tömegének aránya?

(5 pont) Közli: *Gnädig Péter,* Vácduka

P. 5557. Egy R sugarú, vékony falú, rögzített cső belsejében, annak legmélyebb pontjának közelében csúszásmentesen ide-oda gurul egy m tömegű, r sugarú, homogén tömegeloszlású henger. Mekkora a mozgás periódusideje?

(5 pont) Közli: *Gelencsér Jenő,* Kaposvár

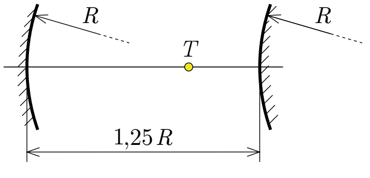


P. 5558. Az *ábrán* látható háromnegyed kör sugara R, a hiányos négyzet oldalainak hosszúsága a. A zárt vezető körben I erősségű áram folyik. Határozzuk meg a mágneses indukcióvektor értékét a kör O középpontjában!

Útmutatás: Egy ℓ oldalhosszúságú, I árammal átjárt, négyzet alakú vezetőkeret középpontjában a mágneses indukció értéke:

$$B=\frac{2\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi\ell}.$$

(4 pont) Közli: *Kotek László,* Pécs



P. 5559. Kis nyílásszögű, R sugarú homorú és domború gömbtükröket az *ábrán* látható módon helyezünk el egymástól 1,25R távolságra.

A közös optikai tengely mely T pontjába helyezzünk egy pontszerű fényforrást, hogy a belőle induló fénysugarak a két tükörről való visszaverődés után a T ponton menjenek át?

(5 pont) Közli: *Zsigri Ferenc*, Budapest

P. 5560. Egy ismeretlen bolygón működő 500 kHz-es középhullámú rádióállomás 314 Hz frekvenciájú búgást sugároz AM modulációval. (Ez a frekvencia nyugtató hatással van a bolygón lakó intelligens életformára.) Érzékeny rádióval egy, a bolygótól a fénysebesség 80%-ával távolodó űrhajóban éppen ezt az adást fogják.

a) Milyen frekvenciára állítsák a rádió vevőjét?

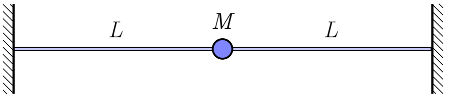
b) Milyen frekvenciájúnak hallják a búgást az űrhajósok?

(5 pont) Közli: *Rakovszky Andorás,* Budapest

P. 5561. Egy két végén rögzített, hosszegységenként μ tömegű, $2L$ hosszúságú megfeszített húron a transzverzális hullámok terjedési sebessége c.

a) Adjuk meg a húr sajátrezgéseinek lehetséges frekvenciáit c/L egységekben!

b) A húr közepére egy $M = 2\mu L$ tömegű, pontszerű testet rögzítünk, ahogy az az *ábrán* látható. Írjunk fel egy egyenletet a húr sajátrezgéseinek lehetséges frekvenciáira, és számítsuk is ki a legalacsonyabb 3 frekvencia számszerű értékét c/L egységekben! A gravitáció hatása elhanyagolható.



Útmutatás: Belátható, hogy a hullámalakok a középpontra nézve páros vagy páratlan függvényekkel írhatóak le.

(6 pont) Közli: *Vigh Máté,* Biatorbágy

❄

Beküldési határidő: 2024. április 15.

Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL FOR SECONDARY SCHOOLS (Volume 74. No. 3. March 2024)

Problems in Mathematics

New exercises for practice – competition K (see page 159): **K. 804.** A football match ended with a score of 4 : 3 in favor of the home team. Find the number of ways this result could have occured, if it's also given that the away team was leading for a certain period during the match. **K. 805.** Let us draw a small equilateral triangle, and let's surround it with identical small triangles in a single layer to form a larger equilateral triangle. Let us also surround this second equilateral triangle with small triangles to form an even larger triangle, and so on. (See figure on page 159.) *a)* How many small triangles will the twentieth such triangle contain? *b)* How many small triangles will the n^{th} such triangle contain? **K. 806.** Gizi should have solved inequality $\frac{4}{x-2} > 5$, however, she has accidentally replaced 5 with another positive integer. She has solved the modified inequality correctly, and obtained $2 < x < 4$. Find the positive integer that has been written instead of 5 in the inequality. **K. 807.** How many ways are there to color three squares green in a pink 3×3 table, if those colorings that can be reflected or rotated into each other are considered the same? (Proposed by *Katalin Fried*, Budapest, *Korándi József*, Budapest) **K. 808.** The square of the sum of a real number and its reciprocal is 5. *a)* Find the sum of the square and the reciprocal of the square of the number without computing the number itself. *b)* Find the sum of the cube and the reciprocal of the cube of the number without computing the number itself.

New exercises for practice – competition C (see page 160): Exercises up to grade 10: **K/C. 807.** See the text at Exercises **K**. **K/C. 808.** See the text at Exercises **K**. **Exercises for everyone: C. 1803.** Determine the number of triples of positive integers with greatest common divisor 4 and least common multiple 2024. (Proposed by *Katalin Abigél Kozma*, Győr) **C. 1804.** In triangle ABC let D, E and F denote the midpoints of the sides BC, CA and AB, respectively. Let K_a, K_b and K_c denote the centers of the incircles of triangles AFE, BDF and CED, respectively. Prove that the sum of the areas of quadrilaterals K_aFDE, K_bDEF and K_cEFD equals the area of triangle ABC. (Proposed by *Bálint Bíró*, Eger) **C. 1805.** Solve equation $\frac{6x-3}{3x}-\left(3y^2-14xy+8x\right)^2=x$ for positive real numbers x and y. (Proposed by *Bálint Bíró*, Eger) **Exercises upwards of grade 11: C. 1806.** The login to a banking application on a smartphone requires a four-digit PIN code. For security reasons, the digits appear randomly at the keypad locations shown in the diagram such that the probability of each possible distribution is the same. (One possible distribution is shown in the diagram on page 161.) If our PIN code consists of four different digits, what is the probability that we leave fingerprints at the same locations during two logins? (Proposed by *Merse Előd Gáspár*, Budapest) **C. 1807.** In triangle ABC angles satisfy $2\beta=3\gamma$. Let points D and E be chosen on side AC such that BD and BE trisect angle β, and point D is located between points A and E. Further, let F denote the intersection of side AB and the angle bisector of γ. Prove that BE and DF are parallel. (*Swiss competition problem*)

New exercises – competition B (see page 161): **B. 5374.** Square $ABCD$ and rhombus $BAEF$ are drawn on the opposite sides of line segment AB. Let K and M denote the center of the square and the rhombus, respectively. Prove that KM bisects angle AMB. *(3 points)* (Proposed by *Viktor Vígh*, Sándorfalva) **B. 5375.** Solve equation $(m-k)^2=$ $=m+k$ for non-negative integers m and k. *(4 points)* (Proposed by *László Németh*, Fonyód) **B. 5376.** Let us divide positive integer n with all the positive integers smaller than n, and let $f(n)$ denote the sum of the remainders we've obtained. (For example, when we divide $n=5$ by 1, 2, 3 and 4, we get remainders 0, 1, 2 and 1, respectively, therefore $f(5)=4$.) Solve equation $f(n)=n$. *(4 points)* (Proposed by *Attila Sztranyák*, Budapest) **B. 5377.** Determine the set of real numbers p satisfying the following property: inequality $\sqrt{a^2+b^2-ab}+\sqrt{b^2+c^2-bc}\geqslant\sqrt{a^2+c^2-p\cdot ac}$ holds for all triples of positive real numbers a, b and c, for which the square roots are defined. *(4 points)* (Proposed by *Zoltán Lóránt Nagy*, Budapest) **B. 5378.** Let n and k be positive integers. Prove that if $n\leqslant k^{11}$, then n can be obtained as the product of ten positive integers, among which no composite number greater than k^2 appears. *(5 points)* (Proposed by *Péter Pál Pach*, Budapest) **B. 5379.** Let ABC be a triangle with a right angle at C. On the hypotenuse AB, let H and D be the feet of the altitude and the angle bisector starting from C, respectively. The bisector of angle AHC meets AC at point E, and the bisector of angle CHB meets BC at F. Mark a point M on line segment HE and a point N on line segment HF that satisfy $HM:HE=HN:HF$. Show that lines CD, AM and BN are concurrent. **B. 5380.** Find the smallest possible degree of polynomial f of one variable, if it satisfies the following property: the range of f and $f\circ f$ are different, while the range of $f\circ f$ and $f\circ f\circ f$ are the same. (The symbol $\circ$ denotes function composition.) *(6 points)* (Proposed by *Bálint Hujter*, Budapest) **B. 5381.** Let $ABCDEFGH$ be a cyclic octagon inscribed in circle Ω_1 and let Ω_2 be another circle inside Ω_1. Assume that circles ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 are tangent to Ω_2 externally; moreover, ω_1 is tangent to arc AB of Ω_1 internally, and tangent to line segments AF and BE; ω_2 is tangent to arc CD internally, and tangent to CH and DG; ω_3 is tangent to arc EF internally, and tangent to AF and BE; finally, ω_4 is tangent to arc GH internally, and tangent to CH and DG, as shown in the figure. (See the figure on page 163.) Prove that the quadrilateral enclosed by segments AF, BE, CH and DG has an inscribed circle. *(6 points)* (Proposed by *Géza Kós*, Budapest)

New problems – competition A (see page 163): **A. 875.** *a)* Two players play a co-operative game. They can discuss a strategy prior to the game, however, they cannot communicate and have no information about the other player during the game. The game master chooses one of the players in each round. The player on turn has to guess the number of the current round. Players keep note of the number of rounds they were chosen, however, they have no information about the other player's rounds. If the player's guess is correct, the players are awarded a point. Player's are not notified whether they've scored or not. The players win the game upon collecting 100 points. Does there exist a strategy with which they can surely win the game in a finite number of rounds? *b)* How does this game change, if in each round the player on turn has two guesses instead of one, and they are awarded a point if one of the guesses is correct (while keeping all the other rules of the game the same)? (Proposed by *Gábor Szűcs*, Budapest) **A. 876.** Find all non-negative integers a and b satisfying $5^a+6=31^b$. (Proposed by *Erik Füredi*, Budapest) **A. 877.** Convex quadrilateral $ABCD$ is circumscribed about circle ω. A tangent to ω parallel to diagonal AC meets diagonal BD at point P outside of ω. The second tangent from P to ω touches ω at point T. Prove that ω and the circumcircle of triangle ATC are tangent. (Proposed by *Nikolai Beluhov*, Bulgaria)

Problems in Physics

(see page 186)

M. 430. Fix one end of a wooden skewer such that the skewer is horizontal and start loading the other end. Carry out the measurement with skewers of different lengths. How does the bending of the other end of the skewer depend on the mass of the load and the length of the free part of the skewer? Determine the Young's modulus of the material of the skewer.

G. 845. A car and a lorry leave a crossroad junction at the same time. (The roads are perpendicular to each other.) The car is travelling at a uniform speed of 20 m/s and the truck at 15 m/s. After 10 minutes, the truck reaches a crossroad, it turns 90° and continues travelling at its previous speed on the road. What might the distance between the car and the truck be 20 minutes after they left the junction? **G. 846.** If we know the size of the Earth's surface, the acceleration due to gravity, and the atmospheric pressure, the total mass of the Earth's atmosphere can be determined with a good approximation. Carry out the calculation. How is it possible that occasionally the air pressure changes significantly, while the mass of the atmosphere remains the same? **G. 847.** A resistor of resistance $R_1=1\ \mathrm{M\Omega}$ is connected in parallel with another resistor R_2, and then gradually more resistors $R_3, R_4, \dots R_n$ are connected in parallel. In each step, the values of the equivalent resistance of the resistors are given as follows: *a)* $\frac{1}{2}\ \mathrm{M\Omega}$, $\frac{1}{3}\ \mathrm{M\Omega}$, $\frac{1}{4}\ \mathrm{M\Omega}$, ..., $\frac{R_1}{n}$; *b)* $\frac{1}{2}\ \mathrm{M\Omega}$, $\frac{1}{4}\ \mathrm{M\Omega}$, $\frac{1}{8}\ \mathrm{M\Omega}$, ..., $\frac{R_1}{2^n}$; *c)* $\frac{1}{1\cdot 2}\ \mathrm{M\Omega}$, $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\ \mathrm{M\Omega}$, $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\ \mathrm{M\Omega}$, ..., $\frac{R_1}{n!}$. In each case, what are the resistances of the resistors $R_2, R_3, \dots, R_n$? **G. 848.** From the surrounding air a thin beam of light enters to a long, right cylinder, made of some transparent material, at the centre of the base of the cylinder. What can the refractive index of the cylinder's material be in order that the beam of light cannot emerge to the air from the cylinder through the lateral surface of the cylinder?

P. 5553. A thin disc rotates about an axis, which is perpendicular to the plane of the disc and goes through its centre O, at constant angular acceleration β. On the disc, mark a point P at a distance r from the centre. How does the magnitude of the acceleration of point P, and the angle between its acceleration vector and the line OP depend on the distance r? **P. 5554.** A glass of base area 20 cm^2 contains 120 g water at a temperature of 25 °C. Put in an ice cube which has a temperature of 0 °C. When the ice cube melts completely, the water cools down to exactly 0 °C. The water equivalent of the glass is 40 g, i.e. the heat capacity of the glass is equal to that of a sample of 40 g water. Ignore other heat losses and the thermal expansion of the glass, but consider the temperature dependence of the density of water. *a)* What was the mass of the ice cube? *b)* How much does the level of the water in the glass change during the melting process of the ice? **P. 5555.** A disc of radius r rests on a horizontal, not perfectly smooth tabletop. A larger disc of radius $R = 2r$ slides without rotation along the plane of the tabletop so that its centre moves along a tangent of the small disc. Both discs are made of the same material and have the same height (see *figure*). After the collision, which is considered to be elastic, the large disc slows down due to friction and stops after travelling $d = 5$ cm. In what direction and how far does the small disc travel on the table? Friction between the discs is negligible. **P. 5556.** On a planet of a distant binary star intelligent creatures are living. Their astronomers have found that the distance between the two stars is constant in time, so they have chosen this distance as the "astronomical unit" (AU). Their space scientists have launched a sensitive space telescope to the Lagrangian point of the binary system L_2, which is located at a distance of $\frac{1}{2}$ AU from the lower-mass star, on the opposite side from the other star. What is the ratio of the masses of the two stars? **P. 5557.** A cylinder of mass m, radius r, and with a uniform mass distribution, rolls back and forth without sliding inside a fixed, thin-walled tube of radius R, near the lowest point of the tube. What is the period of the motion? **P. 5558.** The radius of the three-quarter circle in the *figure* is R, the length of the sides of the incomplete square is a. A current of magnitude I flows in the closed conducting circuit. Find the value of the magnetic induction vector at the centre O of the circle. *Hint*: The value of the magnetic induction at the centre of a square shaped conducting frame of side ℓ, through which current I flows is: $B = \frac{2\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi \ell}$. **P. 5559.** A concave and a convex spherical mirror with small aperture (with respect to the radius) and of radius R are placed at a distance of $1.25R$ from each other as shown in the *figure*. At which point T on the common principal axis should a point source of light be placed so that the light rays emitted from it pass through the point T after reflection in the two mirrors? **P. 5560.** On an unknown planet a medium-wave radio station, operating at 500 kHz, transmits a hum at a frequency of 314 Hz in AM modulation. (This frequency has a calming effect on the intelligent creatures of the planet.) A sensitive radio in a spacecraft moving away from the planet at 80% of the speed of light just detects this transmission. *a)* What frequency should the radio receiver be set to? *b)* At what frequency will the astronauts hear the hum? **P. 5561.** On a stretched string of length $2L$, fixed at both ends, with mass μ per unit length, the speed of transverse waves is c. *a)* Give the possible frequencies of the eigenvibrations of the string in units c/L. *b)* A point-like body of mass $M = 2\mu L$ is fixed at the centre of the string, as shown in the *figure*. Write an equation for the possible frequencies of the eigenvibrations of the string and calculate the numerical value of the lowest 3 frequencies in units c/L. The effect of gravity is negligible. *Hint:* It can be shown that the forms of the waves can be described by even or odd functions with respect to the centre.

A Newtonméter csapat az M. 427-es mérési feladat megoldása közben

A lejtő beállítása

A mérőtest

A megfelelő meredekségűre állított lejtő

Készül a videófelvétel

Két nő az elsők között

(Cikk a 154. oldalon)

Svéd Márta

Szekeres György és Klein Eszter

Petőfi Kulturális Ügynökség

Nemzeti Együttműködési Alap

nka Nemzeti Kulturális Alap

Bethlen Gábor Alapkezelő Zrt.

Miniszterelnökség