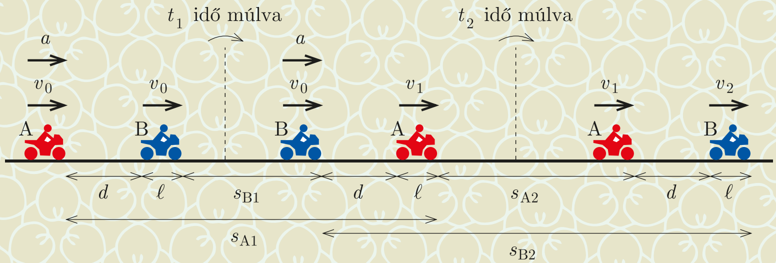
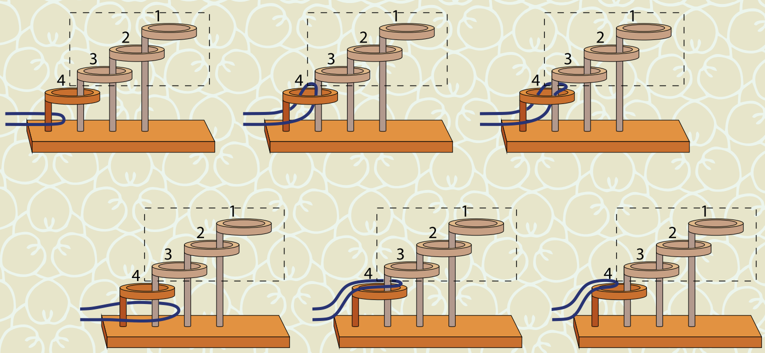
Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok

Informatika rovattal



Kép a G. 839-es gyakorlat megoldásához



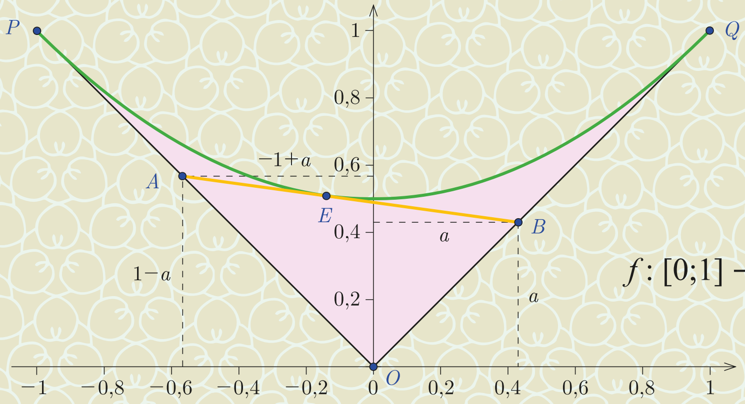
A Meleda játék márciusi feladványának megoldása

Matematikai kérdések egy fizika feladat kapcsán | Matek az utcán | Feladatok emelt szintű érettségire készüléshez | Komplex számok alkalmazása a mechanikában | Matematika és fizika feladatok megoldásai | Ikrek

KöMaL

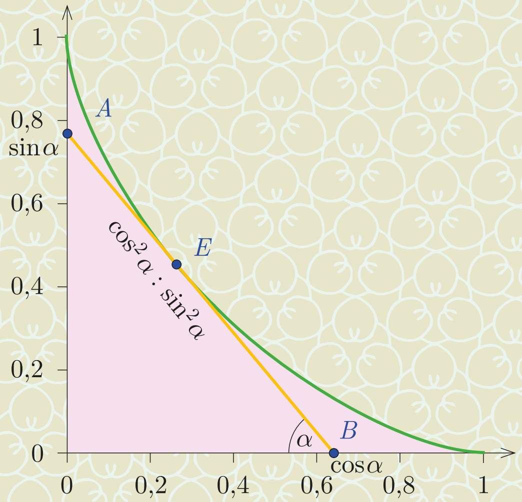
74. évfolyam
4. szám
2024.
április

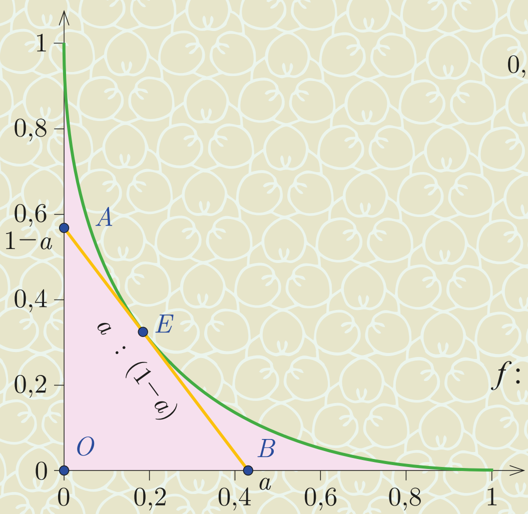
Az *A P. 5534. fizika feladat matematikai margójára* című cikk grafikonjai



$f:[0;1]\to\mathbb{R},\ f(x)=0{,}5x^2+0{,}5$

$f:[0;1]\to\mathbb{R},\ f(x)=(1-\sqrt{x}\,)^2$





$f:[0;1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\left(1-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$

KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK

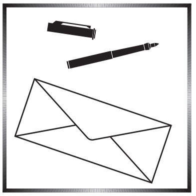
INFORMATIKA ROVATTAL BŐVÍTVE

ALAPÍTOTTA: **ARANY DÁNIEL** 1894-ben

74. évfolyam 4. szám Budapest, 2024. április

Megjelenik évente 9 számban, januártól májusig és szeptembertől decemberig havonta 64 oldalon. ÁRA: 1250 Ft

TARTALOMJEGYZÉK



A P. 5534. fizika feladat matematikai margójára

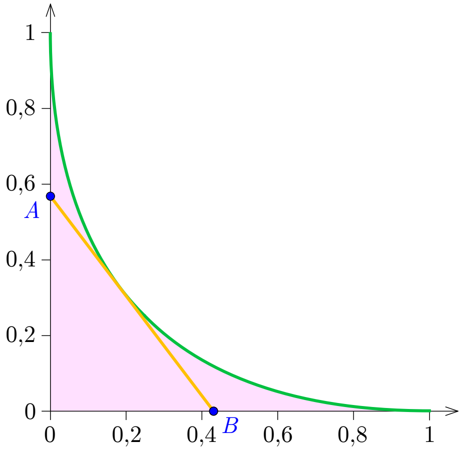
Bevezető

Kiss Adorján hívta fel matek szakköri csapatunk figyelmét a KöMaL **P. 5534.** fizika feladatára. A feladatban egy szakasz csúszik le a koordináta-rendszer tengelyei mentén, és a feladat megoldása során meg kell határozni a szakasz által súrolt terület felső burkolóját is. Hozzátette: erős a sejtése, hogy a keresett görbe egy parabola görbéjére illeszkedik.

A feladat megoldása a KöMaL honlapján és jelen lapszám fizika rovatában teljes egészében megtalálható[1]. Ebben a cikkben azt az utat szeretnénk bemutatni, amit mi jártunk be több szakköri foglalkozáson keresztül a koordinátatengelyek mentén lecsúszó szakaszok által súrolt területek felső határoló görbéinek *általános* vizsgálata során.

A feladat a sejtés ismeretében (F1.)

F1. Tekintsük az összes olyan $\overline{AB}$ szakaszt, ahol A az y, B az x tengely $[0;1]$ szakaszára illeszkedik, és amelyekre teljesül, hogy A távolsága a $(0;1)$ ponttól megegyezik B-nek a $(0;0)$-tól mért távolságával. (Ezt a távolságot a-val jelöljük.) Mutassuk meg, hogy a szakaszok által lefedett síkidom első negyedbe eső határpontjai egy parabolagörbe pontjai.

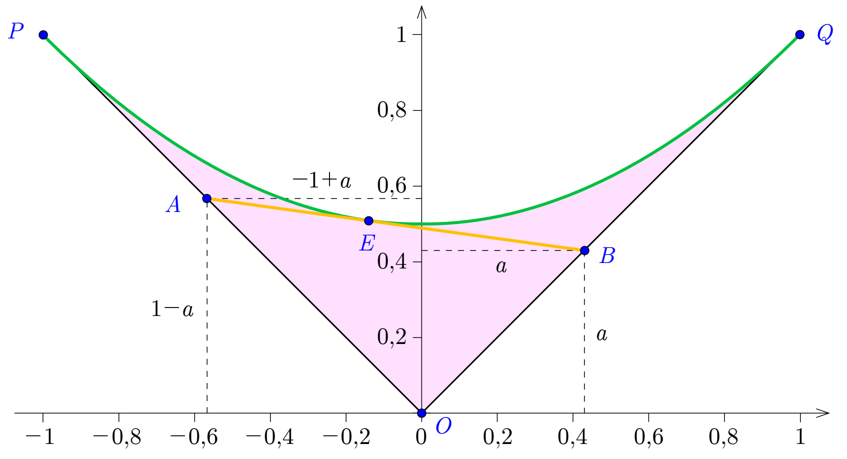


1. ábra

Megoldás. Érdekes módon a feladat középszintű eszközökkel és jó ötletekkel tökéletesen megoldható. A görbe jellegét nem befolyásolja, ha egybevágósági, illetve hasonlósági transzformációt alkalmazunk rá. A könnyebb tárgyalhatóság kedvéért először forgassuk el a síkidomot az origó körül 45°-kal, majd a kapott alakzatra alkalmazzunk egy origó középpontú $\sqrt{2}$ arányú hasonlóságot. Így a tengelyszakaszok végpontjai a $P(-1;1)$ és $Q(1;1)$ pontokba kerülnek. Bevezetve az $a \in [0;1]$ paramétert, könnyen leírhatjuk a feltételeknek megfelelő $B(a;a)$ és $A(-1+a;1-a)$ pontokat.

GeoGebrával készítve egy jó ábrát, azt is megsejthetjük, hogy a keresett görbét a szakaszok mindegyike érinti valamely – az adott szakasztól függő – E pontban. Picit tovább töprengve rájövünk, hogy pontosan az *érintés* igazolja a görbe „hatá-

[1] `https://www.komal.hu/feladat?a=feladat&f=P5534&l=hu`, illetve a *246. oldalon.*



2. ábra

roló" jellegét: egyrészt a szakaszoknak nincs pontja a görbe felett, másrészt a görbe minden pontja pontja a súrolt területnek. A kérdés tehát ez: van-e olyan parabola, amit minden $\overline{AB}$ egyenes érint, miközben a befutja a $[0;1]$ intervallumot?

Kezdjük a parabolával! Szélső helyzetben ($\overline{AB}=\overline{OQ}$, $B=Q=E$) át kell haladnia a $Q(1;1)$ ponton. Ugyanakkor „félúton" ($a=0{,}5$, $\overline{AB}$ vízszintes) a görbe áthalad az $E(0;0{,}5)$ ponton. A parabolát $y=px^2+q$ alakban keresve a két helyzet a következő egyenletekhez vezet:

$$1 = p+q,$$
$$0{,}5 = q.$$

Innen adódik, hogy ha van ilyen parabola, akkor annak egyenlete

$$y = 0{,}5x^2 + 0{,}5. \tag{1}$$

Térjünk át az $\overline{AB}$ egyenesekre: mivel egyik sem függőleges, egyenletük kereshető $y=mx+b$ alakban. Behelyettesítve a $B(a;a)$ és $A(-1+a;1-a)$ pontokat:

$$a = ma+b,$$
$$1-a = m(-1+a)+b.$$

Az egyenletrendszert megoldva az egyenesek egyenlete

$$y = (2a-1)x + 2a(1-a), \tag{2}$$

ahol $a\in[0;1]$. Utolsó lépésként ellenőrizzük, hogy az egyeneseknek és a görbének tényleg mindig egy közös pontja van! Ehhez megoldjuk az (1) és (2) egyenletekből álló egyenletrendszert.

$$y = 0{,}5x^2 + 0{,}5, \tag{1}$$
$$y = (2a-1)x + 2a(1-a). \tag{2}$$

Egy oldalra rendezve, 2-vel felszorozva másodfokú egyenletet kapunk:

$$x^2 + 2(1 - 2a)x + 1 - 4a(1 - a) = 0.$$

A diszkriminánsban felbontva a konstans tag zárójelét:

$$D = 4(1 - 2a)^2 - 4(1 - 4a + 4a^2).$$

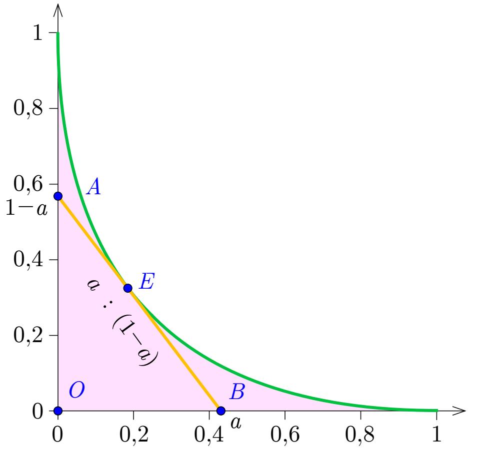
Látható, hogy $D = 0$ bármely $a \in [0; 1]$ paraméterre, ami igazolja feltevésünket, vagyis minden egyenesnek egyetlen közös pontja van a parabolával. Mivel az egyenesek egyike sem párhuzamos a parabola szimmetriatengelyével, ezért ez csak úgy lehetséges, ha érintők.

Az eddigiek alapján már kimondhatjuk, hogy a parabolaív valóban határoló görbe. Egyrészt az érintés miatt minden pontja pontja valamelyik szakasznak, tehát a síkidomhoz tartozik. Másrészt egy parabola összes érintőjének minden pontja (az érintési pont kivételével) a görbének ugyanazon oldalán található, így az érintőkre illeszkedő szakaszokból alkotott síkidom összes – nem érintési – pontja is.

A feladat a sejtés megfogalmazása nélkül (F2.)

F2. Tekintsük az összes olyan $\overline{AB}$ szakaszt, ahol A az y, B az x tengely $[0; 1]$ szakaszára illeszkedik, és amelyekre teljesül, hogy az A távolsága a $(0; 1)$ ponttól megegyezik a B $(0; 0)$-tól mért távolságával. Milyen függvény görbéjére illeszkedik a szakaszok által lefedett terület 1. síknegyedbe eső határa?

Megoldás. A szakkörön töprengtünk azon, hogyan írhatnánk le azt a függvényt, amely az előzőek alapján az E érintési pontokból áll. Ha ismerjük a szakasz esetében a hozzá tartozó E pont koordinátáit, akkor kész is vagyunk! Igen ám, de hol van az E pont egy konkrét $\overline{AB}$ szakaszon?



3. ábra

Erre *Puppi Barnának* volt egy remek ötlete: nézzük meg azokat az E pontokat a szakaszokon, amelyekre $d(AE) : d(EB) = a : (1 - a)$. (A roppant hasznos $a \in [0; 1]$ paraméter itt a $d(OB)$ távolságot jelöli.)

Mivel $B(a; 0)$ és $A(0; 1 - a)$, ebből eléggé egyszerűen kijön, hogy az E pont koordinátái $(a^2; (1 - a)^2)$. Nekünk azonban egy $E(x; f(x))$ kapcsolatra van szükségünk a görbéhez, ahol $x \in [0; 1]$. Nosza, legyen $x = a^2$! Ekkor $a = \sqrt{x}$ (mivel $a \in [0; 1]$, így az is teljesül, hogy $x \in [0; 1]$), és így

$$f : [0; 1] \to \mathbb{R}, f(x) = \left(1 - \sqrt{x}\right)^2.$$

Hogyan igazoljuk, hogy tényleg ez a jó görbe?

Szerencsére nemrég tanultunk meg deriválni, aminek segítségével felírhatjuk az érintők egyenletét! Fordítsuk meg a dolgot: bizonyítsuk úgy a függvény „jóságát”, hogy érintői a tengelyeket a megfelelő A és B pontokban metszik. (A vízszintes, függőleges szélső helyzetektől eltekintünk.)

Lépkedjünk a fent kijelölt úton, írjuk fel az $E(x_0; y_0)$ pontban a függvénygörbe érintőjét $y = mx + b$ alakban, ahol $x_0 \in \,]0;1[$.

i) A helyettesítési érték: $y_0 = f(x_0) = \left(1 - x_0^{\frac{1}{2}}\right)^2$.

ii) A meredekség: $m = f'(x_0) = 2\left(1 - x_0^{\frac{1}{2}}\right)\left(-\frac{1}{2}x_0^{-\frac{1}{2}}\right) = -\left(1 - x_0^{\frac{1}{2}}\right)x_0^{-\frac{1}{2}}$.

iii) Az érintő egyenletébe behelyettesítve x_0, y_0 és m értékét, majd átrendezve megkapjuk b értékét:

$$\begin{aligned}\left(1 - x_0^{\frac{1}{2}}\right)^2 &= -\left(1 - x_0^{\frac{1}{2}}\right)x_0^{-\frac{1}{2}}x_0 + b,\\ \left(1 - x_0^{\frac{1}{2}}\right)^2 &= -\left(1 - x_0^{\frac{1}{2}}\right)x_0^{\frac{1}{2}} + b,\\ b &= 1 - x_0^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Innen az x_0-beli érintő egyenlete

$$y = -\left(1 - x_0^{\frac{1}{2}}\right)x_0^{-\frac{1}{2}}x + 1 - x_0^{\frac{1}{2}}.$$

Meg kell vallanunk őszintén, ebből mi sem láttunk sokat elsőre. Jó ez? Azonban visszagondolva, hogyan írtuk fel osztópontként az E-t, kétkedő arcunk mosolygóra derül. Ugyanis $x_0 = a^2$ helyettesítéssel az egyenlet

$$y = -\frac{1-a}{a}x + 1 - a$$

alakot ölt, amelynek tengelymetszeteire az $x = 0$, illetve $y = 0$ behelyettesítésekkel $y = 1 - a$ és $x = a$ adódik, vagyis $A(0; 1-a)$ és $B(a; 0)$. Kiderült tehát, hogy az $\overline{AB}$ szakaszok megsejtett arányú osztópontjukban valóban érintik a függvényünk görbéjét.

Egy régi klasszikus új köntösben (F3.)

A krónikásnak ezen a ponton őszintén be kell vallania, hogy elhallgatott egy fontos tényt. Ugyanis rögtön az elején eszünkbe jutott az a klasszikus feladat, amikor egy létra csúszik le a tengelyek mentén.[2] Feltettük a kérdést:

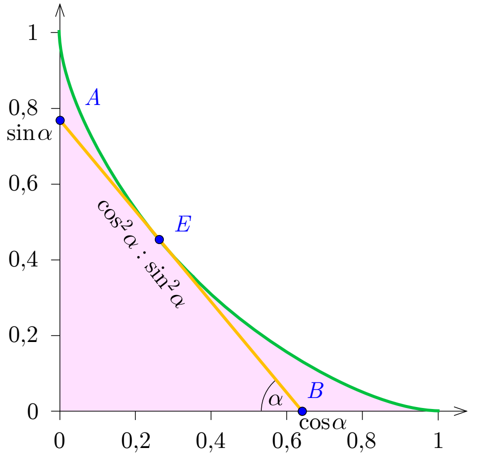
F3. Legyen A az y tengely, B az x tengely egy-egy olyan pontja, amelyeknek y, illetve x koordinátája nem negatív, és amelyekre $d(AB) = 1$. Milyen függvény írja le az $\overline{AB}$ szakaszok által lefedett síkidom 1. síknegyedbe eső határát?

[2]A feladatnak számos formája ismeretes. Létezik matematikai, de létezik fizikai példa formájában is. Az előbbinek egy lehetséges változata így hangzik: Egy függőleges falnak támasztott egyágú („támasztó”) létra csúszik le úgy, hogy közben az egyik vége folyamatosan hozzáér a falhoz, a másik vége pedig a vízszintes padlóhoz. Milyen pályát ír le a létra középpontja, míg a létra a függőleges helyzetből a padlón fekvő helyzetbe kerül? (Csúszás közben a létra minden pontja olyan síkban mozog, amely a falra és a padlóra is merőleges.)

Először nem láttuk, hogyan lehetne megfogni a feladatot. A számítógépes vizsgálatok alapján az biztosnak látszott, hogy nem parabolával van dolgunk. De akkor mivel? A fényt az alagút végén az *érintési pont osztópontként való felírása* jelentette. Ha ki tudnánk találni az osztási arányt, ahogy az érintési pontok osztják a szakaszokat, akkor…

Megoldás. A korábban is használt $a \in [0;1]$ paraméterünkkel felírva az $\overline{AB}$ szakasz végpontjait $A(0;\sqrt{1-a^2})$ és $B(a;0)$. Sokat számolgattunk, majd ismét Barnától jött az ötlet, hogy próbálkozzunk szögfüggvényekkel felírni az adatokat. Ha már úgyis egység hosszúságú a szakasz, akkor a szakasz és az x tengely által bezárt szöget α-val jelölve végpontjai $A(0;\sin\alpha)$ és $B(\cos\alpha;0)$, ahol $\alpha \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. Mennyivel szebb!

Ez idáig rendben van, azonban mi lehet az arány? Az **F2.** megoldásában az osztópont által létrehozott szakaszok hosszának arányára az teljesült, hogy $a+(1-a)=1$. Tudjuk, hogy $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$. Innen támadt az az ötletünk, hogy hátha a szakaszok $\sin^2\alpha : \cos^2\alpha$ arányú osztópontja épp az érintési pont!



4. ábra

Az osztópont koordinátáira $E(\cos^3\alpha;\sin^3\alpha)$ adódik, amit $E(x;f(x))$ alakra szeretnénk hozni. Szerencsére $\alpha \in [0;\pi/2]$, ezért $\sin\alpha$ és $\cos\alpha$ is nemnegatív, így a következő átalakítások egyértelműen elvégezhetőek. Mivel $x=\cos^3\alpha$, innen $x^{\frac{2}{3}} = \cos^2\alpha$, majd $1-x^{\frac{2}{3}}=\sin^2\alpha$. Most „varázsoljunk” a szinusz kitevőjébe 3-at: $\left(1-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}=\sin^3\alpha$. A keresett függvény

$$f\colon [0;1]\to\mathbb{R},\, f(x)=\left(1-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Egy pillanatra gondoljunk vissza az **F2.** megoldása során megtalált függvényünkre, ami az $f(x)=\left(1-x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{1}}$ volt. Ez sem lehet véletlen, de ezt majd az általános esetet vizsgálva nézzük meg részletesebben.

Az **F2.** megoldásához hasonlóan ellenőrizzük, hogy a kapott függvény érintői I. síknegyedbe eső szakaszainak végpontjai $x_0 \in]0;1[$ esetén éppen a keresett A és B pontok (a függőleges és vízszintes érintők esetében az arányban 0 is szerepelne, így ezeket a szélső helyzeteket nem vizsgáljuk). Legyen $x_0 \in]0;1[$ tetszőleges, ekkor $y_0 = f(x_0) = \left(1 - x_0^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$. A meredekség:

$$m = f'(x_0) = \frac{3}{2}\left(1 - x_0^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(-\frac{2}{3}x_0^{-\frac{1}{3}}\right) = -\left(1 - x_0^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} x_0^{-\frac{1}{3}}.$$

Fentieket az érintő $y = mx + b$ egyenletébe helyettesítve

$$\left(1 - x_0^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} = -\left(1 - x_0^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} x_0^{-\frac{1}{3}} x_0 + b,$$
$$\left(1 - x_0^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} = -\left(1 - x_0^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} x_0^{\frac{2}{3}} + b,$$
$$b = \left(1 - x_0^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

A függvény érintőjének egyenlete valamely $x_0 \in]0;1[$ pontban

$$y = -\left(1 - x_0^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} x_0^{-\frac{1}{3}} x + \left(1 - x_0^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ez a forma ismét nem mond sokat, de ha visszaírjuk $x_0 = \cos^3\alpha$ értékét, akkor a sokkal szimpatikusabb

$$y = -\operatorname{tg}\alpha\; x + \sin\alpha$$

alakká válik. Ennek tengelymetszeteit könnyen meghatározzuk: $y = \sin\alpha$ (ha $x = 0$) és $x = \cos\alpha$ (ha $y = 0$), ami igazolja, hogy valóban ez a függvény határolja felülről a súrolt területet.

Az, hogy a görbe minden pontja hozzátartozik a síkidom első negyedbe eső határához – vagyis hogy a görbe minden pontja egy alkalmasan választott szakasz (érintési) pontja – most is nyilvánvaló, tehát a függvény megfelelő darabja valóban a határoló görbe.

Az általános feladat (F4.)

Tekintsünk vissza eredményeinkre: **F2.**-ben az $f(x) = \left(1 - x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{1}}$ függvényt, **F3.**-ban az $f(x) = \left(1 - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$ függvényt kaptuk, mindkettő a $[0;1]$ intervallumon értelmezett. Adja magát a gondolat, hogy fordítsuk meg a problémát, és induljunk ki az általánosított függvényből, majd nézzük meg, hogy meg tudunk-e fogalmazni valami szabályt a szakasz végpontjaira (az érintők tengelymetszeteire) és az érintési pont ezen szakaszon való elhelyezkedésére.

F4. Legyen $f\colon [0;1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \left(1 - x^{\frac{n}{n+1}}\right)^{\frac{n+1}{n}}$. Adjuk meg a függvény egy tetszőleges $x_0 \in]0;1[$ ponthoz tartozó érintőjének és a koordinátatengelyeknek A és

B metszéspontjait, valamint azt, hogy az érintési pontok milyen arányban osztják az $\overline{AB}$ szakaszt.

Megoldás. Az érintők egyenletét a szokásos módon határozzuk meg. Legyen $x_0 \in \,]0;1[$ tetszőleges pont. Ekkor $y_0 = f(x_0) = \left(1 - x_0^{\frac{n}{n+1}}\right)^{\frac{n+1}{n}}$ és

$$m = f'(x_0) = \frac{n+1}{n}\left(1 - x_0^{\frac{n}{n+1}}\right)^{\frac{1}{n}} \cdot \left(-\frac{n}{n+1} x_0^{-\frac{1}{n+1}}\right) = -\left(1 - x_0^{\frac{n}{n+1}}\right)^{\frac{1}{n}} x_0^{-\frac{1}{n+1}}.$$

Behelyettesítve az egyenes egyenletébe megkapjuk b értékét:

$$\left(1 - x_0^{\frac{n}{n+1}}\right)^{\frac{n+1}{n}} = -\left(1 - x_0^{\frac{n}{n+1}}\right)^{\frac{1}{n}} x_0^{-\frac{1}{n+1}} x_0 + b,$$
$$b = \left(1 - x_0^{\frac{n}{n+1}}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Így az x_0-ban húzott érintő egyenlete

$$y = -\left(1 - x_0^{\frac{n}{n+1}}\right)^{\frac{1}{n}} x_0^{-\frac{1}{n+1}} x + \left(1 - x_0^{\frac{n}{n+1}}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Ez ismét túl bonyolult, keressünk egy alkalmas helyettesítést: ha

(3) $$x_0 = a^{n+1},$$

akkor a fenti egyenlet

(4) $$y = -\frac{(1-a^n)^{\frac{1}{n}}}{a} x + (1-a^n)^{\frac{1}{n}}$$

alakúvá válik. Ennek tengelymetszetei $y = (1-a^n)^{\frac{1}{n}}$ (ha $x = 0$) és $x = a$ (ha $y = 0$), amiből adódnak a „lecsúszó” $\overline{AB}$ szakasz végpontjainak koordinátái:

(5) $$A\left(0; (1-a^n)^{\frac{1}{n}}\right), B\,(a; 0)\,,$$

és az $E(x; f(x))$ érintési pont, ami egyben $\overline{AB}$ osztópontja is:

(6) $$E\left(a^{n+1}; (1-a^n)^{\frac{n+1}{n}}\right).$$

Az A, B és E pontok x koordinátái alapján

$$\frac{d(AE)}{d(EB)} = \frac{a^{n+1} - 0}{a - a^{n+1}} = \frac{a^n}{1-a^n},$$

tehát az $\overline{AB}$ szakaszt E az

(7) $$a^n : (1-a^n)$$

arányban osztja. A (3)–(7) pontokba való $n = 1$ és $n = 2$ helyettesítéssel visszakapjuk az **F2.** és az **F3.** feladatok megoldásait, ami jelzi, hogy ezen feladatok egy problémacsaládba tartoznak.

Összefoglalás, előretekintés és köszönetnyilvánítás

Eredményeinket egy tételben is megfogalmazhatjuk.

Tétel. Ha a koordináta-rendszer nemnegatív részein tekintjük azokat az $\overline{AB}$ szakaszokat, ahol $B(a;0)$ és $A\left(0;(1-a^n)^{\frac{1}{n}}\right)$ (valamely $a\in[0;1]$ esetén), akkor a szakaszok által lefedett síkidom határoló görbéjének első síknegyed belsejébe eső darabja az

$$f\colon\ ]0;1[\ \to\mathbb{R},\ f(x)=\left(1-x^{\frac{n}{n+1}}\right)^{\frac{n+1}{n}}$$

függvény görbéje, továbbá az $\overline{AB}$ szakaszokat az f görbéjével vett E érintési pontjaik $a^n:(1-a^n)$ arányban osztják.

A klasszikus létrás feladat alapján érdemes lehet megvizsgálni a fenti szakaszcsalád speciális pontjai által leírt görbéket (ott a felezőpontok negyedkört írnak le). Mi a helyzet az **F1.** feladatban? Tudunk-e adni általános leírást, ami minden esetet magában foglal felezőpontokra, vagy akár tetszőleges osztópontokra?

Végül szeretnénk köszönetet mondani a 11. A osztály többi szakkörösének is, akik segítették a problémán való közös gondolkodásunkat: *Ligeti Blankának*, *Gelencsér Jankának*, *Tilesch Júliának*, *Biró Simon Budának*, *Pap Attila Bálintnak* és *Varga Dánielnek*.

Kiss Adorján Timon, **Puppi Barna**, **Trembeczki Csaba**
Kaposvári Táncsics Mihály Gimnázium

Matek az utcán
a matematika világnapja (π-nap) alkalmából

Március 14., a nemzetközi π-nap (ejtsd: pí-nap; $\pi\approx 3{,}14$), a Matematika Világnapja. Ennek alkalmából a Bolyai János Matematikai Társulat idén is megszervezte a Matek az utcán eseménysorozatot. A cél a matematikát közelebb vinni az utca emberéhez. A Társulat kezdeményezésére több mint negyven önkéntessel, több száz ember bevonásával valósultak meg matematikát népszerűsítő utcai programok. A nemzetközi kezdeményezést követve Magyarországon immár a második évben szervezett esemény védnöke az UNESCO Magyar Nemzeti Bizottság volt. A Társulat kezdeményezéséhez saját programokkal kapcsolódtak további szervezők. Így idén két budapesti és öt vidéki helyszínen voltak rendezvények március 14-én, illetve március 16-án.

Szigetmonostoron, Baján, Pusztamérgesen és Nyíregyházán a π-napon, március 14-én helyi iskolások részvételével zajlott a „π-ünnep". Szigetmonostoron Szalay Péter szobrászművész a matematika által inspirált absztrakt szobrairól mesélt.

A gyerekek megnézhették, megfoghatták a szobrokat, a szervezők szerint sok érdekes kérdést tettek fel. Bata Tibor saját matek aha-élményeit osztotta meg alsó tagozatos diákokkal, Mészáros László villamosmérnök pedig a GPS-ről és az űrhajózásról mesélt érdekes dolgokat, valamint a Róka nevű repülőről, amivel átélhető a súlytalanság. A gyerekek kipróbálhatták a hipocikloisrajzolót is.

A hívószó

Baján az érdeklődő diákok matematikai fejtörőket oldottak meg, a Szent Ágoston Katolikus Általános Iskola Pusztamérgesi telephelyén pedig egy előadás keretében a π számjegyeiből írott zenére jelenítették meg a π számjegyeit annyi tizedesjegyig, ahány diák részt vett a programban (46). A Nyíregyházi Egyetem Matematika és Informatika Intézete középiskolásoknak szóló játékos feladatokkal, érdekes feladványokkal, matematikai témájú versennyel ünnepelt.

Március 16-án Budapesten a Blaha Lujza tér volt a rendezvény központi helyszíne, ahol 10 és 13 óra között több mint száz járókelőt vontak be különböző matematikai tevékenységekbe.

Az érdeklődők felfedezhették a térkövön megjelenített Pascal-háromszög tulajdonságait a képzési szabályától kezdve, a Fibonacci sorozattal való kapcsolatán át, egészen a fraktálokat eredményező prímmaradékosztály színezésekig.

Pascal (háromszögek) a „Blahán”

Sierpinski fraktál térben, a téren

Gál Péter számos ördöglakattal állított kihívást a megoldásukra vállalkozók elé, akik megjegyezték, hogy szívesen játszanának ilyeneket az iskolában is. Pálffy László játékfejlesztő matematikus valószínűségi játékok játszása közben hallotta a résztvevőktől a következő tanulságokat: „a dobókockának nincs emlékezete”, „csak az nyer, aki játszik”, „eddig szinte minden kérdésemre választ adott a statisztika” és „mindig is szerettem a matematikát, most hajléktalan vagyok ugyan, de a matekot még mindig szeretem”.

Ördöglakathegyek a „Blahán”

Futó Péter a „Micimackó és a Pí” című, saját átírású dalt adta elő Illés György gitárkíséretével, közös éneklésre invitálva a járókelőket. Huszti Melinda divat- és textiltervező iparművésszel matematikai témájú alkotásokat lehetett készíteni.

ELTE-s és BME-s egyetemi hallgatók Medve Matek önkéntesekkel kiegészülve térkőre rajzolt labirintust, logikai játékokat, csillagászati kérdéseket és 3D nyomtatott fraktálokat hoztak.

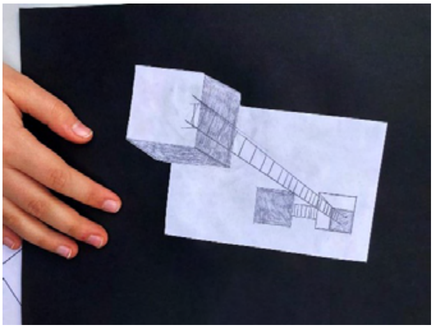
A téren Poliuniverzum játékkal játszhattak kicsik és nagyok, de Einstein-csempe és más tesszalációk (hézag nélküli síkkitöltések) is várták őket.

A színes Poliuniverzumban kalandozva

A közönség nagyon sokszínű volt, beszállt a játékba éppen arra járó külföldi turista épp úgy, mint a hátrányos helyzetű családból származó kislány, aki anyukájával véletlenül tévedt arra egy közeli józsefvárosi utcából. De volt olyan is, aki Fejér megyéből utazott Budapestre matematika tanár édesapjával, hogy részt vegyen a programon. Az óvodásoknak is élvezetes feladatoktól kezdve egészen az egyetemi matematikáig mindenki találhatott számára megfelelő szintű érdekességet.

A rendezvény sikerét mutatja, hogy olyan résztvevő is volt, aki tavaly még éppen arra sétálva véletlenül talált rá a programra, de idén már tudatosan jött, egész családjával együtt. Az önkéntesek számára az jelentette az egyik legnagyobb örömet, amikor azok, akik először tartózkodóbbak voltak a matematika hallatán, végül sikerélményekkel és széles mosollyal távoztak.

Lyuk a falon



Síkból térbe

A programhoz csatlakozott a Vasarely Múzeum is. Így Budapesten a Szentlélek téren az érdeklődők megismerhették, hogyan tervezte meg Vasarely azokat a képeit, amelyek látszólag kiugranak a papír felületéből, vagy épp belesüllyednek, majd bárki megtervezhette a saját, a földben vagy a falon egy lyukat ábrázoló kollázsát.

Szegeden a Széchenyi téren Kávássyné Molnár Emese tanárnőtől és diákjaitól lehetett megtanulni, hogyan kell szorobánnal összeadni-kivonni, és arra is mutattak példát, hogy hogyan lehet a teret hézagmentesen kitölteni. De Hanoi tornyaival vagy a Poliuniverzum kirakásával is megismerkedhetett az, aki arra járt.

Citera? Nem. Szorobán!

Hanoi és egyéb tornyok

A tapasztalatok és a visszajelzések minden helyszínen hasonlóak voltak. A járókelők örömmel vettek és vennének részt hasonló eseményeken, az önkéntesek pedig már lelkesen készülnek újabb ötletekkel a jövő évi Matek az utcán programokra.

További információért vegye fel velünk a kapcsolatot: *Bolyai János Matematikai Társulat* – `www.bolyai.hu` – `appx.bolyai@gmail.com`.

Barbarics Márta

Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire

I. rész

Azoknak, akik még áprilisban beküldik a megoldásukat, május 5-ig kijavítva visszaküldjük azt.

1. *a)* Adott az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = p(x^2 - 6x - 7)$ függvény. A zérushelyek kiszámítása nélkül határozzuk meg a p nemnulla valós szám értékét, ha tudjuk, hogy az f függvény maximumértéke 4. *(6 pont)*

b) Oldjuk meg a valós számok halmazán a $7\sin^2 x - 9\cos^2 x = -1$ egyenletet. *(7 pont)*

2. Egy piacon a tojást 12 db-os csomagolásban árulják. Egy-egy tojás tömege 5 dkg $\pm$1,5 g. Egy ellenőrzés során véletlenszerűen kiválasztanak egy csomagot, és a csomagban szereplő tojások tömegét méréssel ellenőrzik. Csak akkor engedélyezik az árusítást, ha egyik tojás tömege sem kisebb, mint 4 dkg 8,5 g, és a tizenkét mérési adat 5 dkg-tól mért átlagos abszolút eltérése nem haladja meg a 0,75 g-ot. A mérések eredménye a következő:

mérés sorszáma	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.
mért tömeg (g)	50	51	50,4	50,6	51,1	49	50	50,1	50,4	51,3	50	50

a) Az eredmények alapján engedélyezik-e a tojások árusítását? *(4 pont)*

b) Határozzuk meg a tizenkét mérési eredmény átlagát és szórását. *(3 pont)*

c) Ábrázoljuk az adatokat sodrófa-diagramon. *(3 pont)*

d) Minden tojás a többitől függetlenül 2% valószínűséggel záp. Ha veszünk öt tojást, hány százalék annak a valószínűsége, hogy azok között pontosan egy záp lesz? *(3 pont)*

3. *a)* Mekkorák lehetnek annak a derékszögű háromszögnek a befogói, amelynek a területe 60 cm^2, az átfogója pedig 17 cm hosszúságú? *(6 pont)*

b) Egy a élhosszúságú kocka minden csúcsa köré egy $\frac{a}{2}$ sugarú gömböt írunk, majd a kocka belsejében megszerkesztünk egy, a nyolc gömböt érintő kilencedik gömböt. Az eredeti kocka térfogatának hány százaléka nem került egyetlen gömbbe sem? *(7 pont)*

4. Hat számot leírtunk egy lapra monoton csökkenő vagy monoton növekvő sorrendben. A hat szám közül az első három szám egy mértani sorozatot alkot, míg az utolsó öt szám egy számtani sorozat egymást követő öt tagja. Az utolsó öt szám összege 90, a második és hatodik szám szorzata pedig 180. Melyik ez a hat szám? *(12 pont)*

II. rész

5. Egy matematikavizsgán 5 tétel a gondolkodási módszerek, halmazok, logika, kombinatorika, gráfok témakörhöz tartozik. A számelmélet, algebra témakörhöz 4, a függvények, analízis témakörhöz szintén 4, a geometria, trigonometria, koordinátageometria témakörhöz 10, míg a valószínűségszámítás, statisztika témakörhöz 2 tétel van.

a) Hányféleképpen számozhatjuk meg a témaköröket, ha azt szeretnénk, hogy az egy témakörben szereplő tételek egymás mellé kerüljenek? *(5 pont)*

Bence fizikából is vizsgázik, ahol összesen 24 tétel van. Bence elhatározza, hogy az első nap 4-4 tételt tanul meg az egyes tárgyakból. A tételeket aznap úgy állítja össze, hogy a matematika és a fizika tételek felváltva kövessék egymást.

b) Számítsuk ki, hányféleképpen állíthatja össze Bence az első napra szóló tanulási programját. *(5 pont)*

Bence nagyon babonás, és hisz abban, hogy attól függ, mennyire lesz szerencsés, hogy aznap mekkora a két kedvenc szabályos dobókockájával dobott számok összege. Ha az összeg 5-nél kisebb, akkor semmi esélye, hogy jó tételt húzzon ki, ha legalább 5, de legfeljebb 10, akkor 50% valószínűséggel, egyéb esetben 80% valószínűséggel húz jó tételt.

c) Mennyi annak a valószínűsége, hogy ha igaz Bence babonája, akkor Bence rossz tételt húz? *(6 pont)*

6. Legyen az f és a g az alábbi két hozzárendelési szabállyal, a valós számok halmazán értelmezett függvény: $f(x)=2(x+1)^2+1$, $g(x)=|(x+1)^2-4|$.

a) Ábrázoljuk mindkét függvény grafikonját ugyanabban a koordinátarendszerben. Adjuk meg a két grafikon metszéspontjait. *(8 pont)*

b) Számítsuk ki az f és a $h\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h(x)=-(x+1)^2+4$ függvény grafikonjai által közrefogott zárt síkidom területét. *(8 pont)*

7. Egy évfolyam minden tanulójának legalább két eszköze van az alábbi három eszköz közül: laptop, okostelefon, tablet. Tudjuk, hogy erre az évfolyamra összesen 56-an járnak, és okostelefonja 37 diáknak van. Telefonja is és tabletje is 26 diáknak van, míg tabletje is és laptopja is 4-gyel kevesebb diáknak van, mint ahánynak telefonja.

a) Hány diáknak van mindhárom eszköze, és hány diáknak nincs tabletje? *(7 pont)*

Az egyik végzős tanuló, Kriszti, a tizedikesek közül 54 embert ismer. Kriszti tizedikes ismerőseinek mindegyike Kriszti többi, ugyanerre az évfolyamra járó ismerőse közül pontosan hármat nem ismer.

b) A fent említett 55 ember között összesen hány ismeretség áll fenn? (Az ismeretségek kölcsönösek.) *(5 pont)*

c) Határozzuk meg az alábbi állítások logikai értékét.

A: Egy 8-pontú teljes gráf éleinek száma 36.

B: Ha egy teljes gráfnak páratlan számú éle van, akkor a pontok száma is páratlan.

C: Ha egy 49-pontú gráfban nincs kör, akkor legfeljebb 48 éle lehet.

D: Nincs olyan 9-pontú gráf, amelyben a fokszámok összege 21. *(4 pont)*

8. Adott a $k\colon (x-5)^2+(y+1)^2=37$ egyenletű kör és az $e\colon 2x-5y=b$ egyenes.

a) Írjuk fel a k kör $P(11;-2)$ pontjában húzott érintőjének egyenletét. *(5 pont)*

b) Határozzuk meg az e egyenes egyenletében a b valós paramétert úgy, hogy az e egyenesnek és a k körnek ne legyen közös pontja. *(11 pont)*

9. *a)* Egy téglatest élei x, $\dfrac{13x+5}{18}$, $\dfrac{16x-5}{21}$ cm hosszúságúak. Bizonyítsuk be, hogy nem lehet mindhárom élhossz egész szám. *(5 pont)*

b) Tekintsük az első 600 darab pozitív páratlan számot. Hány olyan szám van közöttük, amelyek a 21-hez relatív prím? *(5 pont)*

A 108-nak és az n pozitív egész számnak a legkisebb közös többszöröse 108 108.

c) Határozzuk meg az n lehetséges értékeinek számát, és adjuk meg az n legkisebb lehetséges értékét. *(6 pont)*

Róka Bálint
Budapest

Megoldásvázlatok a 2024./3. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához

I. rész

1. *Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán. A b) egyenletnél a megoldás(oka)t $x = \log_a b$ alakban adjuk meg.*

a) $\sqrt{x^3+64} = x+8$ (6 pont)

b) $\log_2 3 \cdot x^2 - \frac{5}{2}x + \log_3 2 = 0.$ (5 pont)

Megoldás. *a)* A feladat értelmezési tartománya: $x^3+64 \geq 0$, amiből $x \geq -4$ adódik, ekkor a jobb oldal értéke pozitív. Mindkét oldalt négyzetre emelve a következő egyenlethez jutunk:

$$x^3+64 = x^2+16x+64.$$

Az egyenlet nullára rendezett alakja: $x^3-x^2-16x=0$. Az egyenlet bal oldalát szorzattá alakítjuk: $x(x^2-x-16)=0$. Egy szorzat értéke akkor és csak akkor egyenlő nullával, ha valamelyik tényezőjének az értéke nulla, így két esetet kell megvizsgálnunk. Az első esetben az $x_1=0$ értéket kapjuk, míg a második esetben az $x^2-x-16=0$ egyenlethez jutunk, amelynek gyökei: $x_2 = \frac{1+\sqrt{65}}{2}$, valamint $x_3 = \frac{1-\sqrt{65}}{2}$. Az átalakítások során gyököt nem vesztettünk, és ellenőrzéssel megállapítható, hogy az egyenletnek mindhárom megoldás gyöke.

b) Az egyenlet x-re nézve másodfokú, így a megoldóképletet alkalmazva:

$$x_{1,2} = \frac{\frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{5}{2}\right)^2 - 4\cdot\log_2 3\cdot\log_3 2}}{2\cdot\log_2 3} = \frac{\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}}}{\log_2 3^2} = \frac{\frac{5}{2} \pm \frac{3}{2}}{\log_2 9}.$$

Innen: $x_1 = \frac{4}{\log_2 9} = \frac{\log_2 16}{\log_2 9} = \log_9 16 (= \log_3 4)$, továbbá $x_2 = \frac{1}{\log_2 9} = \log_9 2.$

2. *a) Az a_n számtani sorozat első három tagjának összege 21, szorzata pedig 280. Adjuk meg az összes ilyen sorozat első tagját és differenciáját.* (6 pont)

Legyen a b_n egy olyan számsorozat, amely szigorúan monoton növekvő és amelynek első három tagja egy-egy pozitív prímszám. Ha az első taghoz 2-t, a második taghoz 1-et hozzáadunk, míg a harmadik tagból 1-et elveszünk, akkor egy c_n számtani sorozat első három tagját kapjuk meg, amelyekre teljesül, hogy összegük 24.

b) Határozzuk meg a b_n sorozat első három tagját. (5 pont)

Megoldás. *a)* $a_1+a_2+a_3 = a_1+a_1+d+a_1+2d = 3a_1+3d = 21$, amiből $a_1+d = a_2 = 7$. A feladat szövege alapján:

$$a_1\cdot a_2\cdot a_3 = (7-d)\cdot 7\cdot(7+d) = 280.$$

A zárójelek felbontása és rendezés után adódik: $d^2=9$, amiből $d=\pm 3$.

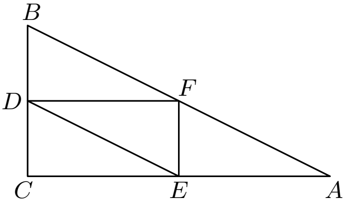
Ha $d = 3$, akkor $a_1 = 4$. Ha pedig $d = -3$, akkor $a_1 = 10$.

b) A feladat szövege alapján: $c_1 = b_1 + 2$, $c_2 = b_2 + 1$, $c_3 = b_3 - 1$. Mivel $c_1 + c_2 + c_3 = 24$, ezért $b_1 + 2 + b_2 + 1 + b_3 - 1 = 24$, amiből $b_1 + b_2 + b_3 = 22$. Három pozitív prímszám összege csak akkor lehet 22, ha az egyik a 2, tehát $b_1 = 2$, és így $c_1 = 4$. Mivel $c_1 + c_2 + c_3 = 3 \cdot c_2 = 24$, így $c_2 = 8$, ezért $c_3 = 12$. Tehát a b_n sorozat első három tagja a 2, a 7 és a 13.

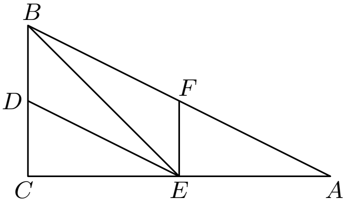
3. *Adott az ABC derékszögű háromszög. Tudjuk, hogy az átfogóhoz tartozó magasság hossza $\sqrt{2023}$ cm, valamint hogy ez a magasság az átfogót két olyan részre osztja, amelyek hossza cm-ben mérve egész szám.*

a) Mekkora lehet a háromszög köré írható körnek a sugara? (5 pont)

A legkisebb átfogójú háromszög oldalfelező pontjait jelöljük D, E és F-fel az alábbi ábrákon látható módon. Anna és Bea is lerajzolt egy-egy egymással egybevágó



1. ábra



2. ábra

*derékszögű de nem egyenlő szárú ABC háromszöget. Anna megrajzolta az ABC háromszöge három középvonalát, míg Bea összekötötte az AC oldal felezőpontját a CB és az AB oldal felezőpontjaival, valamint a B csúccsal. Így mindketten négy kisebb háromszöget kaptak (*1. *és* 2. ábra*).*

b) Bizonyítsuk be, hogy mind a nyolc kis háromszög területe egyenlő. (4 pont)

A lányok kiszínezik a kisebb háromszögeket. Három színes ceruza van náluk: egy sárga, egy piros és egy kék. Azt a szabályt találják ki, hogy derékszögű háromszöget csak pirossal vagy kékkel színezhetnek ki, illetve hogy két, közös oldallal rendelkező háromszög nem lehet ugyanolyan színű.

c) Hányféleképpen lehet kiszínezni a nyolc darab háromszöget a szabályok betartásával? (5 pont)

Megoldás. *a)* Jelöljük m_c-vel az átfogóhoz tartozó magasság hosszát, a befogók átfogóra eső merőleges vetületeit pedig p-vel és q-val. A magasságtételt felhasználva: ${m_c}^2 = p \cdot q$, vagyis $\sqrt{2023}^2 = p \cdot q$, tehát $2023 = p \cdot q$. Mivel $p;\ q \in \mathbb{Z}^+$, továbbá $2023 = 17^2 \cdot 7$, ezért a lehetséges számpárok (p és q szerepe felcserélhető):

p (mm)	1	7	17
q (mm)	2023	289	119

A Thalész-tétel megfordítása miatt a háromszög köré írható körének a sugara az átfogó fele. A lehetséges értékek így: $R_1 = \dfrac{1 + 2023}{2} = 1012$ mm, $R_2 = \dfrac{7 + 289}{2} = 148$ mm, $R_3 = \dfrac{17 + 119}{2} = 68$ mm.

b) Mivel a középvonal hossza fele a vele párhuzamos oldal hosszának és oldalfelező pontokat köt össze, így az *1. ábrában* mind a négy háromszög oldalainak hosszai páronként megegyeznek, vagyis egybevágóak, tehát a területük is megegyezik. A *2. ábrán* a BE az ABC, a DE a BCE, valamint az EF az ABE háromszög súlyvonala. Mivel a súlyvonal felezi a háromszög területét, így négy egyenlő területű háromszöget kaptunk. Tekintve, hogy a két eredeti háromszög egybevágó volt, így a negyedakkora területek egyenlőek.

c) Az *1. ábrában* mind a négy háromszög derékszögű, hiszen ezek hasonlóak az eredeti, ABC háromszöghöz. A színezés csak úgy kivitelezhető, hogy a DEF háromszög színe eltér a többi háromszögétől. (Mivel a többi háromszög nem érintkezik egymással, ezért ennyi feltétel elegendő is a jó színezéshez.) Ez összesen $2\cdot 1\cdot 1\cdot 1=$ $=2$-féleképpen oldható meg.

A *2. ábrában* a négy kis háromszög a következőképpen színezhető ki. A háromszögek sorban szomszédosak (EDC, EBD, EFB, EAF), a két szélső nem lehet sárga, mert derékszögűek. Mindkét középső háromszög nem lehet sárga. Ha egyik középső sem sárga, akkor kétféle színezés lehet (piros, kék, piros, kék, illetve kék, piros, kék, piros; 2 eset), ha valamelyik sárga (2 eset), akkor az a vele szomszédosoknak két-kétféle színezését engedi, a negyedik háromszög színe egyértelműen meghatározott ($2\cdot 2\cdot 1=4$ eset). Összesen $2+2\cdot 4=10$ eset van.

Mivel bárhogy színezték ki az első háromszöget, ahhoz a második háromszög 10-féle színezése tartozhat, ezért $2\cdot 10=20$-féleképpen lehet kiszínezni a nyolc háromszöget a szabályoknak megfelelően.

4. *Elizabet egy dobozba tett hat darab számkártyát, amelyek a következők:* -1*;* 1*;* 3*;* -2*;* 2*;* 4.

a) Határozzuk meg a dobozban található számkártyák értékének mediánját és szórását. (3 pont)

b) A dobozban található számkártyák közül véletlenszerűen kiválasztunk kettőt. Mekkora annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott számkártyák összegének abszolút értéke legfeljebb 2*?* (3 pont)

c) Egy négyszög oldalai pozitív körüljárás szerint sorban a, b, c és d. A négy oldal hosszát úgy kaptuk, hogy az 1*,* 2*,* 3*,* 4 *számkártyák közül, visszatevés nélkül véletlenszerűen húztunk, és az első érték az a oldal hossza lett cm-ben, a második érték a b oldal hossza, a harmadik a c oldalé, míg a negyedik a d oldalé. Mekkora annak a valószínűsége, hogy a kapott négyszögnek van beírható köre?* (4 pont)

d) Elizabet a dobozba tett egy hetedik számkártyát is, amelynek értékét jelöljük k-val. Határozzuk meg k értékétől függően a dobozban található számkártyák értékeinek felső kvartilisét. (5 pont)

Megoldás. *a)* A dobozban található számkártyákat növekvő sorrendbe rendezve: -2; -1; 1; 2; 3; 4. A medián: $\dfrac{1+2}{2}=1{,}5$.

Az adatsokaság átlaga: $\dfrac{(-2)+(-1)+1+2+3+4}{6}=\dfrac{7}{6}$.

Az átlagtól való eltérések négyzetösszege:

$$\left(\frac{7}{6}+2\right)^2+\left(\frac{7}{6}+1\right)^2+\left(\frac{7}{6}-1\right)^2+\left(\frac{7}{6}-2\right)^2+\left(\frac{7}{6}-3\right)^2+\left(\frac{7}{6}-4\right)^2=\frac{161}{6},$$

ezért a szórás: $\sqrt{\dfrac{\frac{161}{6}}{6}} \approx 2{,}11$.

b) A kedvező esetek száma 7. Összesen $\binom{6}{2}=15$ eset van, tehát a keresett valószínűség: $p=\dfrac{7}{15}$.

c) Egy konvex négyszögnek akkor van beírható köre, ha érintőnégyszög, tehát ha a szemközti oldalai hosszának összege egyenlő, ezért az 1 cm-es oldallal szemben a 4 cm-es oldal kell hogy legyen. Az ilyen esetek száma $2\cdot 2\cdot 2=8$. Az összes eset száma $4!=24$. A kérdéses valószínűség: $p=\dfrac{8}{24}=\dfrac{1}{3}$.

d) A dobozban található számkártyákat növekvő sorrendbe rendezve: -2; -1; 1; 2; 3; 4. A felső kvartilis a növekvő sorrend szerinti $\dfrac{3}{4}\cdot(N+1)$-edik tagja az adatsokaságnak, így jelen esetben a $\dfrac{3}{4}\cdot(7+1)=6$. tagja. Három esetet kell megvizsgálni.

I. eset: ha $k\leqslant 3$, akkor a felső kvartilis 3 lesz.

II. eset: ha $3<k<4$, akkor a felső kvartilis éppen k lesz.

III. eset: ha $k\geqslant 4$, akkor a felső kvartilis 4 lesz.

II. rész

5. *Adott az* $f(x)=-\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{2023}{2}x^2+2024x+k$ *függvény* ($k>0$).

a) Bizonyítsuk be, hogy a függvény a $]-1;2024[$ *intervallumon szigorúan monoton növekvő.* (4 pont)

b) Határozzuk meg a k valós paraméter értékét úgy, hogy a függvénynek pontosan két zérushelye legyen. (6 pont)

Adottak az alábbi értékek: $A=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4+5x}{6x-7}$ *és* $B=\displaystyle\int_1^3 (x^2-2x+2)\,dx$.

c) Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:

$$\sqrt{Ax+4}=\frac{1}{4}Bx-4. \qquad \text{(6 pont)}$$

Megoldás. *a)* Először határozzuk meg az $f(x)$ első derivált függvényét. Ha ugyanis $f'(x)>0$, akkor $f(x)$ szigorúan monoton növekvő. $f'(x)=-x^2+2023x+$ $+2024$, vagyis a $-x^2+2023x+2024>0$ egyenlőtlenséget kell megoldani. A függvény grafikonja „fordított állású” parabola. Ennek a fordított állású parabolának a zérushelyei (-1)-ben és 2024-ben vannak, vagyis az egyenlőtlenség megoldáshalmaza az $x\in\,]-1;2024[$, amellyel igazoltuk az állítást.

b) Az $f(x)$ függvénynek akkor lesz pontosan két zérushelye, ha a lokális minimum- vagy maximumértéke 0 (vagyis az x tengelyen helyezkedik el). Az *a)* részben kiszámítottak alapján az $f(x)$ függvény a $]-\infty;-1[$ intervallumon szigorúan monoton csökkenő, a $]-1;2024[$ intervallumon szigorúan monoton növekvő, végül a $]2024;\infty[$ intervallumon ismét szigorúan csökkenő. Ebből következik, hogy az $x=-1$ lokális minimumhely. Ekkor $f(-1)=\dfrac{6k-6073}{6}$, vagyis a megoldandó egyenlet: $\dfrac{6k-6073}{6}=0$, amelynek a $k_1=\dfrac{6073}{6}$ a gyöke. Mivel az $f(x)$ függvény a $]-1;2024[$ intervallumon szigorúan monoton növekvő, ezért az $x=2024$-ben lokális maximumpontja lesz. $f(2024)=\dfrac{8\,303\,759\,552+6k}{6}$, vagyis a megoldandó egyenlet: $\dfrac{8\,303\,759\,552+6k}{6}=0$, amelynek a $k_2=-\dfrac{8\,303\,759\,552}{6}$ a gyöke. Mivel $k_2<0$, ezért ez nem teljesíti az eredeti feltételt.

A keresett függvény tehát az $f(x)=-\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{2023}{2}x^2+2024x+\dfrac{6073}{6}$.

c) $A=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4+5x}{6x-7}=\dfrac{5}{6}$, $B=\displaystyle\int_1^3(x^2-2x+2)\,dx=\left[\frac{x^3}{3}-x^2+2x\right]_1^3=\frac{14}{3}$.

A megoldandó egyenlet: $\sqrt{\dfrac{5}{6}x+4}=\dfrac{7}{6}x-4$. Itt $\dfrac{5}{6}x+4\ge 0$ miatt $x\ge-\dfrac{24}{5}$, továbbá $\dfrac{7}{6}x-4\ge 0$ miatt $x\ge\dfrac{24}{7}$, a két feltétel közül az $x\ge\dfrac{24}{7}$ az erősebb. Az egyenlet mindkét oldalát négyzetre emelve, majd nullára rendezve kapjuk, hogy $49x^2-366x+432=0$. Az egyenlet gyökei: $x_1=6$ és $x_2=\dfrac{72}{49}$. Ezek közül csak $x_1=6$ felel meg a kikötésnek. Ellenőrzéssel megállapítható, hogy az $x=6$ valóban megoldás.

6. *Adott a H alaphalmaz, amelynek azok a négyjegyű pozitív egész számok az elemei, amelyekre egyszerre teljesülnek az alábbi feltételek:*

(1) az utolsó számjegyük 4,

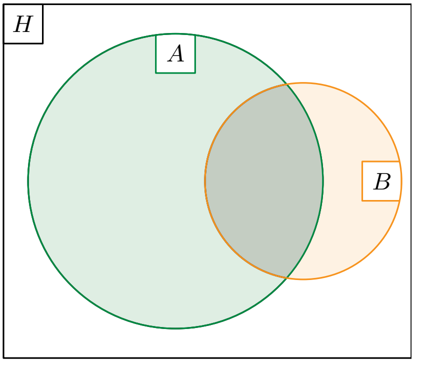
(2) a számjegyeik összege 8,

(3) a számjegyeik szorzata 0.

a) Igazoljuk, hogy a H alaphalmaz elemeinek a mediánja 2204. (3 pont)

A H alaphalmazon belül az A halmaz elemei azok a számok, amelyeknél az első két számjegyből alkotott kétjegyű szám nagyobb, mint az utolsó két számjegyből alkotott kétjegyű szám, míg a B halmaz elemei a néggyel osztható számok.

b) Töltsük ki a Venn-diagramot. (3 pont)



A halmazábrán a nagyobb kör sugara 5 *egységgel hosszabb a kisebb kör sugaránál. A két kör középpontja* 13 *egységnyi távolságra található egymástól.*

c) Megrajzoltuk a két kör egyik közös külső érintőjét. Mekkora a két érintési pont közötti távolság?

(5 pont)

Egy hatpontú egyszerű gráf négy fokszámát ismerjük: 2; 0; 2; 4. *Tudjuk, hogy a fokszámok mediánja nem egész szám.*

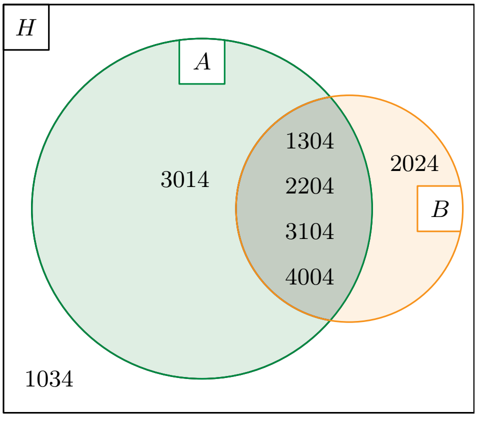
d) Rajzoljuk le az összes ilyen gráfot. (5 pont)

Megoldás. *a)* A H alaphalmaz elemei növekvő sorrendben: 1034; 1304; 2024; 2204; 3014; 3104; 4004. A medián hét elem esetén a növekvő sorrend szerinti negyedik elem, vagyis ebben az esetben a 2204. Ezzel igazoltuk az állítást.

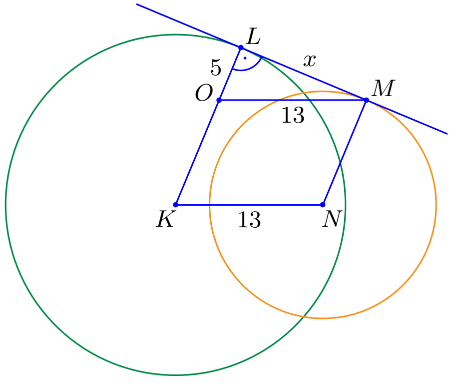
b) Először írjuk fel az A és a B halmazt.

$$A = \{1304; 2204; 3014; 3104; 4004\},$$
$$B = \{1304; 2024; 2204; 3104; 4004\}.$$

A helyes halmazábra:

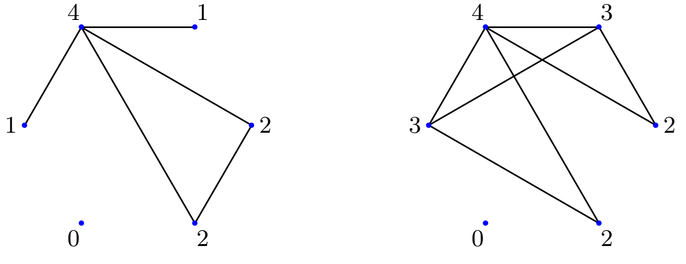


c) Készítsünk egy vázlatos rajzot.



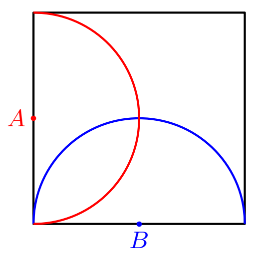
A gondolatmenetben fel fogjuk használni, hogy a körhöz húzott érintő merőleges az érintési pontba húzott sugárra. A $KLMN$ derékszögű trapéz LM szárának a hosszát keressük. Fektessünk egyenest M-en keresztül a KN szakasszal párhuzamosan, ennek az egyenesnek és a KL sugárnak a metszéspontját jelölje O. (Vagyis a $KNMO$ négyszög paralelogramma.) A feladat szövege szerint $r_2 - r_1 = 5$, ezért ha a MLO derékszögű háromszögre alkalmazzuk a Pitagorasz-tételt, akkor $5^2 + x^2 = 13^2$, amelyből $x = 12$ $(x > 0)$ egység adódik.

d) Mivel a fokszámok összege páros kell legyen, és még egy nulladfokú csúcs nem lehet, mert akkor nem lehetne negyedfokú pont sem, ezért a két hiányzó csúcs fokszáma páratlan. Ha 1 és 3 lenne, akkor a medián 2 lenne, ami nem megfelelő. Tehát vagy két 1-es, vagy két 3-as fokszámú csúcs van még. Mindkettő megvalósítható az ábrán látható módon.



7. *A Roxfort Boszorkány- és Varázslóképző Szakiskolában a Weasley ikrek üzletet nyitottak, ahol különféle mágikus eszközöket árulnak.*

Hermione éppen mágikus matematika tantárgy vizsgájára gyakorol, és az egyik seprűje végének a keresztmetszetét rajzolta le az ábrán látható módon.



Egy 2 *cm oldalhosszúságú négyzet két szomszédos oldalának felezőpontját jelölte* A*-val és* B*-vel, majd ezekből rajzolt egy-egy* 1 *cm sugarú félkört a négyzeten belülre. A két félkör közös része által meghatározott síkidom alakja és mérete jó közelítéssel megegyezik a seprű végének keresztmetszetével.*

a) Határozzuk meg ennek a síkidomnak a területét. (4 pont)

Az üzletben található 100 *seprűből* 13 *hibás. A Griffendél csapata vásárol magának* 7 *darab seprűt.*

b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy a megvásárolt seprűk közül legalább kettő hibás? (7 pont)

Az egyik mérkőzés után a klubházban gyülekeznek a legnagyobb rajongók, összesen 17*-en. Tudjuk, hogy a fiúk a fiúkkal, míg a lányok a lányokkal fognak kezet megérkezéskor. Összesen* 66 *kézfogás történt. Tudjuk, hogy több fiú volt a klubházban, mint lány.*

c) A klubházban tartózkodó diákok közül kettőt véletlenszerűen kiválasztva mekkora annak a valószínűsége, hogy egyikük fiú, a másik pedig lány? (5 pont)

Megoldás. *a)* Jelölje a két félkör metszéspontjait D és K, ahol K a négyzet középpontja. Először számítsuk ki a DBK negyedkör területét: $T_1=\dfrac{1^2\cdot\pi}{4}$. Ezután számítsuk ki a DBK derékszögű háromszög területét: $T_2=\dfrac{1\cdot 1}{2}=\dfrac{1}{2}$. Ha kivonjuk a negyedkör területéből a háromszög területét, majd az eredményt megszorozzuk 2-vel, akkor éppen a keresett T területet kapjuk meg, így: $T=2\cdot\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{2}-1\approx$ $\approx\ 0{,}57\ \mathrm{cm}^2$.

b) Annak a valószínűsége, hogy egyik seprű sem hibás: $\dfrac{\binom{13}{0}\binom{87}{7}}{\binom{100}{7}}=0{,}3650$. Annak valószínűsége, hogy pontosan 1 seprű hibás: $\dfrac{\binom{13}{1}\binom{87}{6}}{\binom{100}{7}}=0{,}4101$. A keresett valószínűség:

$$p(\text{legalább 2 hibás})=1-(p(0\text{ hibás})+p(1\text{ hibás}))=1-(0{,}3650+0{,}4101)=0{,}2249.$$

c) Jelölje a fiúk számát x, míg a lányokét $17-x$. Ekkor az alábbi egyenlet írható fel: $\frac{x\cdot(x-1)}{2}+\dfrac{(17-x)\cdot(16-x)}{2}=66$. Az egyenlet gyökei: $x_1=10$ és $x_2=7$. Mivel a fiúk vannak többen, így a fiúk száma 10, míg a lányoké 7. A 17 diák közül $\binom{17}{2}=$ $=136$-féleképpen tudunk kiválasztani kettőt (összes eset). A kedvező esetek száma: $\binom{10}{1}\cdot\binom{7}{1}=70$. A valószínűség tehát: $p=\frac{70}{136}\approx 0{,}51$.

8. *a) Mi lehet annak az egyenesnek az egyenlete, amely párhuzamos az* y *tengellyel és az* $f(x)=\sin x$ *függvény és az* x *tengely által a* $[0;\pi]$ *intervallumon határolt síkidom területének* 1/4*-ét vágja le.* (7 pont)

b) Mely valós $x\in\,]0;\pi[$ *érték esetén lesz az* 1 *és a* $\operatorname{tg} x$ *értékeinek négyzetes közepe* $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$*?* (4 pont)

Egy konvex négyszög területe $1156\ cm^2$*. A négyszög egymás melletti oldalfelező pontjait összekötöttük egymással, így egy újabb négyszöget kaptunk. Ezt az eljárást az új négyszöggel megismételtük, majd egészen addig ismételtük, amíg az így készült négyszögek területének mérőszámait az eredeti négyszögéhez rendre hozzáadva éppen* 2023*-at kaptunk.*

c) Összesen hányszor végeztük el az eljárást? (5 pont)

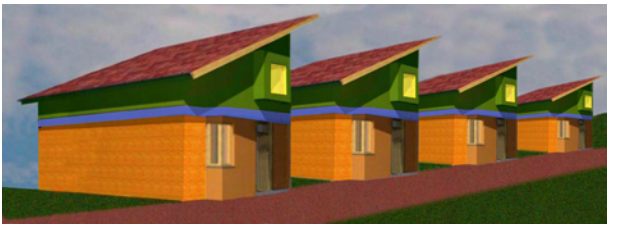
Megoldás. *a)* Először határozzuk meg, hogy mekkora területet zár közre az $f(x) = \sin x$ függvény az x tengellyel a $[0; \pi]$ intervallumon. $\int\limits_0^\pi \sin x\, dx = -\cos\pi + \cos 0 = 2$. Két egyenes is teljesíti a feltételeket, amelyek tengelyes tükörképei egymásnak az $x = \frac{\pi}{2}$ egyenesre mint tengelyre. Mindkét egyenes felírható $x = a$ alakban, hiszen párhuzamos az y tengellyel. Az alábbi egyenletet kell megoldani: $\int\limits_0^a \sin x\, dx = \frac{1}{2}$. Felhasználva a Newton–Leibniz-formulát adódik, hogy $\cos a = \frac{1}{2}$, amiből $a = \frac{\pi}{3}$, tehát a keresett egyenesek egyenletei a következők: $x_1 = \frac{\pi}{3}$ vagy $x_2 = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$.

b) A megoldandó egyenlet a következő: $\sqrt{\frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$. Mindkét oldalt négyzetre emelve kapjuk az $\frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{2} = \frac{6}{9}$ összefüggést, amelyből $\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{3}$ következik. Két esetet kell megvizsgálnunk.

I. eset: $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$, amiből $x_1 = \frac{\pi}{6}$, II. eset: $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, amiből $x_2 = \frac{5 \cdot \pi}{6}$.

c) Az eljárás során kapott négyszögek területei egy mértani sorozatot alkotnak, ahol $a_1 = 1156$ és $q = \frac{1}{2}$ (vagyis mindig feleződik a négyszög területe). A megoldandó egyenlet: $2023 = 1156 \cdot \frac{0{,}5^n - 1}{0{,}5 - 1}$. Ebből adódik a $0{,}5^n = 0{,}125$ exponenciális egyenlet, amelynek az $n = 3$ a gyöke, tehát összesen háromszor kell elvégezni ezt az eljárást.

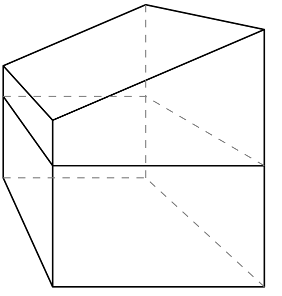
9. *Tökölön* 24 *darab új építésű sorház épül. Ezeknek a házaknak a teteje vagy piros, vagy szürke. Tudjuk, hogy pontosan* 3 *háznak piros a teteje.*



a) Hány különböző színezése lehet a 24 háznak? (Két színezést akkor tekintünk különbözőnek, ha van olyan ház, amelynek más színű a teteje a két színezésben.) (2 pont)

A házak alsó szintje téglatest alakú, amelynek alapterülete 119 m^2, magassága 4 méter. A tetőtér egy derékszögű trapéz alapú, az ábrán látható módon fekvő hasáb, ahol a trapéz különböző hosszúságú, párhuzamos oldalainak számtani közepe 3 méter.

A trapéz alapokra merőleges szára 7 méter, és az ábrán látható módon illeszkedik az alsó szint téglatestének egyik éléhez. Tudjuk, hogy a téglatest és a trapéz alapú hasáb élei – egy kivételével – méterben mérve egész számok.



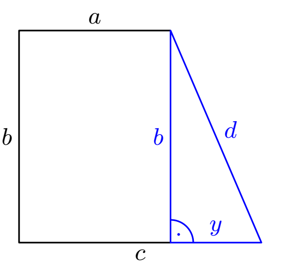
b) Mekkora lehet a trapéz hosszabbik szára, ha az méterben mérve nem egész szám? (8 pont)

c) Hány köbméter egy ház térfogata? (6 pont)

Megoldás. *a)* A lehetőségek száma $\dfrac{24!}{3!\cdot 21!}=2024$.

b) Jelöljük a derékszögű trapéz alapjait a-val és c-vel, továbbá a rövidebbik szárat b-vel, a hosszabbik szárat pedig d-vel.

Adott, hogy $\dfrac{a+c}{2}=3$, amiből $a+c=6$, valamint $a<c$, és mindkettő pozitív egész szám, ami két esetben teljesül, ha $a_1=1$ és $c_1=5$, vagy ha $a_2=2$ és $c_2=4$. Ha a rövidebbik alapból húzunk egy magasságot az ábrán látható módon, akkor a trapézt egy téglalapra és egy derékszögű háromszögre bontottuk és utóbbira alkalmazható a Pitagorasz-tétel: $b^2+y^2=d^2$, ahol $y=c-a$ és $b=7$ méter.



1. eset. Ha $y_1=c_1-a_1=5-1=4$, akkor a $7^2+4^2=d_1^2$ egyenletből azt kapjuk, hogy $d_1=\sqrt{65}$ méter, amely nem egész szám, ezért ez a trapéz hosszabbik szárának egyik lehetséges értéke.

2. eset. Ha $y_2=c_2-a_2=4-2=2$, akkor a $7^2+2^2=d_2^2$ egyenletből azt kapjuk, hogy $d_2=\sqrt{53}$ méter, amely szintén nem egész szám, ezért ez a trapéz hosszabbik szárának másik lehetséges értéke.

A trapéz hosszabbik szára $d_1=\sqrt{65}\approx 8{,}06$ méter vagy $d_2=\sqrt{53}\approx 7{,}28$ méter hosszú.

c) A téglatest térfogata: $V_1=119\cdot 4=476\ \mathrm{m}^3$. Mivel $119=7\cdot 17$, ezért a téglatest alapjának hosszabbik éle 17 m. A trapéz területe: $T=\dfrac{a+c}{2}\cdot b=3\cdot 7=$ $=21\ \mathrm{m}^2$. A hasáb magassága $M=17$ méter, tehát a tetőtér térfogata: $V_2=T\cdot M=$ $=21\cdot 17=357\ \mathrm{m}^3$. A ház térfogata: $V_3=476+357=833\ \mathrm{m}^3$.

Teleki Olivér
Tököl

Rejtvények, ördöglakatok

Ikrek: Bújj át a lyukon!

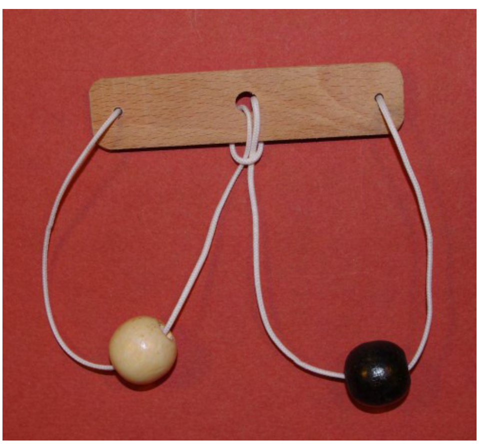
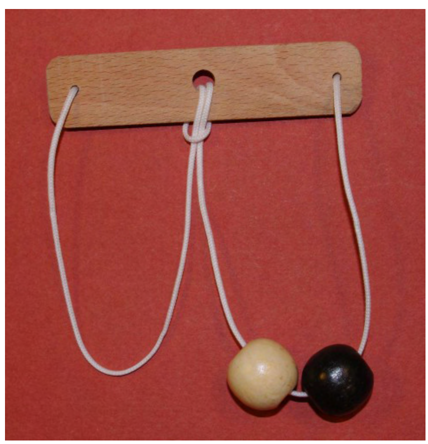
Rovatunkban minden hónapban valamilyen szórakoztató matematikai fejtörőt mutatunk be. Ezek között fontos helyet foglalnak el a különböző kirakós játékok, topológiai feladványok, ördöglakatok és a matematikát felhasználó bűvészmutatványok.

Manapság szinte mindent meg lehet találni az interneten, de az igazi élményt az adja, ha a feladatokat magunk oldjuk meg, a bűvészmutatványok trükkjeit mi találjuk ki, és a szükséges kellékeket is mi tervezzük meg és készítjük el. Próbáljuk meg a feladatokat továbbgondolni, általánosítani, igyekezzünk új feladatokat kitalálni.

A megoldásokat, általánosításokat a `rejtveny.komal@gmail.com` címen várjuk. A legjobbakat – akár cikk vagy videó formájában – a honlapunkon vagy itt a Lapban örömmel közöljük.

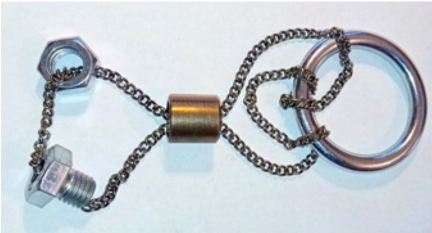
Új játékunk neve *Ikrek*. Egy középen átfúrt fadarabra a két végén rá van erősítve egy zsinór, amit a középső lyukra ráhurkoltunk. A zsinórra rá van fűzve két gyöngy, ahogy a bal oldali kép mutatja; ők az ikrek. A feladat az, hogy a két gyöngyöt mozgassuk egymás mellé, ahogy a jobb oldali képen láthatjuk.

Ha a középső lyuk olyan nagy lenne, hogy átférnének rajta a gyöngyök, akkor a feladat könnyű lenne, valamelyik gyöngyöt végighúznánk a zsinóron, egészen a másik gyöngyig, ehhez kétszer kellene a gyöngynek keresztülhaladnia a lyukon.

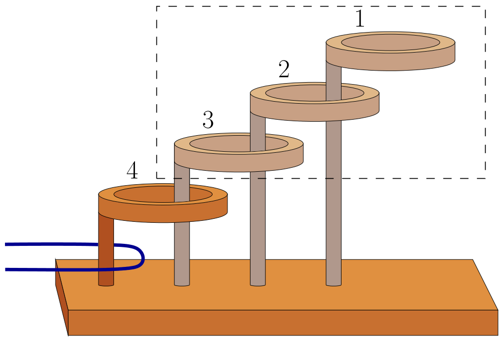



Forrás és hasonló játékok: `https://ordoglakat.blog.hu/2010/12/11/ikrek_52`

Gyakran találkozhatunk az alábbi változattal is (bal oldali ábra): egy végtelenített láncra rá van fűzve egy csavaranya és egy hosszában keresztülfúrt csavar, de nem lehet őket összecsavarni, mert a közöttük haladó lánc még át van fűzve egy kis fém csövön (vagy alátéten) is, és a cső másik oldalán rá van hurkolva egy fém karika. A feladat az, hogy mégiscsak csavarjuk össze a két csavart. Hogyan lehetne a láncon megfordítani a csavart (jobb oldali ábra)??



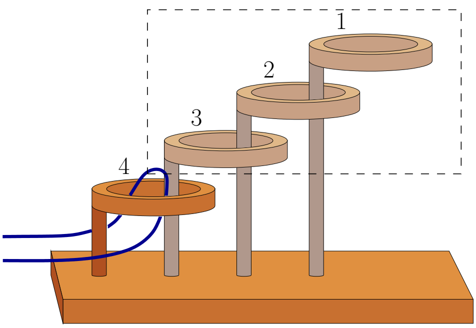
A Meleda játék megoldása

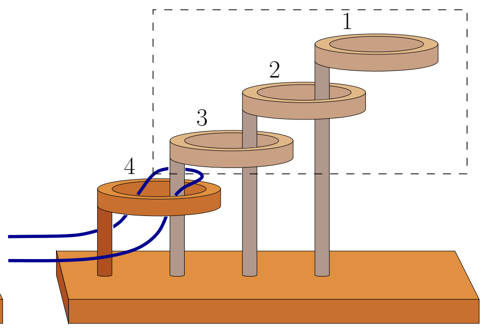


A márciusi számban találkozhattunk a Meleda játékkal. A megoldást a négykarikás változaton mutatom be. A karikákat és az ezeket tartó pálcikákat megszámoztam 1-től 4-ig; a feladat az, hogy a negyedik pálcikára fűzött zsinórt távolítsuk el.

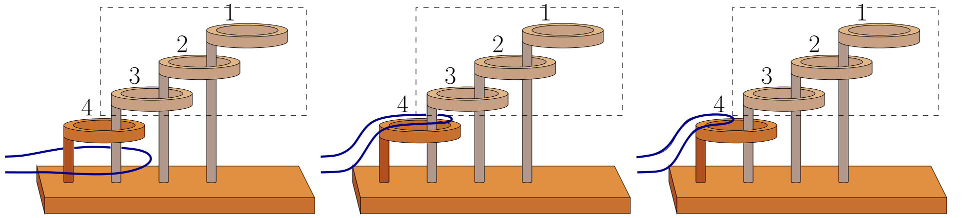
Az első három karikát tekinthetjük egy különálló Meleda játéknak, ezért kereteztem be.

Tételezzük fel, hogy már ismerjük a háromkarikás játék megoldását; ennek felhasználásával megoldjuk a négykarikás változatot is. Húzzuk át a zsinórt a 4. karikán, majd hajtsuk végre a háromkarikás Meleda játék megoldását (az 1–3. karikákon) *visszafelé*: ezután a zsinór a 3. pálcikát is megkerüli:





Most a zsinórt teljes egészében felemelhetjük a 4. karika fölé, majd újra végre kell hajtanunk a háromkarikás Meleda megoldást, de most már a jó sorrendben.



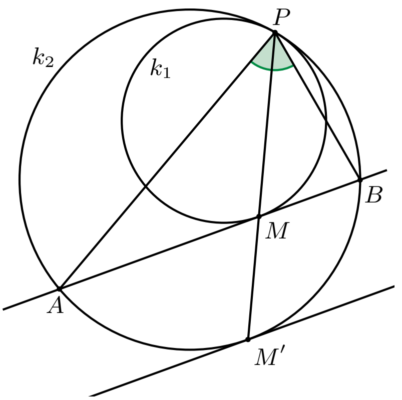
Általánosabban, az $(n+1)$-karikás Meleda megoldásához az n-karikás játék megoldását kell oda és vissza is végigcsinálnunk, ezért a megoldás hossza a karikák számát növelve, minden lépésben nagyjából megduplázódik. A pontos lépésszám attól függ, hogy pontosan mit is tekintünk egy lépésnek. Például, ha azt számoljuk, hogy a zsinórt hányszor mozgatjuk át valamelyik pálcika fölött, akkor n karika esetén a lépésszám 2^n-1.

Kós Géza

Matematika feladatok megoldása

B. 5339. *A k_1 kör belülről érinti a k_2 kört a P pontban. Legyen M a k_1 körvonal egy tetszőleges pontja, és messe a k_1-hez M-ben húzott érintő k_2-t az A és B pontokban. Mutassuk meg, hogy PM felezi az APB szöget.*

(*4 pont*)



1. ábra

1. megoldás. Mivel a k_2 kör tartalmazza a k_1 kört, és a két kör a P pontban érinti egymást, a P pont a két kör külső hasonlósági pontja. Tehát a P pontból a k_1 kört a k_2 körbe nagyíthatjuk. Legyen M' az M pont képe a nagyítás szerint, ekkor tehát az M' pont a PM szakasz M-n túli meghosszabbításának és a k_2 kör P-t nem tartalmazó AB ívének metszéspontja.

A feltétel szerint az AB egyenes a k_1 körhöz az M pontban húzott érintő. Ezt a tulajdonságot a nagyítás megőrzi, tehát AB képe a k_2 körhöz az M' pontban húzott érintő (*1. ábra*).

Azt is tudjuk, hogy a középpontos nagyítás iránytartó, ezért a két érintő párhuzamos egymással. Az AB köríven az ívfelező pont az egyetlen, ahonnan AB-vel párhuzamos érintő húzható, tehát az M' pont a k_2 kör AB ívének felezőpontja.

Mivel az AM' és $M'B$ ívek egyenlők, ezekhez egyenlő kerületi szögek tartoznak, $APM'\sphericalangle = M'PB\sphericalangle$, vagyis a PMM' egyenes valóban felezi az APB szöget.

A KöMaL honlapon látható megoldás

Megjegyzés. A kiemelkedő dolgozatok szerzői közül a fentihez hasonló megoldást adott a feladatra: *Anudeep Prashant* (Mangalor, NITK, 11. évf.), *Bodor Mátyás* (Csíkszereda, Márton Áron Líceum, 10. évf.), *Diaconescu Tashi* (Kolozsvár, Spark Hybrid International High School, 10. évf.), *Kovács Benedek Noel* (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.), *Prohászka Bulcsú* (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.).

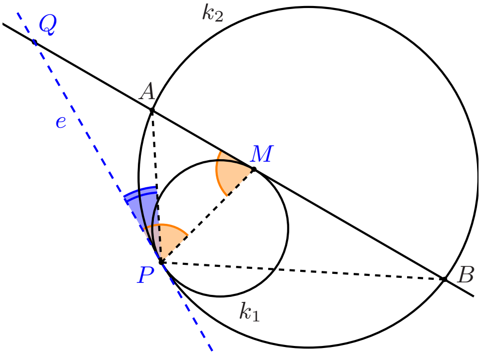
2. megoldás. Húzzuk meg a k_1 és k_2 körök közös érintőjét, ez biztosan átmegy a P ponton, és jelöljük Q-val azt a pontot, amelyben ez az érintő a k_1 körhöz az M pontban húzott érintőt, vagyis az AB egyenest metszi.

Ekkor $QMP\sphericalangle = QPM\sphericalangle$, mert mindkettő a PM-hez tartozó érintőszárú kerületi szög a k_1 körben. Az $APQ\sphericalangle$ pedig a B pontot nem tartalmazó AP ívhez tartozó érintőszárú kerületi szög a k_2 körben. Mivel $ABP\sphericalangle$ és $APQ\sphericalangle$ a k_2 körben azonos ívhez tartozó kerületi szögek, ezért

$$ABP\sphericalangle = APQ\sphericalangle.$$

Ebből az következik, hogy

$$APM\sphericalangle = QPM\sphericalangle - APQ\sphericalangle.$$



2. ábra

Ugyanakkor $BPM\sphericalangle = AMP\sphericalangle - ABP\sphericalangle$, hiszen $AMP\sphericalangle$ külső szöge a BPM háromszögnek. Ezért $AMP\sphericalangle = QMP\sphericalangle = QPM\sphericalangle$ és $ABP\sphericalangle = APQ\sphericalangle$ alapján azt kapjuk, hogy

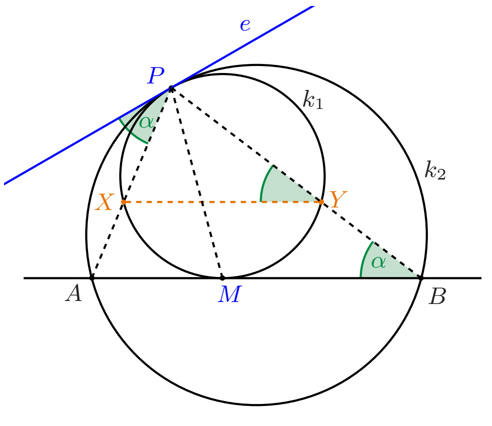
$$BPM\sphericalangle = QPM\sphericalangle - APQ\sphericalangle,$$

ez pedig előző eredményünk szerint azt jelenti, hogy $BPM\sphericalangle = APM\sphericalangle$, tehát PM valóban felezi az $APB\sphericalangle$ szöget.

Ha a két érintő nem metszi egymást, azaz párhuzamosak, akkor egyszerűen belátható, hogy $AMP\sphericalangle = 90°$ és ezért a k_2 körhöz a P pontban húzott e érintő is merőleges PM-re. Ekkor PM a k_1 kör átmérője, továbbá $e \parallel AB$ miatt a B pontot nem tartalmazó AP ívhez tartozó érintőszárú kerületi szög $PAB\sphericalangle$-gel is egyenlő, és így az ABP háromszög egyenlő szárú, amelynek szimmetriatengelye a PM egyenes. Ez azonban azt jelenti, hogy PM felezi az $APB\sphericalangle$ szöget, tehát a feladat állítása ebben az esetben is teljesül.

Sárdinecz Dóra (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.) dolgozata alapján

A kiemelkedő dolgozatok szerzői közül a fentihez hasonlóan oldotta meg a feladatot *Bővíz Dániel* (Szeged, Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium, 10. évf.), *Hollósi Dominik* (Neufahrn bei Freising, Oscar Maria Graf Gymnasium, 8. évf.).



3. ábra

3. megoldás. Legyen a PA, illetve PB szakaszoknak a k_1 körrel való második metszéspontja X, illetve Y, a k_1 és k_2 körök P pontbeli közös érintője e. Tekintsük a *3. ábrát.*

Az e érintő a PA-val α szöget zár be, ez a szög a k_2 kör B pontot nem tartalmazó PA ívéhez tartozó érintőszárú kerületi szög, ezért $PBA\sphericalangle = \alpha$. Ugyanakkor az e és PA által bezárt α szög a k_1 kör Y pontot nem tartalmazó PX ívéhez tartozó érintőszárú kerületi szög is, ezért $PYX\sphericalangle = \alpha$. Ez pedig azt jelenti, hogy az AB és XY szakaszok párhuzamosak egymással.

Az AB M-ben érinti a k_1 kört, ezért $XMA\sphericalangle$ érintőszárú kerületi szög k_1-ben, így $XMA\sphericalangle = XPM\sphericalangle$, de $XY \parallel AB$ miatt $XMA\sphericalangle = MXY\sphericalangle$, és emiatt

$$XPM\sphericalangle = MXY\sphericalangle.$$

A k_1 körben az $MXY\sphericalangle$ és $MPY\sphericalangle$ azonos ívhez tartozó kerületi szögek, tehát egyenlők:

$$MXY\sphericalangle = MPY\sphericalangle.$$

Ebből azonnal adódik, hogy

$$XPM\sphericalangle = MPY\sphericalangle,$$

vagyis PM felezi az $XPY\sphericalangle = APB\sphericalangle$ szöget, és éppen ezt akartuk bizonyítani.

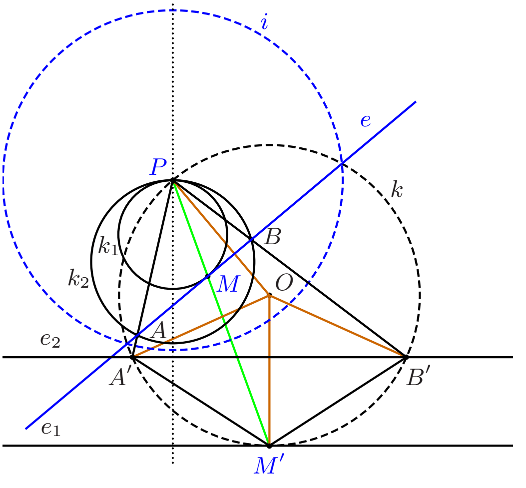
Veres Dorottya (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.)

Megjegyzés. Ez a megoldás egyes pontjaiban hasonlít ugyan a *2. megoldás*hoz, a kétféle megoldás mégis különbözik, mert itt a versenyző először azt bizonyította, hogy $XY \parallel AB$, majd a megoldást ennek felhasználásával fejezte be. A megoldás során azt is megmutatta, hogy $MX = MY$.

4. megoldás. Alkalmazzunk inverziót egy P középpontú alapkörre. A k_1 és k_2 körök átmennek az inverzió P pólusán, ezért képeik a körök p centrálisára merőleges e_1, e_2 egyenesek. Tekintsük a *4. ábrát.*

Az e-vel jelölt AB egyenes nyilván nem megy át a P ponton, ezért az inverzió tulajdonsága miatt képe a P ponton átmenő k kör. Mivel az A, B pontok a k_2 kör és az AB egyenes közös pontjai, ezért A', B' képük az e_2 egyenes és a k kör közös pontjai. Hasonlóképpen M a k_1 kör és az AB egyenes közös pontja, így az M' kép az e_1 és k közös pontja, továbbá az inverziónak az alakzatok érintkezésére vonatkozó tulajdonsága miatt e_1 éppen az M' pontban érinti a k kört.

Jelöljük a k kör középpontját O-val, ekkor $OA' = OB'$, valamint az OM' sugár merőleges a k kör e_1 érintőjére, de így OM' merőleges e_2-re is, tehát OM' az $A'B'$ szakasz felezőmerőlegese. Ez az egyenes felezi az M' pontot tartalmazó $A'B'$



4. ábra

ívet, ebből következik egyrészt, hogy $A'M' = B'M'$, másrészt, hogy a k körben az $A'M', B'M'$ ívekhez tartozó kerületi szögek egyenlők, azaz $A'PM'\sphericalangle = B'PM'\sphericalangle$, és így

$$APM\sphericalangle = BPM\sphericalangle,$$

ami a bizonyítandó volt.

Christ Miranda Anna (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.)

A kiemelkedő dolgozatok szerzői közül ugyancsak inverzió felhasználásával oldotta meg a feladatot *Szakács Ábel* (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.).

Megjegyzések. a) A kitűzött feladat a bizonyítandó állítás megfogalmazásában különbözik a *Geometriai feladatok gyűjteménye I.* (Nemzeti Tankönyvkiadó, 10127/I.) 1036. számú feladatától.

b) A beküldött hibátlan dolgozatok egy része a honlapon megjelent megoldási utat, tehát a P középpontú hasonlóságra alapuló megoldást követte (*1. megoldás*). A helyes megoldások egy másik része a *2. megoldás*hoz volt hasonló, ismét mások a *3. megoldás*nak megfelelő módot választottak. Inverzióval történő megoldást mindössze két versenyző küldött be.

c) A beküldött dolgozatok egy részének jellemző hibái voltak a bizonyítási lépések és a hivatkozások hiányosságai, levezetési hibák, szögekre vonatkozó hibás megállapítások, indoklás nélkül leírt összefüggések. Néhány dolgozat kézzel írt szövegrészletei nehezen voltak olvashatók, több esetben pedig az ábra alig volt áttekinthető.

A maximális 4 pontot 62 versenyző kapta meg, 3 pontos volt 12 darab, 2 pontos 11 darab, 1 pontos 7 darab, végül 0 pontos 3 darab dolgozat. A 0 pontos dolgozatok egyike egyéb hibák mellett nem készített ábrát, a másik versenyző ábrája kis mérete miatt nem volt tanulmányozható, a harmadik pedig egy minden tekintetben speciális esetet tárgyalt. A teljes dolgozatot, vagy annak egy részét (például csak az ábrát) 3 versenyző nem megfelelő formátumban (nem pdf) küldte be.

A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok ABACUS-szal közös pontverseny 9. osztályosoknak (809–813.)

K. 809. Legyen a_1 egy pozitív egész szám, amelyből létrehozunk egy sorozatot a következő szabály szerint. A sorozat első tagját (a_1) felírjuk – a tízes számrendszerbeli alakját felhasználva – $a_1 = 10A_1 + b_1$ alakban, ahol b_1 az egyesek helyén álló számjegy. Ebből kiindulva képezzük a sorozat további tagjait az $a_{n+1} = A_n + 6b_n$ szabály szerint. Igazoljuk, hogy az így képzett sorozatra teljesül, hogy vagy mindegyik tagja osztható 59-cel, vagy egyik sem.

Urbán János (Budapest) (1939–2012) feladata alapján

K. 810. Az $ABCD$ trapézban $AB \parallel CD$ és $AB = 3CD$, valamint $CD = DA$. Határozzuk meg a trapéz szögeit, ha tudjuk, hogy $CDA\sphericalangle = 120°$.

német versenyfeladat

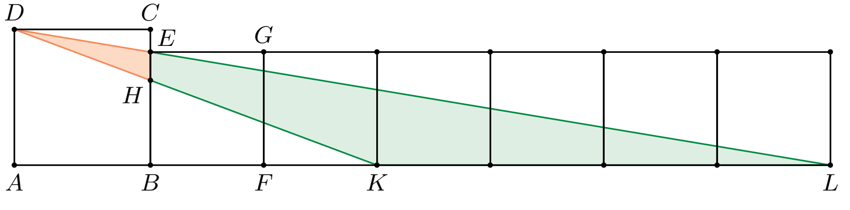
K. 811. Egy 8×8-as sakktáblára ráírtuk a pozitív egész számokat 1-től 64-ig növekvő sorrendben, a bal felső sarokban kezdve és soronként haladva. Lehetséges-e két egymással élben vagy csúcsban szomszédos mezőn álló számot a tábláról törölnünk úgy, hogy a fennmaradó számok összege éppen 2024 legyen?

Javasolta: *Bíró Bálint* (Eger)

K/C. 812. A 2024-nek pontosan egy olyan számjegye van (nevezetesen a 0), amely minden számjegyének többszöröse. Hány olyan négyjegyű, pozitív egész szám van, amelynek legalább két ilyen számjegye van?

Javasolta: *Kozma Katalin Abigél* (Győr)

K/C. 813. Az $ABCD$ négyzet mellé rajzoltuk az $EBFG$ négyzetet, mellé pedig több, vele egybevágó négyzetet az alábbi ábra szerint.



Határozzuk meg a DHE háromszög és $HKLE$ négyszög területének arányát.

Deres János (Csurgó) ötletéből

❄

Beküldési határidő: 2024. május 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (812–813., 1808–1812.)

Feladatok 10. évfolyamig

K/C. 812. A szövegét lásd a **K** feladatoknál.

K/C. 813. A szövegét lásd a **K** feladatoknál.

Feladatok mindenkinek

C. 1808. Boglárka egy 4-szer 4-es négyzetháló minden négyzetébe beír a 2023, 2024, 2025 számok közül pontosan egyet. Hány különböző módon teheti ezt meg úgy, hogy minden sorban és minden oszlopban az oda beírt négy darab szám összege osztható legyen 3-mal?

Javasolta: *Kozma Katalin Abigél* (Győr)

C. 1809. Legyen az AC szakasz belső pontja B, és az ABS_1, a BCS_2 és az CAS_3 olyan egyenlő szárú háromszögek, amelyek közül semelyik kettőnek nincs közös belső pontja, és amelyeknek alapjai az AB, a BC és az CA, és az alapon fekvő szögeik mind $30°$-osak.

Bizonyítsuk be, hogy az $S_1S_2S_3$ háromszög szabályos.

német versenyfeladat

C. 1810. Határozzuk meg az $(x+2)^6+(x^2-4x-4)^3=8x^6$ egyenlet valós megoldásait.

Javasolta: *Bíró Bálint* (Eger)

Feladatok 11. évfolyamtól

C. 1811. Legyen $f(x)=x^2$ és $g(x)=x^2-2x+2$. Határozzuk meg a két függvénygrafikon közös érintőjének egyenletét.

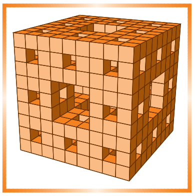
Javasolta: *Sándor Csaba* (Budapest)

C. 1812. Legyenek egy háromszög oldalhosszai a, b, c, amelyekre teljesül, hogy $a+b=3c$. Az a, illetve b oldalakkal szemközti szögek α, illetve β. Bizonyítsuk be, hogy $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}=2$.

horvát versenyfeladat

❄

Beküldési határidő: 2024. május 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`



A B pontversenyben kitűzött feladatok (5382–5389.)

B. 5382. Döntsük el, hogy vannak-e olyan $2 < p < q$ prímszámok, amelyekre a $\{p+1, p+2, \ldots, q-1\}$ halmaz elemeinek több mint egyharmadrésze prímszám.

(3 pont) Javasolta: *Hujter Bálint* (Budapest)

B. 5383. Az $ABCD$ húrnégyszögben $BAD\sphericalangle = 90^\circ$, $BC = CD$ és $AC = 1$. Kiszámítandó a húrnégyszög területe.

(3 pont) Javasolta: *Hujter Mihály* (Budapest)

B. 5384. Bizonyítsuk be, hogy ha a, b, $c > 0$ és $a^2 + b^2 + c^2 = abc$, akkor

$$2(a+b+c) + \frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab} \le abc.$$

(4 pont) Javasolta: *Bencze Mihály* (Brassó)

B. 5385. Az ABC hegyesszögű háromszögben jelölje F a Feuerbach-kör középpontját. Bizonyítsuk be, hogy $AF^2 - BF^2 = Rc\sin(\beta - \alpha)$, ahol R a köréírt kör sugarát, c az AB oldal hosszát, míg α és β az A és B csúcsoknál levő belső szöget jelöli.

(4 pont) Javasolta: *Bencze Mihály* (Brassó)

B. 5386. Anna és Balázs a következő játékot játssza. Anna 101-szer, míg Balázs 10-szer dob fel egy szabályos pénzérmét. Anna győz, ha több, mint 10-szer annyi fejet dobott, mint Balázs, különben Balázs nyer. Kinek kedvezőbb ez a játék?

(5 pont) Javasolta: *Sztranyák Attila* (Budapest)

B. 5387. A sík véges sok pontját megjelöltük a piros, kék és zöld színek valamelyikével úgy, hogy nincs három kollineáris, azonos színű pont, de bármely két azonos színű pontot összekötő szakaszon van olyan megjelölt pont, amelynek színe különbözik a végpontok színétől. Legfeljebb hány pontot vehettünk fel?

(5 pont) Javasolta: *Róka Sándor* (Nyíregyháza)

B. 5388. Mutassuk meg, hogy bármely $2n$ egymást követő pozitív egész számot legalább $n!$-féleképpen lehet n párba állítani úgy, hogy semelyik párban ne legyen a számok szorzata négyzetszám.

(6 pont) Javasolta: *Róka Sándor* (Nyíregyháza)

B. 5389. Az ABC hegyesszögű háromszög beírt körének középpontja I, a BC és AC oldalakkal vett érintési pontjai D, illetve E, továbbá jelölje H a háromszög magasságpontját. Igazoljuk, hogy ha H a DE szakaszon van, akkor a HI egyenes felezi az AB oldalt.

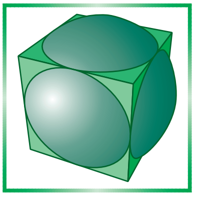
(6 pont) Javasolta: *Varga Boldizsár* (Budapest)

❄

Beküldési határidő: 2024. május 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄

Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (870–880.)



A. 878. Legyen A a c és k körök egyik metszéspontja. Legyen X_1 és X_2 tetszőleges pont a c körön. Jelölje Y_i az AX_i egyenes második metszéspontját a k körrel $i=1,2$ esetén. Legyen P_1, P_2 és P_3 tetszőleges pont a k körön, és jelölje O a k kör középpontját.

Jelölje K_{ij} az $X_iY_iP_j$ háromszög körülírt körének középpontját $i=1$, 2 és $j=1$, 2, 3 esetén. Legyen L_j az $OK_{1j}K_{2j}$ háromszög körülírt körének középpontja $j=1$, 2, 3 esetén. Bizonyítsuk be, hogy L_1, L_2 és L_3 egy egyenesre esik.

Javasolta: *Molnár-Szabó Vilmos* (Budapest)

A. 879. Adott egy $k>2$ egész szám. Xavér és Yvett a következő játékot játssza. Eredetileg a táblán egy $n>k$ egész szám szerepel. Ezt követően felváltva lépnek, Xavér kezd. Egy lépés abból áll, hogy a táblán szereplő m számot kicserélik egy olyan m' számra, amelyre $k \le m' < m$ és $(m', m)=1$. Aki először nem tud lépni, veszít.

Azt mondjuk, hogy egy $n>k$ egész szám jó, ha Yvettnek van nyerő stratégiája. Mutassuk meg, hogy ha n, $n'>k$ olyanok, hogy minden $p\le k$ prímre p akkor és csak akkor osztja n-et, ha n'-t, akkor n akkor és csak akkor jó, ha n' jó.

A. 880. Határozzuk meg az összes (a,b,c) valós számokból álló számhármast, amelyre létezik olyan $f\colon \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ függvény, hogy

$$af(n)+bf(n+1)+cf(n+2)<0$$

minden $n\in\mathbb{Z}^+$ számra ($\mathbb{Z}^+$ a pozitív egész számok halmazát jelöli).

Javasolta: *Imolay András* (Budapest)

❄

Beküldési határidő: 2024. május 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

Informatikából kitűzött feladatok (623–626.)

I. 623. Azokat a pozitív egész számokat, amelyekben a szomszédos számjegyek pontosan 1-gyel különböznek egymástól, + és − jelek sorozatával kódolhatjuk. A + jel kódolja, hogy a számjegy 1-gyel nagyobb, a − jel pedig, hogy 1-gyel kisebb az előző számjegynél. Az első számjegy ismerete nélkül általában a sorozat több számot kódolhat, amelyek közül a legkisebb és a legnagyobb egyértelműen meghatározható.

Példa egy 5 jegyű szám kódolására 4 hosszúságú kóddal: a +−++ által kódolt legkisebb szám `12123`, a legnagyobb szám `78789`.

Készítsünk programot *i623* néven, amely egy `N` darab + és − jelből álló karaktersorozat által kódolt legkisebb és legnagyobb `N`$+$`1` jegyű szám összegét határozza meg.

A program standard bemenetének egyetlen sorában az `N` (`1` $\leqslant$ `N` $\leqslant$ `1000`) jegyű kód karakterei (+ és − jelek) szerepelnek.

A program a standard kimenetre írja ki a kódolt legkisebb és legnagyobb szám összegét.

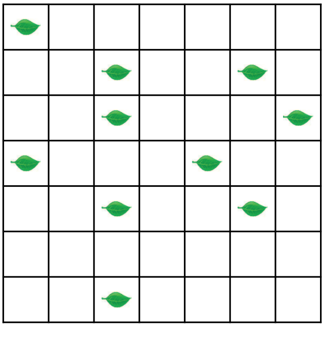
Példa a bemenetre:	**Kimenet:**
−++++−+	`8691312`

Magyarázat: a kód szerinti legkisebb szám `1012323` és legnagyobb szám `7678989`.

Beküldendő egy tömörített *i623.zip* állományban a program forráskódja és rövid dokumentációja, amely megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben fordítható.

(10 pont)

I. 624. Egy kertben elhelyezett játéktér járólapokból épül fel. A járólapok egy `N` sorból és `N` oszlopból álló négyzethálóba vannak rendezve. Egy csapat gyerek minden reggel a következő játékot játssza: figyelik, hogy melyik járólapokon van legalább egy levél az éjjel lehullottak közül és melyeken nincs. Megszámolják, hogy hány olyan sor és oszlop figyelhető meg, amelynél egyik járólapon sincs falevél.



Egy 7×7-es játékteret szemléltet a mellékelt ábra, ahol két olyan oszlop és egy olyan sor látható, amely nem tartalmaz falevelet.

Készítsük el a játék számítógépes változatát úgy, hogy a játéktér mezőit a bal alsó saroktól kiindulva megszámozzuk 1-től kezdve. A számozás egy soron belül balról jobbra, illetve a sorok között alulról felfelé történik. Az így kapott számokkal adjuk meg, hogy mely mezőkön van levél. A számsorozat ismeretében határozzuk meg, hogy hány olyan sor és oszlop van, amelyben nincs levél.

A program a standard bemenet első sorából olvassa be a játéktér méretét jellemző `N` számot ($2 \le \texttt{N} \le 100$), majd a következő sorban szóközzel elválasztva azoknak a járólapoknak a számát, amelyeken levél található. A levelet tartalmazó járólapok megadásának sorrendje tetszőleges. A program a standard kimenet egyetlen sorában adja meg, hogy összesen hány olyan sor és oszlop van, amely nem tartalmaz levelet.

A fenti példához tartozó bemenet és kimenet:

Bemenet	Kimenet
7 43 22 3 17 31 38 26 41 20 35	3

Beküldendő egy tömörített *i624.zip* állományban a program forráskódja és rövid dokumentációja, amely megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben fordítható.

(10 pont)

I. 625. Rendelkezésünkre állnak egy fájlban hazánk helységeinek koordinátái. Ezek alapján fogunk a táblázatkezelő program segítségével egy-két érdekességet bemutatni.

1. Nyissunk meg egy üres munkafüzetet, mentsük ***motel*** fájlnéven. Hozzunk létre három munkalapot ***koord***, ***valaszok*** és ***baltel*** néven.
2. A három melléket szövegfájl tabulátorral tagolt `UTF-8` kódolású. Másoljuk be a három munkalapra a mellékelt adatokat a következők szerint: a ***koord*** lapra az **A1** cellától kezdődően a **motelkord.txt** tartalmát, a ***valaszok*** lapra az **A1** cellától kezdődően a **valaszok.txt** tartalmát, végül a ***baltel*** lapra a **B2** cellától kezdődően a **baltel.txt** tartalmát.
3. Formázzuk meg a minta szerint a ***koord*** munkalapot, majd számoljuk ki másolható függvények és képletek segítségével minden településre a keleti hosszúság és északi szélesség fokban mért értékét.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Helységnév	Keleti hosszúság, fok:perc.századperc	Északi szélesség, fok:perc.századperc	KH			ÉSZ			KH	ÉSZ
2				f	p	p100	f	p	p100		
3	Aba	18:31.49	47:02.06	18	31	49	47	02	06	18,5248	47,0343
4	Abádszalók	20:35.94	47:28.48	20	35	94	47	28	48	20,5990	47,4747
5	Abaliget	18:07.09	46:08.63	18	07	09	46	08	63	18,1182	46,1438
6	Abasár	20:00.50	47:48.04	20	00	50	47	48	04	20,0083	47,8007
7	Abaújalpár	21:14.14	48:18.37	21	14	14	48	18	37	21,2357	48,3062
8	Abaújkér	21:12.08	48:18,47	21	12	08	48	18	47	21,2013	48,3078

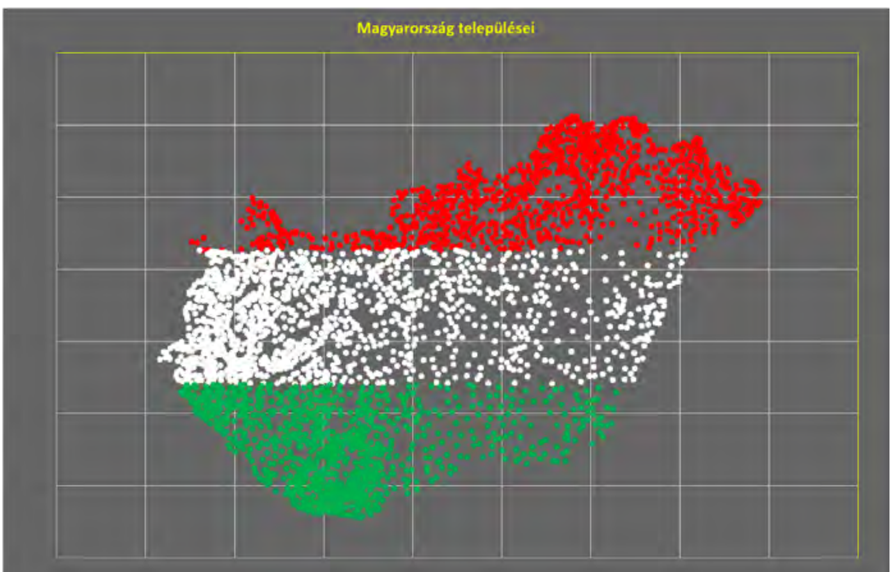
4. Formázzuk meg a minta szerint a ***valaszok*** munkalapot, majd válaszoljunk a kérdésekre függvények és képletek segítségével a települések neve alapján.

	A	B	C
1	A legészakibb település		
2	A legkeletibb település		
3	A legdélibb település		
4	A legnyugatibb település		
5	A koordinátahatárok szerinti téglalap középpontjához legközelebb eső település		
6	Négy településünk egyazon szélességre esik; ezek:		
7	1		
8	2		
9	3		
10	4		

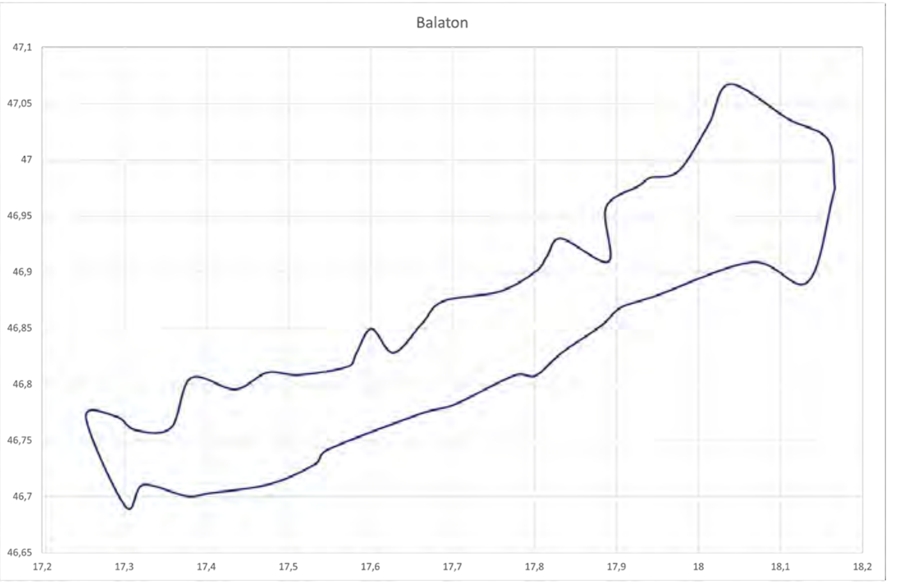
5. A ***baltel*** munkalapon a Balaton melletti települések vannak. *Balatonvilágos* településtől kezdődően egy térkép segítségével az óramutató járásával megegyező irányban számozzuk be a településeket az **A** oszlopban, majd a sorszámok alapján rendezzük át a listát, ezután *Balatonvilágos* nevét ismételjük meg a lista alján, végül keresőfüggvények segítségével társítsuk hozzájuk a **C** és **D** oszlopban a koordinátáikat.

	A	B	C	D	E	F
1			KH	ÉSZ		
2	1	Balatonvilágos	18,1663	46,9747		
3	2	Balatonszabadi	18,1332	46,8915		
4	3	Siófok	18,0653	46,9090		
5	4	Zamárdi	17,9478	46,8790		
6	5	Szántód	17,9060	46,8688		

6. Készítsünk másolatot a ***koord*** munkalapról és rendezzük az adatokat szélesség szerint. Készítsük el belőlük a mintán látható diagramot, amelynek a háttérszíne RGB $(102, 102, 102)$ kódú. Helyezzük a ***D1*** nevű, diagram-típusú munkalapra.



7. Készítsük el a ***baltel*** lap alapján a mintán látható diagramot. Helyezzük a ***D2*** nevű, diagramtípusú munkalapra.



Segédszámításokat minden munkalapon az adatokról jobbra végezhetünk. A megoldásban saját függvény vagy makró nem használható.

Beküldendő egy tömörített i625.zip állományban a ***motel*** táblázatkezelő munkafüzet, és egy rövid dokumentáció, amelyben szerepel a táblázatkezelő neve, verziószáma.

Forrás: `https://www.kemitenpet.hu/letoltes/tables.helyseg_hu.xls`

Letölthető fájlok: **motelkord.txt, valaszok.txt, baltel.txt.**

(10 pont)

I. 626. Magyarország statisztikai számai közül a kábeltelevízió-hálózatba bekapcsolt lakások számát vizsgáljuk a KSH adataiból rendelkezésre álló 2003 és 2019 közötti években. A ***nagyregio*** tábla megadja az ország nagyobb régióit, amelyeknek részei a ***regio*** táblában található régiók. Például a *Dunántúl* nagyrégió része *Dél-Dunántúl*. Az ország vármegyéi és a főváros mint külön vármegye található a ***terulet*** táblában. A két tábla kapcsolata jelzi, hogy melyik terület melyik régióhoz tartozik. A ***kabel*** tábla adatai megmutatják, hogy az adott években hány lakásban volt kábeltévé-előfizetés az egyes területeken.

A feladat megoldásához javasoljuk a digitális kultúra érettségin is használatos XAMPP rendszert. MySQL-ben a forrásként megadott ***kabelteve.sql*** szöveges állományt lefuttatva készítsük el a *kabelteve* adatbázist, amelyben megtalálhatók a fenti adatok, és oldjuk meg a következő feladatokat. A megoldások SQL kódját egy ***megoldas.sql*** szöveges állományba helyezzük el, jelezve, hogy melyik SQL parancs melyik feladat megoldása. A 7. feladatban kért táblázatot a táblázatkezelő alapértelmezett formátumában mentsük ***alfoldeszak*** néven.

1. Készítsünk lekérdezést, amely megadja, hogy a főváros kivételével hány vármegye van az országban.

2. Készítsünk lekérdezést, amely megadja, hogy mely vármegyék tartoznak *Dunántúl* nagyrégióhoz. A vármegyék nevét, valamint a nagyrégiók nevét jelenítsük meg.

3. Adjuk meg, hogy a *2012*-es évben hány kábeltévé-előfizetés volt *Budapesten.*

4. Adjuk meg, hogy mennyivel változott a kábeltévé-előfizetéssel rendelkező lakások száma *2004* és *2014* között *Tolna* megyében?

5. Adjuk meg, hogy Budapest kivételével melyik három vármegyében volt a legnagyobb az előfizetők száma *2015*-ben. A vármegyék nevét, valamint az előfizetések számát jelenítsük meg.

6. Adjuk meg, hogy melyik volt az első év, amikor *Nógrád* vármegyében az előfizetések száma meghaladta a 40 000-et.

7. Készítsünk lekérdezést, amely megadja az *Alföldi és Észak* régió megyéinek előfizetéseit a *2004*, *2008*, *2012*, *2016* években. Az adatokat helyezzük át táblázatkezelő alkalmazásba, és készítsünk az adatok szemléltető vonaldiagramot. A diagram vízszintes tengelyén a négy év jelenjen meg, függőleges tengelyén az előfizetések száma legyen látható. Az egyes vármegyék egy-egy eltérő színű adatsorként szerepeljenek. A diagram jelmagyarázata adja meg a vármegyéket, a tengelyek felirata *Évek és Lakások* legyen.

8. Készítsünk lekérdezést, amely megadja, hogy mely vármegyékben és mely években haladta meg a *Heves* vármegyei előfizetések számát másik, *Heves* vármegyével azonos régióba tartozó vármegye előfizetéseinek száma ugyanabban az évben. A lekérdezés a két vármegye nevét és a két vármegye előfizetéseinek számát jelenítse meg, és legyen az évek szerint növekvő sorrendben.

Forrás: `https://www.ksh.hu/stadat_files/ikt/hu/ikt0024.html`

Beküldendő egy tömörített *i626.zip* állományban a *megoldas.sql* szöveges állomány, amely tartalmazza a feladatok megoldását adó SQL parancsokat, valamint az *alfoldeszak* néven készült táblázat, amely tartalmazza az átvitt adatokat és a diagramot.

Letölthető állomány: **kabelteve.sql**

(10 pont)

Komplex számok a fizikában
I. rész:
A komplex számok mechanikai alkalmazásai

A komplex számok nagyon eredményesen alkalmazhatók a fizika számos területén, elsősorban síkbeli mozgások, valamint a rezgések és hullámok leírásánál. Azok kedvéért, akik még nem ismerik a komplex számokat és a velük végezhető műveleteket, összefoglaljuk a továbbiak megértéséhez szükséges legfontosabb matematikai összefüggéseket.[3]

Út a komplex számokhoz

A számokkal kapcsolatos fogalmaink fokozatosan és egyre bővülve alakultak ki. A bővítéseket bizonyos műveletek elvégezhetőségének igénye tette szükségessé. Kezdetben, valamikor nagyon régen az emberek (és a kisiskolások ma is) a természetes számokat használták. Annak érdekében, hogy a kivonás művelete korlátozás nélkül elvégezhető legyen, „kitalálták” a negatív számokat. Az egész számok osztásának művelete elvezetett a racionális számokhoz, a (nemnegatív) számok négyzetgyökének keresése pedig az irracionális számokhoz. A számfogalom mindegyik bővítménye magában foglalta a korábban használt számokat, és a műveleti szabályokat is sikerült ellentmondásmentesen kiterjeszteni az új, bővebb számkörre. Ennek a folyamatnak az utolsó lépése volt a negatív számok négyzetgyökének keresése, ami elvezetett a komplex számokhoz.

Olyan szám, aminek a négyzete (-1) lenne, nem létezik a valós (mindaddig „valódinak” tekintett) számok között, de *elképzelhető*, hogy egy bővebb számfogalomban ez a furcsa valami is értelmezhető. A $\sqrt{-1}$ „számot” imaginárius (elképzelt, képzetes) egységnek nevezték el a matematikusok, és i-vel jelölték.[4]

Feltételezzük, hogy a képzetes számmal (számokkal) a korábban használt algebrai műveletek elvégezhetők, és a műveleti szabályok is a megszokott alakban alkalmazhatóak. (Bizonyítható, hogy ez a feltételezés nem vezet ellentmondásra.) Így például i-t (az imaginárius egységet) megszorozhatjuk valós számokkal és össze is adhatjuk azokkal, vagyis értelmezhetjük a $3+4i$, $-5+2i$ stb. összetett (komplex) számokat. Ezek általános alakja: $z=a+ib$, ahol a és b valós számok. Az a számot z valós (reális) részének nevezzük és $\operatorname{Re} z$-vel jelöljük, b pedig z imaginárius (képzetes) része, jele $\operatorname{Im} z$.

[3] A KöMaL 1948. évi 2., 5. és 9. számaiban részletes cikksorozat olvasható erről a témakörről (Surányi János: Ismerkedjünk a komplex számokkal 1–3., `db.komal.hu/KomalHU/kereses.phtml?todo=1&Cim=ismerkedjünk a komplex`), továbbá az interneten: `https://hu.wikipedia.org/wiki/Komplex_számok`

[4] A villamosmérnöki gyakorlatban a váltóáramú áramkörök tárgyalásánál igen jól használható $\sqrt{-1}$ jele j, mert ott az i betűt már lefoglalták a pillanatnyi áramerősség jelölésére.

Alapműveletek komplex számokkal

A komplex számok összege:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2),$$

vagyis

$$\mathrm{Re}(z_1 + z_2) = \mathrm{Re}\, z_1 + \mathrm{Re}\, z_2 \quad \text{és} \quad \mathrm{Im}(z_1 + z_2) = \mathrm{Im}\, z_1 + \mathrm{Im}\, z_2$$

módon értelmezhető. Nyilván teljesülnek a valós számoknál megismert

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \qquad \text{és} \qquad (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$$

összefüggések.

Kicsit bonyolultabb a komplex számok szorzása:

$$(a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1),$$

azaz

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(z_1z_1) &= \mathrm{Re}\, z_1 \,\mathrm{Re}\, z_2 - \mathrm{Im}\, z_1 \,\mathrm{Im}\, z_2, \\ \mathrm{Im}(z_1z_2) &= \mathrm{Re}\, z_1 \,\mathrm{Im}\, z_2 + \mathrm{Re}\, z_2 \,\mathrm{Im}\, z_1. \end{aligned}$$

Közvetlen számolással belátható, hogy a

$$z_1z_2 = z_2z_1, \quad (z_1z_2)z_3 = z_1(z_2z_3) \quad \text{és} \quad (z_1 + z_2)z_3 = z_1z_3 + z_2z_3$$

azonosságok teljesülnek.

Hátravan még a komplex számok reciprokának (*multiplikatív* inverzének) és két komplex szám hányadosának kérdése. A $z = a + ib$ komplex szám reciprokának az

$$\frac{1}{z} \equiv z^{-1} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}$$

számot tekinthetjük, hiszen

$$zz^{-1} = \frac{(a + ib)(a - ib)}{a^2 + b^2} = 1.$$

Az $a = b = 0$ számot kivéve minden komplex számnak létezik egyértelmű reciproka. Két komplex szám hányadosának definíciója:

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1\frac{1}{z_2}.$$

A komplex konjugálás művelete és a komplex számok abszolút értéke

A továbbiakban fontos lesz a $z = a + ib$ számból képezhető másik komplex szám:

$$\overline{z} = a - ib,$$

amit z *komplex konjugáltjának* nevezünk. Minden komplex számnak van konjugáltja, és $\overline{\overline{z}} = z$. Könnyen ellenőrizhető, hogy teljesülnek a

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} \qquad \text{és} \qquad \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

azonosságok is.

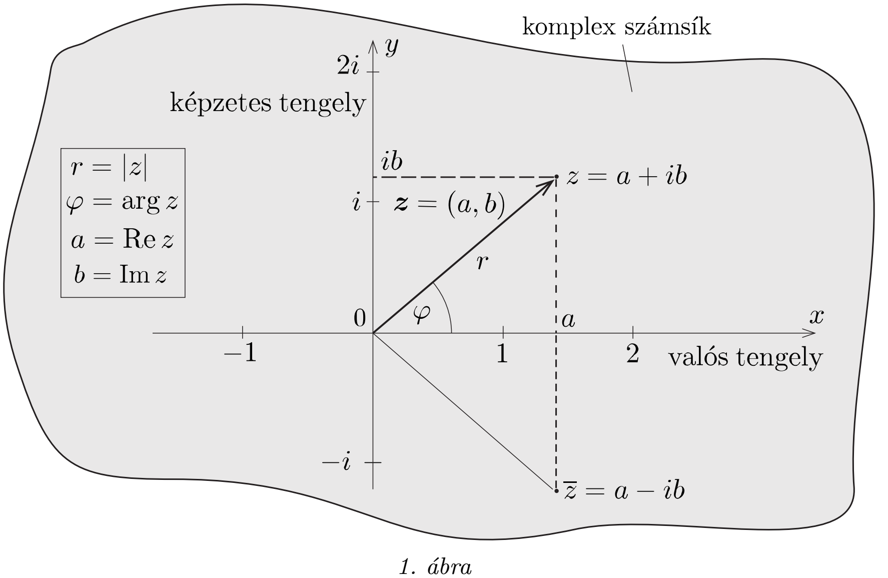
A $z\overline{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2$ nemnegatív, valós számot z abszolútértéknégyzetének nevezzük, és $|z|^2$ módon jelöljük. (Nyilván igaz, hogy $|\overline{z}| = |z|$).

Ezekkel a jelölésekkel egy komplex szám reciproka így írható fel: $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$, a valós és a képzetes része pedig így kapható meg:

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \overline{z}}{2}, \qquad \operatorname{Im} z = \frac{z - \overline{z}}{2i}.$$

A komplex számok ábrázolása a Gauss-féle számsíkon

A valós számokat (vagyis az $\operatorname{Im} z = 0$ alakú komplex számokat) egy egyenes (a számegyenes) pontjaiként ábrázolhatjuk. A nullától különböző képzetes résszel rendelkező komplex számok „nem férnek el” a számegyenesen, hiszen – a síkbeli vektorokhoz hasonlóan – két adattal jellemezhetőek. Gauss javaslatára a $z = a + ib$ komplex számot egy olyan sík pontjaként ábrázolhatjuk, amelyen két, egymásra merőleges tengely mentén mérjük fel az (előjeles) a és b távolságokat. Ezen tengelyek egyikét valós tengelynek, a másik (rá merőleges) tengelyt pedig képzetes tengelynek nevezzük. A két tengely metszéspontját választjuk mindkettőjük nullpontjának (*1. ábra*).



1. ábra

A komplex számsík z pontjába mutató $\boldsymbol{z} = (a, b)$ síkbeli vektor szoros rokonságban áll a z komplex számmal. Fennáll például az összeadás és a valós számmal való szorzás műveletének azonossága. Ha $z_1 + z_2 = z_3$, akkor $\boldsymbol{z}_1 + \boldsymbol{z}_2 = \boldsymbol{z}_3$, továbbá ha $w = \lambda z$ (λ valós, z pedig tetszőleges komplex szám), akkor $\boldsymbol{w} = \lambda \boldsymbol{z}$. A komplex konjugálás művelete a komplex számoknak a valós tengelyre vett *tükrözésével* valósítható meg.

Ezek az összefüggések teszik lehetővé, hogy a síkbeli vektorokkal leírható fizikai jelenségeket komplex számokkal is leírhassunk.

A komplex számok trigonometrikus és exponenciális alakja (Euler-formula)

Ismert, hogy egy sík tetszőleges P pontjának helyzetét nemcsak a Descartes-féle derékszögű koordinátákkal, hanem az ún. polárkoordinátákkal (r és φ) is meg lehet adni. Ezek geometriai jelentése: r a P pont és az O origó távolsága, φ pedig az OP egyenesnek az x tengellyel bezárt szöge.

Ezt az eljárást a komplex számsík pontjaival, vagyis a komplex számokkal is megtehetjük. Az *1. ábráról* leolvasható, hogy

$$\operatorname{Re} z = r\cos\varphi \qquad \text{és} \qquad \operatorname{Im} z = r\sin\varphi,$$

vagyis

$$z = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

A zárójelben álló komplex szám egységnyi abszolút értékű, r pedig $|z|$-tel egyezik meg. A fenti kifejezésben – amelyet a komplex számok *trigonometrikus alakjának* neveznek – a (radiánban mért) φ szög a komplex szám *fázisa*, más néven argumentuma. Jelölése: $\varphi = \arg z$.

A komplex számok $z = a + ib$ algebrai alakjából a trigonometrikus alak koordinátáit így kapjuk:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \qquad \text{illetve} \qquad \varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{b}{a}, & \text{ha } a > 0, \\ \pi + \operatorname{arctg}\frac{b}{a}, & \text{ha } a < 0. \end{cases}$$

A trigonometrikus alak segítségével egyszerűbben tárgyalható a komplex számok szorzása. Fennáll ugyanis, hogy

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \\ &= (r_1 r_2)\left[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_2\cos\varphi_1)\right] = \\ &= (r_1 r_2)\left[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right], \end{aligned}$$

vagyis

$$|z_1\, z_2| = |z_1|\,|z_2|, \quad \text{illetve} \quad \arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2).$$

A fenti második összefüggés emlékeztet a hatványfüggvény tulajdonságára:

$$c^{\varphi_1} c^{\varphi_2} = c^{(\varphi_1+\varphi_2)},$$

amit így is felírhatunk:

$$\mathrm{e}^{\lambda\varphi_1}\mathrm{e}^{\lambda\varphi_2} = \mathrm{e}^{\lambda(\varphi_1+\varphi_2)}.$$

Vajon milyen λ szám mellett azonosíthatjuk a $(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ komplex számot $\mathrm{e}^{\lambda\varphi}$-vel? Nyilvánvaló, hogy λ nem lehet valós szám, hiszen akkor az egész kifejezés valós lenne, márpedig nem az. Segítséget a nagyon kicsi szögekre érvényes közelítő alakok adhatnak:

$$\cos\varphi \approx 1; \qquad \sin\varphi \approx \varphi \qquad \text{és} \qquad \mathrm{e}^{\lambda\varphi} \approx 1 + \lambda\varphi.$$

Ezek összevetéséből kapjuk, hogy $\lambda = i$, vagyis

$$z = r\mathrm{e}^{i\varphi}.$$

Ezt az összefüggést (az ún. Euler-formulát) a komplex számok *exponenciális alakjának* nevezik.[5] Segítségével könnyen el tudunk forgatni tetszőleges z komplex számot az origó körül φ_0 szöggel $\left(z\ \mathrm{e}^{i\varphi_0}\right)$, illetve fel tudunk írni egy ω szögsebességgel forgó, egységnyi abszolút értékű komplex számot $\left(\mathrm{e}^{i\omega t}\right)$. Ezek a további fizikai alkalmazásokban fontos szerepet kapnak.

Van-e még tovább?

Jogos kérdés, hogy vajon további műveletek elvégezhetőségének igénye nem vezet-e még bővebb számfogalomhoz, „még komplexebb" számokhoz. A válasz – érdekes módon – az, hogy *nem*! Komplex számokkal a legfurcsább (a valós számok körében végrehajthatatlan) műveleteket végezhetünk el, és az eredmény még mindig a komplex számkör része marad. Így például van olyan komplex szám, aminek szinusza 2, vagy akár $2i$, és $\ln(3-2i)$ is kiszámítható.

Érdekességként számítsuk ki a képzetes egységnek, vagyis i-nek az i-edik hatványát. Mivel az Euler-formula szerint $i = \mathrm{e}^{i\pi/2}$, „a hatvány hatványozásánál a kitevők összeszorzódnak" szabályt alkalmazva kapjuk, hogy

$$i^i = \left(\mathrm{e}^{i\pi/2}\right)^i = \mathrm{e}^{i^2\pi/2} = \mathrm{e}^{-\pi/2}.$$

Meglepő módon az eredmény egy (irracionális) valós szám, amelynek közelítő értékét akár egy zsebszámológép is meg tudja adni: $i^i \approx 0{,}207\,879\,576$. Jóllehet i valós és képzetes része egész szám, a hatványozás eredményében megjelent a két legismertebb (és a fizikai alkalmazásokban legfontosabb) irracionális szám: a π és az e (a természetes logaritmus alapszáma).

Vízszintes síkban mozgó korongok rugalmas ütközése

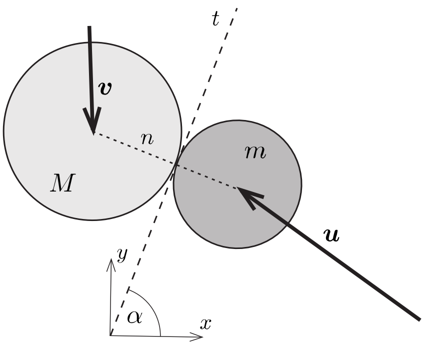
Alkalmazzuk a komplex számokról leírtakat egy nem szokványos fizikai jelenségre: vízszintes síkban mozgó korongok rugalmas ütközésére. Ilyen folyamatra mutatott példát a KöMaL múlt havi számában kitűzött **P. 5555.** feladat. A továbbiakban ennek a feladatnak az általánosítását oldjuk meg, de a cikk végén a

[5] Az Euler-formula bemutatott „származtatása" nem tekinthető szigorú levezetésnek, hanem inkább $\mathrm{e}^{i\varphi}$ definíciójának. A tisztán képzetes kitevőjű exponenciálisra másféle definíciók is adhatók, de azok is az Euler-formulához vezetnek.

hivatkozott feladat konkrét adataival számolva a feladat számszerű részeredményeit és a végeredményét is megadjuk.

Tegyük fel, hogy egy M tömegű, lapos korong $\boldsymbol{v}$ sebességgel mozogva nekiütközik egy m tömegű, az ütközés pillanatában $\boldsymbol{u}$ sebességgel rendelkező másik korongnak (*2. ábra*). (A korongok tömegének arányát a továbbiakban k-val jelöljük, azaz $M = km$.) Az ütközést rugalmasnak tekintjük, vagyis felhasználjuk, hogy a két korong összes mozgási energiája az ütközés során állandó marad. Az egyszerűség kedvéért csak olyan esetet vizsgálunk, amelyben az ütköző testek közötti súrlódás elhanyagolhatóan kicsi, tehát a korongok, ha korábban nem forogtak, nem is jönnek forgásba. Nem szorítkozunk azonban csak az egyenes ütközésekre, vagyis megengedjük, hogy az ütköző testek sebességvektora ne legyen párhuzamos a t-vel jelölt ütközési felületre merőleges (a korongok középpontját összekötő) n egyenessel.[6]

Az ütközés „ferdeségét” a korongok közös érintőjének az – önkényesen irányított – derékszögű koordináta-rendszer x tengelyével bezárt α szögével jellemezhetjük.[7]



2. ábra

Szeretnénk meghatározni a korongok ütközés utáni $\boldsymbol{V}$ és $\boldsymbol{U}$ sebességét, ezen vektorok irányát és a nagyságát. Ehhez több lépésen keresztül juthatunk el.

1. lépés. Felvesszük a választott derékszögű koordináta-rendszerhez illeszkedő Gauss-féle komplex számsíkot, és valamennyi síkbeli vektort ezen számsík pontjaiként kezelünk. (Ha a vektorok kezdőpontját az origóba toljuk, akkor a végpontjuk éppen a nekik megfelelő komplex számra esik.) A korongok ütközés előtti sebességét tehát a $v = v_x + iv_y$ és $u = u_x + iu_y$ (ismertnek tekintett) komplex számokkal adjuk meg.

2. lépés. Meghatározzuk a két korongból álló rendszer tömegközéppontjának w sebességét. Mivel a rendszer teljes lendülete (impulzusa) a $(M + m)w = Mv + mu$ komplex számmal adható meg, a tömegközéppont sebessége

$$w = \frac{Mv + mu}{M + m} = \frac{kv + u}{k + 1}.$$

[6]Ilyen ütközést – jó közelítéssel – sima peremű pénzérmékkel vagy befőttesüveg-kupakokkal hozhatunk létre.

[7]Az α szöget akkor tekintjük pozitívnak, ha az x tengely pozitív (az óramutató járásával ellentétes irányú) forgatással vihető át a t egyenesbe.

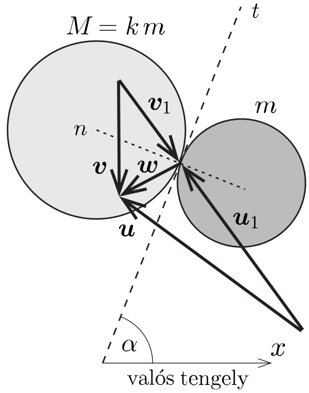
3. lépés. Az eredeti $\mathcal{K}$ koordináta-rendszerről áttérünk az ahhoz képest w sebességgel mozgó $\mathcal{K}_1$ tömegközépponti rendszerre. Ebben a rendszerben érvényes sebességeket úgy kapjuk meg, hogy az eredeti sebességekből kivonjuk w-t:

$$v_1 = v - w = v - \frac{kv+u}{k+1} = \frac{v-u}{k+1}, \quad \text{illetve} \quad u_1 = u - w = u - \frac{kv+u}{k+1} = k\frac{u-v}{k+1}.$$

Ez a két komplex szám (vektor) egymással párhuzamos, ellentétes irányú és a tömegekkel súlyozott összegük (vagyis a rendszer összimpulzusa) nulla:

$$Mv_1 + mu_1 = m\,(kv_1 + u_1) = 0.$$

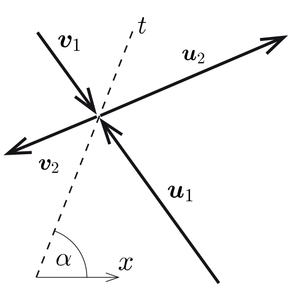
4. lépés. A korongok méretének és az egymáshoz való geometriai viszonyuk ismeretében meghatározhatjuk, hogy az ütközés pillanatában a korongok közös érintője, vagyis a t egyenes mekkora α szöget zár be a Gauss-számsík valós tengelyével (*3. ábra*).



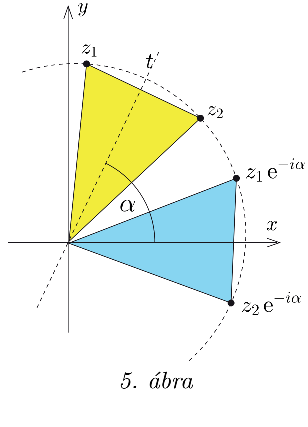
3. ábra

5. lépés. Az ütközés során bármelyik korong – tömegközépponti rendszerben mért – sebességének t irányú komponense változatlan marad (hiszen a korongok közötti súrlódás hiányában nem hat rájuk t irányú erő), az n irányú sebességkomponensek pedig előjelet váltanak. (Ez utóbbi az ütközés rugalmasságából következik.)

A korongok ütközés utáni sebességét tehát úgy kapjuk meg, hogy a $\boldsymbol{v}_1$ és az $\boldsymbol{u}_1$ vektorokat tükrözzük a t egyenesre (*4. ábra*).



4. ábra



5. ábra

Vajon milyen művelet felel meg ennek a tükrözésnek a komplex számok körében? Ha t a valós tengellyel esne egybe (vagyis $\alpha = 0$ teljesülne), akkor egy tetszőleges z_1 komplex szám z_2 tükörképe a komplex konjugáltja, vagyis $z_2 = \overline{z_1}$ lenne.

Az általános helyzetű t egyenesre történő tükrözés úgy valósítható meg, hogy elforgatjuk z_1-et, z_2-t és a t tengelyt negatív irányba α szöggel (*5. ábra*). Ezt a műveletet a komplex számok $\mathrm{e}^{-i\alpha}$-val való megszorzásával érhetjük el. Ezáltal az ábrán sárgával jelölt háromszög a kék háromszögbe megy át, a tükrözés t tengelye pedig a valós tengellyel esik egybe. Ezek szerint

$$z_2\mathrm{e}^{-i\alpha} = \overline{z_1\ \mathrm{e}^{-i\alpha}} = \overline{z_1}\ \mathrm{e}^{i\alpha},$$

ahonnan mindkét oldalt $\mathrm{e}^{i\alpha}$-val szorozva kapjuk, hogy

$$z_2 = \overline{z_1}\ \mathrm{e}^{2i\alpha}.$$

Megjegyzés. A fenti eredményhez algebrai megfontolásokkal is eljuthatunk. A tükrözés tulajdonságaiból következik, hogy z_2 és a $t = \mathrm{e}^{i\alpha}$ komplex számmal jellemzett tükrözési tengely közötti $\arg z_2 - \arg t$ szög megegyezik az $\arg t - \arg z_1$ szöggel, vagyis

$$\arg z_2 = -\arg z_1 + 2\alpha = \arg\left(\overline{z_1}\ \mathrm{e}^{2i\alpha}\right).$$

Másrészt $|z_2| = |z_1| = |\overline{z_1}|$, tehát $z_2 = \overline{z_1}\ \mathrm{e}^{2i\alpha}$ valóban teljesül.

Ugyanezzel a képlettel kaphatjuk meg a 3. lépésben kiszámított v_1 és u_1 komplex sebességek ütközés utáni értékeit a tömegközépponti $\mathcal{K}_1$ rendszerben:

$$v_2 = \overline{v_1}\ \mathrm{e}^{2i\alpha}, \qquad \text{illetve} \qquad u_2 = \overline{u_1}\ \mathrm{e}^{2i\alpha}.$$

6. lépés. A tömegközépponti rendszerből az eredeti $\mathcal{K}$ rendszerbe úgy térhetünk vissza, hogy a sebességekhez hozzáadjuk a tömegközéppont w sebességét. Ez adja meg a korongok ütközés utáni $V = v_2 + w$ és $U = u_2 + w$ sebességét.

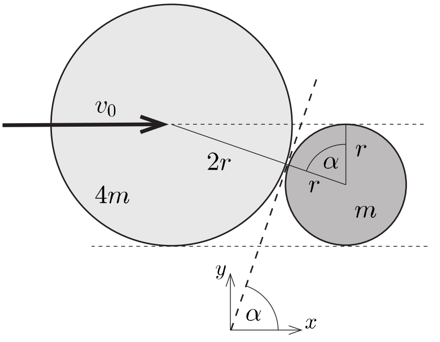
Az egyes lépések eredményeit összerakva végül ezt kapjuk:

$$V = \frac{1}{k+1}\left(kv + u + \overline{v}\ \mathrm{e}^{2i\alpha} - \overline{u}\ \mathrm{e}^{2i\alpha}\right),$$
$$U = \frac{1}{k+1}\left(kv + u + k\overline{u}\ \mathrm{e}^{2i\alpha} - k\overline{v}\ \mathrm{e}^{2i\alpha}\right).$$

Ezen komplex számok abszolút értéke, argumentuma, valamint a valós és a képzetes része megadja a végsebességek nagyságát, irányát és a sebességvektorok derékszögű komponenseit.

A P. 5555. feladat megoldása komplex számok segítségével

A hivatkozott feladatban egy vízszintes asztallapon m tömegű, r sugarú álló korongnak ütközik egy $M = 4m$ tömegű, $R = 2r$ sugarú, v_0 sebességgel mozgó másik korong. A nagyobb korong sebességvektorának iránya az ütközés pillanatában éppen érinti a kisebb korongot (*6. ábra*).



6. ábra

Válasszunk egy olyan síkbeli, derékszögű $\mathcal{K}$ koordináta-rendszert, amelyben a nagyobb korong éppen az x tengely irányába mozog. Az ábráról leolvashatjuk, hogy az ütközés ferdeségére jellemző szög: $\alpha = \arccos \frac{1}{3} \approx 70{,}5°$.

Vegyünk fel egy – a $\mathcal{K}$ rendszerhez illeszkedő – Gauss-féle komplex számsíkot, és ábrázoljuk a sebességvektorokat komplex számokkal. Esetünkben $k = 4$, $v = v_0$ (valós szám), $u = 0$, és ezekből következően a tömegközéppont sebessége: $w = \frac{4}{5} v_0$.

A tömegközépponttal együtt mozgó $\mathcal{K}_1$ rendszerben a korongok sebessége:

$$v_1 = v - w = \frac{1}{5} v_0, \qquad \text{illetve} \qquad u_1 = u - w = -\frac{4}{5} v_0.$$

Az ütközés utáni sebességek (még mindig a $\mathcal{K}_1$ rendszerben)

$$v_2 = \overline{v_1} \mathrm{e}^{2i\alpha} = \frac{1}{5}\, \mathrm{e}^{2i\alpha} v_0 \qquad \text{és} \qquad u_2 = \overline{u_2} \mathrm{e}^{2i\alpha} = -\frac{4}{5}\, \mathrm{e}^{2i\alpha} v_0.$$

Visszatérve az asztalhoz rögzített $\mathcal{K}$ rendszerbe a korongok ütközés utáni sebessége:

$$V = v_2 + w = \frac{1}{5}\left(4 + \mathrm{e}^{2i\alpha}\right) v_0 = \frac{4 + \cos 2\alpha}{5} v_0 + i \frac{\sin 2\alpha}{5} v_0,$$

valamint

$$U = u_2 + w = \frac{4}{5}\left(1 - \mathrm{e}^{2i\alpha}\right) v_0 = \frac{4 - 4\cos 2\alpha}{5} v_0 - i \frac{4 \sin 2\alpha}{5} v_0.$$

Kihasználva, hogy $\cos\alpha = \frac{1}{3}$ esetén $\cos 2\alpha = -\frac{7}{9}$ és $\sin 2\alpha = \frac{4}{9}\sqrt{2}$, az ütközés utáni sebességvektorok derékszögű komponenseire kapjuk, hogy

$$V_x = \operatorname{Re} V = \frac{29}{45} v_0 \approx 0{,}64 v_0, \qquad V_y = \operatorname{Im} V = \frac{4\sqrt{2}}{45} v_0 \approx 0{,}13 v_0,$$

$$U_x = \operatorname{Re} U = \frac{64}{45} v_0 \approx 1{,}42 v_0, \qquad U_y = \operatorname{Im} U = -\frac{16\sqrt{2}}{45} v_0 \approx -0{,}50 v_0,$$

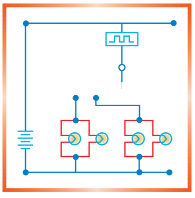
továbbá

$$|\boldsymbol{V}| \approx 0{,}66 v_0 \qquad \text{és} \qquad |\boldsymbol{U}| \approx 1{,}51 v_0.$$

A nagyobb korong az x tengelytől $\operatorname{arctg} \frac{V_y}{V_x} \approx 11°$-os szöggel balra, a kisebb korong pedig $\operatorname{arctg} \frac{U_y}{U_x} \approx -19{,}5°$-os szöggel (tehát jobbra) térül el.

A két korong sebességnégyzetének aránya az ütközés után $\frac{|\boldsymbol{U}|^2}{|\boldsymbol{V}|^2} \approx 5{,}28$, és az asztallal való súrlódás miatt egyenletesen lassuló korongok által megtett utak aránya is ugyanekkora. Ha tehát a nagy korong az asztalon súrlódva mondjuk 5 cm után áll meg, akkor a kisebb korong a megállásáig 26,4 cm utat tesz meg.

Gnädig Péter
Vácduka

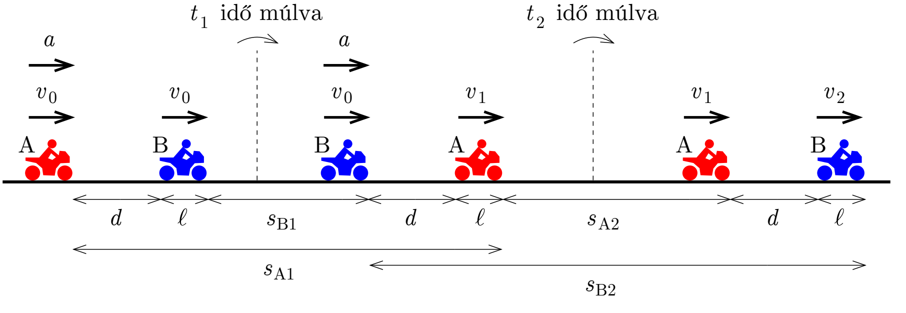


Fizika gyakorlatok megoldása

G. 839. Két motoros halad egymás mögött 30 m/s sebességgel egy versenypályán, a közöttük lévő távolság 23 m, a motorkerékpárok hossza 2 m. Egyszer csak a hátsó motoros előzésbe kezd, 1 m/s^2-tel gyorsít addig, míg 23 m-rel a társa elé nem kerül, majd állandó sebességgel halad tovább. Abban a pillanatban, amikor befejezi az előzést, a másik motoros is előzésbe kezd szintén 1 m/s^2-es gyorsulással, amit hasonlóan 23 m-rel a társa előtt fejez be. Mekkora sebességet érnek el a motorosok a kétszeres előzés után?

(*4 pont*)

I. megoldás. A motorok közötti távolság kezdetben $d = 23$ m, a motorok hossza $\ell = 2$ m, a kezdeti sebességük $v_0 = 30\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.



Az A-jelű motor t_1 idő alatt előzte meg a B-jelűt, ezalatt a B-jelű orra

$$s_{B1} = v_0 t_1 \tag{1}$$

távolsággal került előrébb. Az A-jelű motor által gyorsulva megtett út:

$$s_{A1} = v_0 t_1 + \frac{a}{2} t_1^2, \tag{2}$$

az *ábra* alapján pedig

(3) $$s_{\mathrm{A}1} = d + \ell + s_{\mathrm{B}1} + d + \ell.$$

(1)-et és (2)-t (3)-ba beírva:

$$v_0 t_1 + \frac{a}{2} t_1^2 = v_0 t_1 + 2(d + \ell),$$
$$t_1 = \sqrt{\frac{4(d + \ell)}{a}} = 10 \text{ s}.$$

Az első előzés 10 s-ig tartott, az A-jelű motor sebessége az előzés után:

$$v_1 = v_0 + a t_1 = 40\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

A második előzés t_2 ideig tartott, ezalatt az A-jelű orra

(4) $$s_{\mathrm{A}2} = v_1 t_2$$

távolsággal került előrébb. A B-jelű motor által gyorsulva megtett út:

(5) $$s_{\mathrm{B}2} = v_0 t_2 + \frac{a}{2} t_2^2,$$

az *ábra* alapján pedig

(6) $$s_{\mathrm{B}2} = d + \ell + s_{\mathrm{A}2} + d + \ell.$$

(4)-et és (5)-öt (6)-ba beírva:

$$v_0 t_2 + \frac{a}{2} t_2^2 = v_1 t_2 + 2(d + \ell),$$
$$\frac{a}{2} t_2^2 + (v_0 - v_1) t_2 - 2(d + \ell) = 0,$$

a másodfokú egyenlet pozitív gyöke:

$$t_2 = \frac{v_1 - v_0 + \sqrt{(v_0 - v_1)^2 + 4a(d + \ell)}}{a} = 24{,}14 \text{ s}.$$

A második előzés 24,14 s-ig tartott, a B-jelű motor sebessége az előzés után:

$$v_2 = v_0 + a t_2 = 54{,}14\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Tehát a motorok sebessége a kétszeres előzés után: $v_\mathrm{A} = v_1 = 40\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 144\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ és $v_\mathrm{B} = v_2 = 54{,}14\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 195\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$.

Fülöp Magdaléna (Pécsi Leőwey Klára Gimn., 9. évf.)

II. megoldás. A kezdetben hátul haladó motor legyen az A-, az elöl haladó pedig a B-jelű. A két motor közti távolság $d=23$ m, egy motor hossza $\ell=2$ m, így az előző motornak a másik motorhoz viszonyítva $s=2(d+\ell)=50$ m utat kell megtennie egy előzés során. Kezdetben a versenypályához képest mindkét motor $v_0=30~\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ sebességgel halad.

Az első előzés során legyen a *vonatkoztatási rendszer* az elöl (állandó sebességgel) haladó B-jelű motor. Ebben a vonatkoztatási rendszerben ez a motor így nyugalomban van, a másik (gyorsító) motornak pedig a kezdősebessége nulla. Az A-jelű motor előzési idejének meghatározása:

$$s=\frac{a}{2}t_1^2,$$

amiből:

$$t_1=\sqrt{\frac{2s}{a}}=10~\mathrm{s}.$$

A motor sebességváltozása ez alapján $\Delta v_1=at_1=10~\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Tehát az első előzés után a sebességek a versenypályához viszonyítva:

$$v'_\mathrm{A}=v_0+\Delta v_1=40~\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}},$$
$$v'_\mathrm{B}=v_0=30~\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

A második előzés során legyen a *vonatkoztatási rendszer* a most már állandó sebességgel elöl haladó, A-jelű motor. Ez a motor ebben a rendszerben nyugalomban van, a másik (B-jelű, gyorsító) motor kezdősebessége pedig $v'_0=-10~\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. A B-jelű motor előzési idejének meghatározása:

$$s=v'_0t_2+\frac{a}{2}t_2^2,$$

az egyenlet pozitív gyöke

$$t_2=\frac{-v'_0+\sqrt{v'^2_0+2as}}{a}=24{,}14~\mathrm{s}.$$

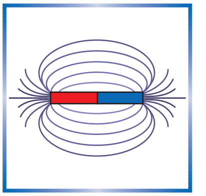
A sebességváltozás ez alapján $\Delta v_2=at_2=24{,}14~\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Tehát a két előzés után a két motor sebessége a versenypályához viszonyítva:

$$v''_\mathrm{A}=v'_\mathrm{A}=40~\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}},$$
$$v''_\mathrm{B}=v'_\mathrm{B}+\Delta v_2=54{,}14~\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Papp Emese Petra (Budapest, ELTE Apáczai Csere J. Gyak. Gimn., 9. évf.)

51 dolgozat érkezett. Helyes 29 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 7, hiányos (1–2 pont) 11, hibás 2, nem versenyszerű 2 dolgozat.

Fizika feladatok megoldása



P. 5532. *Egy változtatható kapacitású kondenzátort, melynek kezdeti kapacitása C_0, feltöltünk U_0 feszültségre, majd egy R ellenálláson keresztül rövidre zárunk.*

a) Mennyi ideig és hogyan kell a kondenzátor kapacitását változtatnunk, hogy a kondenzátor kisütése közben az áramerősség állandó maradjon?

b) Határozzuk meg a kondenzátor kezdeti energiájának és az ellenálláson keletkező Joule-hőnek az arányát! Adjunk magyarázatot az eredményünkre.

(5 pont) A Quantum Magazine nyomán

Megoldás. *a)* A feladat szövege szerint az áramerősség időben állandó, így a kondenzátor feszültsége is állandó: $U(t)=RI(t)=RI_0=U_0$. A kondenzátoron lévő töltés időfüggése:

$$Q(t)=Q_0-I_0t=Q_0-\frac{U_0}{R}t,$$

ahol $Q_0=C_0U_0$ a kondenzátor kezdeti töltése. A kondenzátor kapacitása:

$$C(t)=\frac{Q(t)}{U(t)}=\frac{Q_0-\frac{U_0}{R}t}{U_0}=C_0-\frac{t}{R}.$$

Ennek mindvégig pozitívnak kell maradnia, tehát a kondenzátort

$$t_\mathrm{k}=RC_0$$

ideig lehet így kisütni. Ezalatt a kondenzátor töltése nullára csökken.

b) Az ellenálláson disszipálódott hő nagysága

$$W=Pt_\mathrm{k}=RI_0^2\cdot RC_0=C_0U_0^2,$$

a kondenzátor kezdeti energiája pedig

$$E=\frac{1}{2}C_0U_0^2,$$

amely így éppen feleakkora, mint a Joule-hő. A rendszeren tehát munkát kellett végeznünk, miközben csökkentettük a kondenzátor kapacitását.

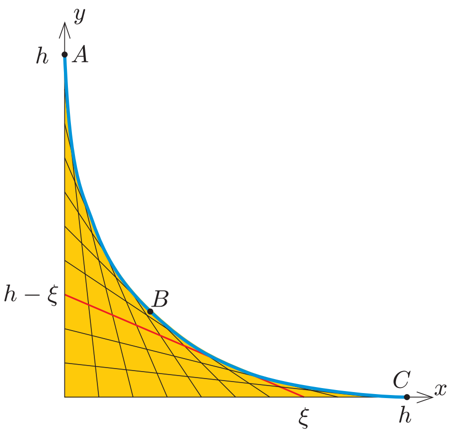
A kondenzátor energiája a következő alakban is felírható:

$$E=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C},$$

amiből látszik, hogy (állandó töltés esetében) a kapacitás csökkentésével nő az energia. A kondenzátor kapacitása például a fegyverzetek távolságának növelésével csökkenthető, ami a lemezek közötti vonzóerő miatt munkavégzést igényel.

Fajszi Karsa (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.)

25 dolgozat érkezett. Helyes 9 megoldás. Kicsit hiányos (3–4 pont) 12, hiányos (1–2 pont) 4 dolgozat.



P. 5534. *Legyen egy derékszögű koordináta-rendszer x tengelye vízszintes, y tengelye pedig függőleges. Az x tengely* $0 \le \xi \le h = 1$ m *minden egyes* $x = \xi$ *pontját kössük össze az y tengelyen lévő* $y = h - \xi$ *ponttal. Fektessünk egy súrlódásmentes, vékony csövet az előzőek szerint felvett szakaszokból kialakuló sárga „síkidom” burkolójára.*

Indítsunk el lökésmentesen egy m tömegű, kicsiny testet a cső tetejéről. Adjuk meg mg egységekben, hogy a mozgása során mekkora erővel nyomja a test a cső falát

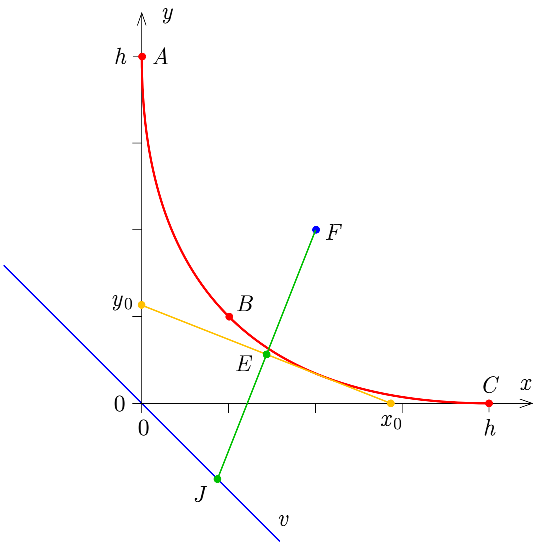
a) közvetlenül az indulás után az A pontban;

b) a cső B felezőpontjánál;

c) közvetlenül a cső elhagyása előtt a C pontnál!

(*6 pont*) Közli: *Honyek Gyula*, Veresegyház

Megoldás. I. *A görbe egyenletének meghatározása.*



1. ábra

Sejtés. A görbe egy parabola[8], amelynek fókuszpontja az $F\left(\frac{h}{2};\frac{h}{2}\right)$ pont és a vezéregyenese az $y=-x$ egyenes (*1. ábra*).

Bizonyítás. Ismert, hogy a fókuszpont és a vezéregyenes egy tetszőleges pontja által meghatározott szakasz felezőmerőlegese érinti a parabolát. Legyen $J(j;-j)$ a vezéregyenes egy általános pontja. A $\overline{JF}$ szakasz meredeksége:

$$m=\frac{\frac{h}{2}+j}{\frac{h}{2}-j}=\frac{h+2j}{h-2j},$$

az erre merőleges érintő meredeksége pedig:

$$m=\frac{-h+2j}{h+2j}.$$

[8]A probléma matematikai továbbgondolását lásd *A P. 5534. fizika feladat matematikai margójára* című cikkben a *194. oldalon*.

Ez az egyenes átmegy a $\overline{JF}$ szakasz

$$E\left(\frac{\frac{h}{2}+j}{2}; \frac{\frac{h}{2}-j}{2}\right) = E\left(\frac{h+2j}{4}; \frac{h-2j}{4}\right)$$

felezőpontján, így az egyenlete:

$$y - \frac{h-2j}{4} = \frac{-h+2j}{h+2j}\left(x - \frac{h+2j}{4}\right),$$
$$y = \frac{-h+2j}{h+2j}x + \frac{h-2j}{2}.$$

Az egyenes tengelymetszetei:

$$x_0 = -\frac{h-2j}{2} : \frac{-h+2j}{h+2j} = \frac{h+2j}{2},$$
$$y_0 = \frac{h-2j}{2}.$$

A két tengelymetszet összege:

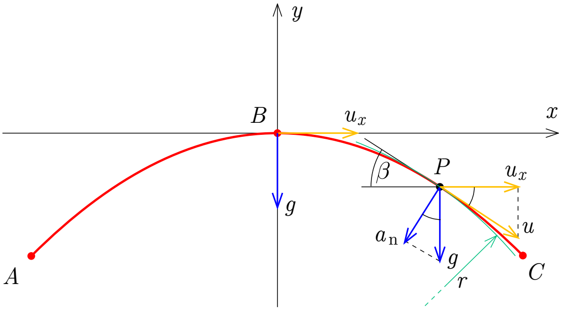
$$x_0 + y_0 = \frac{h+2j}{2} + \frac{h-2j}{2} = h,$$

megegyezően a feladatban leírt érintőszakaszokkal. Ezzel a sejtést bizonyítottuk. A parabola egyenlete:

$$x^2 - 2xy + y^2 - 2hx - 2hy + h^2 = 0.$$

II. *A görbület meghatározása.* Ha a parabolát elforgatjuk $-135°$-kal és elcsúsztatjuk az y tengely mentén $\frac{\sqrt{2}h}{4}$-gyel, akkor a B pont az origóba kerül (*2. ábra*). Az új görbe egyenlete:

$$y = -\frac{\sqrt{2}}{2h}x^2.$$



2. ábra

Vizsgáljunk egy olyan hajítást, amelynek ez az elforgatott parabola a pályája:

$$x = u_x t,$$
$$-\frac{\sqrt{2}}{2h}x^2 = -\frac{g}{2}t^2.$$

A két egyenletből t kiküszöbölésével a test (időben állandó) vízszintes sebességkomponense:

$$u_x^2 = \frac{\sqrt{2}gh}{2}.$$

Határozzuk meg a pálya r görbületi sugarát a pálya egy tetszőleges P pontjában. A pályára merőleges gyorsulás, a sebesség, és a simulókör sugara között az

$$a_{\mathrm{n}} = \frac{u^2}{r}$$

összefüggés áll fenn. A P pontban a test sebessége

$$u = \frac{u_x}{\cos\beta},$$

pályára merőleges gyorsulása pedig:

$$a_{\mathrm{n}} = g\cos\beta,$$

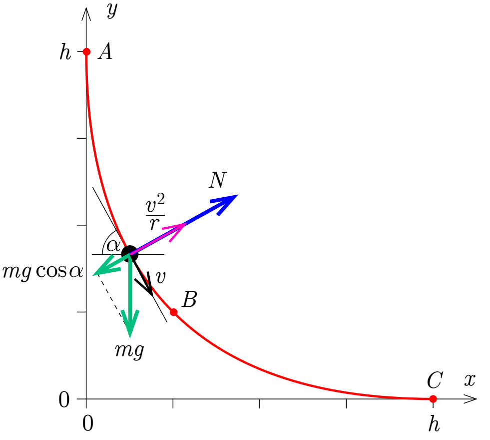
ahol β az elforgatott pálya érintőjének vízszintessel bezárt szöge. Ezeket felhasználva:

$$r = \frac{u^2}{a_{\mathrm{n}}} = \frac{u_x^2}{g\cos^3\beta} = \frac{\sqrt{2}}{2\cos^3\beta}\,h.$$

III. *A nyomóerő meghatározása.* Térjünk vissza az eredeti pályán történő mozgás vizsgálatára. A mozgásegyenlet a pályára merőleges irányban:

$$N - mg\cos\alpha = m\frac{v^2}{r},$$
$$N = mg\cos\alpha + m\frac{v^2}{r},$$

ahol N a keresett nyomóerő nagysága, α pedig a pálya érintőjének vízszintessel bezárt szöge (*3. ábra*).



3. ábra

A test sebességét az energiamegmaradás alapján számolhatjuk ki:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg\Delta h,$$
$$v^2 = 2g\Delta h,$$

ahol Δh az A pont és a vizsgált pont magasságkülönbsége.

Végül a keresett nyomóerők:

a) $N_A = 0$, mert az A pontban a testnek még nincs sebessége és a cső fala függőleges.

b) A B pontban:

$$\beta = 0°, \quad \cos\beta = 1, \quad r = \frac{\sqrt{2}}{2\cos^3\beta}\,h = \frac{\sqrt{2}}{2}\,h,$$

$$\Delta h = \frac{3}{4}\,h, \quad v^2 = 2g\Delta h = \frac{3}{2}\,gh, \quad \alpha = 45°, \quad \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$N_B = mg\cos\alpha + m\frac{v^2}{r} = mg\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3mgh}{\sqrt{2}h} = 2\sqrt{2}\,mg \approx 2{,}8mg.$$

c) A C pontban:

$$\beta = 45°, \quad \cos\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad r = \frac{\sqrt{2}}{2\cos^3\beta}\,h = \frac{\sqrt{2}}{2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3}\,h = 2h,$$

$$\Delta h = h, \quad v^2 = 2g\Delta h = 2gh, \quad \alpha = 0°, \quad \cos\alpha = 1,$$

$$N_C = mg\cos\alpha + m\frac{v^2}{r} = mg + \frac{2mgh}{2h} = 2mg.$$

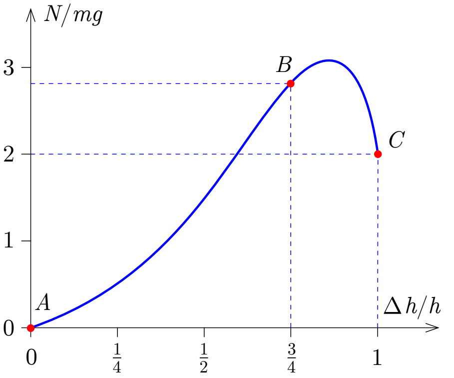
Kiss Adorján Timon (Kaposvári Táncsics M. Gimn., 11. évf.) dolgozata alapján

Megjegyzések. 1. A parabola görbületi sugara a megoldásban szereplő módszeren kívül geometriai optikai megfontolásokkal is meghatározható. Ezen kívül egy függvény $r(x)$ görbületi sugara fizikai megfontolások nélkül, differenciálszámítással is kiszámítható:

$$\frac{1}{r(x)} = \frac{f''(x)}{\left(1 + [f'(x)]^2\right)^{\frac{3}{2}}},$$

ahol $f'(x)$ és $f''(x)$ az $f(x)$ függvény x szerinti első és második deriváltja. (A megoldók többsége így járt el.)

2. A *4. ábrán* a nyomóerőt ábrázoltuk a Δh magasságkülönbség függvényében.



4. ábra

24 dolgozat érkezett. Helyes 12 megoldás. Hiányos (1–3 pont) 11, hibás 1 dolgozat.

Fizikából kitűzött feladatok

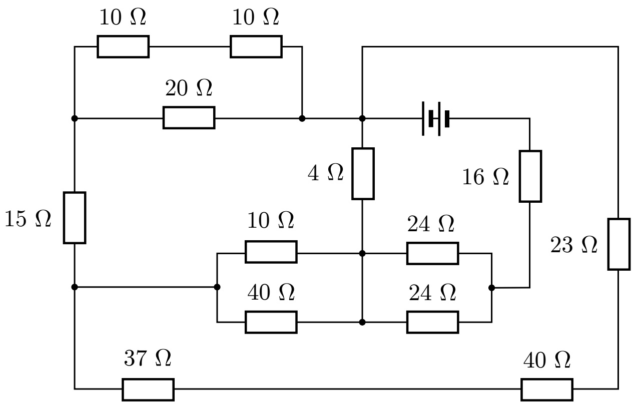
M. 431. Mérjük meg a zselatin törésmutatóját!

(6 pont) Példatári mérés nyomán

G. 849. Milyen hosszú lenne a Földön egy nap, ha az Egyenlítőn súlytalanság lenne? Tételezzük fel, hogy a forgási időn kívül minden más paraméter változatlan.

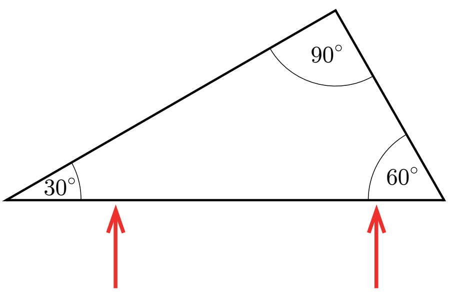
(3 pont)

G. 850. Mennyi az *ábrán* látható áramkör eredő ellenállása a telep két kimenete között?



(4 pont)

G. 851. A cirkónium-dioxid törésmutatója 2,1. Ebből az anyagból egy 30°–60°–90°-os prizmát készítünk, amelyre az *ábrán* látható módon két vékony fénysugarat bocsátunk. Mekkora szöget zár be egymással a prizmából kilépő két fénysugár?



(4 pont)

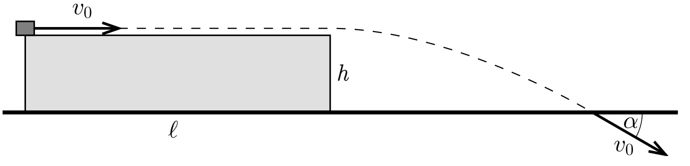
G. 852. Egy radioaktív minta két különböző izotópot tartalmaz, ezek jelölése legyen A és B. Az A izotóp felezési ideje 3 nap, a B izotópé pedig 6 nap. Kezdetben a mintában kétszer annyi atom van az A izotópból, mint a B-ből. Mennyi idő múlva fordul meg ez az arány a reciprokára?

(4 pont)

P. 5562. Vízszintes asztal egyik széléről v_0 kezdősebességgel elindítunk egy pontszerűnek tekinthető testet. A test az asztallapon végigcsúszva lerepül az asztalról és v_0 nagyságú, a vízszintes talajjal $\alpha = 30°$-os szöget bezáró sebességgel ér földet. Az asztal $h = 0{,}8$ m magas és $\ell = 3{,}2$ m hosszú.

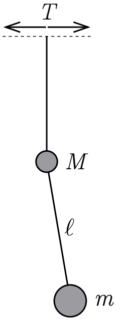
a) Mekkora kezdősebességgel indítottuk a testet?

b) Mekkora az asztallap és a test között a csúszási súrlódási együttható értéke?



(4 pont) Közli: *Veres Dénes,* Szolnok

P. 5563. Az M és m tömegű, kis méretű testeket ℓ hosszúságú fonállal kötjük össze. A M tömegű testhez egy másik fonalat is erősítünk, és annak felső végét kicsiny amplitúdóval, T periódusidejű harmonikus rezgőmozgással vízszintesen mozgatjuk. Mekkora ℓ hossz esetén maradhat a rezgetett fonál mindvégig függőleges?



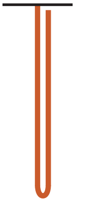
(5 pont) Kvant

P. 5564. Egy pingponglabda a vízszintes síkú pingpongütőn nyugszik. Az ütőt vízszintes irányban mozgatni kezdjük úgy, hogy az nulla kezdősebességű, A amplitúdójú, ω körfrekvenciájú rezgőmozgást végezzen. Adjuk meg a labda középpontjának elmozdulását az idő függvényében! Milyen hosszú nyomot hagy az enyhén begrafitozott labda az ütőn? (Tegyük fel, hogy a labda nem hagyja el az ütő felületét és nem csúszik meg rajta.)

(5 pont) Közli: *Vigh Máté,* Biatorbágy

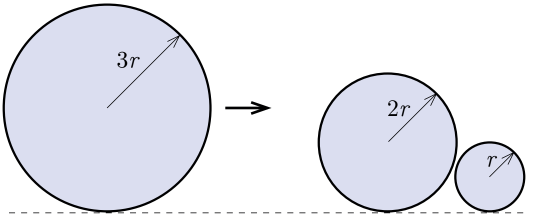
P. 5565. Egy hosszú, hajlékony, súlyos lánc egyik végét rögzítettük. A lelógó lánc akkor szakadna el, ha a saját súlyánál nagyobb terhet akasztanánk rá.

A láncot az *ábrán* látható helyzetben elengedjük. (A mozgó és a már megfeszült láncdarab is függőleges egyenesnek tekinthető.) Vajon elszakad-e a lánc?



(5 pont) Közli: *Gerencsér Jenő,* Kaposvár

P. 5566. Vízszintes, nem teljesen sima asztallapon egymást majdnem érintve nyugszik egy $2r$ és egy r sugarú korong. A síkon egy harmadik, $3r$ sugarú korong forgásmentesen csúszik úgy, hogy a sebességvektora a három korong közös érintőjével párhuzamos (lásd a felülnézeti *ábrát*). Mindhárom korong ugyanabból az anyagból készült és a magasságuk is ugyanakkora.

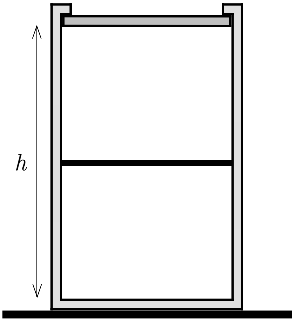


A rugalmasnak tekinthető ütközés után a $3r$ sugarú korong a súrlódás miatt lelassul és $d = 5$ cm út megtétele után megáll. Milyen irányban és milyen messzire jutnak el a kisebb korongok az asztalon? A korongok közötti súrlódás elhanyagolható.

Útmutatás: Lásd a **P. 5555.** feladatot lapunk 2024. márciusi számában és a *Komplex számok a fizikában I.* cikket a jelen számban.

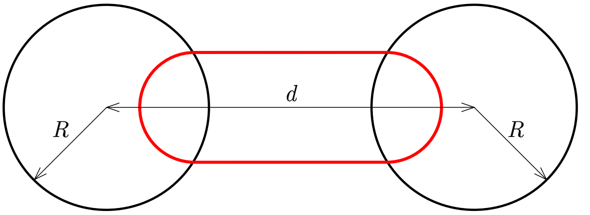
(5 pont) Közli: *Holics László,* Budapest

P. 5567. Vákuumba helyezett, peremes kialakítású, h magasságú, hőszigetelő tartály vízszintes asztalon áll. A tartályban kezdetben p_0 nyomású gáz található, melyet felülről egy hőszigetelő, könnyű dugattyú zár le, a tartály magasságának felénél pedig hővezető, vékony, könnyű dugattyú található. A tartály felső felében egyatomos, alul kétatomos gáz található. A felső dugattyúra óvatosan egy nagyon nehéz terhet helyezünk, majd elengedjük azt. A dugattyúk mozgása – a gázok belső súrlódása miatt – jónéhány lengés után megáll. Hol helyezkednek el a dugattyúk az egyensúlyi helyzetükben?



(5 pont) Közli: *Berke Martin,* Budapest

P. 5568. Egymástól d távolságra lévő R sugarú ($d > 2R$) kör alakú tartományban (két fekete kör) a homogén térben a mágneses indukció nagysága B, és az *ábra* síkjára merőlegesen, azonos irányba mutat. A Q töltésű, m tömegű, pontszerű



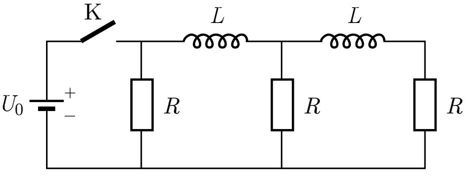
részecske v sebességgel az *ábrán* látható periodikus pályán mozog (piros görbe). Mennyi idő alatt tesz meg egy periódust a részecske? Mekkora lehet a mágneses indukció legkisebb értéke, hogy még kialakuljon periodikus pálya?

(4 pont) Közli: *Cserti József,* Budapest

P. 5569. Becsüljük meg az emberi testben található protonok és neutronok darabszámának arányát!

(3 pont) Példatári feladat nyomán

P. 5570. Az *ábrán* látható – három egyforma ellenállást és két egyforma tekercset tartalmazó – hálózatot viszonylag hosszú ideje egyenáramú forrásra kapcsoltuk. (A tekercsek ohmikus ellenállása elhanyagolható.)



a) Mekkora áram fog folyni az ellenállásokon közvetlenül a K kapcsoló kikapcsolása után?

b) Mekkora feszültség indukálódik a tekercsekben közvetlenül a K kapcsoló kikapcsolása után?

c) Hogyan változik időben a tekercseken folyó áramerősségek összege, illetve különbsége?

d) Mennyi idő múlva csökken az egyik, illetve a másik tekercs áramerőssége a K kapcsoló kikapcsolása után nagyon hamar mérhető áramerősség felére?

Adatok: $U_0 = 1$ V, $L = 1$ H, $R = 1$ Ω.

(6 pont) *Károlyházy Frigyes* (1929-2012) feladata nyomán

Áprilisi pótfeladat.[9] A Kiribati Köztársasághoz tartozó Karácsony-sziget és a Hawaii-szigetek nagyjából ugyanazon a hosszúsági körön fekszenek, de teljesen más időzónához tartoznak. Állapítsuk meg, hogy milyen nap és hány óra van a Hawaii-szigeteken, amikor a Karácsony-szigeten április 1., hétfő reggel 6 óra van!

[9] A feladat megoldása beküldhető a `fizszerkbiz2021@googlegroups.com` címre, de nem számít bele a pontversenybe.

MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL
FOR SECONDARY SCHOOLS
(Volume 74. No. 4. April 2024)

Problems in Mathematics

New exercises for practice – competition K (see page 224): **K. 809.** Let a_1 be a positive integer from which we create a sequence according to the following rule. If the decimal form of a_n is $10A_n + b_n$ (where b_n is the unit digit of a_n), then $a_{n+1} = A_n + 6b_n$. Show that either all terms of the sequence are divisible by 59 or none of them are. (*Urbán János* (1939–2012), Budapest) **K. 810.** Trapezoid $ABCD$ has the following properties: $AB \parallel CD$, $AB = 3CD$ and $CD = DA$. Find the angles of the trapezoid knowing that $\angle CDA = 120°$. (*German competition problem*) **K. 811.** We have filled in the squares of the 8×8 chessboard with the positive integers from 1 to 64 in increasing order, starting from the top left corner and proceeding row by row. Is it possible to delete two numbers from two adjacent squares (two squares sharing an edge or a vertex) such that the sum of the remaining numbers is exactly 2024? (Proposed by *Bálint Bíró*, Eger) **K/C. 812.** Number 2024 has the property that exactly one of its digits (namely the 0) is a multiple of its every other digit. How many four-digit positive integers have at least two such digits? (Proposed by *Katalin Abigél Kozma*, Győr) **K/C. 813.** We draw square $EBFG$ and several other squares congruent to it next to square $ABCD$ according to the diagram. Find the ratio of the areas of triangle DHE and quadrilateral $HKLE$. (See figure on page 224.) (Based on the idea of *János Deres*, Csurgó)

New exercises for practice – competition C (see page 225): Exercises up to grade 10: **K/C. 812.** See the text at Exercises **K**. **K/C. 813.** See the text at Exercises **K**. **Exercises for everyone: C. 1808.** Boglárka fills in each square of a 4×4 lattice with exactly one of numbers 2023, 2024 and 2025. How many ways can she do this, if we also require that the sum of the four numbers in each row and each column must be divisible by 3? (Proposed by *Katalin Abigél Kozma*, Győr) **C. 1809.** Let point B be chosen inside line segment AC. We draw isosceles triangles ABS_1, BCS_2 and CAS_3 with no common interior points, bases AB, BC and CA, respectively, and base angles of $30°$. Prove that triangle $S_1S_2S_3$ is equilateral. (German competition problem) **C. 1810.** Find the real roots of equation $(x+2)^6 + (x^2 - 4x - 4)^3 = 8x^6$. (Proposed by *Bálint Bíró*, Eger) **Exercises upwards of grade 11: C. 1811.** Let $f(x) = x^2$ and $g(x) = x^2 - 2x + 2$. Find the equation of the common tangent of the graphs of these two functions. (Proposed by *Csaba Sándor*, Budapest) **C. 1812.** Let a, b and c denote the lengths of the sides of a triangle satisfying $a + b = 3c$. Let α and β denote the angles opposite to sides a and b, respectively. Prove that $\cot\frac{\alpha}{2} \cdot \cot\frac{\beta}{2} = 2$. (*Croatian competition problem*)

New exercises – competition B (see page 226): **B. 5382.** Do there exist prime numbers $2 < p < q$ for which more than one third of the elements of set $\{p+1, p+2, \ldots, q-1\}$ is a prime number? *(3 points)* (Proposed by *Bálint Hujter*, Budapest) **B. 5383.** Cyclic quadrilateral $ABCD$ has the following properties: $\angle BAD = 90°$, $BC = CD$ and $AC = 1$. Find the area of $ABCD$. *(3 points)* (Proposed by *Mihály Hujter*, Budapest) **B. 5384.** Prove that if $a, b, c > 0$ and $a^2 + b^2 + c^2 = abc$, then $2(a+b+c) + \frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab} \le abc$. *(4 points)* (Proposed by *Mihály Bencze*, Brasov) **B. 5385.** Let F denote the center of the nine-point circle of acute triangle ABC. Prove that $AF^2 - BF^2 = Rc\sin(\beta - \alpha)$, where R denotes the radius of the circumcircle, c denotes the length of side AB, and α and β denote the interior angles at A and B. *(4 points)* (Proposed by *Mihály Bencze*, Brasov) **B. 5386.** Anna and Balázs play the following game: Anna tosses a fair coin 101 times, and Balázs tosses a fair coin 10 times. Anna wins, if she receives more than ten times as many heads as Balázs, otherwise Balázs wins. Find the player to whom this game is favorable. *(5 points)* (Proposed by: *Attila Sztranyák*, Budapest) **B. 5387.** We have colored finitely many points on the plane to red, blue or green such that no three points of the same color are collinear, however, any line segment connecting two points with the same color contains a third colored point (with a different color). Find the maximum number of the colored points. *(5 points)* (Proposed by *Sándor Róka*, Nyíregyháza) **B. 5388.** Prove that any $2n$ consecutive positive integers can be divided into n pairs in at least $n!$ different ways such that in each pair the product of the two numbers is not a perfect square. *(6 points)* (Proposed by *Sándor Róka*, Nyíregyháza) **B. 5389.** Let I denote the incenter of acute triangle ABC. Let the incircle touch sides BC and AC at points D and E, respectively. Let H denote the orthocenter of triangle ABC. Prove that if H is on line segment DE, then line HI bisects side AB. *(6 points)* (Proposed by *Boldizsár Varga*, Budapest)

New problems – competition A (see page 227): **A. 878.** Let point A be one of the intersections of circles c and k. Let X_1 and X_2 be arbitrary points on circle c. Let Y_i denote the intersection of line AX_i and circle k for $i=1,2$. Let P_1, P_2 and P_3 be arbitrary points on circle k, and let O denote the center of circle k. Let K_{ij} denote the center of circle $(X_iY_iP_j)$ for $i=1,2$ and $j=1,2,3$. Let L_j denote the center of circle $(OK_{1j}K_{2j})$ for $j=1,2,3$. Prove that points L_1, L_2 and L_3 are collinear. (Proposed by *Vilmos Molnár-Szabó*, Budapest) **A. 879.** An integer $k>2$ is given. Xavier and Yvette play the following game: a number $n>k$ is initially written on the blackboard. The two players take turns, Xavier starts. In each turn the integer m on the blackboard is replaced by integer m' satisfying $k\le m'<m$ and $\gcd(m,m')=1$. The player who cannot make a legal move loses the game. We say that integer $n>k$ is good if Yvette has a winning strategy. Prove that if n, $n'>k$ are two integers satisfying the condition that every prime $p\le k$ divides n if and only if it divides n', then n is good if and only if n' is good. **A. 880.** Find all triples (a,b,c) of positive integers for which there exists function $f\colon \mathbb{Z}^+\to\mathbb{Z}^+$ satisfying $af(n)+$ $+bf(n+1)+cf(n+2)<0$ for every $n\in\mathbb{Z}^+$ ($\mathbb{Z}^+$ denotes the set of positive integers). (Proposed by *András Imolay*, Budapest)

Problems in Physics

(see page 250)

M. 431. Measure the refractive index of gelatine.

G. 849. How long would a day on Earth be if there was weightlessness on the equator? Assume that all parameters other than the period of rotation are constant. **G. 850.** What is the equivalent resistance of the circuit shown in the *figure* between the two terminals of the battery? **G. 851.** The refractive index of zirconia (zirconium-dioxide) is 2.1. A prism of angles $30^\circ-60^\circ-90^\circ$ is made from this material on which two thin rays of light are incident as shown in the *figure*. What is the angle between the two rays of light emerging from the prism? **G. 852.** A radioactive sample contains two different isotopes, denoted by A and B. The half-life of isotope A is 3 days and that of isotope B is 6 days. Initially, there are twice as many atoms in isotope A then in isotope B. In what time will this ratio reverse to its reciprocal?

P. 5562. From one edge of a horizontal table, a point-like body is launched with an initial speed of v_0. The body slides along the surface of the table, then flies off the table and hits the ground at the speed of v_0, the angle between this final velocity and the horizontal is $\alpha=30^\circ$. The table is $h=0.8$ m high and $\ell=3.2$ m long (see the *figure*). *a)* What was the initial speed of the object? *b)* What is the coefficient of kinetic friction between the table and the body? **P. 5563.** Small bodies of masses M and m are connected with a thread of length ℓ. We attach another thread to the body of mass M and move the other, upper end of this thread horizontally such that this upper end executes a small amplitude simple harmonic motion of period T. (See *figure*.) For what length ℓ can the oscillating thread remain vertical all the time? **P. 5564.** A ping pong ball rests on a horizontal ping pong racket. The racket is moved in the horizontal direction so that it undergoes simple harmonic motion. The initial velocity is zero, the amplitude is A and the angular frequency is ω. Give the displacement of the ball's centre as a function of time. What is the length of the trail left by the ball on the racket if the ball's surface was covered with graphite? (Assume that the ball does not leave the surface of the racquet and does not slide on it.) **P. 5565.** One end of a long, flexible, heavy chain was fixed. The hanging chain would break if a load greater than the weight of the chain was hung on it. The chain is released from the position shown in the *figure*. (Both the moving and the already taut parts of the chain can be considered to be vertical.) Will the chain break? **P. 5566.** There are two discs of radii $2r$ and r at rest on a horizontal, not perfectly flat tabletop such that they almost touch each other. In the plane, a third disk of radius $3r$ slides without rotation so that its velocity vector is parallel to the common tangent of the three disks. The top view of the three disks are shown in the *figure*. All three disks are made of the same material and have the same height. After the collision, which is considered to be elastic, the disc with radius $3r$ slows down due to friction and stops after travelling $d = 5$ cm. In what direction and how far will the smaller discs travel on the table? Friction between the discs is negligible. *Hint:* See problem **P. 5555.** in the March 2024 issue of this journal and the article titled *Complex numbers in physics I.* in this issue. **P. 5567.** An insulated tank of height h is placed into vacuum and stands on a horizontal table. The tank has a rim as shown. The tank initially contains a sample of gas at pressure p_0, and is sealed at the top by an insulating light piston, and also at the middle of the tank there is a thin, light piston made from some heat conducting material (see *figure*). The upper half part of the tank contains a sample of monatomic gas, and in the lower half part there is a sample of diatomic gas. A very heavy load is carefully placed on the upper piston and then released. The movement of the pistons stops after a few oscillations due to the internal friction of the gases. Where are the pistons in their equilibrium position? **P. 5568.** In two circular regions of radius R at a distance of d ($d > 2R$) from each other (two black circles), there is uniform magnetic field of magnetic induction B which points in the same direction, perpendicular to the plane of the *figure*. A point particle with charge Q and mass m moves periodically at a speed of v along the orbit shown in the *figure* (red curve). How long does it take for the particle to cover the red orbit once? What is the minimum value of the magnetic induction so that the particle still moves periodically along an orbit? **P. 5569.** Estimate the ratio of the number of protons to that of neutrons in the human body. **P. 5570.** The circuit – containing three identical resistors and two identical coils – shown in the *figure* has been connected to a DC source for a relatively long time. (The resistance of the coils is negligible.) *a)* What will be the current flowing through the resistors immediately after switch K is turned off? *b)* What is the value of the induced electromotive force in each coil, right after switch K is turned off? *c)* How do the sum and difference of the currents in the coils vary in time? *d)* How long does it take for the current in one coil and the current in the other coil to drop to half of the current measured very soon after switch K was turned off? *Data:* $U_0 = 1$ V, $L = 1$ H, $R = 1\,\Omega$.

April's additional problem.[10] Christmas Island, part of the Republic of Kiribati, and the Hawaiian Islands lie roughly on the same longitude, but belong to completely different time zones. Find out what day and what time it is in the Hawaiian Islands when it is 6 am on Monday 1 April on Christmas Island!

[10]The solution to the problem can be submitted to the following email address but does not count in the competition: `fizszerkbiz2021@googlegroups.com`.

Képek a Matek az utcán, 2024. 03.14. eseményeiről

Szeged, Széchenyi tér

Szigetmonostor, hipociklois rajzolása

Óbudán a Vasarely múzeumban

Ismerkedés a Galton-deszkával

Arany arány, Budapest, Blaha Lujza tér

COGNEX ERICSSON Morgan Stanley hiflylabs E·L·T·E

KöMaL Nyári Fizika Tábor – előzetes tájékoztatás

Kedves kitartó KöMaL Versenyzők, kedves fizika iránt érdeklődő Diákok! Örömmel értesítünk Benneteket, hogy az elmúlt évek hagyományát követve, idén is megrendezésre kerül a **KöMaL Nyári Fizika Tábor június 29. és július 5.** között a szép természeti környezetet biztosító Dombóvár-Gunaras üdülőfaluban a 9–12. osztályt végző középiskolás diákok számára.

A táborban (külön tanárokkal és programmal) részt vesz a nemzetközi matematikai diákolimpiára készülő „matematikus csapat” is.

A tábor költségének nagy részét (szállás + napi háromszori étkezés, fürdőbelépő, jutalmak, előadók tiszteletdíja, stb.) pályázati forrásból biztosítja a MATFUND Alapítvány. A táborba való utazást mindenkinek önállóan kell megoldania.

A rendszerint remek hangulatú táborban öt napon keresztül tudjátok próbára tenni, fejleszteni fizikatudásotokat, miközben új barátokat szerezhettek a csapatmunka során. A táborszervezők minden nap egy-egy érdekes mérési, numerikus és néhány elméleti példa kiadásával tesztelik a csapatok felkészültségét, persze mindezt nyári hangulatban. Az esti órák csoportos beszélgetésekkel szoktak telni, ahol a középiskolai oktatásból kimaradt területekbe is betekintést nyerhetnek az ez iránt érdeklődő táborozók, megtanulhatják például a deriválás vagy az integrálás alapjait. Az izzasztó feladatmegoldás mellett persze számos egyéb programmal is készülünk, melyek nem maradhatnak ki a KöMaL nyári táborából, mint a strandolás, túrázás, krumpliágyú kipróbálása, forrasztás, társasozás, labdajátékok, és a közös éneklés a tábortűz körül.

Ha a fentiek meghozták a kedveteket vagy már *„régi”* táborozók vagytok, szeretettel várjuk a jelentkezéseteket, találkozunk a táborban!

A KöMaL feladatmegoldóknak a jelentkezési lapokat és további tájékoztatást május közepén fogjuk kiküldeni, a jelentkezéseket május 31-ig várjuk.

A program támogatói:

Nemzeti Kulturális Támogatáskezelő

nka Nemzeti Kulturális Alap

AIT-BUDAPEST

HOTEL EURÓPA*** GUNARAS

Petőfi Kulturális Ügynökség

Nemzeti Együttműködési Alap

nka Nemzeti Kulturális Alap

Bethlen Gábor Alapkezelő Zrt.

Miniszterelnökség