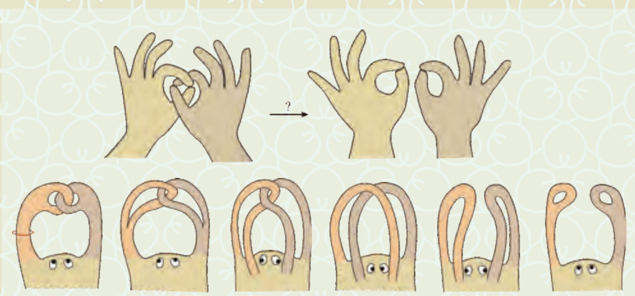
Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok

Informatika rovattal

Támogassa lapunk kiadását adója 1%-ával – 18157444-2-43

Kép az áprilisi fizika pótfeladathoz



A *Rejtvények, ördöglakatok* rovat feladványához

Beszámoló az idei EGMO versenyről | Komplex számok a fizikában II. rész | Matematikai eredmények fizikai megfontolásokkal | Nyári tábor | Az amőba kabátja

KöMaL

74. évfolyam
5. szám
2024.
május

A Bolyai János Matematikai Társulat és az Eötvös Loránd Fizikai Társulat folyóirata

EGMO 2024 – képek az élménybeszámolóhoz

Baran Zsuzsa (helyettes csapatvezető), Wiener Anna, Keresztély Zsófia, Nguyen Kim Dorka, Elekes Dorottya, Kiss Melinda Flóra (csapatvezető)

A versenyzők szállása

A nyitóünnepségen

A Sataplia barlangban

A KöMaL támogatói
Nemzeti Tehetség Program
Nemzeti Kulturális Támogatáskezelő
Kulturális és Innovációs Minisztérium

KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK
INFORMATIKA ROVATTAL BŐVÍTVE

ALAPÍTOTTA: **ARANY DÁNIEL** 1894-ben

74. évfolyam 5. szám Budapest, 2024. május

Megjelenik évente 9 számban, januártól májusig és szeptembertől decemberig havonta 64 oldalon. ÁRA: 1250 Ft

TARTALOMJEGYZÉK

Főszerkesztő: KORÁNDI JÓZSEF
Fizikus szerkesztő: VANKÓ PÉTER
Műszaki szerkesztő: FRIED KATALIN
Borító: BURGHARDT ZSUZSA
Kiadja: MATFUND ALAPÍTVÁNY
Alapítványi képviselő: KÓS RITA
Felelős kiadó: KATONA GYULA
Nyomda: OOK-PRESS Kft.
Felelős vezető: SZATHMÁRY ATTILA
INDEX: 25 450 ISSN 1215-9247

A szerkesztőség címe: 1117 Budapest,
Pázmány Péter sétány 1/C III. emelet 3.405.
Telefon: + 36 20 320-1143
A lap megrendelhető az Interneten:
`www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.h.shtml`.
Előfizetési díj egy évre: 10 400 Ft

E-mail: `szerk@komal.hu`
Internet: `http://www.komal.hu`
This journal can be ordered from the Editorial office:
Pázmány Péter sétány 1/C III. emelet 3.405.
1117–Budapest, Hungary
telephone: +36 20 320-1143
or on the Postal address
H–1518 Budapest 112, P.O.B. 32, Hungary,
or on the Internet:
`www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.h.shtml`.

Beszámoló a 2024. évi EGMO versenyről

Az idei Európai Lány Matematika Diákolimpiát (EGMO) 2024. április 11. és 17. között tartották Grúziában, Tskaltubo városában. A versenyen 54 ország 212 diákja vett részt (köztük 37 európai ország 148 diákja), akik két versenynapon 3-3 feladat megoldásában mérték össze tudásukat. Mindkét feladatsorra négy és fél óra állt a versenyzők rendelkezésére.

A magyar csapat szép eredménnyel, két ezüst- és két bronzéremmel tért haza, ezzel az összes ország között a 14. helyet, a 37 európai ország között pedig a 7. helyet szerezve meg hazánknak.

Az eredmények:

Wiener Anna (Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium) 29 ponttal ezüstérmet,

Elekes Dorottya (Budapest, Fasori Evangélikus Gimnázium) 26 ponttal ezüstérmet,

Keresztély Zsófia (Budapest, Szent István Gimnázium) 16 ponttal bronzérmet,

Nguyen Kim Dorka (Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium) 13 ponttal bronzérmet szerzett.

Ezúton is köszönjük a Gondolkodás Öröme Alapítvány támogatását!

❄

A versenyzők beszámolójából betekintést nyerhetünk az esemény részleteibe is

Április 10-én szerdán délután 3-kor indultunk neki a hosszadalmas repülő- és buszútnak. Egy varsói átszállást és egy Tbilisiben való buszra szállást követően másnap délben érkeztünk meg a hotelba. Az utunk során a repülőgépes mini finomságok mellett Zsófi éjszaka megírt horrorisztikus novellájával is gazdagabbak lettünk. A hotelba érkezve szomorúan vettük tudomásul, hogy Melinda és Zsuzsa a miénktől különböző hotelekben lettek elszállásolva, és ők egymástól is külön. Sőt, Melinda egy egészen távoli hotelben lakott az EGMO során, így sajnos alig találkoztunk.

Megérkezés után többé-kevésbé gördülékenyen megkaptuk a szobánkat. Bár a két Dorkának még egy órát várnia kellett, de Panka és Zsófi egész hamar beköltözhetett. Ez a nap az érkezésről szólt, így folyamatosan érkeztek az újabb és újabb ismerős, avagy nem ismerős arcok a hotelba. Nagyon örültünk minden régi barátunknak, akikkel újra találkozhattunk, így az első nap egészen érzelemdúsra sikeredett, és hamar el is aludtunk a hosszú utazástól lefáradva.

Az érkezés utáni első nap a kincskereséssel kezdődött, amin a két Dorka nem vett rész, mert inkább kialudták az előző napi hajnali utazás fáradalmait, Melinda pedig zsűri meetingen volt. De Panka, Zsuzsa és Zsófi nagyon jól érezték magukat. Az egész hétre jellemző módon hosszabb várakozással kezdődött a program, majd fél órás séta következett a cseh csapattal és pár szervezővel közösen, hogy megtaláljuk a kezdőállomást a terep másik végében. Ezután kezdődött el a játék, ahol izgalmas állomásokat kellett végigjárni, és közben matricákat szerezni.

Az állomások feladatai között voltak logikai feladványok, tenisz, limbózás, illetve sakkozás is. Ez utóbbi állomáson körülbelül azt a 10 másodpercet töltöttük el, amíg elmondták nekünk, hogy ezen az állomáson sakkozni kell. Eleinte a tryhard stratégiát választottuk, de amikor a 3 órás játékból körülbelül 40 percet töltöttünk a kirakós állomáson a feladat elkezdésére való várakozással, inkább a chilles módba léptünk át, és beszélgetni kezdtünk. Ez azonban nem volt probléma, mert így is nagyon élveztük, és végül még győztest sem hirdettek (legalábbis hozzánk nem jutott el az információ). A kincskereséshez elvileg kicsi dínókat is elrejtettek nekünk a terepen, amiket egész végig kerestünk. Minden alkalommal, amikor összefutottunk a bosnyák csapattal, megbeszéltük, hogy egyikünk sem talált még dínót, de nem is hallott olyan csapatról, amelyik talált.

Itt nincs (sincs) dínó!

A mai napig nem világos, hogy az elrejtett dínók tényleg léteztek-e. Összességében ez egy nagyon élvezetes program volt, mindenkinek jólesett 3 órát sétálgatni a nagy parkban a korábbi egész napos utazás után.

A kincskeresést a megnyitó ünnepség követte. Itt meghallgattunk pár beszédet (Geoff Smith kiemelte, hogy gyönyörű feladatokra kell számítanunk...), megnéztünk egy videót az érkezésekről, és a grúz kultúrába is betekintést nyerhettünk. Ez utóbbi nagyon sok felvonásban, grúz népdalok és néptáncok meghallgatásával, illetve megnézésével történt.

Ezeket egészen különlegesnek találtunk, alig hasonlítanak egyéb európai kultúrák művészetéhez. Továbbá a helyszínen meg lehetett kóstolni fellógatott grúz édességeket is, ami mindenkinek nagyon tetszett. Ezt követően minden csapat felment a zászlójával a színpadra.

Külön érdekessége volt a műsornak, hogy a csapatok be-

Zászlóbontás

mutatása közben, továbbá minden beszéd előtt és után, illetve néhány beszéd közben is hatásvadász hangulatzenék szóltak fülsüketítő hangerővel, amivel biztosították, hogy a ceremónia felejthetetlen élmény maradjon.

A szombattal elérkezett az első versenynap. Egészen izgalmasan kezdődött, hiszen – Grúziára jellemző módon – az odaúton végig kóbor kutyák kísértek minket, akik néha össze is verekedtek. Amikor megérkeztünk a verseny helyszínét nyújtó iskolába, ismét körülbelül fél órát vártunk, hogy beengedjenek a terembe, és végül nagyobbacska késéssel kezdtük a versenyt. De elkezdtük.

Egyik előnye az volt a versenyhelyszínnek, hogy a mosdók falai körülbelül másfél méter magasak voltak, így a mosdóra menés élménye ténylegesen kizökkentett kissé a versenyből. Ami a feladatokat illeti, az első feladat elvileg kombinatorika volt, de a gyakorlatban ez vitatható, leginkább esetvizsgálat kellett, amin ügyesen lehetett pontokat és időt is veszteni. A 2. feladat egy könnyebb geometria volt, a 3. pedig szintén egy oldható számelmélet. Pankának és E. Dorkának egészen jól sikerült az 1. nap, viszont sem Zsófi, sem N. K. Dorka nem érezte az igazinak. A verseny után különböző elfoglaltságokon vehettünk részt, például a Jane Street Hub-on. Itt Zsófi grúzokkal rejtvényeket fejtett, ezzel szép kitűzőket szerezve, illetve pókerezett, de nagy szerencsére nem igazi pénzben, mert rengeteget vesztett volna.

A Jane Street Hubban

A délután hátralevő részében Panka pihent, mivel az előző este nem aludt nagyon jól, Zsófi megismert pár új embert, és velük beszélgetett, míg a két Dorka bevetette magát az edzőterembe, hiszen ők még egy matekolimpia alatt is odafigyelnek, hogy nyárra meglegyen a summer body.

Vasárnap már kicsit gördülékenyebben vágtunk neki a 2. versenynapnak. Ekkor is hosszú várakozás után vette kezdetét a verseny, ahol kombinatorika, számelmélet és algebra feladatok lettek kitűzve, ebben a sorrendben. Az első feladattal lényegében mindnyájan sikeresen megküzdöttünk, a másodikkal és harmadikkal már több nehézség volt, de az utolsó feladatról azt kell tudni, hogy senki sem oldotta meg a versenyzők közül maximális pontszámra, és tőlünk is csak Panka tudott rajta pontot szerezni. A második versenynap után is nyitva állt a Jane Street Hub. Itt Zsófi az ukránokkal rózsaszín karkötőt készített szívecskékkel és „I love bashing” felirattal, majd N. K. Dorka, kicsit később pedig E. Dorka is csatlakozott. Késő estig tartó élménydús beszélgetés és ijesztgetés vette kezdetét.

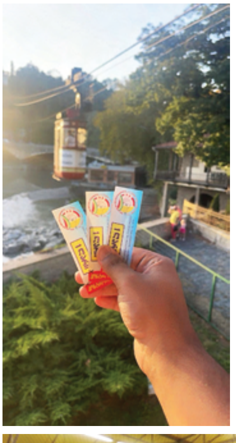
Hétfőn, a két versenynap lezárultával, immár többé-kevésbé nyugodtan vághattunk neki a közös kirándulásnak a Sataplia Nemzeti Parkba. A fő attrakció egy kifejezetten szép cseppkőbarlang volt, amit olyan sokáig csodált a magyar csapat, hogy közben szignifikánsan lemaradtunk a csoport többi részétől.

A Sataplia Nemzeti Park üvegpadlós kilátóján

A kirándulásunk során – a szépen kivilágított barlang mellett – (mozgó és hatalmas) dínókkal, és gyönyörű kilátással találtuk szembe magunkat az egész út során.

Visszaérve a kirándulásból megbeszéltük Zsuzsával és Melindával a pontjainkat, ami mindenkit kisebb-nagyobb sokként ért. A feszült pillanathoz zenei aláfestést is kaptunk a hotel lobbijában, egy néhány tagú, többszólamú grúz népdalokat éneklő férfi kórust.

Este felmerült, a héten már sokadszorra, hogy kipróbáljuk a hotel szaunáját. A terv végül ezen a napon is meghiúsult, de már tényleg nagyon közel voltunk a megvalósításához.



A barlanglátogatás után Ani, a guide, elvitt minket Grúzia nagyvárosába Kutaisiba. Taxival utazunk, kissé fájdalmas pozícióban, négyen a hátsó ülésen, de ez szerencsére sem a taxisofőrt, sem az esetleges rendőröket nem zavarta. Kutaisiban egy közös fagyizás, nézelődés és libegőzés után eljutottunk egy kisebb vidámparkba, ahova Ani vitt el minket dodzsemezés céljából. Egy kis furfang által – Panka először vonakodott, hogy részt vegyen, de vettünk neki jegyet sutyiban – mind beszálltunk a kisautókba, és nagyon jót szórakoztunk.

A dodzsem után, Ani nagy rémületére, észrevettünk egy kissé gyanúsan elhagyatott forgó hintát, amely – talán azért, mert nem tudtuk milyen veszélyes – érdemesnek tűnt a kipróbálásra. Végül hárman (Zsófi és a két Dorka) próbáltuk ki a forgó hintát, amely egészen rémisztő gyorsaságot és irányokat vett fel, majdnem kiröpítve minket magából. De szerencsére épségben maradtunk, és nagyon élveztük a dolgot a közben átélt halálfélelmünk ellenére. A vidámpark után egy közeli katedrálist látogattunk meg, amely szintén nagyon szép és különleges volt, hihetetlen kilátással fűszerezve.

A templomlátogatás után beesteledett, így visszataxiztunk, és ezzel véget is ért kicsi kiruccanásunk.

A második kirándulást mindkét Dorka kihagyta, hogy inkább aludjanak, hiszen előző napokon nagyon elfáradtak. Zsuzsa, Panka és Zsófi azonban megint nagyon élvezetesen töltötte el az időt, sőt ezúttal végre Melinda is csatlakozni tudott a csapathoz, mivel eddigre véget értek a zsűri meetingjei és a koordinálás is. A változatosság kedvéért egy barlangot néztünk meg. A barlanghoz úgy jutottunk el, hogy először egy szűk órát ültünk az egy helyben álló buszban, majd buszoztunk egy keveset, azután pedig sétáltunk kicsit az erdőben, és akkor megérkeztünk. Nagyon szép volt a hely, fényjátékot is kaptunk benne, illetve kedves idegenvezetést. Elvileg ez egy híresebb barlang, amely a Prométheusz-barlang nevet viseli.

Zsófi emlékezett rá, hogy elmondták, miért ez a barlang neve, de arra nem, hogy ez pontosan mi volt, mert közben épp németül filozofált. Kiérve a barlangból egy gyönyörű park fogadott, benne egy tóval. A parktól egy aranyos kisbusz vitt vissza minket a túra kezdőpontjára, innen pedig a nagy buszokkal mentünk a hotelbe. Az úton nagyon sok állatot lehetett látni a buszból, például disznókat és szamarakat szabadon mászkálva az utcán. A visszaérkezés után következett a záróceremónia, ahol énekes és táncos műsorban is részünk volt. Továbbá hallgattunk beszédeket, megnéztük az összefoglaló kisfilmet, és végül, de nem utolsó sorban megkaptuk az érmeinket, Panka és E. Dorka ezüstérmet, N. K. Dorka és Zsófi pedig bronzérmet. Ezek után fotózkodtunk egy keveset, majd a búcsúlakoma felé vettük az irányt.

A vacsora után az elmaradhatatlan záróbuli következett. Legnagyobb meglepetésünkre megérkezésünkkor egy régi télitáboros ismerősünket, Aanyát láttuk mikrofonnal a kezében, ahogy eszméletlen énekhangjával a hatalmas közönség előtt felrobbantja a színpadot. A hangulat hihetetlen jó volt, de sajnos viszonylag hamar vége lett a bulinak. Utána grúz és indiai táncot tanultunk, illetve magyar néptáncot tanítottunk néhány érdeklődő barátunknak.

A közös bulizás után április 17-én éjjel fél 2-kor, hosszas, szomorú búcsúzkodás után indult a buszunk Kutaisi repülőterére. Zsuzsától korábban elbúcsúztunk, mert ő nem Budapestre utazott tovább, és a magyar koordinátor csapat néhány tagjával kiegészülve vágtunk neki az utunknak. A hazaút is tartogatott még számunkra kalandokat. Először a repülőtérre vezető úton hajnali fél 3-kor, amikor egyébként is késésben voltunk, a buszsofőr megállt a pékségben vásárolni egyet, majd a leszállás után nem sokkal rádöbbentünk, hogy Panka bőröndje a buszban maradt. Azonban a nagy kétségbeesés és a sok kommunikációs nehézség után végül nagy meglepetésünkre a grúz szervezői csapat előteremtette a bőröndöt, és így nyugodtan, a Top 10 társasjátékot játszva és beszélgetve szálltunk fel az immár közvetlen repülőjáratra, és másnap korán reggel vissza is érkeztünk a Liszt Ferenc Repülőtérre.

❄

A jövő évi verseny Koszovóban lesz 2025. áprilisában. A válogatási folyamat és a felkészítő program részleteiért a `https://cms.renyi.hu/olimpiak/` oldal EGMO fülét érdemes figyelni 2024. július közepétől.

Bátran jelentkezzetek, a felkészülésre szívesen várunk minden olyan lányt, akit érdekel a versenyen való részvétel lehetősége, vagy akár csak szeretne több időt tölteni komolyabb matematikafeladatok megoldásával.

Kiss Melinda Flóra és **Baran Zsuzsa**
az EGMO felkészítő csapat nevében

Az EGMO 2024 feladatai

Első nap

1. feladat. Két különböző u és v egész szám fel van írva egy táblára. Elvégezzük lépések egy sorozatát. Minden lépésben az alábbi két művelet egyikét csináljuk:

(i) Ha a és b különböző egészek, amelyek fent vannak a táblán, akkor felírhatjuk $a+b$-t a táblára, ha még nincs fent a táblán.

(ii) Ha a, b és c három különböző egész szám, amelyek fent vannak a táblán, és az x egész számra $ax^2+bx+c=0$ teljesül, akkor felírhatjuk x-et a táblára, ha még nincs fent a táblán.

Határozzuk meg az összes olyan kezdő (u, v) számpárt, amiből kiindulva bármely egész szám fel tud kerülni a táblára véges sok lépés után.

2. feladat. Legyen ABC egy háromszög amiben $AC > AB$, a körülírt körét jelölje Ω, a beírt körének középpontját pedig I. A beírt kör érintse a BC, CA, AB oldalakat rendre a D, E, F pontokban. Az X és Y pontok rendre a beírt kör rövidebbik $\widehat{DF}$ és rövidebbik $\widehat{DE}$ ívén helyezkednek el úgy, hogy $BXD\sphericalangle = DYC\sphericalangle$. Az XY egyenesnek és a BC egyenesnek a metszéspontja legyen K. Legyen T az a pont az Ω-n, melyre KT érinti Ω-t és a T pont a BC egyenes ugyanazon oldalán helyezkedik el, mint az A pont. Bizonyítsuk be, hogy a TD és AI egyenesek metszéspontja az Ω-n van.

3. feladat. Egy n pozitív egészet *különösnek* nevezünk, ha az n tetszőleges pozitív d osztójára a $d(d + 1)$ egész szám osztja $n(n + 1)$-et. Bizonyítsuk be, hogy bármely négy különböző A, B, C és D különös pozitív egészekre a következő teljesül:

$$\operatorname{lnko}(A, B, C, D) = 1.$$

Itt $\operatorname{lnko}(A, B, C, D)$ *azt a legnagyobb pozitív egészet jelöli, ami* A*,* B*,* C *és* D *mindegyikét osztja.*

Második nap

4. feladat. Egy egészekből álló $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ sorozatban egy (a_i, a_j) párt, ahol $1 \leq i < j \leq n$ *érdekesnek* nevezünk, ha létezik egy egészekből álló (a_k, a_ℓ) pár, ahol $1 \leq k < \ell \leq n$ úgy, hogy

$$\frac{a_\ell - a_k}{a_j - a_i} = 2.$$

Minden $n \geq 3$-ra határozzuk meg az érdekes párok lehetséges legnagyobb számát egy n hosszú sorozatban.

5. feladat. Jelölje $\mathbb{Z}^+$ a pozitív egészek halmazát. Keressük meg az összes olyan $f\colon \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ függvényt, ahol tetszőleges (x, y) pozitív egészekből álló számpárra az alábbi feltételek mindegyike teljesül:

(i) x és $f(x)$ pozitív osztóinak száma megegyezik.

(ii) Ha x nem osztja y-t és y nem osztja x-et, akkor

$$\operatorname{lnko}(f(x), f(y)) > f(\operatorname{lnko}(x, y)).$$

Itt $\operatorname{lnko}(m, n)$ *az a legnagyobb pozitív egész, ami osztja* m*-et és* n*-et is.*

6. feladat. Keressük meg az összes olyan d pozitív egész számot, melyre létezik egy d-edfokú valós együtthatós P polinom, amelyre $P(0)$, $P(1)$, $P(2), \ldots, P(d^2 - d)$ között legfeljebb d különböző érték fordul elő.

Az emelt szintű gyakorló feladatsorokról

Az idei tanévben először biztosítottunk térítésmentes felkészülési lehetőséget az emelt szintű matematikaérettségire készülő diákok számára azzal, hogy az országban egyedülálló módon a tanulók kilenc hónapban is beküldhették a KöMaL aktuális számában megjelentetett gyakorló feladatsor megoldását. A dolgozatokat rövid időn belül kijavítva küldtük vissza a tanulóknak.

Nagy örömünkre sokan éltek is ezzel a lehetőséggel. A legalább három dolgozatot beküldők közül a legeredményesebb Szabó Viktória Ildikó lett, aki a Kaposvári Táncsics Mihály Gimnázium végzőseként átlagosan 96%-os teljesítményt nyújtott. Említésre méltó még az Esztergomi Dobó Katalin Gimnázium két tanulójának átlageredménye. Kurucz Kristóf 98, Petró Péter pedig 97%-os teljesítményt nyújtott két-két feladatsor megoldásával.

A szép eredményeket látva úgy döntöttünk, hogy folytatjuk ezt a munkát, így a következő tanévben is várjuk a megoldásokat az mailto:emeltkomal@gmail.com címre.

Bízunk abban, hogy szorgalmas beküldőink jól teljesítettek az idei matematika érettségi írásbeli részén is!

a Szerkesztők

Megoldásvázlatok a 2024./4. szám feladatsorához

I. rész

1. *a) Adott az* $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=p(x^2-6x-7)$ *függvény. A zérushelyek kiszámítása nélkül határozzuk meg a* p *nemnulla valós szám értékét, ha tudjuk, hogy az* f *függvény maximumértéke* 4. (6 pont)

b) Oldjuk meg a valós számok halmazán a $7\sin^2 x-9\cos^2 x=-1$ *egyenletet.* (7 pont)

Megoldás. *a)* Alakítsuk teljes négyzetté az $f(x)$ függvény hozzárendelési szabályát:

$$f(x)=p[(x-3)^2-9-7]=p[(x-3)^2-16]=p(x-3)^2-16p.$$

Ebből következik, hogy csak $x=3$ esetén lehet szélsőérték (ha az maximum), amely akkor $-16p$. Ha ez a szélsőérték 4, akkor $p=-0{,}25$. Ebben az esetben a szélsőérték valóban maximum is, mivel a másodfokú tag együtthatója (p) negatív.

b) Használjuk a $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ összefüggést:

$$7\sin^2 x - 9(1 - \sin^2 x) = -1.$$

Zárójelfelbontás és összevonás után: $16\sin^2 x - 9 = -1$. Az egyenlet rendezésével azt kapjuk, hogy:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}, \qquad \text{amiből} \qquad \sin x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

A $\sin x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ megoldásai:

$$x_1 = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \qquad \text{illetve} \qquad x_2 = \frac{7\pi}{4} + 2l\pi, \quad l \in \mathbb{Z}.$$

A $\sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ megoldásai:

$$x_3 = \frac{\pi}{4} + 2m\pi, \quad m \in \mathbb{Z}, \qquad \text{illetve} \qquad x_4 = \frac{3\pi}{4} + 2n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ezek uniója:

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{t\pi}{2}, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

2. *Egy piacon a tojást* 12 *db-os csomagolásban árulják. Egy-egy tojás tömege* 5 *dkg* $\pm$1,5 *g. Egy ellenőrzés során véletlenszerűen kiválasztanak egy csomagot, és a csomagban szereplő tojások tömegét méréssel ellenőrzik. Csak akkor engedélyezik az árusítást, ha egyik tojás tömege sem kisebb, mint* 4 *dkg* 8,5 *g, és a tizenkét mérési adat* 5 *dkg-tól mért átlagos abszolút eltérése nem haladja meg a* 0,75 *g-ot. A mérések eredménye a következő:*

mérés sorszáma	*1.*	*2.*	*3.*	*4.*	*5.*	*6.*	*7.*	*8.*	*9.*	*10.*	*11.*	*12.*
mért tömeg (g)	*50*	*51*	*50,4*	*50,6*	*51,1*	*49*	*50*	*50,1*	*50,4*	*51,3*	*50*	*50*

a) Az eredmények alapján engedélyezik-e a tojások árusítását? (4 pont)

b) Határozzuk meg a tizenkét mérési eredmény átlagát és szórását. (3 pont)

c) Ábrázoljuk az adatokat sodrófa-diagramon. (3 pont)

d) Minden tojás a többitől függetlenül 2% *valószínűséggel záp. Ha veszünk öt tojást, hány százalék annak a valószínűsége, hogy azok között pontosan egy záp lesz?* (3 pont)

Megoldás. *a)* A mért tömegek között nincs 48,5 g-nál kisebb érték, tehát az első feltétel teljesül. Az 50 g-tól való eltérések rendre 0; 1; 0,4; 0,6; 1,1; 1; 0; 0,1; 0,4; 1,3; 0; 0. Az eltérések átlaga:

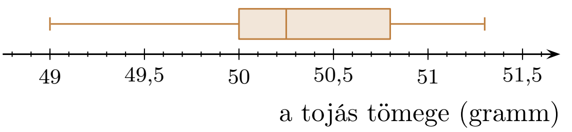
$$\frac{0 + 1 + 0{,}4 + 0{,}6 + 1{,}1 + 1 + 0 + 0{,}1 + 0{,}4 + 1{,}3 + 0 + 0}{12} = \frac{5{,}9}{12} = 0{,}49.$$

Az árusítást engedélyezik.

b) A mért adatok átlaga: $\frac{4\cdot 50+51+2\cdot 50{,}4+50{,}6+51{,}1+49+50{,}1+51{,}3}{12}=50{,}325$ gramm, szórása:

$$\sqrt{\frac{4\cdot\frac{169}{1600}+\frac{729}{1600}+2\cdot\frac{9}{1600}+\frac{121}{1600}+\frac{961}{1600}+\frac{2809}{1600}+\frac{81}{1600}+\frac{1521}{1600}}{12}}=0{,}6.$$

c)



d) Egy tojás 98% valószínűséggel nem záp. Annak a valószínűsége, hogy az elsőként vásárolt tojás záp, a többi nem $0{,}02\cdot 0{,}98\cdot 0{,}98\cdot 0{,}98\cdot 0{,}98$. Annak, hogy a másodikként vásárolt tojás záp, a többi nem $0{,}98\cdot 0{,}02\cdot 0{,}98\cdot 0{,}98\cdot 0{,}98$. Hasonlóan számolható a maradék három eset is, így a keresett valószínűség

$$5\cdot 0{,}02\cdot 0{,}98^4=0{,}0922,\ \text{azaz } 9{,}22\%.$$

3. *a) Mekkorák lehetnek annak a derékszögű háromszögnek a befogói, amelynek a területe* 60 cm^2*, az átfogója pedig* 17 *cm hosszúságú?* (6 pont)

b) Egy a élhosszúságú kocka minden csúcsa köré egy $\frac{a}{2}$ *sugarú gömböt írunk, majd a kocka belsejében megszerkesztünk egy, a nyolc gömböt érintő kilencedik gömböt. Az eredeti kocka térfogatának hány százaléka nem került egyetlen gömbbe sem?* (7 pont)

Megoldás. *a) 1. megoldás.* Legyen a, b a derékszögű háromszög két befogója, c pedig az átfogója. Derékszögű háromszög esetén a háromszög területképlete: $T=\frac{ab}{2}$, azaz $60=\frac{ab}{2}$. Derékszögű háromszög esetében alkalmazhatjuk Pitagorasz tételét: $a^2+b^2=c^2$, ahonnan $a^2+b^2=17^2$, tehát $a^2+b^2=289$. A két egyenletből egy egyenletrendszert kapunk:

$$60=\frac{ab}{2},\qquad a^2+b^2=289,$$

amiből következően

(1) $\quad 120=ab,\qquad$ (2) $\quad a^2+b^2=289.$

Kifejezzük b értékét (1)-ből: $b=\frac{120}{a}$, majd behelyettesítjük (2)-be:

$$a^2+\left(\frac{120}{a}\right)^2=289.$$

Ezt átalakítjuk, majd rendezzük:

$$a^2 + \frac{14400}{a^2} = 289,$$
$$a^4 + 14400 = 289a^2,$$
$$a^4 - 289a^2 + 14400 = 0.$$

Legyen $a^2 = x$. Ekkor:

$$x^2 - 289x + 14400 = 0.$$

Ennek a másodfokú egyenletnek a gyökei: $x_1 = 64$, $x_2 = 225$. Visszahelyettesítve az $a^2 = x$ egyenletbe:

$$a^2 = 64 \qquad \text{ahonnan} \qquad a_1 = -8, \quad a_2 = 8$$

vagy

$$a^2 = 225 \qquad \text{ahonnan} \qquad a_3 = -15, \quad a_4 = 15.$$

Mivel oldalhosszúságokról szól a feladat, így a negatív gyökök nem megoldások. Mivel $8^2 + 15^2 = 17^2$, ezért az egyik befogó hossza 8 cm, a másiké pedig 15 cm, ekkor a háromszög területe valóban 60 cm^2, így helyes a megoldás.

2. megoldás. Az *1. megoldás* elején kapott egyenletrendszert az alábbiak szerint is megoldhatjuk. Adjuk hozzá az 1. egyenlet kétszeresét a második egyenlethez:

$$a^2 + b^2 + 2ab = 289 + 240.$$

Ezt átalakítva $(a+b)^2 = 529$, amiből $a+b = 23$ vagy $a+b = -23$. Mivel a, b pozitív, így a második eset nem lesz megoldás. Ekkor egy új egyenletrendszert írhatunk fel:

(1) $\quad a + b = 23, \qquad$ (2) $\quad a^2 + b^2 = 289.$

Fejezzük ki b értékét (1)-ből: $b = 23 - a$, majd helyettesítsük be a (2)-es egyenletbe:

$$a^2 + (23 - a)^2 = 289.$$

Ezt átalakítva:

$$2a^2 - 46a + 529 = 289,$$
$$2a^2 - 46a + 240 = 0.$$

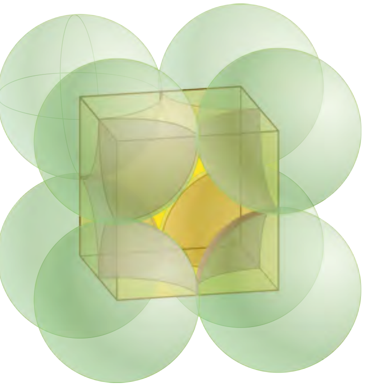
A másodfokú egyenlet gyökei: $a_1 = 8$, $a_2 = 15$. Mivel $8^2 + 15^2 = 17^2$, ezért az egyik befogó hossza 8 cm, a másiké pedig 15 cm, ekkor a háromszög területe valóban 60 cm^2, így helyes a megoldás.

b) A teljes kocka térfogata: a^3.

A csúcsok köré írt gömböknek éppen nyolcadrésze van a kocka belsejében, így a térfogatuk összesen egy darab $\frac{a}{2}$ sugarú gömb térfogatát adja ki:

$$\frac{4 \cdot (\frac{a}{2})^3 \cdot \pi}{3} = \frac{a^3 \cdot \pi}{6}.$$

A középen lévő gömb átmérőjét úgy kaphatjuk meg, hogy a kocka egyik testátlójából kivonjuk a két végpontja köré írt gömbök sugarát. A középső gömb sugara ennek a fele, vagyis $\frac{a\cdot\sqrt{3}}{2}-\frac{a}{2}$. Az így kapott gömb térfogata:



$$\frac{4\cdot(\frac{a\cdot\sqrt{3}}{2}-\frac{a}{2})^3\cdot\pi}{3}=\frac{4\cdot(\frac{a}{2}\cdot(\sqrt{3}-1))^3\cdot\pi}{3}=$$
$$=\frac{a^3\pi(\sqrt{3}-1)^3}{6}.$$

A kocka kitöltött része tehát

$$\frac{a^3\cdot\pi}{6}+\frac{a^3\pi(\sqrt{3}-1)^3}{6}\approx 0{,}729a^3.$$

Így a ki nem töltött része a kockának közelítően $a^3-0{,}729a^3=0{,}271a^3$, vagyis a kocka térfogatának 0,271 része.

Az eredeti kocka térfogatának 27,1%-át nem fedi gömb vagy gömbrészlet.

4. *Hat számot leírtunk egy lapra monoton csökkenő vagy monoton növekvő sorrendben. A hat szám közül az első három szám egy mértani sorozatot alkot, míg az utolsó öt szám egy számtani sorozat egymást követő öt tagja. Az utolsó öt szám összege* 90, *a második és hatodik szám szorzata pedig* 180. *Melyik ez a hat szám?*

(12 pont)

Megoldás. Legyen a hat szám s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6. Az utolsó öt szám felírható mint egy számtani sorozat öt egymást követő tagja: $s_2=a_1$, $s_3=a_1+d$, $s_4=$ $=a_1+2d$, $s_5=a_1+3d$, $s_6=a_1+4d$. Ezek összege:

$$5a_1+10d=90,\qquad \text{ahonnan}\qquad a_1+2d=18.$$

A második és a hatodik szám szorzata 180, ezek éppen a számtani sorozat első és ötödik tagjai: $a_1(a_1+4d)=180$. A következő egyenletrendszert kell megoldanunk:

$$a_1+2d=18,$$
$$a_1(a_1+4d)=180.$$

Fejezzük ki a_1 értékét az első egyenletből: $a_1=18-2d$, amit behelyettesítve a második egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$(18-2d)^2+4(18-2d)d=180.$$

A zárójeleket felbontva:

$$4d^2-72d+324+72d-8d^2=180,$$

majd egyszerűsítve:

$$-4d^2+324=180,$$
$$d^2=36.$$

Ebből a differencia értéke: $d_1 = 6$ és $d_2 = -6$. Ez alapján két ilyen sorozat lehet.

Ha $d_1 = 6$, akkor $a_1 = 6$. Ha pedig $d_2 = -6$, akkor $a_1 = 30$.

Mivel az első három szám mértani sorozatot alkot, így $s_1 s_3 = s_2^2$, azaz $s_1 = \frac{s_2^2}{s_3}$.

Az első esetben $s_2 = a_1 = 6$, $s_3 = a_2 = 12$, tehát $s_1 = \frac{36}{12} = 3$. A hat szám ekkor 3, 6, 12, 18, 24, 30.

A második esetben $s_2 = a_1 = 30$, $s_3 = a_2 = 24$, tehát $s_1 = \frac{900}{24} = 37{,}5$. A hat szám pedig 37,5, 30, 24, 18, 12, 6.

II. rész

5. *Egy matematikavizsgán* 5 *tétel a gondolkodási módszerek, halmazok, logika, kombinatorika, gráfok témakörhöz tartozik. A számelmélet, algebra témakörben* 4, *a függvények, analízis témakörben szintén* 4, *a geometria, trigonometria, koordinátageometria témakörben* 10, *míg a valószínűségszámítás, statisztika témakörben* 2 *tétel van.*

a) Hányféleképpen számozhatjuk meg a tételeket, ha azt szeretnénk, hogy az egy témakörben szereplő tételek egymás mellé kerüljenek? (5 pont)

Bence fizikából is vizsgázik, ahol összesen 24 *tétel van. Bence elhatározza, hogy az első nap* 4-4 *tételt tanul meg az egyes tárgyakból. A tételeket aznap úgy állítja össze, hogy a matematika és a fizika tételek felváltva kövessék egymást.*

b) Számítsuk ki, hányféleképpen állíthatja össze Bence az első napra szóló tanulási programját. (5 pont)

Bence nagyon babonás, és hisz abban, hogy attól függ, mennyire lesz szerencsés, hogy aznap mekkora a két kedvenc szabályos dobókockájával dobott számok összege. Ha az összeg 5*-nél kisebb, akkor semmi esélye, hogy jó tételt húzzon ki, ha legalább* 5, *de legfeljebb* 10, *akkor* 50% *valószínűséggel, egyéb esetben* 80% *valószínűséggel húz jó tételt.*

c) Mennyi annak a valószínűsége, hogy ha igaz Bence babonája, akkor Bence rossz tételt húz? (6 pont)

Megoldás. *a)* Összesen öt témakör van, ezeket 5!-féleképpen rendezhetjük. Az egyes témakörökön belül a tételeket is sorba kell állítanunk: az első témakört 5!-féleképpen, a második témakört 4!-féleképpen, a harmadik témakört 4!-féleképpen, a negyedik témakört 10!-féleképpen, míg az ötödik témakört 2!-féleképpen. Mivel ezek függetlenek egymástól, így a végeredményt szorzással kapjuk meg:

$$5! \cdot 5! \cdot 4! \cdot 4! \cdot 10! \cdot 2! = 60\,197\,437\,440\,000.$$

b) Bence az első nap $\binom{25}{4}$-féleképpen választhat matematikatételt, míg fizikát $\binom{24}{4}$-féleképpen. A kiválasztott tételeket tárgyanként 4!-féleképpen rendezheti sorba. Az első tétel kétféle tágyból választható, de a sorrend a továbbiakban már adott. Így az összes eset száma:

$$2 \cdot 4! \cdot \binom{25}{4} \cdot 4! \cdot \binom{24}{4} = 154\,850\,572\,800.$$

c) Jelölje A, B, C azt az eseményt, hogy a dobott számok összege 5-nél kisebb, legalább 5, de legfeljebb 10, illetve 10-nél nagyobb. Ekkor $\mathbf{P}(A) = \frac{6}{36}$, illetve $\mathbf{P}(B) = \frac{27}{36}$, $\mathbf{P}(C) = \frac{3}{36}$. A babona szerint $\mathbf{P}(J \mid A) = 0$, $\mathbf{P}(J \mid B) = \frac{1}{2}$, $\mathbf{P}(J \mid C) = \frac{4}{5}$. Annak a valószínűsége, hogy jó tételt húz:

$$\mathbf{P}(J) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(J \mid A) + \mathbf{P}(B) \cdot \mathbf{P}(J \mid B) + \mathbf{P}(C) \cdot \mathbf{P}(J \mid C) = \\ = \frac{6}{36} \cdot 0 + \frac{27}{36} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{36} \cdot \frac{4}{5} = \frac{53}{120}.$$

Ezek alapján annak a valószínűsége, hogy rossz tételt húz: $\mathbf{P}(R) = \dfrac{67}{120} \approx 55{,}83\%$.

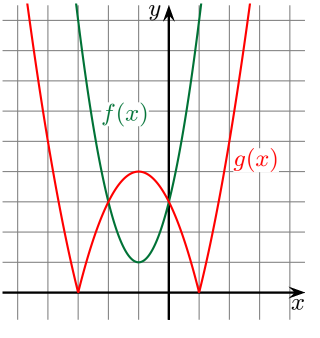
6. *Legyen az f és a g az alábbi két hozzárendelési szabállyal, a valós számok halmazán értelmezett függvény: $f(x) = 2(x+1)^2 + 1$, $g(x) = |(x+1)^2 - 4|$.*

a) Ábrázoljuk mindkét függvény grafikonját ugyanabban a koordinátarendszerben. Adjuk meg a két grafikon metszéspontjait. (8 pont)

b) Számítsuk ki az f és a $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = -(x+1)^2 + 4$ függvény grafikonjai által közrefogott zárt síkidom területét. (8 pont)

Megoldás. *a)* A metszéspontokban $f(x) = g(x)$, azaz $2(x+1)^2 + 1 = |(x+1)^2 - 4|$,

$$2(x^2 + 2x + 1) + 1 = |x^2 + 2x + 1 - 4|,$$
$$2x^2 + 4x + 3 = |x^2 + 2x - 3|.$$



1. eset. Ha $2x^2 + 4x + 3 = x^2 + 2x - 3$, akkor $x^2 + 2x + 6 = 0$, $D < 0$, tehát nincs megoldás.

2. eset. Ha $2x^2 + 4x + 3 = -(x^2 + 2x - 3)$, akkor $3x^2 + 6x = 0$, $x_1 = -2$, $x_2 = 0$. Ezek valóban teljesítik a feltételeket.

A metszéspontok: $M_1 = (0; 3)$ és $M_2 = (-2; 3)$.

b) A két görbe két metszéspontjának abszcisszája: $x_1 = -2$, $x_2 = 0$. A két görbe által bezárt területet integrálszámítással adjuk meg. Az integrációs határok: $x_1 = -2$, $x_2 = 0$. Ezen az intervallumon belül a függvények nem metszik egymást.

$$\int_{-2}^{0} [f(x) - h(x)]dx = \int_{-2}^{0} [2(x+1)^2 + 1 - \big(-(x+1)^2 + 4\big)]dx =$$

$$= \int_{-2}^{0} (3x^2 + 6x) = \big[x^3 + 3x^2\big]_{-2}^{0} = 0 - (-8 + 12) = -4.$$

A terület ennek az abszolút értéke: $T = 4$.

7. *Egy évfolyam minden tanulójának legalább két eszköze van az alábbi három eszköz közül: laptop, okostelefon, tablet. Tudjuk, hogy erre az évfolyamra összesen* 56*-an járnak, és okostelefonja* 37 *diáknak van. Telefonja is és tabletje is* 26 *diáknak van, míg tabletje is és laptopja is* 4*-gyel kevesebb diáknak van, mint ahánynak telefonja.*

a) Hány diáknak van mindhárom eszköze, és hány diáknak nincs tabletje? (7 pont)

Az egyik végzős tanuló, Kriszti, a tizedikesek közül 54 *embert ismer. Kriszti tizedikes ismerőseinek mindegyike Kriszti többi, ugyanerre az évfolyamra járó ismerőse közül pontosan hármat nem ismer.*

b) A fent említett 55 *ember között összesen hány ismeretség áll fenn? (Az ismeretségek kölcsönösek.)* (5 pont)

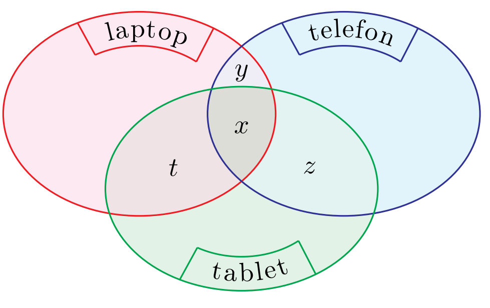
c) Határozzuk meg az alábbi állítások logikai értékét.

A: Egy 8*-pontú teljes gráf éleinek száma* 36*.*

B: Ha egy teljes gráfnak páratlan számú éle van, akkor a pontok száma is páratlan.

C: Ha egy 49*-pontú gráfban nincs kör, akkor legfeljebb* 48 *éle lehet.*

D: Nincs olyan 9*-pontú gráf, amelyben a fokszámok összege* 21*.* (4 pont)



Megoldás. *a)* Ha a diákok eszközhasználatát Venn-diagramon ábrázoljuk, akkor csak 4 tartományba jutnak diákok. Az ezekbe jutó diákok számát jelölje t, x, y, z.

Az első feltétel alapján $t+x+y+z=56$, a második feltétel szerint $x+y+z=37$, a harmadik feltétel miatt $x+z=26$, és a negyedik feltétel szerint $t+x+4=x+y+z$. Ezekből $t=56-37=19$; valamint $y+z=23$ miatt $x=37-23=14$; $z=26-14=12$ és végül $y=23-12=11$.

Mindhárom eszköze 14 tanulónak van, 11 tanulónak pedig nincs tabletje.

b) Kriszti ismeri az 54 tizedikes tanulót. Ők Krisztin kívül 50 embert ismernek, így Kriszti ismerősei között összesen $\frac{54\cdot 50}{2}=1350$ ismeretség van, tehát az összes ismeretség: $1350+54=1404$.

c) A: Hamis (28 éle van), B: Hamis (pl. 6-pontú gráf), C: Igaz, D: Igaz.

8. *Adott a* $k\colon (x-5)^2+(y+1)^2=37$ *egyenletű kör és az* $e\colon 2x-5y=b$ *egyenes.*

a) Írjuk fel a k *kör* $P(11;-2)$ *pontjában húzott érintőjének egyenletét.* (5 pont)

b) Határozzuk meg az e *egyenes egyenletében a* b *valós paramétert úgy, hogy az* e *egyenesnek és a* k *körnek ne legyen közös pontja.* (11 pont)

Megoldás. *a)* A kör középpontja $C(5;-1)$, sugara $r=\sqrt{37}$. A középpontból és a P pontból $\overrightarrow{CP}(6;-1)$. Az érintési pontba vezető sugár merőleges az érintőre, tehát a $\overrightarrow{CP}(6;-1)$ vektor éppen az érintő egyik normálvektora, ezért az érintő egyenlete: $6x-y=68$.

b) Tekintsük a két alakzat egyenletéből alkotott egyenletrendszert:

$$(x-5)^2+(y+1)^2=37,$$
$$2x-5y=b.$$

A második egyenletből: $y=\frac{2x-b}{5}$. Behelyettesítve az első egyenletbe:

$$(x-5)^2+\left(\frac{2x-b}{5}+1\right)^2=37,$$
$$x^2-10x+25+\left(1+\frac{4x-2b}{5}+\frac{4x^2-4bx+b^2}{25}\right)=37,$$
$$25x^2-250x+625+25+20x-10b+b^2-4bx+4x^2=925,$$
$$29x^2-(230+4b)x-275-10b+b^2=0.$$

Azt szeretnénk, hogy ennek a másodfokú egyenletnek ne legyen megoldása a valós számok halmazán, amihez az kell, hogy a diszkrimináns negatív legyen. Az egyenlet diszkriminánsa:

$$D=(-230-4b)^2-4\cdot 29\cdot(-275-10b+b^2)=-100b^2+3000b+84\,800,$$

amiből

$$-b^2+30b+848<0.$$

A $-b^2+30b+848=0$ egyenletet megoldva a gyökök:

$$b_1=15+\sqrt{1073},\qquad b_2=15-\sqrt{1073}.$$

A $-b^2+30b+848$ függvény grafikonja egy lefelé nyíló parabola, így a megoldás:

$$b\in\left]-\infty;15-\sqrt{1073}\right[\cup\left]15+\sqrt{1073};\infty\right[.$$

9. *a) Egy téglatest élei x, $\dfrac{13x+5}{18}$, $\dfrac{16x-5}{21}$ cm hosszúságúak. Bizonyítsuk be, hogy nem lehet mindhárom élhossz egész szám.* (5 pont)

b) Tekintsük az első 600 *darab pozitív páratlan számot. Hány olyan szám van közöttük, amely a* 21*-hez relatív prím?* (5 pont)

A 108*-nak és az n pozitív egész számnak a legkisebb közös többszöröse* 108 108.

c) Határozzuk meg az n lehetséges értékeinek számát, és adjuk meg az n legkisebb lehetséges értékét. (6 pont)

Megoldás. *a)* Tegyük fel, hogy x, $\dfrac{13x+5}{18}$, $\dfrac{16x-5}{21}$ egész számok. Ekkor $18 \mid 13x+5$, valamint $21 \mid 16x-5$. Mivel $3 \mid 18$ és $3 \mid 21$, ezért $3 \mid 13x+5$, valamint $3 \mid 16x-5$ is igaz. Ebből következik, hogy $3 \mid x+2$ és $3 \mid x-2$. Ez a két feltétel egyszerre nem teljesülhet, így nem lehet egyszerre mindhárom szám egész szám.

b) Egy szám relatív prím 21-hez, ha prímtényezős felbontásában nem szerepel a 3 és a 7 egyike sem. Adjuk meg, hány olyan szám van az első 600 páratlan szám között, ami tartalmazza a 3 vagy a 7 prímtényezőt.

$\left[\dfrac{1200}{3}\right] = 400$, így 200 darab 3-as prímtényezőt tartalmazó és $\left[\dfrac{1200}{7}\right] = 171$, így 86 darab 7-es prímtényezőt tartalmazó szám van. 3-as és 7-es prímtényezőt is tartalmazó számból

$$\left[\frac{1200}{21}\right] = 57$$

miatt 29 darab van.

A logikai szita formulát alkalmazva $200+86-29=257$ olyan szám van, amely tartalmazza a 3-as vagy a 7-es prímtényezőt. Így $600-257=343$ olyan szám van az első 600 páratlan szám között, amely relatív prím a 21-hez.

c) Mivel $108 = 2^2 \cdot 3^3$ és $108\,108 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$, ezért a legkisebb közös többszörös $n = 2^k \cdot 3^l \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$ alakban írható fel, ahol $k \in \{0;1;2\}$ és $l \in \{0;1;2;3\}$. Az n lehetséges értékeinek száma $3 \cdot 4 = 12$, valamint a legkisebb lehetséges értéke $2^0 \cdot 3^0 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = 1001$.

Róka Bálint
Budapest

❄

Helyesbítés a 2023/4. szám emelt szintű feladatsorának megoldásvázlatához.

6. *c)* **I. megoldás.** Két diszjunkt esetre bontjuk a vizsgált eseményt.

1. Van 6-os a dobott 3 szám között: ez $6^3 - 5^3 = 91$ eset.

2. Nincs 6-os, de van 3-as és mellette 2-es vagy 4-es is a dobott számok között.

Van 3-as, 2-es és 4-es is: ez $3! = 6$ eset.

Van 3-as és 2-es, de nincs 4-es: ekkor a dobások 3-2-2 vagy 3-3-2 (3-3 eset), 3-2-1 vagy 3-2-5 (6-6 eset), összesen 18 eset.

Van 3-as és 4-es, de nincs 2-es: ez is 18 eset.

Az olyan esetek száma tehát, amikor nincs 6-os, de van 3-as és mellette 2-es vagy 4-es is, 42.

A keresett valószínűség így $p_c = \frac{91+42}{216} = \frac{133}{216} \approx 0{,}616$.

II. megoldás. A kedvezőtlen esetek számát határozzuk meg. Kedvezőtlenek azok az esetek, amikor nincs se 6-os, se 3-as, továbbá azok, amikor 3-as van, de nincs mellette páros szám, azaz mindhárom szám páratlan.

Nincs sem 6-os, sem 3-as $4^3 = 64$ esetben.

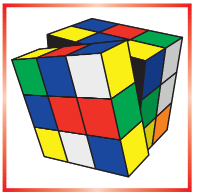
Mindhárom szám páratlan 3^3 esetben, ezek közül nincs 3-as 2^3 esetben, tehát mindhárom szám páratlan, és legalább az egyik 3-as $3^3 - 2^3 = 19$ esetben.

A kedvezőtlen esetek száma tehát $64 + 19 = 83$.

A keresett valószínűség így $p_c = \frac{216-83}{216} = \frac{133}{216} \approx 0{,}616$.

Köszönjük *Nagyné Pálmay Piroskának*, hogy a korábban megjelent megoldás hiányosságára felhívta a figyelmünket.

Rejtvények, ördöglakatok



Rovatunkban minden hónapban valamilyen szórakoztató matematikai fejtörőt mutatunk be. Ezek között fontos helyet foglalnak el a különböző kirakós játékok, topológiai feladványok, ördöglakatok és a matematikát felhasználó bűvészmutatványok.

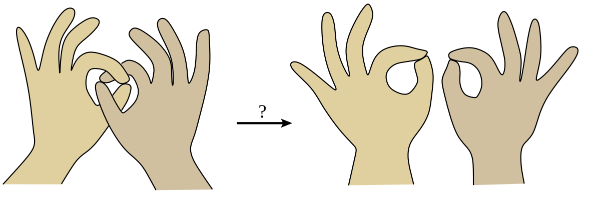
Manapság szinte mindent meg lehet találni az interneten, de az igazi élményt az adja, ha a feladatokat magunk oldjuk meg, a bűvészmutatványok trükkjeit mi találjuk ki, és a szükséges kellékeket is mi tervezzük meg és készítjük el. Próbáljuk meg a feladatokat továbbgondolni, általánosítani, igyekezzünk új feladatokat kitalálni.

A megoldásokat, általánosításokat a `rejtveny.komal@gmail.com` címen várjuk. A legjobbakat – akár cikk vagy videó formájában – a honlapunkon vagy itt a Lapban örömmel közöljük.

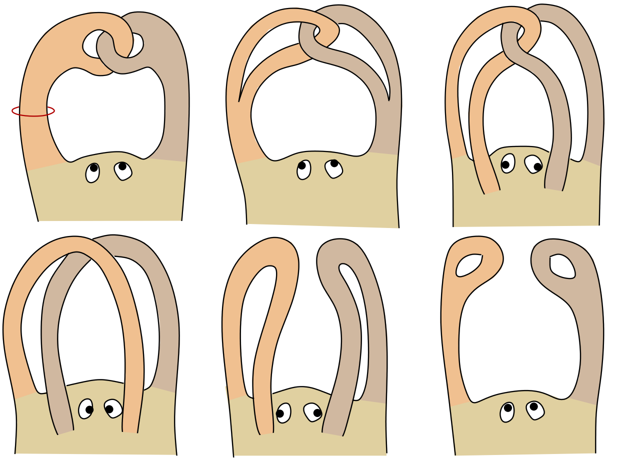
Az amőba kabátja

A Kvant 1981. márciusi számában [1], illetve az angol nyelvű átdolgozás, a Quantum magazin első bemutató számában [2] szerepelt az alábbi történet.

Egy matematikai kongresszuson Erik Zeeman, a neves topológus kollégájának, Frank Adamsnek a következő rejtvényt adta fel. – Ha az ábra szerint mindkét kezemen a hüvelyk- és mutatóujjammal egy-egy karikát alkotok úgy, hogy ez a két karika át van fűzve egymáson, akkor a két karikát szét lehet-e választani úgy, hogy közben a karikákat nem nyitom szét? – Azt is hozzátette, hogy ez egy *topológiai* kérdés, tehát a testét tetszés szerint lehet nyújtani, hajlítani, mint egy amőbáét, de nem szabad sehol elvágni vagy összeragasztani.



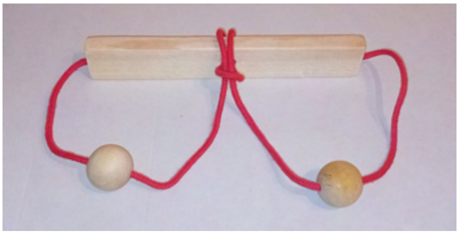
A beszélgetésnél jelen volt Zeeman egyik tanítványa, Colin Rourke, aki kijelentette, hogy a két karika szétválasztása nem lehetséges. Zeeman erre korholni kezdte Rourke-ot, hogy egy ennyire triviális feladattal nem tud megbirkózni, és lerajzolta a megoldást:



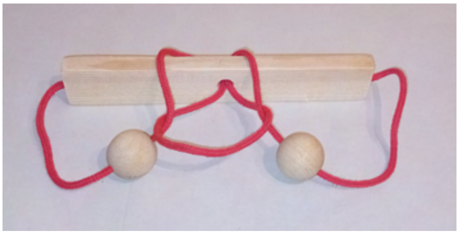
– Jó, jó, és a kabátod? – vetette közbe Rourke.

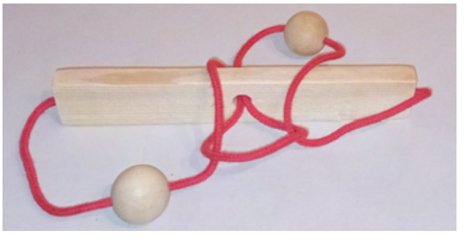
A feladatunk lerajzolni, hol lesz az amőba kabátja a két kéz szétválasztása után. A kabát helyett elég egy zárt görbét rajzolnunk, mint az első ábrán, mintha az amőbának (szintén tetszés szerint nyújtható) karórája vagy karkötője lenne.

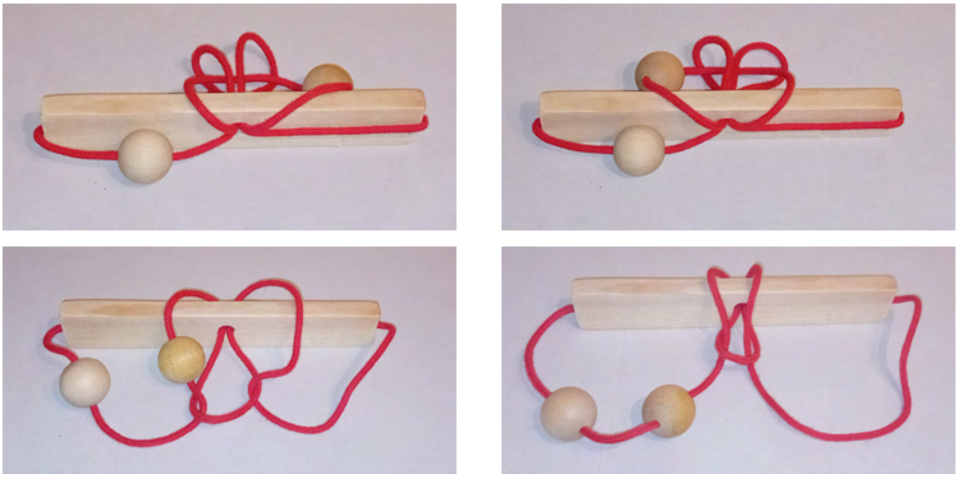
Az ikrek játék megoldása



A megoldás lényege, hogy nem a gyöngyöket kell átbújtatni a lyukon, hanem a zsinór középső részét kell a rúd másik oldalára át-, majd visszahúzni, és közben előre haladhatunk a gyönggyel a zsinóron.





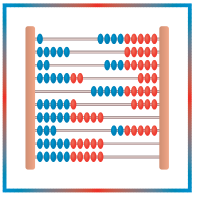


Kós Géza

[1] Амеба… в пиджаке Kvant 1981/3, 13–14. old. `https://kvant.mccme.ru/1981/03/ameba_v_pidzhake.htm`

[2] A. Sosinsky: Of amoebas and men. Quantum, 1. bemutató szám, 1990. január, 44–45. old. `https://static.nsta.org/pdfs/QuantumP1.pdf`

K/C gyakorlatok megoldása



K/C. 778. *Egy téglalapot az oldalaival párhuzamos egyenesekkel kilenc kis téglalapra bontottunk az ábrán látható módon. A megadott öt téglalapnak ismerjük a területét, a többinek nem. Határozzuk meg a négy téglalap területét. (Az ábra csak illusztráció, a méretek nem feltétlenül helyesek.)*

20 cm^2	t_2	36 cm^2
30 cm^2	t_3	t_4
t_1	8 cm^2	24 cm^2

Megoldás. A megoldás során felhasználjuk, hogy egy a és b oldalhosszúságú téglalap területképlete: $T=a\cdot b$, amelyből például az a oldal az $a=\frac{T}{b}$ összefüggéssel fejezhető ki. Jelöljük a 20 cm^2 területű téglalap vízszintes oldalát x-szel, ekkor az első megállapításunk miatt a függőleges oldala $\frac{20}{x}$ lesz. Hasonló módon kapjuk, hogy a 30 egység területű téglalap függőleges oldala $\frac{30}{x}$, a t_1 területűé $\frac{t_1}{x}$. Ebből adódóan a 8 egység területű téglalap vízszintes oldala $\frac{8x}{t_1}$, a 24 egység területűé $\frac{24x}{t_1}$.

Ekkor a 36 cm^2 területű téglalap területét felírhatjuk x és t_1 segítségével:

$$36=\frac{20}{x}\cdot\frac{24x}{t_1}=\frac{480}{t_1},$$

amiből

$$t_1=\frac{480}{36}=\frac{40}{3}\ \mathrm{cm}^2.$$

A másik három téglalap területét pedig t_1-ből már könnyedén kiszámolhatjuk a következő módon:

$$t_2=\frac{20}{x}\cdot\frac{8x}{t_1}=\frac{160}{t_1}=\frac{160}{\frac{40}{3}}=12\ \mathrm{cm}^2,$$

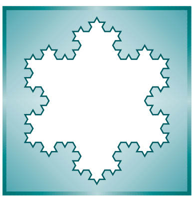
$$t_3=\frac{30}{x}\cdot\frac{8x}{t_1}=\frac{240}{t_1}=\frac{240}{\frac{40}{3}}=18\ \mathrm{cm}^2,$$

$$t_4=\frac{30}{x}\cdot\frac{24x}{t_1}=\frac{720}{t_1}=\frac{720}{\frac{40}{3}}=54\ \mathrm{cm}^2.$$

20 $\frac{20}{x}$	t_2	$\frac{20}{x}$	36
x 30 $\frac{30}{x}$ x	$\frac{8x}{t_1}$ t_3 $\frac{8x}{t_1}$	$\frac{30}{x}$	$\frac{24x}{t_1}$ t_4 $\frac{24x}{t_1}$
t_1 $\frac{t_1}{x}$	8	$\frac{t_1}{x}$	24

Szalóki Árpád (Szolnok, Verseghy Ferenc Gimn., 9. évf.) dolgozata alapján

Összesen 271 dolgozat érkezett. 5 pontos 159, 4 pontos 40, 3 pontos 19 dolgozat. 2 pontot 27, 1 pontot 13, 0 pontot szintén 13 versenyző kapott.



Matematika C gyakorlatok megoldása

C. 1790. *Határozzuk meg az $x^2+y^2+5z^2-xy-3yz-zx+3x-4y+7z$ kifejezés legkisebb értékét, ha x, y, z valós számok.*

(*vietnámi feladat*)

1. megoldás. Az $x^2+y^2+5z^2-xy-3yz-zx+3x-4y+7z$ $(x,\ y,\ z\in\mathbb{R})$ kifejezés legkisebb értéke meghatározható, ha sikerül átalakítanunk azt négyzetes kifejezések és egy konkrét szám összegévé, mivel egy négyzetes kifejezés minimális értéke 0. Ezért ha sikerül ilyen formára hozni a kifejezést, azt kell majd vizsgálni, hogy a négyzetes tagok milyen x, y, z értékek mellett veszik fel egyszerre a 0 értéket.

Szorozzuk meg a kifejezés minden tagját és osszuk is el 2-vel:

$$\frac{2x^2+2y^2+10z^2-2xy-6yz-2zx+6x-8y+14z}{2}.$$

A tört számlálójában átrendezzük úgy a tagokat, hogy az x, y ismeretlent tartalmazó négyzetes kifejezés kibontott elemei egymást követően szerepeljenek a kifejezésben. Ehhez a kifejezés néhány tagját két részre bontjuk, és a számlálóhoz hozzáadunk 1-et, amit le is vonunk, hogy a kifejezés értéke ne változzon. Ekkor a következőt kapjuk:

$$\frac{x^2+y^2+1-2xy+2x-2y-1+x^2+y^2+10z^2-6yz-2zx+4x-6y+14z}{2}.$$

A számláló első hat tagja teljes négyzetté alakítható:

$$x^2+y^2+1-2xy+2x-2y=(x-y+1)^2.$$

Ezt a kifejezésbe helyettesítve kapjuk, hogy

$$\frac{(x-y+1)^2-1+x^2+y^2+10z^2-6yz-2zx+4x-6y+14z}{2}.$$

Hasonló módon átalakítva a számláló többi részét:

$$\frac{(x-y+1)^2-1+x^2+z^2+4-2zx+4x-4z-4+y^2+9z^2+9-6yz-6y+18z-9}{2}.$$

A számláló további két része is teljes négyzetté alakítható:

$$x^2+z^2+4-2zx+4x-4z=(x-z+2)^2$$

és

$$y^2+9z^2+9-6yz-6y+18z=(y-3z-3)^2.$$

A teljes négyzeteket behelyettesítve és az ismeretlent nem tartalmazó értékeket összeadva az alábbi kifejezést kapjuk:

$$\frac{(x-y+1)^2+(x-z+2)^2+(y-3z-3)^2-14}{2}.$$

Ezt kicsit átalakítva, hogy könnyebben kezelhető legyen, kapjuk, hogy

$$\frac{(x-y+1)^2+(x-z+2)^2+(y-3z-3)^2}{2}-7.$$

Ez a kifejezés ott veszi fel a minimális értékét, ahol a tört értéke a legkisebb. Mivel a tört számlálója négyzetes kifejezések összege és egy négyzetes kifejezés minimális értéke 0, a tört értékének minimuma is 0 lesz, ha létezik olyan x, y, z számhármas, amelyre mindhárom négyzetes kifejezés egyszerre veszi fel a 0 értéket. Ehhez a következő három egyenlőségnek egyszerre kell teljesülnie:

$$x-y+1=0, \tag{1}$$
$$x-z+2=0, \tag{2}$$
$$y-3z-3=0. \tag{3}$$

(1)-ből $y = x + 1$, (2)-ből $z = x + 2$, ezeket (3)-ba helyettesítve:

$$\begin{aligned} x + 1 - 3x - 6 - 3 &= 0, \\ 2x &= -8, \\ x &= -4. \end{aligned}$$

x-et visszahelyettesítve (1)-be, illetve (2)-be kiszámolható, hogy $y = -3$ és $z = -2$.

Valóban, $x = -4$, $y = -3$ és $z = -2$ esetén mindhárom négyzetes kifejezés egyszerre veszi fel a 0 értéket. Ekkor a tört értéke 0 lesz, így az egész kifejezés minimuma -7.

Megjegyzés. A kifejezés átalakításában az alábbiak átgondolása segített:

Az átalakítandó kifejezésben mindhárom ismeretlen megtalálható négyzetre emelve, illetve szerepeltek az ismeretlenek egymással páronként vett szorzatai is. Ez az összeállítás négyzetes kifejezések összegéből úgy jöhet létre, hogy az három négyzetre emelt kifejezésből áll, amelyek mindegyike két ismeretlent tartalmaz, és minden ismeretlen két négyzetes kifejezésben szerepel.

Az eredeti kifejezésben azonban a négyzetes tagok és a kettős szorzatok mellett az ismeretlenek önmagukban, első hatványon is szerepelnek. Ezt úgy kaphatjuk meg, hogy a négyzetre emelt kifejezések a két-két ismeretlen mellett egy-egy konkrét számot is tartalmaznak.

Többtagú kifejezések négyzetre emelésekor az eredményben minden tag négyzete mellett két-két tag kétszeres szorzata is szerepel. Ráadásul, ha minden ismeretlen két négyzetre emelt kifejezésben is szerepel, akkor azok együtthatójának is párosaknak kellene lenniük. Az eredeti kifejezésben azonban nem szerepelnek kétszeres szorzatok, és a négyzetes tagokat sem páros számmal szorozzuk be. Így a kifejezés átalakításakor érdemes lehet 2-vel szoroznunk, és – hogy a kifejezés értéke ne változzon – ugyanennyivel osztanunk is kell majd.

Pázmándi Renáta (Budapest V. Ker. Eötvös József Gimnázium, 9. évf.)

2. megoldás. A minimumérték megállapítását két lépésben végezzük.

a) Megsejtjük, hogy milyen x, y, z értékek esetén lehet a kifejezésnek minimuma.

b) Belátjuk, hogy ott tényleg minimuma van, és kiszámoljuk, mi ez a minimum.

Az *a)* részt többféleképpen is megvalósíthatjuk.

Az egyik lehetőség, hogy valamely számítógépes programmal kiszámoltatjuk, hogy hol lehet a minimum. Lehetett ilyen programot írni – mint például Molnár-Sáska Tamás (6. o.) –, vagy lehetett ilyen programot készen találni.

Egy másik lehetőség volt, hogy a megadott kifejezést háromváltozós függvénynek tekintve úgynevezett parciális deriváltak segítségével sejti meg valaki, hol lehet a kifejezés minimuma. Minthogy ez nem középiskolai anyag még emelt szinten sem, így aki ezt az utat választotta, annak a használt tételeket kimondania és bizonyítania is kellett (többeknél csak kellett volna), mivel a Versenykiírás szerint „Levezetés és hivatkozás nélkül csak a középiskolai tananyagban szereplő tételeket fogadjuk el."

A *b)* részt beláthatjuk a következő módon:

Azt sejtjük, hogy az $x^2+y^2+5z^2-xy-3yz-zx+3x-4y+7z$ kifejezés értéke akkor a legkisebb, ha $x=-4$, $y=-3$ és $z=-2$.

Nézzük meg, mekkora értéket vesz fel ez a kifejezés, ha $x=-4+a$, $y=-3+b$ és $z=-2+c$.

Ezeket behelyettesítve az egész kifejezés így néz ki:

$$\begin{aligned}(-4+a)^2+(-3+b)^2+5(-2+c)(-2+c)^2-\\ -(-4+a)(-3+b)-3(-3+b)(-2+c)-\\ -(-2+c)(-4+a)+3(-4+a)-4(-3+b)+7(-2+c).\end{aligned}$$

Ez zárójelek felbontása és az összevonások után a következő formát veszi fel:

$$\begin{aligned}16+a^2-8a+9+b^2-6b+20{+}5c^2-20c+3a+4b-12-\\ -ab+6b+9c-18-3bc+2a+4c-8-ac-12+3a+12-4b-14+7c=\\ =-7+a^2+b^2{+}5c^2-ab-3bc-ac.\end{aligned}$$

Szorozzunk meg minden elemet 2-vel, mert akkor könnyebben tudunk teljes négyzeteket kialakítani (ez azon nem változtat, hogy mely a, b és c értékekre lesz a kifejezés értéke minimális):

$$-14+2a^2+2b^2{+}10c^2-2ab-6bc-2ac=(a-b)^2+(a-c)^2{+}(b-3c)^2-14.$$

Egy szám négyzete nem lehet kisebb, mint 0, tehát a lehető legkisebb számot akkor kapjuk, ha mind a három négyzetes kifejezés értéke 0. Ha $a=b=c=0$, akkor ez teljesül.

Más a, b, c értékekre viszont nem teljesül, mert ha a, b és c olyan, hogy mindhárom négyzetes tag 0, akkor az első kettő miatt $a=b$ és $a=c$, amelyekből persze az is következik, hogy $b=c$. De ha b és c (és a) nem lenne 0, akkor $b-3c$ sem lenne az.

Vagyis az eredeti kifejezés minimális értéke -7, és ezt akkor veszi fel, ha $a=b=c=0$, vagyis ha $x=-4$, $y=-3$ és $z=-2$.

Molnár-Sáska Tamás (Budapest, ELTE Radnóti M. Gyak. Ált. Isk. és Gyak. Gimn., 6. évf.)

Megjegyzések. 1. Meglepően sokan használták a szélsőérték megkeresésére a parciális deriváltakat. Sajnos a kizárólag ezen alapuló megoldások gyakorlatilag mind hibásak vagy hiányosak. Az, hogy az (x_0,y_0,z_0) pontban a parciális deriváltak mindegyike 0 legyen, valóban szükséges feltétele a helyi minimum létezésének, de nem elegendő hozzá. Nem elegendő az sem, amire néhányan hivatkoztak, hogy a legmagasabb fokú tagok négyzetesek és ezek előjele pozitív, így persze nem volt elegendő hivatkozás az sem, hogy a tiszta második parciális deriváltak pozitívak.

A könnyebb átláthatóság kedvéért egy kétváltozós ellenpéldát adunk:

$$f(x,y)=x^2+y^2-3xy.$$

Ennek a függvénynek az első parciális deriváltjai ($2x-3y$, illetve $2y-3x$) nullák a $(0,0)$ pontban, a tiszta második parciális deriváltak (2 és 2) pozitívak itt, és a négyzetes tagok előjele is pozitív. Ám ennek sem minimuma, sem maximuma nincs a $(0,0)$ pontban, mert az $x=y$ síkkal metszve az $x^2+x^2-3x^2=-x^2$ függvényt kapjuk, amelynek maximuma van a $(0,0)$ pontban, míg az $x=-y$ síkkal metszve az $x^2+x^2+3x^2=5x^2$ függvényt, amelynek minimuma – amint az azonnal látszik, ha a függvényt például GeoGebrában szemléltetjük.

A helyi szélsőérték létezésére ismeretes elégséges feltétel is, de annak megmutatása után, hogy ez a feladatban szereplő formula által meghatározott függvényre teljesül, még azt is bizonyítani kéne, hogy ennél a helyi minimumnál kisebb értéket máshol sem vesz fel a függvény.

2. A számítógéppel kiszámított x, y és z értékek csak sejtésként voltak elfogadhatóak, ahogy például a 2. megoldás 1. részében. Azt, hogy a kifejezésnek ezen értékeknél valóban minimuma van, még bizonyítani kellett, a pusztán számítógéppel kiszámolt végeredményeket – miként bármely más feladat számítógéppel készített megoldását – a Versenykiírás értelmében nem tudjuk elfogadni.

Összesen 97 dolgozat érkezett. 5 pontos 32, 4 pontos 15 dolgozat. 3 pontot szerzett 2 versenyző, 2-t 5, 1 pontot 3. 0 pontot 32. Nem versenyszerű 7, nem értékelhető 1 dolgozat.

Nehezebb feladatok megoldása

A. 865. *Keresztrejtvénynek nevezünk egy fekete és fehér négyzetekből álló négyzetrácsot, amelyben minden fehér mezőhöz található egy őt tartalmazó 2×2-es része a táblázatnak, amely csak fehér mezőkből áll. Szónak nevezzük a táblázat egy sorában vagy oszlopában található, csak fehér mezőkből (legalább kettőből) álló részét a táblázatnak, amelyet mindkét végén fekete mező vagy a tábla széle határol.*

Bizonyítsuk be, hogy egy $n\times n$-es keresztrejtvényben nem lehet több szó, mint $\dfrac{(n+1)^2}{2}$.

Javasolta: *Nikolai Beluhov* (Bulgária)

1. megoldás. Tekintsünk egy $(n+2)\times(n+2)$-es keresztrejtvényt, amelynek külső mezői feketék, tehát csak a belső $n\times n$-es táblázatot színezzük szabadon. Egy ilyen $(n+2)\times(n+2)$-es keresztrejtvényben a szavak maximális száma ugyanannyi, mint egy sima $n\times n$-es keresztrejtvény esetében. Nevezzünk *pár*nak két élszomszédos mezőt, ha az egyik fehér, a másik pedig fekete. (A két mező egymás párja.)

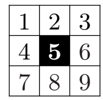
Látható, hogy ha P darab pár van a keresztrejtvényben és S darab szó, akkor $S=\frac{P}{2}$. Ugyanis ha valahol van egy pár, akkor ennek fehér tagjával indul egy szó, amit végül egy másik pár fekete mezője zár le. A szavak számára a párok számával adunk majd becslést.

Nevezzünk *társ*aknak két csúcsszomszédos mezőt, ha az egyik fehér, a másik pedig fekete, és az a két mező is fehér, amely mindkettőnek élszomszédja. A fekete szegélyű $(n+2)\times(n+2)$-es keresztrejtvényben lévő összes társ számát T-vel jelöljük.

Szomszédos mezőkön a továbbiakban élszomszédos mezőket értünk.

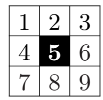
Belátjuk a következő állításokat:

(i$_1$) *Ha egy fekete mezőnek* 3 *párja van, akkor van (legalább egy) társa.*



Ehhez nézzük az ábrát, amely a fekete szegélyű keresztrejtvény egy darabját mutatja. A három párral rendelkező fekete mező az 5-tel számozott, a három párja legyen a 2, a 4 és a 8. Ha 5-nek nem lenne társa, akkor 1 és 7 is fekete lenne, de ekkor 4-hez nem lenne olyan 2×2-es fehér rész, amely tartalmazná azt.

(i$_2$) *Ha egy fekete mezőnek* 4 *párja van, akkor van legalább két társa.*



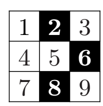
Ismét az ábrát használjuk, és 5 az a fekete mező, amelynek négy párja van. Ha 5-nek nem lenne legalább két társa, akkor 1-es, 3-as, 7-es és 9-es közül legalább három fekete lenne. De ekkor két olyan fehér mező is lenne, amelyhez nincs őt tartalmazó 2×2-es fehér rész, például ha 1, 3 és 7 a három fekete mező, akkor 2 és 4 az, amelyhez nincs ilyen.

(i$_1$) és (i$_2$) együtt azt jelentik, hogy ha egy fekete mezőnek p_F darab párja van, akkor van legalább p_F-2 darab társa. Vagyis ha a társai számát t_F-fel jelöljük, akkor $t_F\ge p_F-2$, vagy, ami ezzel ekvivalens, $p_F\le t_F+2$.

Ha az $n\times n$-es keresztrejtvényben F darab fekete mező van, akkor ezek mindegyikére érvényes az előző egyenlőtlenség, így azt a belső fekete mezők mindegyikére felírva és ezeket összeadva – mivel minden társat és párt pontosan egyszer vettünk figyelembe – azt kapjuk, hogy

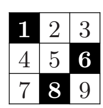
$$P\le T+2F. \tag{I}$$

(j$_1$) *Egy fehér mezőnek (az ábrán az* 5*-tel jelölt) legfeljebb két párja van.*



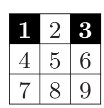
Ugyanis ha legalább három lenne (például 2, 6 és 8), akkor a három közül kettő átellenes lenne (2 és 8), és ez esetben nem lenne olyan fehér mezőkből álló 2×2-es része a négyzetrácsnak, amely tartalmazza az 5-ös mezőt.

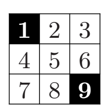
(j$_2$) *Ha egy fehér mezőnek egy társa van, akkor legfeljebb egy párja van.*



Legyen ez a társa (az 5-ös mezőnek) az 1-es. Ekkor 2 és 4 is fehér (a „társ” definíciója szerint), így ha van két párja, akkor az csak 6 és 8 lehet (ld. ábra). De ekkor az 5-ös nem lenne része egy fehér mezőkből álló 2×2-es a négyzetrácsnak.

(j$_3$) *Ha egy fehér mezőnek két társa van, akkor nincs párja.*





A két társ átellenes kell legyen, mert ha nem azok lennének – például 1 és 3 –, akkor a köztük lévő (most 2-es) mező nem lenne része egy fehér mezőkből álló 2×2-es a négyzetrácsnak.

Vagyis ez a két társa az 5-ös mezőnek átellenes – például az 1-es és a 9-es –, ekkor viszont a 2, 4, 6 és 8 mezők fehérek.

(j_4) *Egy fehér mezőnek (az ábrán az 5-tel jelölt) legfeljebb két társa van.*

1	2	**3**
4	5	6
7	8	**9**

Ugyanis ha legalább három lenne (például 1, 3 és 9), akkor legalább két fehér mező (most 2 és 6) nem lenne része egy fehér mezőkből álló 2×2-es négyzetrácsnak.

(j_1)–(j_4) együtt azt jelentik, hogy ha egy fehér mezőnek t_f darab társa van és p_f darab párja, akkor $p_f + t_f \leq 2$, vagy ami ezzel ekvivalens, $p_f \leq 2 - t_f$.

Ha az $n \times n$-es keresztrejtvényben f darab fehér mező van, akkor ezek mindegyikére érvényes az előző egyenlőtlenség, így azt a fehér mezők mindegyikére felírva és ezeket összeadva azt kapjuk, hogy

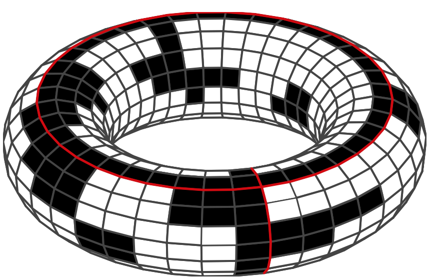
$$P \leq 2f - T. \tag{J}$$

(I) és (J) megfelelő oldalait összeadva kapjuk, hogy $2P \leq 2(f + F)$, vagyis a párok számára teljesül, hogy $P \leq f + F = n^2$.

Korábban láttuk, hogy $S = \frac{P}{2}$, így a szavak száma legfeljebb $\frac{n^2}{2}$.

Ezzel az eredetinél erősebb állítást bizonyítottunk be, hiszen minden n természetes számra $\frac{n^2}{2} < \frac{n+1}{2}^2$.

Szakács Ábel (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. o.) megoldása alapján



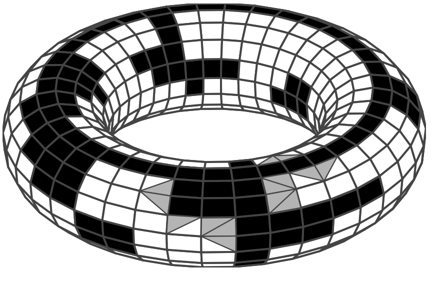
1. ábra

2. megoldás. Egészítsük ki a keresztrejtvényt még felül és a bal oldalon egy $(n + 1)$-edik sorral és egy $(n + 1)$-edik oszloppal. Ezután az így kapott táblázatot rajzoljuk át a tóruszra, vagyis először hajtsuk össze hengerré úgy, hogy az első és utolsó oszlop szomszédosak legyenek, majd ezután a hengert hajtsunk a szokásos „fánkká”, szomszédossá téve az első és utolsó sort.

Vizsgáljuk meg, hogy ezen az $(n + 1)^2$ mezőből álló „tórusztáblázaton” mik a szavak. Világos, hogy az eredeti táblázatban azok a szavak, amelyeket két fekete mező határol, továbbra is ilyen szavak maradnak. Azonban azok a szavak is ilyenek lesznek, amelyeknek eddig legalább az egyik vége a táblázat széle volt, hiszen most már minden szélső mező vízszintes szomszédja másik irányban egy fekete mező a táblázat konstrukciója miatt. Megfordítva, az olyan, legalább két mezőből álló fehér „csíkok”, amelyek mindkét végén fekete mező van a tóruszon, az eredeti keresztrejtvényben is szavak lesznek, hiszen a végek csak a táblázat széléhez tartozó vagy a táblázatban szereplő fekete mezők lehetnek, és közöttük a szó szigorúan csak az eredeti táblázat mezőit tartalmazza. Vagyis ezzel a tóruszos kiterjesztéssel egységesítettük a szó definícióját arra, hogy a tórusszá kiterjesztett táblázatban néhány (legalább kettő, de a táblázat definíciójából is következik, hogy egy nem lehet) víszintesen vagy függőlegesen szomszédos fehér mező, amelyeket mindkét irányból fekete mező határol.

Vegyük észre, hogy ha ezzel a definícióval minden szóhoz hozzárendeljük azt a két szomszédos fekete-fehér mezőpárt, amelyek a szó végein álló fehér négyzetek és a következő fekete négyzetekből állnak, akkor így minden szomszédos fekete-fehér mezőpár pontosan egy szóhoz lett hozzárendelve: ahhoz, ami a fehér mezőből a fekete mezővel ellentétes irányba indulva a következő fekete mezőig tart. Vagyis a szavak száma a szomszédos fekete-fehér mezőpárok számának a fele. Ez adhatja az ötletet a következő kulcsgondolathoz:

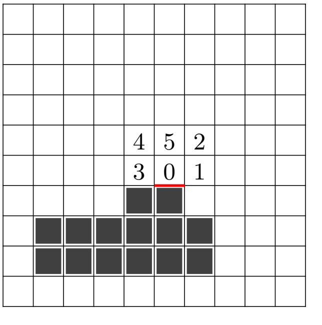
Rajzoljunk a tóruszon minden szomszédos fekete-fehér mezőpár esetén a fehér mezőre befelé egy-egy szürke $\frac{1}{2}$ területű háromszöget, amelynek egyik oldala a fekete mezővel közös szakasz, a harmadik csúcsa pedig a fehér mező másik két csúcsa közül valamelyik (lásd 2. ábra). Ezt úgy akarjuk megvalósítani, hogy a háromszögek ne fedjék át egymást, illetve a fehér mezőket.



2. ábra

Ez azért jó nekünk, mert a szürke háromszögek területösszege éppen a szomszédos fekete-fehér mezőpárok számának a fele, vagyis a szavak száma lenne. Ha pedig be tudnánk látni, hogy a szürke háromszögek területösszege legfeljebb $\frac{(n+1)^2}{2}$ lehet, akkor készen lennénk.

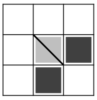
Vegyünk tehát egy szomszédos fekete-fehér mezőpárt, és számozzuk meg a négyzeteket a *3. ábrán* látható módon, ahol a 0-val jelölt négyzetbe szeretnénk egy szürke háromszöget rajzolni a piros szakaszra.



3. ábra

Ekkor a 0-val jelölt mező valamelyik 2×2-es fehér négyzet egyik csúcsa. Ez nem tartalmazhatja a vele piros szakasz mentén szomszédos fekete mezőt, vagyis csak a 0125, vagy 0345 mezőkből álló négyzet lehet. Ez azt jelenti, hogy vagy az 1-es és a 2-es, vagy a 3-as és a 4-es mező egyszerre fehérek. A szürke háromszöget ekkor úgy fogjuk megrajzolni, hogy harmadik csúcsa szintén közös csúcsa legyen ezen két fehér mezőnek, vagyis ha az 1-es és 2-es mezők fehérek, akkor a szürke háromszög másik befogója a 0-s és 1-es négyzetek közös éle, ha pedig ezek nem, akkor a 3-as és 4-es négyzetek fehérek, így a 3-assal közös él lesz a szürke háromszög másik oldala. Természetesen ez az indoklás csak a négyzetek egymáshoz mért helyzetét használta ki, így bármilyen szomszédos fekete-fehér mezőpárnál elmondható ez a gondolatmenet.

Azt állítjuk, hogy ekkor a szürke háromszögek nem fedik egymást, és a fekete mezőket sem. Utóbbi nyilvánvaló, hiszen mind teljes terjedelmükkel fehér mezőkbe vannak rajzolva, de előbbit sem nehéz igazolni: ha két szürke háromszögnek lenne közös része, akkor nyilván ugyanabba a fehér négyzetbe kell hogy legyenek rajzolva, a két fekete mező, amelyek vele közös éleire ezeket emeltük, ennek két szomszédja.



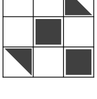
4. ábra

Nyilván nem lehet két szemközti szomszéd (ugyanis akkor a fehér négyzetünk nem lehetne része egy 2×2-es fehér négyzetnek), vagyis a két fekete mező, amik fölé rajzoltuk a háromszögeket, csúcsszomszédosak. Azonban a szürke háromszögek szerkesztése miatt egyik háromszögnek sem a két, fekete mezővel szomszédos él a két befogója, vagyis a két háromszög a határuktól eltekintve diszjunkt (lásd *4. ábra*).

Végül belátjuk, hogy a szürke háromszögek összterülete legfeljebb $\frac{(n+1)^2}{2}$. Ehhez készítsünk egy gráfot, amelynek csúcsai a fekete mezők, és két csúcsot akkor köt össze él, ha a két fekete mező szomszédos a tóruszon. Vizsgáljuk a fekete mezők fehér szomszédjainak számát (vagyis a szürke háromszögek számát) a gráf összefüggőségi komponenseiben külön-külön. Ha egy komponens k mezőből áll, akkor azok között legalább $k-1$ él fut, vagyis ha minden feketére összeszámoljuk, hogy hány másik fekete mezővel szomszédos ebben a komponensben, akkor legalább $(2k-2)$-t kapunk. Mivel minden fekete mezőnek pontosan 4 szomszédja van, ezért a komponens mezői legfeljebb $4k-(2k-2)=2k+2$ fehér mezővel szomszédosak, vagyis egy k csúcsú komponens mezőihez tartozó szürke háromszögek területösszege legfeljebb $k+1$.

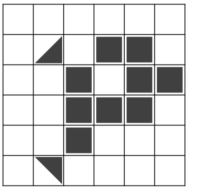
Vegyük azonban észre, hogy ez az egyenlőség is csak akkor áll fenn, ha a komponens fa, egyéb esetben ugyanis a komponensben legalább k él van, vagyis a komponens mezőihez tartozó szürke háromszögek területösszege legfeljebb $\frac{4k-2k}{2}=k$. Ha tehát egy komponens nem fa, akkor a mezőihez tartozó szürke háromszögek területösszege legfeljebb fele a területének, vagyis ha a fekete gráf nem tartalmaz fa komponenset, akkor készen is lennénk, hiszen komponensenként összeadva minden komponensben legfeljebb akkora a szürke háromszögek területösszege, mint a fekete négyzeteké, és összesen (mivel a szürke és fekete területek nem fedik át egymást – külön-külön sem) területösszegük legfeljebb a teljes tórusz területe, vagyis $(n+1)^2$, ezért a szürke háromszögek területe legfeljebb $\frac{(n+1)^2}{2}$. Ha azonban a szürke gráfban van fa komponens, akkor a becslésünkön még egy kicsit élesítenünk kell.

Ekkor minden fa komponens fekete területét szeretnénk úgy bővíteni 1-gyel, hogy továbbra se legyen átfedés, ekkor ugyanis már tudnánk alkalmazni minden táblázat esetén a fenti gondolatmenetet. Ehhez először tekintsük az 1×1-es fekete négyzeteket, amelyeket csupa fehér vesz körbe (vagyis az izolált pontokat a gráfban). Vegyük egy ilyen négyzet egyik oldalát. A négyzettel ezen az oldalon fekvő két csúcs mentén szomszédos két négyzet közül legalább az egyik fehér, ellenkező esetben ugyanis az ezen oldal mentén szomszédos fehér mező nem lenne része egyetlen 2×2-es fehér táblázatnak sem. Ekkor ebbe a négyzetbe rajzoljunk egy $\frac{1}{2}$ területű fekete egyenlő szárú derékszögű háromszöget, amelynek derékszögű csúcsa a fekete négyzettel közös csúcs (lásd *5. ábra*). Ezt megcsinálhatjuk a fekete négyzet szemközti oldalára is, így az 1×1-es fekete részek területére már megvan az algoritmus, hogy hogyan bővítsük.



5. ábra

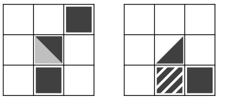
Az 1-nél több csúcsból álló komponensekre pedig nagyon hasonló az ötlet. Ugyanis egy $k > 1$ pontú fának van legalább két levele (olyan pontja, amelynek foka 1), ellenkező esetben ugyanis a fokszámok összege legalább $2(k-1)+1 = 2k-1$ lenne, ellentétben azzal, hogy egy k pontú fában a fokszámok összege $2k-2$. Egy ilyen levélnek tekintsük azt az oldalát, amely a fekete szomszédjával szemközti, és ennek a megfelelő csúcsához emeljünk a fenti módon egy fekete háromszöget. Ezt csináljuk meg a másik levélre is, így két különböző $\frac{1}{2}$ területű háromszöggel bővítettük a feketék területét.



6. ábra

Ezután belátjuk, hogy a rajzolt fekete háromszögek nem fednek át sem egymással, sem a szürke háromszögekkel, sem a fekete mezőkkel. A harmadik világos, hiszen fehér mezőkbe rajzoltuk őket. Ahhoz, hogy egymással nem fednek át, vegyük észre, hogy ha így lenne, akkor ugyanabba a fehér mezőbe lennének rajzolva, tehát a két levél (melyek esetleg különböző komponensekhez tartoznak, de ez nem lényeges), amelyekhez a háromszögeket rajzoltuk egyaránt csúcsszomszédja ennek a négyzetnek. Ha átellenes csúcsokban lennének szomszédosak, akkor a két fekete háromszög nem metszené egymást, marad tehát az az eset, hogy két szomszédos csúcsban szomszédosak a megadott négyzettel. Ekkor azonban ezen két fekete mező közti mező csak fehér lehetne (hiszen a fekete háromszögek konstrukciója miatt, azok mindkét befogójával szomszédos oldala a levél nem fekete szomszédja), de ez nem lenne része egyetlen 2×2-es négyzetnek sem. Vagyis a fekete háromszögeknek egymással sem lehet közös részük.

Végül ha egy fekete és egy szürke háromszögnek lenne közös része, akkor nyilván ugyanabban a fehér mezőben lennének, tehát a fekete mezők, amelyekhez hozzá vannak rendelve, ennek oldal-, illetve csúcsszomszédai lennének. Itt lényegében két különböző lehetőség van a fekete mezők elhelyezkedésére (lásd *7. ábra*, a többi forgatással ezen két eshetőség valamelyikébe vihető), de előbbi esetben a szürke háromszög definíció szerint a berajzolt módon fog állni (vagyis nem lehet közös része a feketével), utóbbi esetben pedig a fekete levélnek, amelyhez a fekete háromszöget rendeltük, a háromszöggel közös csúcsból induló két oldal menti szomszédjai fehérek lennének, ami ismét ellentmondás.



7. ábra

Ezzel tehát beláttuk, hogy a színezett területek között továbbra sincs átfedés. Azonban így már a gráf minden komponensére teljesül, hogy a hozzárendelt területekkel együtt a fekete terület legalább akkora, mint a szürke, és mivel minden fa komponenshez különböző fekete területeket rendeltünk hozzá, ezért összességében is igaz lesz, hogy a szürke terület legfeljebb akkora, mint a fekete. A két terület összege pedig legfeljebb a tórusz teljes területe, így a szürke terület, vagyis a szavak száma a keresztrejtvényben, legfeljebb ennek a fele, tehát $\frac{(n+1)^2}{2}$. Az állítást ezzel beláttuk.

Varga Boldizsár (Budapest, Békásmegyeri Veres Péter Gimn., 11. o.)

Összesen 8 dolgozat érkezett. Megoldotta Varga Boldizsár, és lényegében megoldotta Szakács Ábel. 2 pontot kapott 1, 1 pontot 2, 0 pontot 3 versenyző.

A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok 9. osztályosoknak (814–818.)

K. 814. Egy mezőn birkanyáj legelészik. A birkák egy részét megjelölték, a megjelölt és a jelöletlen birkák számának aránya $\frac{3}{5}$.

A jelöletlen birkák közül csak 17 van megnyírva, a megjelölt birkákat mind megnyírták, viszont a megnyírt és a meg nem nyírt birkák száma egyenlő. Hány birka legelészik a réten?

Javasolta: *Bíró Bálint* (Eger)

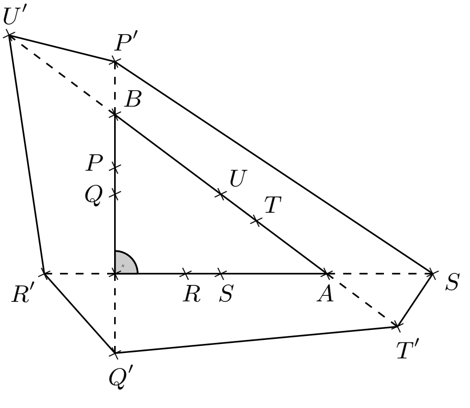
K. 815. Az ABC derékszögű háromszög BC befogóján úgy vettük fel a D pontot, hogy $BC=4BD$, az AC befogón felvett E pontra pedig $AC=8CE$ teljesül. Határozzuk meg az AB átfogó hosszát, ha tudjuk, hogy $AD=164$ és $BE=52$.

vietnámi feladat

K. 816. Adott az $E(x)=\dfrac{8x-12}{4x^2-12x+9}-\dfrac{5x}{2x^2+3x}-\dfrac{20x}{9-4x^2}$ kifejezés. Határozzuk meg azon x egész számokat, amelyekre $E(x)$ természetes szám.

Matlap (Kolozsvár)

K/C. 817. Egy dobozban van négy papírcetli, amelyek mindegyikére egy-egy pozitív számot írtunk. Kihúzunk valahány cetlit, majd a rajtuk lévő számokat összeadjuk. (Ha egy cetlit húzunk ki, akkor azt a számot vesszük, amely a cetlin van.) Ezt az összes lehetséges módon megcsináljuk. Milyen számok vannak a cetlikre írva, ha az így kapott eredmények mind egymást követő egész számok?



K/C. 818. Az ABC derékszögű háromszög befogóinak hossza $BC=6$, $CA=8$ egység. A BC befogó B-hez közelebb eső harmadolópontja P, felezőpontja Q, a CA befogó C-hez közelebbi harmadolópontja R, felezőpontja S, végül az AB átfogó A-hoz közelebbi harmadolópontja T, felezőpontja U. Tükrözzük a P, R, T harmadolópontokat az ABC háromszög hozzájuk legközelebb eső csúcspontjára, a Q, S, U felezőpontokat pedig a megfelelő háromszögoldal másik végpontjára az ábra szerint.

Határozzuk meg a $P'U'R'Q'T'S'$ sokszög területét.

Javasolta: *Bíró Bálint*, (Eger)

❄

Beküldési határidő: 2024. június 10.

Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄

A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (817–818., 1813–1817.)

Feladatok 10. évfolyamig

K/C. 817. A szövegét lásd a **K** feladatoknál.

K/C. 818. A szövegét lásd a **K** feladatoknál.

Feladatok mindenkinek

C. 1813. Mutassuk meg, hogy nincsenek olyan m, n pozitív egész számok, amelyekre
$$3^m + 3^n + 1$$
teljes négyzet.

amerikai versenyfeladat

C. 1814. Milyen arányban osztja két részre az r sugarú kör területét az az egyenes, amelynek a kör középpontjától való távolsága $\frac{r}{\sqrt{2}}$?

Ringler András (Budapest)

C. 1815. Oldjuk meg az
$$x^2y - zu^2 = 6,$$
$$x^2z + yu^2 = 11$$
egyenletrendszert, ha x, y, z, u természetes számok.

Katz Sándor (Bonyhád) ötlete alapján

Feladatok 11. évfolyamtól

C. 1816. Az $a = 14$, $b = 13$, $c = 15$ hosszúságú oldalakkal rendelkező háromszög oldalai érintik az $R = 5$ sugarú gömböt. Határozzuk meg a gömb középpontja és a háromszög síkja közötti távolságot.

horvát versenyfeladat

C. 1817. Elkezdtünk egy pénzérmét dobálni. A dobássorozat eredménye: egy fej, egy írás, egy fej, két írás, egy fej, három írás, egy fej és így tovább, azaz az írásokból álló megszakításmentes szériák hossza mindig 1-gyel növekszik, és azokat minden esetben egyetlen fej választja el egymástól. Ha ez a szabályosság megmarad, akkor hányadik dobás után hagyhatjuk abba a dobálást, hogy a fejek relatív gyakorisága pontosan $\frac{1}{2023}$ legyen?

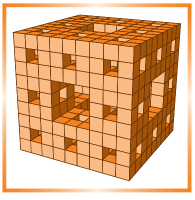
Barczy Mátyás, *Nyul Gábor* (Debrecen)

❄

Beküldési határidő: 2024. június 10.

Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄



A B pontversenyben kitűzött feladatok (5390–5397.)

B. 5390. Léteznek-e olyan a_0, a_1, $\ldots$, a_{n-1} páros egész számok, amelyekre az $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ polinom osztható az $x^2 + x + 1$ polinommal?

(3 pont) Javasolta: *Kós Géza* (Budapest)

B. 5391. Az egységnyi AB átmérőjű körvonalon kijelölünk egy C pontot. Ezután az AB szakaszon felvesszük a D és E pontokat úgy, hogy $BD = BC$ és $AE = AC$. Határozzuk meg $AD^2 + DE^2 + EB^2$ lehetséges legkisebb értékét.

(4 pont) Javasolta: *Szoldatics József* (Budapest)

B. 5392. Tekintsünk egy olyan trapézt, amelynek területe egyenlő alapjainak szorzatával. Mutassuk meg, hogy ez a trapéz pontosan akkor érintőnégyszög, ha derékszögű.

(5 pont) Javasolta: *Németh László* (Fonyód)

B. 5393. Legyen az f olyan valós-valós függvény, amelyre

$$|f(x+y+z) + \sin x + \sin y + \sin z| \leq 3, \quad \text{minden } x, y, z \in \mathbb{R} \text{ esetén.}$$

Mutassuk meg, hogy $|f(x) - \sin x| \leq 1$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén.

(4 pont) Javasolta: *Bencze Mihály* (Brassó)

B. 5394. Az $ABCD$ négyzet középpontja O, körülírt körének egy tetszőleges pontja X. Jelölje T az X merőleges vetületét BC-n. Legyen az XB és AC egyenesek metszéspontja E, az XC és BD egyeneseké pedig F. Mutassuk meg, hogy EF merőleges TO-ra.

(4 pont) Javasolta: *Vígh Viktor* (Sándorfalva)

B. 5395. Jelölje egy k pozitív egész pozitív osztóinak számát $d(k)$, továbbá legyen $1 < n$ egész szám. Melyik összeg a nagyobb, $d(2) + d(4) + \dots + d(2n)$ vagy $(d(1) + d(3) + \dots + d(2n-1)) + (d(1) + d(2) + \dots + d(n))$?

(5 pont) Javasolta: *Pach Péter Pál* (Budapest)

B. 5396. Egy egyenlő oldalú térbeli (torz) ötszögnek négy derékszöge van. Mekkora lehet az ötödik szöge?

(6 pont) Javasolta: *Dombi Péter* (Pécs)

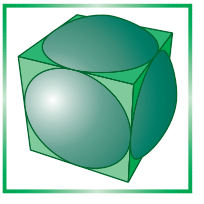
B. 5397. Egy gráfra (amely többszörös éleket is tartalmazhat) teljesül, hogy akárhogyan osztjuk szét a csúcsait t darab diszjunkt halmazba, legalább $2t - 2$ él különböző halmazok között vezet. Bizonyítsuk be, hogy a gráf éleit ki lehet színezni pirosra vagy kékre úgy, hogy a kék és a piros élek is összefüggő (és minden csúcsot elérő) gráfot alkossanak.

(6 pont) Javasolta: Williams Kada (Cambridge, UK)

Beküldési határidő: 2024. június 10.

Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (881–883.)



A. 881. Egy királlyal bejárjuk egy (a szokásos módon színezett) $n \times n$-es sakktábla minden mezőjét pontosan egyszer. Határozzuk meg, hogy legkevesebb hányszor kellett színt váltanunk a séta során.

Javasolta: *Pálvölgyi Dömötör* (Budapest)

A. 882. Legyen $H_1, H_2, \dots, H_m$ a pozitív egész számok nemüres részhalmazai, legyen továbbá S ezen halmazok uniója. Bizonyitsuk be, hogy

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{a,b \in H_i} (a,b) \geq \frac{1}{m} \sum_{a,b \in S} (a,b),$$

ahol (a,b) az a és b legnagyobb közös osztóját jelöli.

Javasolta: *Matolcsi Dávid* (Berkeley)

A. 883. Legyenek $J \subsetneq I \subseteq \mathbb{R}$ intervallumok, és legyenek $f_1, f_2, \dots$ olyan valós együtthatós polinomok, amelyekre a következők teljesülnek:

- $f_i(x) \geqslant 0$ minden $i \geqslant 1$ és $x \in I$ esetén,
- $\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)$ véges minden $x \in I$ esetén,
- $\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) = 1$ minden $x \in J$ esetén.

Következik-e ezekből, hogy $\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) = 1$ minden $x \in I$ esetén is?

Javasolta: *Imolay András* (Budapest)

❄

Beküldési határidő: 2024. június 10.

Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄

Informatikából kitűzött feladatok (627–630.)

I. 627. Egy állatmenhelyen közösségi szolgálatot végeznek a diákok, ami nélkülözhetetlen a telep működéséhez. A munkára jelentkező diákok mindegyike egy időszakot jelöl meg a feladat elvégzésére.

Készítsünk programot *i627* néven, amely a megadja a telep vezetőjének azt a leghosszabb időszakot, amelynek minden napjára van munkára vállalkozó és egy olyan napot, amely ebbe az időszakba esik és aznapra a legtöbb jelentkező van.

A program standard bemenetének első sorában a jelentkező diákok száma `N` ($1 \leq$ `N` $\leq$ `1000`) és a munkára meghirdetett napok száma ($1 \leq$ `M` $\leq$ `365`) szerepel. Az ezt követő `N` sorban az egyes vállalkozó diákok munkakezdési és -befejezési napjának sorszáma ($1 \leq$ `Kezd` $\leq$ `Veg` $\leq$ `365`) található.

Példa a bemenetre:	**Kimenet**
5 50	31
15 23	23
23 35	
5 15	
42 49	
20 30	

A program a standard kimenet első sorába írja ki a leghosszabb, jelentkezővel lefedett időszak napjainak számát, amikor minden napra van diákmunkavállaló. A második sorba írja ki annak a napnak a sorszámát, amely ebbe az időszakba esik és aznapra a legtöbb munkára vállalkozó jelentkezett. Ha több ilyen nap van, akkor ezek közül az elsőt adjuk meg.

Beküldendő egy tömörített *i627.zip* állományban a program forráskódja és rövid dokumentációja, amely megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben fordítható.

(10 pont)

I. 628. Egy `N` $\times$ `M` képpontból álló terület képpontjainak módosítását megoldhatjuk úgy, hogy egyszerűen felülről lefelé soronként, egy soron belül balról jobbra haladunk, és egymás után beállítjuk a képpontok értékét. A képpontok módosításának sorrendje lehet más is. Egy videómegjelenítő a területek képpontjainak módosításakor lólépésben halad az alábbi algoritmus szerint:

1. A bal felső sarokban lévő képpontól indul.
2. Amennyiben az aktuális képpontból sikerül lólépésben egy még nem módosított képpontot találnia, akkor odalép, megváltoztatja, majd folytatja a műveletsort ebből a képpontból. Az adott helyről lólépéssel elérhető képpontokat az óramutató járásával egyező irányban vesszük sorra (lásd a mintát).
3. Amennyiben az aktuális helyről nem érhető el lólépésben egyetlen, még nem módosított képpont sem, akkor az aktuális helyről kiindulva balról jobbra, illetve soronként fentről lefelé haladva megkeresi az első, még nem módosított képpontot, azt módosítja, majd folytatja a műveletsort a 2. lépés szerint. Ha keresés közben a terület utolsó sorának utolsó képpontja sem megfelelő, akkor az első sor második képpontjával folytatja a keresést.

Készítsünk programot *i628* néven, amely `N` sor és `M` oszlop esetén megadja a terület pixeleinek módosítási sorrendjét az alábbi minta szerint.

A program a standard bemenet első sorából olvassa be `N` és `M` értékét ($2 \le$ `N`, `M` ≤ 50), és a standard kimenet `N` sorába írja ki, hogy az adott sorban lévő képpontok a módosítás sorrendjében hányadik lépésnél kerülnek sorra. Egy soron belül M oszlopban jelenítsük meg a sorrendet jelző számokat a minta szerint szóközökkel elválasztva úgy, hogy minden kiírt szám azonos számú karakterhelyet foglaljon el.

Példa:

Bemenet	**Kimenet**
`7 13`	`  1 28 83 86  3 30 67 60  5 32 39 22  7`
	` 84 87  2 29 66 59  4 31 38 47  6 13 24`
	` 91 82 85 78 73 68 61 48 33 40 23  8 21`
	` 88 77 72 65 58 53 44 37 46 49 12 25 14`
	` 81 89 79 74 69 62 55 52 41 34 17 20  9`
	` 76 71 64 57 54 43 36 45 50 11 26 15 18`
	` 90 80 75 70 63 56 51 42 35 16 19 10 27`

Beküldendő egy tömörített *i628.zip* állományban a program forráskódja és rövid dokumentációja, amely megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben fordítható.

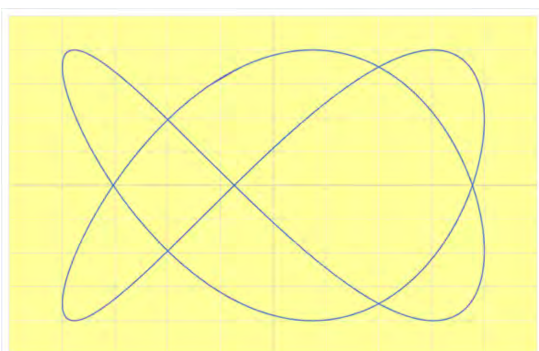
(10 pont)

I. 629. Két, egymásra merőleges harmonikus rezgés eredőjeként a rezgéseket végző test pályája egy érdekes alakzat, a Lissajous-görbe lesz. A mozgó test koordinátáit az idő múlásával leíró függvények:

$$x(t) = A_x \cdot \sin(k \cdot \omega \cdot t) \qquad \text{és} \qquad y(t) = A_y \cdot \sin(n \cdot \omega \cdot t + \varphi).$$

A képletek jelölései: A_x és A_y az x és y irányú maximális kitérés (amplitúdó), ω egy alap körfrekvencia, a két merőleges irányú rezgés körfrekvenciája ennek k-szorosa, illetve n-szerese (k, n pozitív egész), végül φ a fáziseltérés szöge a két rezgés között.

	A	B	C
1	A_x=	2	
2	A_y=	2	
3	ω=	0,1	
4	n=	3	
5	k=	2	
6	φ=	15°	0,2618 rad
7			
8	t	x	y
9	0	0	0,51763809
10	1	0,397338662	1,065419755

1. Nyissunk meg egy táblázatkezelő munkafüzetet és az **A1** cellától kezdve illesszük be az ***l-adatok.txt,*** tabulátorokkal tagolt, UTF-8 kódolású szövegfáljt. Mentsük a munkafüzetet ***lissa*** néven a program alapértelmezett fájlformátumában. A megoldásban saját függvény vagy makró nem használható.
   a) A **C6** cellába számoljuk ki függvény segítségével a **B6** cella fokban megadott szögértékét radiánban.
   b) A feliratokat, igazításokat, mértékegységeket és a szegélyezést alakítsuk a minta szerint.
2. Alkossuk meg a fentiek alapján a **B9:C309** tartomány celláiban egy másolható képlet segítségével a rezgő test helyzetét az **A** oszlopban megadott időpontban.
3. 
   Készítsünk a **B9:C309** tartomány adatai alapján a minta szerint *Pont(XY)* típusú diagramot. A diagramnak ne legyen címe, tengelyfeliratai és jelmagyarázata, a háttere legyen világossárga, a vonal színe legyen sötétkék, vastagsága 1,5 pont. Ellenőrizzük, hogy az alapadatok megváltoztatása megfigyelhető-e a diagramon!
4. Az alábbi alapadatokkal készítsünk $\varphi = 0°$, $\varphi = 3°$, $\varphi = 6°$, $\ldots$, $\varphi = 66°$ és $\varphi = 69°$ fáziseltérésekkel diagramokat, ezeket mentsük képként, és készítsünk folyamatosan ismétlődő animált GIF képet belőle ***fázisforgás.gif*** néven.

$A_x = 2$	$A_y = 2$	$\omega = 0{,}1$	$n = 3$	$k = 5$

Beküldendő egy tömörített ***i692.zip*** állományban a **lissa** táblázatkezelő munkafüzet, a **fázisforgás.gif** képállomány és egy rövid dokumentáció, amelyben szerepel a táblázatkezelő neve, verziószáma.

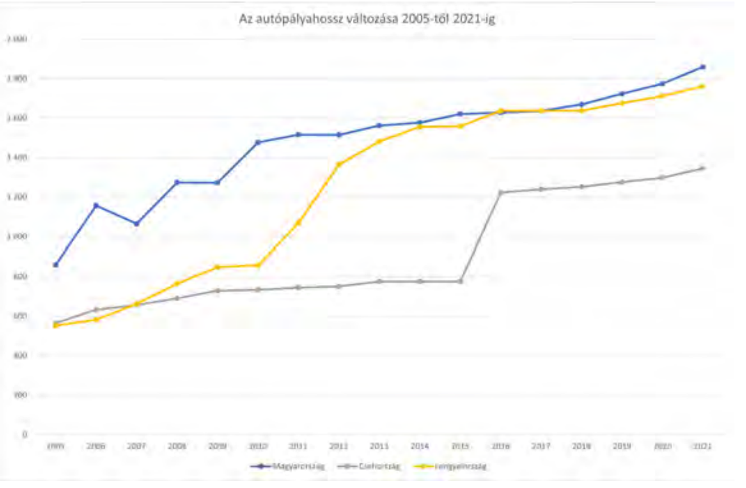
Letölthető állomány: **l-adatok.txt.**

(10 pont)

I. 630. Az ezer lakosra jutó személygépkocsik és az országonkénti autópálya-hossz változását tekintjük át néhány európai ország adatait és ezek népességét vizsgálva.

1. Nyissunk egy üres táblázatkezelő munkafüzetet. Hozzunk létre benne három munkalapot **Aphossz**, **Gkszam** és **Lakossag** néven.
2. Töltsük be a munkalapokra az **A1** cellától kezdve az UTF-8 kódolású, tabulátorokkal tagolt, a munkalapok nevével megegyező nevű szövegfájlok tartalmát. Munkánkat mentsük ***autok*** néven a táblázatkezelő alapértelmezett formátumában. A megoldásban saját függvény vagy makró nem használható.
3. A **Gkszam** munkalap **E11**-es cellája üres: tartalma legyen a megelőző és a rákövetkező évi franciaországi adatok átlaga.
4. Mindhárom munkalap számadataira állítsunk be ezres tagolást.
5. Formázzuk meg a minta szerint az **Aphossz** munkalap **A31:C33** tartományát és hasonlóan a **Gkszam** munkalap **A31:C34** tartományát.

6. Határozzuk meg annak a két országnak a nevét, amelyek a vizsgált időszakban elsőként zártak be autópályát, illetve minősítettek át autópályát más típusú úttá. A két ország neve kerüljön az **Aphossz** munkalap **B32** és **B33** cellájába.
7. Számítsuk ki a **Gkszam** munkalap **B28:R28** tartományában, hogy mennyi személygépkocsi volt összesen forgalomban a vizsgált országokban az adott évben.
8. Számítsuk ki, hogy 2013-ban melyik három országban volt a legnagyobb a zsúfoltság, vagyis hol volt a legtöbb autó autópálya-kilométerenként. A három „dobogós" ország neve kerüljön az **Gkszam** munkalap **B32**, **B33** és **B34** cellájába.
9. Készítsük el a minta szerinti grafikont *Magyarország*, *Csehország* és *Lengyelország* autópályahosszának alakulásáról *(az ábrát lásd a következő oldalon).* A grafikont helyezzük át az **apdia** nevű diagram típusú munkalapra.
10. Készítsük el a minta szerinti grafikont *Magyarország*, *Csehország* és *Lengyelország* ezer lakosra jutó személygépkocsi adatainak alakulásáról *(az ábrát lásd a következő oldalon).* A grafikont helyezzük át a **gkdia** nevű diagram típusú munkalapra.



Illusztráció a 9. ponthoz

Illusztráció a 10. ponthoz

Beküldendő egy tömörített ***i630.zip*** állományban a táblázatkezelő munkafüzet, illetve egy rövid dokumentáció, amelyben szerepel a megoldáskor alkalmazott táblázatkezelő neve, verziószáma.

Források:
`https://www.ksh.hu/stadat_files/sza/hu/sza0048.html`,
`https://www.ksh.hu/stadat_files/sza/hu/sza0047.html`,
`https://www.ksh.hu/docs/hun/eurostat_tablak/tabl/tps00001.html`.

Letölthető állományok: **aphossz.txt, gkszam.txt** és **lakossag.txt.**

(10 pont)

❄

Beküldési határidő: 2024. június 15.

Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

Komplex számok a fizikában
II. rész:
Váltóáramú feladatok megoldása komplex számokkal

Cikkünk korábbi részében megismerkedtünk a komplex számok fogalmával, az új számhalmazon végezhető alapvető matematikai műveletekkel, és láttuk, hogyan lehet használni őket a síkban történő ütközések leírására. A komplex számok alkalmazása azonban nem korlátozódik a síkvektorok leírására, a fizika számos más területén is eredményesen használhatók. Jelen részben egy, a mechanikától eltérő területen, a váltóáramú feladatok megoldására fogjuk bevetni ezt az új matematikai eszközkészletünket.

Mire van szükségünk egy áramkör leírásához?

Mielőtt még elkezdenénk foglalkozni a váltóáramú feladatok megoldásával, érdemes összegyűjteni, hogy általános esetben milyen összefüggésekre, lépésekre van szükségünk egy áramkör működésének leírásához. Ennek felderítéséhez a legjobb útmutatást a már jól ismert egyenáramú feladatok analízise adja.

i) Első lépésként az áramköri elemeken megjelenő *áram-* és *feszültségjeleket* adjuk meg paraméteres alakban, majd a megoldás során ezen paraméterek értékét keressük. Egyenáramú feladatok esetén tudjuk, hogy az áramok és feszültségek is állandó értékűek, így minden áramköri elemhez rendelünk egy-egy konstans áram- és feszültségjelet (U_1, I_1, U_2, I_2 stb.), amelyek a későbbi egyenleteinkben ismeretlenként fognak szerepelni.

ii) Következő lépésként az egyes áramköri elemeknek az úgynevezett *karakterisztikáit* kell megadnunk, amelyek valamilyen módon kapcsolatot teremtenek az adott alkatrészen mérhető áram- és feszültségjelek között. Egyenáramú feladatokban a legáltalánosabb áramköri elem az ellenállás, amelynek a karakterisztikáját az Ohm-törvény adja meg ($U = RI$), de hasonlóan megfogalmazható az ideális feszültségforrás karakterisztikája is: $U = U_0$ (a feszültségforrás feszültsége egy ismert konstans).

iii) Végül az egyes áramköri elemek közötti kapcsolatokat kell leírni, amire az *általános érvényű törvények*, jelen esetben a Kirchhoff-törvények szolgálnak. (A feladatmegoldásokban gyakran használt eredő ellenállást számoló összefüggések az Ohm-törvényből és a Kirchhoff-törvényekből származnak.)

Áram- és feszültségjelek leírása komplex számokkal

A váltóáramú feladatok megoldása során feltételezzük, hogy létrejön egy úgynevezett *szinuszos állandósult állapot*. Ez azt jelenti, hogy az áramkör minden elemén az áram- és feszültségjelek pillanatértéke leírható egy-egy szinuszos (koszinuszos) függvénnyel, amelynek körfrekvenciája a gerjesztő jel (feszültség- vagy áramforrás) körfrekvenciájával egyezik meg. Ezen állapot létrejöttének alapfeltétele, hogy az áramkör *lineáris* elemekből épüljön fel (például ne tartalmazzon diódát), az áramkör *állandósult állapotban* legyen (nem történt például kapcsolónyitás,

-zárás), továbbá a *gerjesztés* felbontható legyen szinuszos jelek összegére (például 50 Hz frekvenciájú szinuszos feszültségforrás). Ebben az esetben a jelek általános (paraméteres) alakja:

$$u(t) = U\cos(\omega_0 t + \varphi),$$

ahol U a jel amplitúdója, φ a jel kezdőfázisa (ismeretlenek), ω_0 pedig a gerjesztés (ismert) körfrekvenciája.

Egészítsük ki az egyenlet jobb oldalát egy új, tisztán képzetes taggal, és vegyük az így kapott komplex kifejezés valós részét. Ezzel az átalakítással nem változtatunk a jelentésén, de a komplex számoknál megismert exponenciális (Euler-féle) alak alkalmazhatóvá válik:

$$u(t) = \mathrm{Re}\left\{U\cos(\omega_0 t + \varphi) + iU\sin(\omega_0 t + \varphi)\right\} = \mathrm{Re}\left\{U\mathrm{e}^{i(\omega_0 t + \varphi)}\right\}.$$

Néhány új fogalom bevezetésével ez a felírásmód még tovább egyszerűsíthető. Az első ilyen fogalom a *komplex pillanatérték*[1], amely a következő mennyiséget jelenti:

$$u^*(t) = U\mathrm{e}^{i(\omega_0 t + \varphi)} = U\mathrm{e}^{i\varphi}\mathrm{e}^{i\omega_0 t}.$$

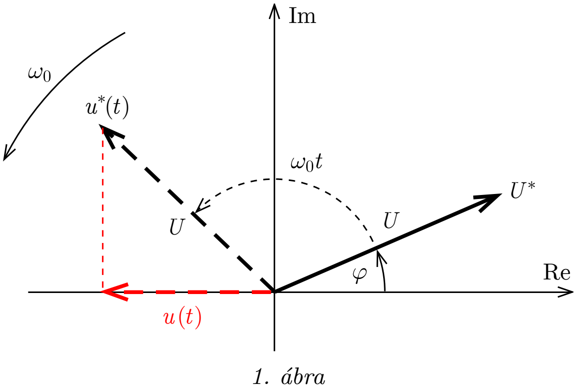
Ez a komplex szám minden időpillanatban más és más értéket vesz fel, időfüggő mennyiség. A szinuszos állandósult állapotban azonban az összes áram- és feszültségjel ugyanazzal az ω_0 körfrekvenciával változik, ezt kihasználva bevezethető a jelek *komplex csúcsértéke*, ami már egy időfüggetlen (konstans) komplex mennyiség:

$$U^* = U\mathrm{e}^{i\varphi}.$$

A kapcsolat az újonnan definiált fogalmak között:

$$u(t) = \mathrm{Re}\left\{u^*(t)\right\} = \mathrm{Re}\left\{U^*\mathrm{e}^{i\omega_0 t}\right\} = \mathrm{Re}\left\{U\mathrm{e}^{i\varphi}\mathrm{e}^{i\omega_0 t}\right\}.$$

A komplex csúcsérték tulajdonképpen az adott jel $t = 0$ időpillanatban felvett



1. ábra

komplex pillanatértékét adja meg. A komplex pillanatérték esetén a komplex csúcsértéket „megforgatjuk” ω_0 körfrekvenciával, míg a komplex pillanatérték valós része (valós tengelyre vett vetülete) az adott jel tényleges pillanatértékét adja (amit egy oszcilloszkóppal mérhetnénk). Ezt mutatja az *1. ábra.* Láthatjuk, hogy a komplex csúcsérték és a gerjesztő körfrekvencia ismerete esetén az adott jel időfüggvényét már egyértelműen elő tudjuk állítani.

[1] A komplex változókat ebben a cikkben végig *-gal jelöljük, hogy megkülönböztessük a valós mennyiségektől.

I. Ohmos ellenállások. A jelek leírását követően az egyes áramköri elemek karakterisztikájával kell foglalkoznunk. Ezek közül az első vizsgált elem az ohmos ellenállás, amelynek viselkedését általános (időfüggő) esetben az Ohm-törvény írja le:

$$u_R(t) = R\, i_R(t).$$

Az áram- és feszültségjelek komplex írásmódját bevezetve ez az egyenlet így is felírható:

$$\mathrm{Re}\left\{U_R \mathrm{e}^{i(\omega_0 t+\varphi_{uR})}\right\} = R\, \mathrm{Re}\left\{I_R \mathrm{e}^{i(\omega_0 t+\varphi_{iR})}\right\}.$$

Mivel az R ellenállás egy valós konstans, így az a valós rész képzésen belülre vihető, továbbá az exponenciális alakot felbontva a következő eredményre jutunk:

$$\mathrm{Re}\left\{U_R \mathrm{e}^{i\varphi_{uR}} \mathrm{e}^{i\omega_0 t}\right\} = \mathrm{Re}\left\{R I_R \mathrm{e}^{i\varphi_{iR}} \mathrm{e}^{i\omega_0 t}\right\}.$$

Ennek az összefüggésnek minden t időpillanatban érvényesnek kell lennie, ami csak abban az esetben teljesülhet, ha a valósrész-képzésen belül szereplő két komplex szám is megegyezik. (Hiszen az $\mathrm{e}^{i\omega_0 t}$ tényező az előtte álló komplex szám nagyságán nem változtat, csak „forgatja” azt az origó körül.) Így

$$U_R \mathrm{e}^{i\varphi_{uR}} = R I_R \mathrm{e}^{i\varphi_{iR}},$$

vagyis az Ohm-törvény alakja a komplex csúcsértékekkel:

$$U_R^* = R I_R^*.$$

Megjegyzés. Az egyenlőség csak akkor teljesülhet, ha a komplex számok abszolút értéke és argumentuma is megegyezik. Ez alapján az ohmos ellenállás esetében $\varphi_{uR} = \varphi_{iR}$, azaz a feszültség- és áramjel kezdőfázisa megegyezik, a jelek „fázisban vannak”.

II. Induktivitások (tekercsek) és kapacitások (kondenzátorok). Az induktivitások és kapacitások vizsgálata esetén már kicsit bonyolultabb a helyzet, itt ugyanis a karakterisztikus egyenlet nem közvetlenül a feszültségek és áramok, hanem azok deriváltjai (változási gyorsaságai) között teremtenek kapcsolatot. Induktivitás esetén ez az összefüggés a következő:

$$u_L(t) = L \frac{\mathrm{d} i_L(t)}{\mathrm{d}t}.$$

Tulajdonképpen maga a deriválás művelete az, ami miatt a váltóáramú feladatok megoldása bonyolult, hiszen egy differenciálegyenlet-rendszert kapunk. De nézzük, hogyan segítenek nekünk a komplex számok ebben az esetben:

$$\mathrm{Re}\left\{U_L \mathrm{e}^{i(\omega_0 t+\varphi_{uL})}\right\} = L \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathrm{Re}\left\{I_L \mathrm{e}^{i(\omega_0 t+\varphi_{iL})}\right\} = \mathrm{Re}\left\{L \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[I_L \mathrm{e}^{i(\omega_0 t+\varphi_{iL})}\right]\right\}.$$

Itt kihasználtuk, hogy a deriválás mint művelet és a valósrész-képzés felcserélhető egymással. Elvégezve az idő szerinti deriválást a következő egyenlethez jutunk:

$$\mathrm{Re}\left\{U_L \mathrm{e}^{i(\omega_0 t+\varphi_{uL})}\right\} = \mathrm{Re}\left\{i\omega_0 L I_L \mathrm{e}^{i(\omega_0 t+\varphi_{iL})}\right\}.$$

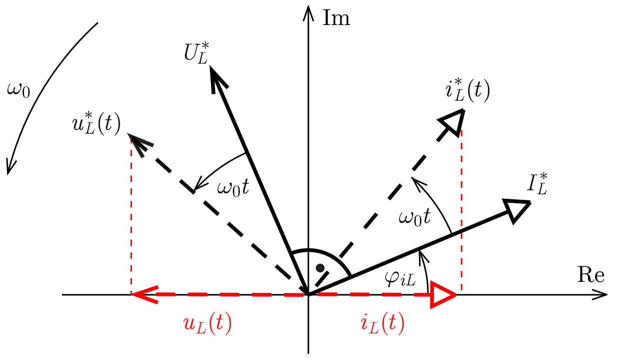
Ismét kihasználva, hogy a fenti kifejezésnek minden t időpillanatban teljesülnie kell:

$$U_L \mathrm{e}^{i\varphi_{uL}} = i\omega_0 L I_L \mathrm{e}^{i\varphi_{iL}},$$

vagyis a komplex csúcsértékekkel az induktivitás karakterisztikus egyenlete:

$$U_L^* = i\omega_0 L I_L^*.$$

Meglepő módon a komplex számok bevezetésével a differenciálegyenletből sikerült egy lineáris egyenletet készíteni. Ennek köszönhetően a váltóáramú feladatokat leíró differenciálegyenlet-rendszer szinuszos állandósult állapot esetén egy „egyszerű” lineáris egyenletrendszerré alakítható. Az induktivitás esetén a komplex csúcsértékek és a komplex pillanatértékek közötti kapcsolatok a *2. ábrán* szerepelnek (az ábrázolásnál kihasználtuk, hogy $i = \mathrm{e}^{i90^\circ}$).



2. ábra

Hasonlóan a kapacitás karakterisztikus egyenlete:

$$i_C(t) = C\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t},$$

amelyből az előző lépésekkel analóg módon következik:

$$I_C^* = i\omega_0 C U_C^*.$$

Megjegyzés. A csúcsértékek közötti egyenlet az induktivitás és a kapacitás esetében is csak akkor teljesülhet, ha a komplex számok abszolút értéke és argumentuma is megegyezik. Ez alapján az induktivitásban $\mathrm{e}^{i\varphi_{uL}} = i\mathrm{e}^{i\varphi_{iL}}$, amiből $\varphi_{uL} = \varphi_{iL} + 90^\circ$, azaz az induktivitás feszültségének kezdőfázisa 90°-kal nagyobb az áraménál, az induktivitás feszültségjele 90°-kal „siet” az áramjelhez képest. A kapacitáson pedig $\mathrm{e}^{i\varphi_{iL}} = i\mathrm{e}^{i\varphi_{uL}}$, amiből $\varphi_{uL} = \varphi_{iL} - 90^\circ$, azaz a kapacitás feszültségének kezdőfázisa 90°-kal kisebb az áraménál, a kapacitás feszültségjele 90°-kal „késik” az áramjelhez képest.

Az impedancia fogalmának bevezetése

A fentebb tárgyalt áramköri elemek esetén az áramok és feszültségek komplex csúcsértékei között a következő összefüggések adódtak:

$$U_R^* = RI_R^*,$$
$$U_L^* = i\omega_0 L I_L^*,$$
$$U_C^* = \frac{1}{i\omega_0 C} I_C^*.$$

Észrevehetjük, hogy mindegyik esetben az adott áramköri elem árama és feszültsége között egy konstans (időfüggetlen, de a gerjesztés körfrekvenciájától általában függő) komplex szám teremt kapcsolatot, ezt a számot nevezzük *impedanciának*. Az impedancia segítségével felírhatjuk a *komplex Ohm-törvényt*:

$$U^* = Z^* I^*.$$

Az adott áramköri elem impedanciáját mint komplex számot felbonthatjuk egy tisztán ohmos (rezisztív) tagra, ami a valós részének felel meg, és egy tisztán képzetes tagra, amelynek a nagyságát *reaktanciának* nevezünk:

$$Z^* = R + iX.$$

Az egyes áramköri elemek impedanciája az előző összefüggésekből következik:

$$Z_R^* = R,$$
$$Z_L^* = i\omega_0 L,$$
$$Z_C^* = \frac{1}{i\omega_0 C} = -i\frac{1}{\omega_0 C}.$$

Kirchhoff-törvények, eredő impedanciák számolása

A komplex számok bevezetésével sikeresen leírtuk a szinuszos jeleket, az egyes áramköri elemek karakterisztikáit pedig át tudtuk alakítani bonyolult differenciálegyenletekből egyszerű lineáris egyenletekké. Utolsó lépésként az általános érvényű törvények, vagyis a Kirchhoff-törvények alakját kell vizsgálnunk ebben a felírásmódban:

$$\sum_{\mathrm{h}} u_{\mathrm{h}}(t) = 0,$$
$$\sum_{\mathrm{cs}} i_{\mathrm{cs}}(t) = 0.$$

Mivel a két egyenlet analóg egymással, elegendő az egyik felírását megnézni:

$$u_1(t) + u_2(t) = \mathrm{Re}\left\{U_1 \mathrm{e}^{i(\omega_0 t + \varphi_1)}\right\} + \mathrm{Re}\left\{U_2 \mathrm{e}^{i(\omega_0 t + \varphi_2)}\right\} = 0.$$

Mivel a komplex mennyiségek összeadásakor a valós rész a valós résszel, a képzetes rész pedig a képzetes résszel adódik össze, így a valósrész-képzés összevonható:

$$\mathrm{Re}\left\{U_1 \mathrm{e}^{i(\omega_0 t + \varphi_1)} + U_2 \mathrm{e}^{i(\omega_0 t + \varphi_2)}\right\} = \mathrm{Re}\left\{(U_1 \mathrm{e}^{i\varphi_1} + U_2 \mathrm{e}^{i\varphi_2})\mathrm{e}^{i\omega_0 t}\right\} = 0.$$

Ennek az egyenletnek is minden t időpillanatban igaznak kell maradnia, ami csak abban az esetben lehetséges, ha maga a valósrész-képzésben szereplő komplex kifejezés nulla értékű:

$$U_1 \mathrm{e}^{i\varphi_1} + U_2 \mathrm{e}^{i\varphi_2} = U_1^* + U_2^* = 0,$$

vagyis a Kirchhoff-törvényeket a komplex csúcsértékekkel (és természetesen a komplex pillanatértékekkel) is felírhatjuk:

$$\sum_{\mathrm{h}} U_{\mathrm{h}}^* = 0,$$
$$\sum_{\mathrm{cs}} I_{\mathrm{cs}}^* = 0.$$

Az eredő ellenállások számolására szolgáló összefüggések az Ohm-törvényből és a Kirchhoff-törvényekből egyértelműen (és könnyen) levezethetők. Láthatjuk, hogy a komplex írásmóddal formálisan sem az Ohm-törvény, sem a Kirchhoff-törvények nem változtak meg, csupán ellenállások helyett impedanciákat, a konstans feszültség- és áramjelek helyett pedig a komplex csúcsértékeket kell használni.

Ez azt is jelenti, hogy a korábbi soros és párhuzamos eredő ellenállást számoló összefüggések az impedanciákra is igazak maradnak:

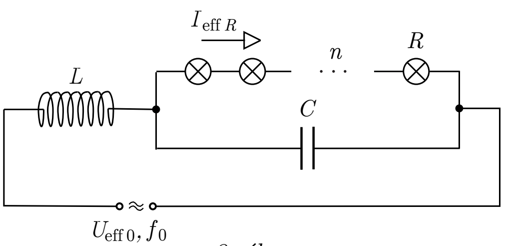
$$Z_\mathrm{s}^* = Z_1^* + Z_2^*,$$

$$\frac{1}{Z_\mathrm{p}^*} = \frac{1}{Z_1^*} + \frac{1}{Z_2^*}.$$

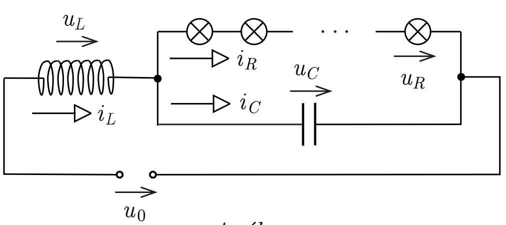
Egy feladat megoldása

Az elméleti alapok áttekintése után próbáljuk ki a leírtakat egy konkrét példán keresztül. A *3. ábrán* látható kapcsolással egy izzósort szeretnénk működtetni $U_{\mathrm{eff}\,0} = 230$ V effektív értékű, $f_0 = 50$ Hz frekvenciájú hálózati feszültségről. Hogyan válasszuk meg az összeállításban az L induktivitás és a C kapacitás értékét, hogy az izzósor árama, az izzók n darabszámától függetlenül $I_{\mathrm{eff}\,R} = 1$ A értékű legyen?

Megoldás. Az áramkörben kizárólag lineáris áramköri elemek találhatók (induktivitás, kapacitás és ohmos ellenállások), a gerjesztést a hálózati feszültség adja, ami egy szinuszos feszültség, továbbá a feladat egy állandósult állapotbeli áramhoz tartozó paramétereket kérdezi. Ezek a feltételek biztosítják, hogy a kérdés egy *szinuszos állandósult állapotbeli* jelre kíváncsi, vagyis alkalmazható a komplex számos leírásmód.



3. ábra



4. ábra

i) Első lépésként, a leírtaknak megfelelően vegyük fel az egyes áramköri elemeken a feszültség- és áramjelek komplex csúcsértékeit. Ezek lesznek a későbbi egyenleteink ismeretlenei. (A *4. ábrán* az áramköri elemeken a nyíl iránya a valós időfüggvény referenciairányát jelöli.)

ii) Második lépésként felírjuk az egyes áramköri elemek karakterisztikus egyenleteit, amelyek a következők:

(1) $$U_R^* = RI_R^*,$$

(2) $$U_C^* = \frac{1}{i\omega_0 C} I_C^*,$$

(3) $$U_L^* = i\omega_0 L I_L^*.$$

iii) Harmadik lépésként az áramkör struktúráját kell megadnunk megfelelő egyenletek felírásával, erre a Kirchhoff-törvények szolgálnak:

(4) $$U_C^* = nU_R^*,$$

(5) $$I_L^* = I_R^* + I_C^*,$$

(6) $$U_0^* = U_L^* + nU_R^*.$$

iv) Végül a kapott egyenletek segítségével megválaszoljuk a kérdést. Mivel az ellenálláslánc áramának kell az izzók darabszámától függetlennek lennie, célszerű ennek az áramjelnek a komplex csúcsértékét kifejezni. A (4) egyenletbe behelyettesítve (1)-et és (2)-t a kapacitás árama kifejezhető:

$$I_C^* = i\omega_0 CnRI_R^*.$$

Az (6) egyenletben szereplő tagokat kifejtve és (5)-öt behelyettesítve:

$$U_0^* = i\omega_0 LI_L^* + nRI_R^* = i\omega_0 L\left(I_R^* + I_C^*\right) + nRI_R^*.$$

A kapacitás áramát behelyettesítve:

$$U_0^* = i\omega_0 L\left(I_R^* + i\omega_0 CnRI_R^*\right) + nRI_R^* = (i\omega_0 L - \omega_0^2 LCnR + nR)I_R^*,$$

innen pedig az izzósor árama a következő:

$$I_R^* = \frac{1}{i\omega_0 L + (1-\omega_0^2 LC)nR}U_0^*.$$

Ez az áram akkor független az izzók n darabszámától, ha

$$\omega_0^2 LC = 1.$$

Ekkor az izzósor árama az induktivitás értékével állítható be:

$$I_R^* = \frac{1}{i\omega_0 L}U_0^*.$$

A korábban leírtakból tudjuk, hogy a komplex csúcsérték „nagysága" az adott jel amplitúdójával egyezik meg. Az effektív értékek és az amplitúdók között szinuszos jelek esetén pedig egy $\sqrt{2}$-es faktor teremt kapcsolatot. Ha vesszük az eredményünk mindkét oldalának az abszolút értékét és elosztjuk $\sqrt{2}$-vel, akkor effektív értékekkel a következő kifejezést kapjuk:

$$I_{\mathrm{eff}\,R} = \frac{1}{\omega_0 L}U_{\mathrm{eff}\,0},$$

vagyis a szükséges induktivitás:

$$L = \frac{1}{\omega_0}\frac{U_{\mathrm{eff}\,0}}{I_{\mathrm{eff}\,R}} = \frac{1}{2\pi f_0}\frac{U_{\mathrm{eff}\,0}}{I_{\mathrm{eff}\,R}} = 0{,}73\ \mathrm{H},$$

a kapacitás értéke pedig:

$$C = \frac{1}{\omega_0^2 L} = \frac{1}{4\pi^2 f_0^2 L} = 13{,}8\ \mu\mathrm{F}.$$

Olosz Balázs

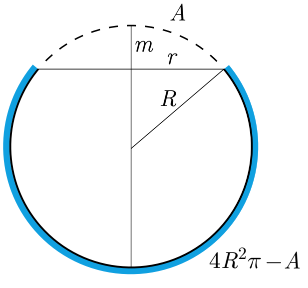
Matematikai eredmények – fizikai megfontolásokkal

Karcsi elsőéves egyetemi hallgató, aki matematikából éppen a többszörös integrálokat tanulja. Gyakorlásként egy R sugarú gömbből kivágott, r sugarú alapkörrel rendelkező gömbsüveg felszínét kell meghatároznia.

Öccse, Jancsi, még gimnazista, aki szeretne bejutni a Nemzetközi Fizikai Diákolimpia magyar csapatába, ezért szorgalmasan „birkózik” a KöMaL fizika pontversenyének 6 pontos feladataival. Most éppen a **P. 5543.** fotometriai feladatot oldotta meg. Érdeklődve figyeli bátyja számolását, de mivel integrálszámításról csak nagyon felületesen hallott, nem sokat ért belőle. Mindössze annyi világos számára, hogy mi a feladat. Némi gondolkodás és egy rövid számolás után Jancsi felkiált: *„Megvan az eredmény!”* Vajon hogyan csinálta?

A hivatkozott feladat megoldása[2] szerint, ha a külső megvilágítás (egységnyi felületre merőlegesen beeső fény teljesítménye) a felület irányától függetlenül I_0 nagyságú, akkor egy átlátszatlan, belül kormozott gömbhéj belsejét egy kicsiny lyukon keresztül bejutó fény *egyenletesen* világítja meg.

Jancsi észreveszi, hogy a megvilágítás akkor is egyenletes lesz, ha a fény egy nagyobb nyíláson keresztül jut be a gömbhéjba. Érvelése szerint a gömbfelület A nagyságú „hiányzó” része gondolatban sok kicsiny részre (sok kicsiny, tetszőleges alakú lyukra) bontható, és az ezeken keresztül átjutó, külön-külön egyenletes megvilágítást okozó fénysugarak együttese is egyenletesen világítják meg a kormozott felületet. Az eredő megvilágítás a hiányzó részen átmenő teljes fényteljesítménnyel, vagyis I_0A-val lesz arányos.



Vágjuk ketté az R sugarú gömbfelületet egy síkkal úgy, hogy a kör alakú vágásfelület sugara r legyen, javasolja Jancsi. Így egy A és egy $4R^2\pi - A$ felszínű gömbsüveget kapunk, amelyek egyikét (mondjuk az A nagyságút) eltávolítjuk.

A maradék gömbsüveg belső felületének megvilágítását kétféleképpen is kiszámíthatjuk.

1. Az A felszínű darabon (ha azt sok kicsiny nyílás együtteseként fogjuk fel) összesen I_0A teljesítményű fény halad keresztül, amely (minden egyes kicsiny nyílásra és azok együttesére is) $4R^2\pi$ felületen oszlik szét, azaz a belső felület megvilágítása

$$I = \frac{A}{4R^2\pi} I_0.$$

2. Úgy is érvelhetünk, hogy az r sugarú kör alakú nyíláson összesen $r^2\pi I_0$ teljesítményű fény jut keresztül, ami $4R^2\pi - A$ felületen oszlik szét, tehát a megvilágítás

$$I = \frac{r^2\pi}{4R^2\pi - A} I_0.$$

A kétféle számításnak ugyanazt az eredményt kell adnia, az egyenlőséget felírva és rendezve A-ra egy másodfokú egyenletet kapunk:

$$A^2 - 4R^2\pi \cdot A + (2Rr\pi)^2 = 0,$$

[2] Lásd a jelen szám 310. oldalán.

amelynek (a kisebb) megoldása:

$$A = 2R\pi\left(R - \sqrt{R^2 - r^2}\right).$$

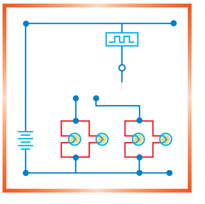
A zárójelben álló kifejezés a kisebb gömbsüveg m magasságával egyezik meg, így ezzel kifejezve a gömbsüveg keresett felszíne: $A = 2Rm\pi$.

A fenti megfontolás során egy fizikai törvény segítségével jutottunk el egy matematikai feladat megoldásához. Hasonló gondolatmenettel számos érdekes eredményt kaphatunk meg fizikai ismereteink felhasználásával. Ezek legtöbbjére *Holics László* tanár úr, a KöMaL fizika bizottságának tiszteletbeli elnöke talált rá. Megmutatta, hogy a merev testek mozgásegyenlete megadja egy tetszőleges nyílásszögű körív alakú rúd tömegközéppontjának helyét[3], a tömegpont mozgásegyenletének felírásával pedig kiszámította többek között egy szinuszgörbe[4], egy ellipszis[5] és egy parabola[6] görbületi sugarát a görbék tetszőleges pontjában.

A fizikai törvényekre alapozott megfontolásokat a matematikusok feltehetően nem tekintik szigorú levezetéseknek, hiszen feltehető a kérdés: honnan tudjuk, hogy a felhasznált természettörvények biztosan érvényesek? A fizikusok azonban bátran alkalmazzák ezeket a törvényeket, mert ha nem lennének meggyőződve a helyességükről, máshol sem mernének ezekkel számolni.

Gnädig Péter

Fizika gyakorlatok megoldása



G. 838. *Az alábbi, drónról készült fényképen vízszintes talajon emberek haladnak a Rio Grande partján Mexikó és az Egyesült Államok határán. Becsüljük meg, hogy milyen magasan volt a Nap a fotó készítésekor!*

(*4 pont*)

[3] Négyszögletes kerék, 100. (jubileumi) probléma, Fizikai Szemle, 1991. évi 7. szám, 259. oldal, illetve 333+ Furfangos Feladat Fizikából, **89.** feladat

[4] KöMaL 1973. évi 10. szám, 95. oldal, **1156.** feladat

[5] KöMaL 1976. évi 1. szám, 48. oldal, **1336.** feladat

[6] KöMaL 1973. évi 1. szám, 48. oldal, **1100.** feladat

I. megoldás. Azt, hogy a Nap milyen magasan állt a fotó készítésekor, úgy lehetne kiszámítani, hogy az emberek h magasságát összevetjük az árnyékuk L hosszával, és a kettő arányából meghatározzuk a Nap hajlásszögét: $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{h}{L}$. A felvételt közelről megszemlélve látszik, hogy a drón az emberek feje fölött lebegett, amikor a felvételt készítette, így az emberek testmagasságáról semmit sem tudhatunk. Az az ötletem, hogy a testmagasság becsléséhez az emberek lépéstávolságát kéne alapul venni, mert az ugyanakkora az árnyékon, mint a valóságban. Egy internetes oldal szerint a sétáló emberek lépéstávolsága átlagosan a testmagasságuk 42%-a[7], így a becsléshez ezt az összefüggést vettem alapul.

A lehető legnagyobbra kinagyított képen lemértem azoknak az embereknek a lépéstávolságát, akik jól láthatóan lendületben vannak, és mindkét lábuk a talajon van. Ugyanezeknek megmértem az árnyékuk hosszát is. Az *1. táblázatban* feltüntettem relatív egységekben az ℓ lépéstávolságot, az árnyék hosszát, a számított testmagasságot, valamint a Nap ebből becsült hajlásszögét.

ℓ	L	h	α (°)
20	122	47,6	21,3
23	142	54,8	21,1
21	145	50,0	19,0
26	142	61,9	23,6

1. táblázat

A kiszámított szögek átlaga 21,25°, tehát a Nap a fénykép készítésekor körülbelül 21° magasan állt a horizont felett.

Schmidt Marcell (Pécs, Koch Valéria Gimn., 9. évf.)

II. megoldás. Legyen egy ember magassága h, vállszélessége d, árnyékának hossza L és a Nap keresett magassága (a horizonthoz viszonyított szöge) α. Egy átlagos ember magassága vállszélességének négyszerese. („A vállszélesség – az egész egy negyede." – Leonardo da Vinci: Emberi arányok.[8]) Az ember magassága, az árnyék és a beeső napsugár jó közelítéssel egy derékszögű háromszög oldalait alkotják. Ez alapján a keresett szög:

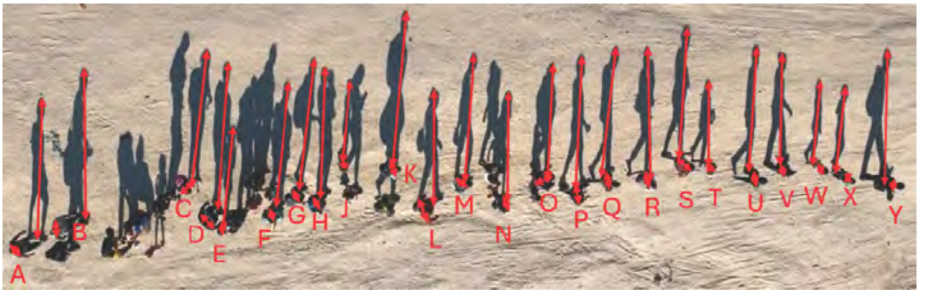
$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{h}{L} \approx \operatorname{arctg} \frac{4d}{L}.$$

A következőkben a kép alapján minél több ember esetén meghatározzuk a vállszélességük és árnyékuk hosszának arányát. PowerPoint segítségével a beillesztett képen berajzoltam a keresett szakaszokat (*ábra*), majd leolvastam azok hosszát.

A *2. táblázatban* 24 ember leolvasott d és L értéke (relatív egységekben), valamint a kiszámolt α szögek láthatók.

[7] https://blog.mypacer.com/how-many-steps-are-in-a-mile-walk-smarter/

[8] http://mek.niif.hu/04900/04996/html/leonardoirasai0007.html



jel	d	L	α (°)	jel	d	L	α (°)
A	4,18	34,02	26,2	N	4,20	26,70	32,2
B	4,62	36,40	26,9	O	5,02	28,03	35,6
C	4,95	33,30	30,7	P	5,36	32,43	33,5
D	5,23	35,70	30,4	Q	4,49	31,80	29,5
E	3,65	25,22	30,1	R	4,39	32,41	28,5
F	3,45	30,26	24,5	S	5,10	31,76	32,7
G	3,76	32,10	25,1	T	3,09	20,90	30,6
H	3,91	31,92	26,1	U	4,04	30,36	28,1
J	2,86	20,09	29,7	V	3,32	27,11	26,1
K	4,49	37,35	25,7	W	3,54	30,66	24,8
L	6,02	28,10	40,6	X	2,20	21,32	22,4
M	3,98	31,18	27,1	Y	3,13	32,81	20,9

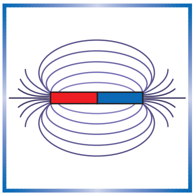
2. táblázat

Az így meghatározott szögek átlaga: $\alpha = 28{,}7°$. Ugyanakkor a leolvasásnál a kép alacsony felbontása miatt nehéz pontosan azonosítani a vállakat: ez d esetében körülbelül 15%-os hibát eredményez. (Szintén hibát okoz, hogy a napsugár nem pontosan az emberek feje búbját érinti. Az ebből származó hiba azonban az előzőhöz viszonyítva elhanyagolható.) A fotó készítésekor tehát a Nap körülbelül 29° magasan volt.

Fülöp Magdaléna (Pécsi Leőwey Klára Gimn., 9. évf.)

Megjegyzés. A számításhoz használt összefüggés (a vállszélesség, illetve a lépéshossz testmagassághoz viszonyított aránya) mindkét módszer esetében csak egy becslést tesz lehetővé. Ez – a második megoldásban leírt leolvasási hibán kívül – további bizonytalanságot okoz az eredményben. (Emiatt értelmetlen az eredményt tized- vagy századfok pontossággal megadni.) Láthatjuk, hogy a két módszer is jelentősen eltérő eredményt adott. Mindezeket figyelembe véve a Nap magassága a fotó készítésekor 20° és 30° között lehetett.

41 dolgozat érkezett. Helyes 18 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 2, hiányos (1–2 pont) 9, hibás 10, nem értékelhető 2 dolgozat.



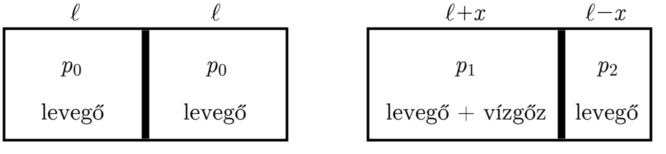
Fizika feladatok megoldása

P. 5520. *A mindkét végén zárt, 2ℓ hosszúságú, vízszintesen fekvő hengert egy vékony dugattyúlap két egyenlő részre oszt. Mindkét részben* 100 °C *hőmérsékletű,* 100 kPa *nyomású levegő van. Az egyik részbe annyi vizet juttatunk, hogy telített gőz keletkezik, miközben a hőmérsékletet* 100 °C*-on tartjuk.*

Mennyivel mozdul el a dugattyúlap és mekkora lesz mindkét részben a nyomás?

(4 pont) Példatári feladat

Megoldás. Kezdetben a dugattyú a hengert két egyforma, ℓ hosszúságú részre osztja, és mindkét oldalon $p_0 = 100$ kPa nyomású levegő van. Miután az egyik részbe vizet juttatunk, és ott telített vízgőz alakul ki, abban a részben a nyomás a Dalton-törvény alapján a levegő és a vízgőz parciális nyomásának összege lesz. A telített vízgőz parciális nyomása 100 °C-on szintén $p_0 = 100$ kPa. A növekedő nyomás hatására a dugattyú elmozdul: a vízgőzt is tartalmazó rész térfogata megnő, a másiké lecsökken. A levegő (parciális) nyomása a Boyle–Mariotte-törvény szerint mindkét részben a térfogattal fordított arányban változik, míg a telített vízgőz parciális nyomása állandó marad, hiszen az csak a hőmérséklettől függ.



Ha a dugattyú x távolsággal mozdul el, a vízgőzzel telített térrészben kialakuló új nyomás:

$$p_1 = \frac{\ell}{\ell + x} p_0 + p_0,$$

míg a vízgőzt nem tartalmazó térrészben:

$$p_2 = \frac{\ell}{\ell - x} p_0.$$

Egyensúlyban a két nyomásnak meg kell egyeznie:

$$p_1 = p_2,$$

$$\frac{\ell}{\ell + x} + 1 = \frac{\ell}{\ell - x},$$

amiből x-re az

$$x^2 + 2x\ell - \ell^2 = 0$$

másodfokú egyenlet adódik. Az egyenlet pozitív megoldása:

$$x = \left(\sqrt{2} - 1\right)\ell \approx 0{,}41\ell,$$

a térrészekben kialakuló nyomás pedig:

$$p_1 = p_2 = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) p_0 \approx 171\ \mathrm{kPa}.$$

Dobos Anita (Budapest, Szent István Gimn., 10. évf.) dolgozata alapján

36 dolgozat érkezett. Helyes 6 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 5, hiányos (1 pont) 17, hibás 8 dolgozat.

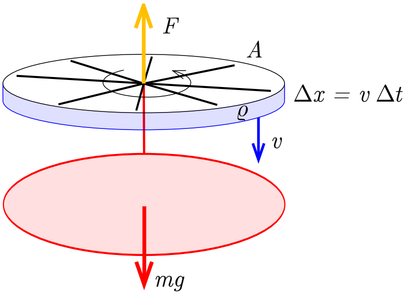
P. 5529. *Egy 7 tonnás helikopter akkor tud egyhelyben lebegni, ha hajtóműve* 1000 kW *teljesítményt ad le. Becsüljük meg, mekkora teljesítmény szükséges az előbbi helikopter egyhelyben lebegtetéséhez, ha az a belső terében még további* 4 *tonna súlyt szállít!*

(5 pont) Közli: *Széchenyi Gábor*, Budapest

Megoldás. A helikopter úgy lebeg, hogy a rotorok A felületen „beszívják” a kezdetben álló, ϱ sűrűségű levegőt, és azt v sebességre felgyorsítva kilökik lefelé. A levegő gyorsításához

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{\varrho \Delta V v}{\Delta t}$$

erőre van szükség, ahol $\Delta V = A\Delta x = Av\Delta t$ a Δt idő alatt felgyorsított levegő térfogata. Ennek az erőnek az ellenereje tartja meg a helikopter súlyát, tehát:



$$mg = \varrho A v^2, \quad \text{azaz} \quad v \sim \sqrt{m}.$$

A levegő gyorsításához szükséges munkát a motor végzi. Ha feltételezzük, hogy a motor hatásfoka egy teljesítménytől független állandó η érték, akkor:

$$\eta P = \frac{\Delta E_\mathrm{m}}{\Delta t} = \frac{\frac{1}{2}\varrho \Delta V v^2}{\Delta t} = \frac{\frac{1}{2}\varrho A v \Delta t \cdot v^2}{\Delta t} = \frac{1}{2}\varrho A v^3, \quad \text{azaz} \quad P \sim v^3.$$

Ezek alapján (mivel csak m, v és P változik):

$$P \sim v^3 \sim m^{\frac{3}{2}},$$

és így a terhet szállító helikopter teljesítménye:

$$P' = \left(\frac{m'}{m}\right)^{\frac{3}{2}} P = \left(\frac{11\ \mathrm{t}}{7\ \mathrm{t}}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot 1000\ \mathrm{kW} = 1970\ \mathrm{kW} \approx 2000\ \mathrm{kW}.$$

Bencz Benedek (Budapest, Baár-Madas Ref. Gimn., 11. évf.)

65 dolgozat érkezett. Helyes 24 megoldás. Kicsit hiányos (3–4 pont) 6, hiányos (1–2 pont) 29, hibás 6 dolgozat.

P. 5543. *Borús időben egy, az égbolt felé fordított fénymérővel méréseket végzünk. Azt tapasztaljuk, hogy a felhőtakaró fényszórása miatt az egységnyi felületre beeső teljesítmény jó közelítéssel I_0 értékű, függetlenül a fénymérő irányítottságától. Egy átlátszatlan, belül kormozott, R sugarú, vékony falú gömbhéj tetején egy kicsiny r sugarú lyuk van (melynek mérete sokkal nagyobb a látható fény hullámhosszánál). Adjuk meg a szabadba helyezett gömbhéj belső felületén a megvilágítás intenzitását!*

(*6 pont*) Közli: *Vigh Máté*, Biatorbágy

Megoldás. A megoldás első része annak bizonyítása, hogy a gömb belső felületén egyenletes a megvilágítás. Úgy tűnik, ez volt a feladat legnehezebb része: egyetlen dolgozat sem indokolta megfelelően. (A legtöbben ezt természetesnek vették. Voltak, akik a fény gömbön belüli szóródására hivatkoztak – pedig az csak a gömbön kívül, a „borús égen" történik meg. Néhányan – helytelenül – síkbeli látószöggel dolgoztak a térszög helyett.) Így az egyenletes megvilágítást a feladat közlőjének megoldásával igazoljuk.

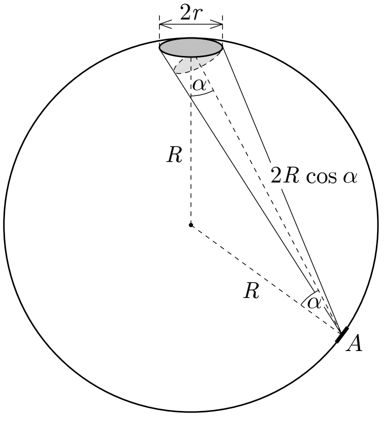
A feladat szerint minden irányból azonos intenzitású szórt fény lép be a lyukon keresztül a gömbbe. Tekintsük a gömb belső felületének egy kicsiny, A területű darabkáját ($A \ll \pi r^2$), amely a lyuk helyzetéhez képest $180° - 2\alpha$ középponti szöggel (polárszöggel) jellemezhető! A kiszemelt felületdarabkára beeső fény intenzitása arányos azzal a *térszöggel* (egy gömb felületén mérhető terület és a sugár négyzetének hányadosával), amely alatt a πr^2 területű lyuk (és azon keresztül a borús égbolt) a felületdarabka helyéről nézve látszik:

$$I_{\mathrm{be}} \sim \frac{\pi r^2 \cos\alpha}{(2R\cos\alpha)^2} = \frac{\pi r^2}{4R^2\cos\alpha}.$$

Ennyi lenne a felületdarabka megvilágításának intenzitása akkor, ha ez a beeső fényre merőleges lenne. Az *ábra* szerint azonban a kiszemelt felületdarab normálisa α szöget zár be a beeső fény irányával, ezért a megvilágítás intenzitása is gyengébb (hiszen ugyanaz a beeső teljesítmény így nagyobb felületen oszlik el):

$$I_{\mathrm{m}} = I_{\mathrm{be}}\cos\alpha \sim \frac{\pi r^2}{4R^2}.$$

Azt a meglepő eredményt kaptuk tehát, hogy a gömb belső felületének megvilágítása független az α szögtől, a teljes belső felületen egyenletes!



Az egyenletes megvilágítást adottnak feltételezve a megoldók két különböző gondolatmenettel határozták meg a keresett intenzitást.

Az egyik szerint a kis nyíláson belépő $I_0\pi r^2$ fényáram $r \ll R$ miatt jó közelítéssel a teljes gömbfelületen ($4\pi R^2$) oszlik el, így a belső felület megvilágításának intenzitása:

$$I_{\mathrm{m}} = \frac{I_0\pi r^2}{4\pi R^2} = I_0\frac{r^2}{4R^2}.$$

A másik megoldó nem használja ki az $r \ll R$ feltételt. Ekkor a tetszőleges, $r \leqslant R$ sugarú nyíláson szintén $I_0\pi r^2$ fényáram lép be, de ez most csak a gömb teljes $4\pi R^2$ felületének és a levágott r sugarú *gömbsüveg* A_s felületének *különbségén* oszlik el. A gömbsüveg felülete $A_\mathrm{s}=2\pi Rm$, ahol $m=R-\sqrt{R^2-r^2}$ a gömbsüveg magassága. Ez alapján a keresett intenzitás:

$$I_\mathrm{m}=\frac{I_0\pi r^2}{4\pi R^2-2\pi R\left(R-\sqrt{R^2-r^2}\right)}=I_0\frac{r^2}{2R^2\left(1+\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}}\right)}.$$

Látható, hogy ez az eredmény $r\ll R$ esetén visszaadja a korábban megkapottat.

A *Csacsogó Csajok Csodacsapata Csak Csávókkal!!! csapat:*
Pető Kristóf, Iliás Gergely, Bíró Gergő (Budapest, Jedlik Ányos Gimn., 12. évf.)
és *Tóthpál-Demeter Márk* (Budapest, Leövey Klára Gimn., 11. évf.)
dolgozatának felhasználásával

Megjegyzés. A második megoldáshoz felhasználtuk a gömbsüveg felszínének képletét. A két megoldás összevetéséből viszont egy ügyes trükkel *levezethető* ez az összefüggés, ahogy ez ebben a lapszámban a *303. oldalon* kezdődő rövid cikkben olvasható.

11 dolgozat érkezett. Teljes értékű megoldás nem volt. 5 pontot kapott *Pető Kristóf, Iliás Gergely* és *Bíró Gergő* csapata, valamint *Tóthpál-Demeter Márk* dolgozata. Hiányos (2–4 pont) 6, hibás 1, nem versenyszerű 2 dolgozat.

A 2024. áprilisi pótfeladat megoldása

Áprilisi pótfeladat. *A Kiribati Köztársasághoz tartozó Karácsony-sziget és a Hawaii-szigetek nagyjából ugyanazon a hosszúsági körön fekszenek, de teljesen más időzónához tartoznak. Állapítsuk meg, hogy milyen nap és hány óra van a Hawaii-szigeteken, amikor a Karácsony-szigeten április 1., hétfő reggel 6 óra van!*

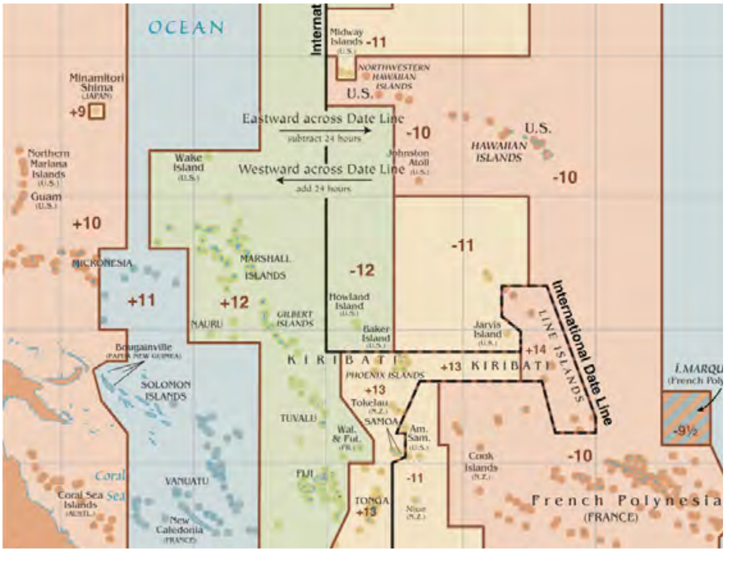
Megoldás. A feladat megoldásához meg kell keresnünk, hogy a Hawaii-szigetek és a Kiribati Köztársasághoz tartozó Karácsony-sziget melyik időzónában vannak a feladatban szereplő napon. (Idén általában március 31-én hajnalban van az óraátállítás azokon a helyeken, ahol van külön téli és nyári idő.)

Hawaii esetében aránylag könnyű a dolgunk, a keresés egyértelműen $\mathrm{UTC}-10$ időzónát ad (Hawaii–Aleutian Standard Time, HST), tehát a Hawaii-szigeteken 10 órát *késnek* az órák az *egyezményes koordinált világidőhöz* (UTC, korábbi nevén greenwichi középidőhöz, GMT) képest. (Persze arra is figyelnünk kell, hogy április 1-jén már sok helyen nyári időszámítás van. A HST időzónát télen a Hawaii-szigeteken kívül Alaszkában is használják, ahol viszont van nyári időszámítás, olyankor ott a Hawaii–Aleutian Daylight Time (HDT) időt használják. Azonban a Hawaii-szigeteken 1945 óta nincs külön nyári időszámítás, egész évben a HST van érvényben.)

A „Karácsony-sziget időzóna” internetes keresésre elsőre $\mathrm{UTC}+7$ értéket kapunk, amit viszont mindenképp gyanakodva kell fogadnunk, hiszen ez túl kis eltérés Európához képest, ha a sziget „nagyjából ugyanazon a hosszúsági körön” fekszik, mint a Hawaii-szigetek, tehát bizonyosan a Csendes-Óceánon van. Az ellentmondás oka, hogy ez az adat egy **másik** Karácsony-szigetek nevű szigetcsoportra vonatkozik, amely az Indiai-óceánon, Jávától délre található, és Ausztráliához tartozik. Ha viszont az ország nevét, Kiribati-t (kiejtése: kiribesz, a ti-t sz-nek kell ejteni) írjuk be a keresőbe, akkor sincs könnyű dolgunk, mert az ország hatalmas területen elszóródó apró szigetekből áll, és három különböző időzónához tartozik: UTC + 12, UTC + 13 és UTC + 14.

Melyikben van a Karácsony-sziget? A helyi írásmóddal *Kiritimati* (kiejtése: kiriszmesz) nevű sziget a Sor-szigetek (és egyben a világ) legnagyobb területű atollja, és a UTC + 14 időzónába (Line Islands Time, LINT) tartozik. (Szerencsénkre itt soha nem használtak nyári időszámítást, így ezzel nem kell foglalkoznunk.) Tehát az órák a Karácsony-szigeten a greenwichi középidőhöz képest 14 órát, a Hawaii-szigetekhez képest pedig éppen 24 órát *sietnek.*

Eszerint amikor a Kiribati Köztársasághoz tartozó Karácsony-szigeten április 1., hétfő reggel 6 óra van, akkor a Hawaii-szigeteken még csak március 31., vasárnap reggel 6 óra, tehát az órák ugyanazt mutatják, de a naptárak más-más napot, sőt hónapot.



Hogy lehet valahol több, mint 12 óra az eltérés a greenwichi középidőhöz képest? Az, hogy egy országban milyen időzóna van, az ország saját döntése. Így aztán UTC – 12 és UTC + 14 között – a néhol előforduló fél- és negyedórás eltérések miatt – összesen 40-féle időzóna létezik. (A legnagyobb lehetséges időeltérés két hely között pedig 26 óra, ami azt is jelenti, hogy ha Londonban mondjuk hétfő délelőtt 10 és 12 óra közötti a helyi idő, akkor a Földön vannak olyan helyek, ahol még csak vasárnap van, a legtöbb helyen hétfő van, de léteznek országok, ahol már kedd van. Mulatságos.) A „siető” és „késő” időzónákat a *dátumválasztó vonal* (régi nevén vasárnap-hétfő vonal) választja el, amely a fenti okok miatt nem egy egyenes vonal a $\pm 180°$-os délkör mentén, hanem egy cikkcakkos görbe. Az *ábrán* ennek az a részlete látható, amelyen a feladatban szereplő szigetek is megtalálhatók (forrás: Creative Commons).

Látható, hogy a Sor-szigetek (Line Islands) Kiribati Köztársasághoz tartozó szigetei mélyen beékelődnek a dátumvonalba. (A Karácsony-sziget a nyugati 157°-os hosszúsági körön, a 180°-os délkörtől körülbelül 2500 km-re keletre fekszik!)

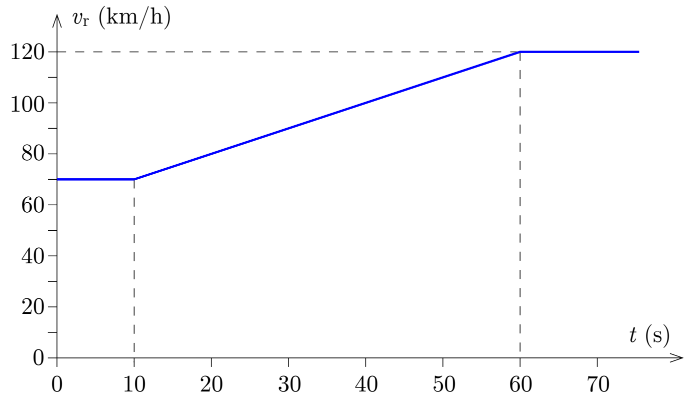
Ennek több oka is lehet: egyrészt nem szerencsés, ha egy országot kettévág a dátumválasztó vonal, másrészt így a világon először a Karácsony-szigeteken lesz karácsony – és április 1-je is.

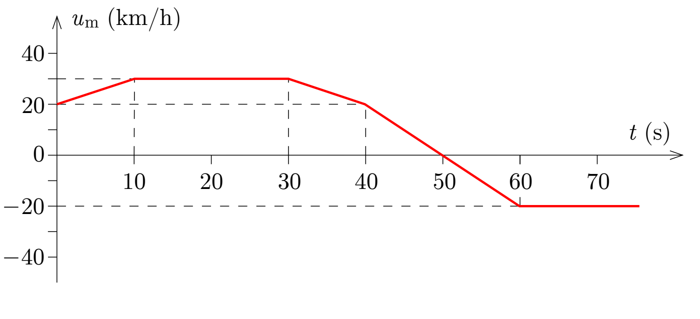
Fizikából kitűzött feladatok

M. 432. Készítsünk két, szájával összefordított PET palackból és búzadarából „homokórát”. A palackok közé helyezzünk különböző szűkítőket, amelyekkel a kör alakú nyílás d átmérőjét tudjuk változtatni. Mérjük meg a búzadara T lepergési idejét a d átmérő függvényében! Az elméleti várakozás szerint $T \sim d^{\gamma}$. Milyen γ kitevő adódik a mérésből?

(*6 pont*) Közli: *Széchenyi Gábor,* Budapest

G. 853. Egy rendőrautó az autópályán halad. Sebességét a számítógépes rendszer rögzítette, ez alapján készült az alábbi $v_{\mathrm{r}}(t)$ *grafikon.* Egy motoros egyszer csak megelőzi a rendőrautót, a rendőrautó méri a motoros sebességét. Az $u_{\mathrm{m}}(t)$ grafikon azt mutatja, hogy mekkora a motoros sebessége a rendőrautóhoz viszonyítva.





a) Rajzoljuk meg a motoros földhöz viszonyított sebességének $v_{\mathrm{m}}(t)$ grafikonját!

b) A grafikonokon ábrázolt időtartam alatt mikor volt a legtávolabb egymástól a két jármű? Mekkora ez a távolság?

c) A 60. másodperc után állandó sebességgel haladnak tovább. Mikor előzi vissza a rendőrautó a motorost?

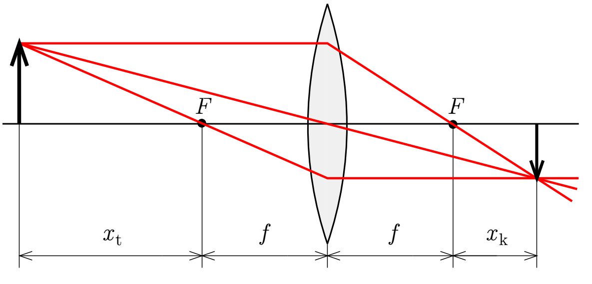
(*4 pont*) Közli: *Baranyai Klára,* Veresegyház

G. 854. Egy gömb alakú léggömbbe a levegőnél kisebb sűrűségű gázt töltöttek. A léggömbről lelógó spárgának a végére gemkapcsokat akasztgatunk abból a célból, hogy a léggömb a teremben egy adott magasságban lebegjen. A lebegést nem sikerült megvalósítani, mert a léggömb, ha 7 gemkapcsot akasztottunk a spárga végére, felemelkedett, de ha 8-at, akkor lesüllyedt. Mekkora lehet a léggömbben lévő gáz sűrűsége? A teremben a levegő sűrűsége 1,20 $\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$. A léggömb átmérője 26 cm, tömege felfújatlan állapotban 3 g. A spárga tömege 2 g, egy gemkapocs tömege 0,6 g. A léggömb anyagának vastagságától, a spárga és a gemkapcsok térfogatától eltekinthetünk!

(*4 pont*) Tarján Imre Országos Emlékverseny, Szolnok

G. 855. Newton nem a szokásos alakjában $\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{k}=\frac{1}{f}\right)$ írta fel a leképezési törvényt. Ő a tárgyoldali fókuszponttól mérte az x_{t} fókuszontúli tárgytávolságot, illetve a képoldali fókuszponttól mérte az x_{k} fókuszontúli képtávolságot, ahogy ez az *ábrán* látható.

a) Adjuk meg a legegyszerűbb alakban a leképezési törvényt ezekkel a paraméterekkel!



b) Hogyan alkalmazható ez a képlet szórólencsékre?

(*4 pont*)

G. 856. Budapesten mikor delel magasabban a Hold, egy decemberi vagy egy júniusi holdtölte idején?

(*4 pont*)

P. 5571. Egy h magasságú asztal sarka felett ugyancsak h magasságból egy kicsiny golyót ejtünk el. Az asztal sarkától legfeljebb milyen távol érkezhet a golyó a talajra? Az ütközést tekintsük tökéletesen rugalmasnak.

(*5 pont*) Közli: *Simon Péter,* Pécs

P. 5572. A 60 kg tömegű Aladár egy (a vízszinttől számítva) 50 m magas hídról „halálugrásra” (bungee jumping ugrásra) vállalkozik. A kötél hosszát úgy állították be, hogy Aladár az ugrás során *éppen* érintse a vízfelszínt. Így az igen könnyű, de kellőképpen rugalmas kötelének direkciós állandója 72 N/m. A 80 kg-os Bendegúz is vállalkozik egy hasonló ugrásra. Az ő kötele is ugyanolyan minőségű, mint Aladáré, de rövidebb annál.

a) Milyen hosszú Aladár, illetve Bendegúz kötele? Mekkora Bendegúz kötelének direkciós állandója?

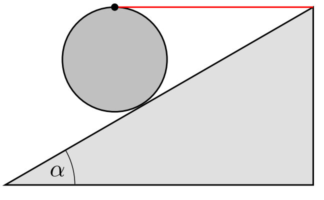
b) Mekkora Aladár, illetve Bendegúz maximális gyorsulása?

c) Melyikük éri el hamarabb a vízfelszínt, ha egyszerre ugranak le a hídról?

Feltételezhetjük, hogy a kötelek megnyúlása egyenesen arányos a nyújtóerővel. Az ugrók testmagasságát és a közegellenállást ne vegyük számításba.

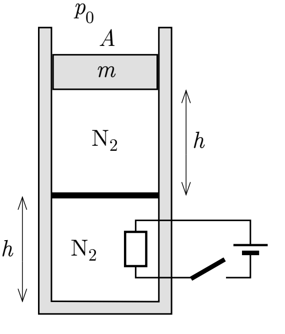
(*5 pont*) Közli: *Szabó Endre,* Vágfüzes, Szlovákia

P. 5573. Egy 30°-os hajlásszögű lejtőre homogén hengert helyeztünk, amelyet a tömegközéppontja feletti legmagasabb pontjánál egy vízszintes fonállal az *ábrán* látható módon a lejtőhöz kötöttünk. Legalább mekkora legyen a henger és a lejtő között a súrlódási együttható, hogy a henger ebben a helyzetben nyugalomban maradhasson?



(*4 pont*) Közli: *Holics László,* Budapest

P. 5574. Alul zárt, függőleges, hőszigetelt hengerben lévő dugattyúk azonos hőmérsékletű és térfogatú nitrogént zárnak el. Kezdetben a hőmérséklet $T_1 = 300$ K. A felső dugattyú súrlódásmentesen mozoghat, a tömege $m = 40$ kg, az alsó jó hővezető anyagból készült és rögzített, a felső hőszigetelt. A külső légnyomás 10^5 Pa, az alsó gáz nyomása $1{,}2 \cdot 10^5$ Pa, a henger alapterülete $A = 1\ \mathrm{dm}^2$, $h = 0{,}5$ m.



a) Mennyi a felső és az alsó részben lévő nitrogén tömege?

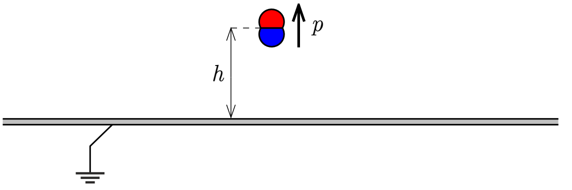
A fűtőszál $Q = 1580$ J hőt közöl a rendszerrel.

b) Mennyivel változik meg a felső és az alsó gáz belső energiája?

c) Mennyivel változik meg a felső gáz térfogata?

(*4 pont*) Közli: *Veres Dénes,* Szolnok

P. 5575. Nagy méretű, földelt fémlap felett h magasságban egy kicsiny elektromos dipólust helyezünk el. Mindezt úgy tesszük, hogy annak $\boldsymbol{p}$ dipólmomentuma

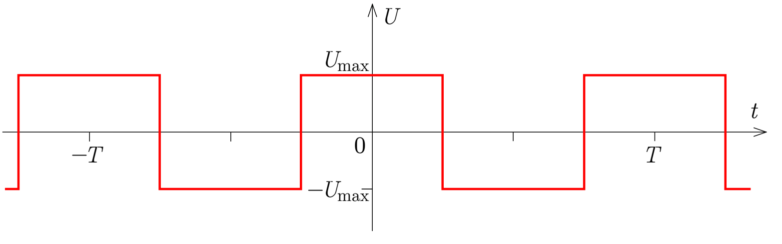


az *ábrán* látott módon felfelé mutasson. Határozzuk meg a fémlapon azon pontok helyét, ahol a felületi töltéssűrűség zérus!

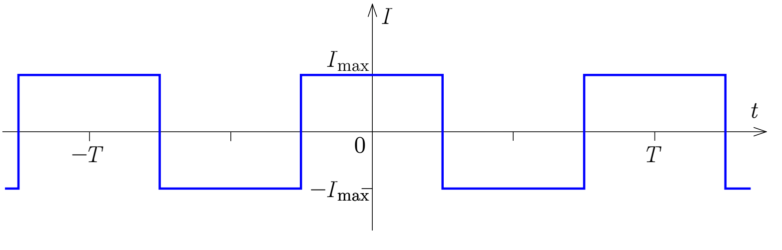
(*5 pont*) Közli: *Németh Róbert,* Budapest

P. 5576. Tegyük fel, hogy rendelkezünk olyan mérőműszerekkel, amelyek nemcsak szinuszos váltóáram, illetve váltófeszültség effektív értékét mérik, hanem tetszőleges periodikus jelekét is.

a) Csatlakoztassunk egy $f=1/T$ frekvenciájú, szimmetrikus négyszögjelet szolgáltató feszültséggenerátorra egy ideális induktivitást, amelynek önindukciós együtthatója L. Ideális feszültség- és árammérő műszerekkel megmérjük az induktivitás áramának effektív értékét, illetve a feszültséggenerátor feszültségének effektív értékét. Mit mutatnak a műszerek, ha a négyszögjel lefutását a következő *ábra* mutatja, továbbá tudjuk, hogy a $t=0$ időpillanatban az induktivitás árama zérus?



b) Csatlakoztassunk egy $f=1/T$ frekvenciájú, szimmetrikus négyszögjelet szolgáltató áramgenerátorra egy ideális kondenzátort, amelynek kapacitása C. Ideális feszültség- és árammérő műszerekkel megmérjük a kondenzátor áramának effektív értékét, illetve a áramgenerátor kimeneti feszültségének effektív értékét. Mit mutatnak a műszerek, ha a négyszögjel lefutását a következő *ábra* mutatja, továbbá tudjuk, hogy a kondenzátor feszültsége a $t=0$ időpillanatban zérus?

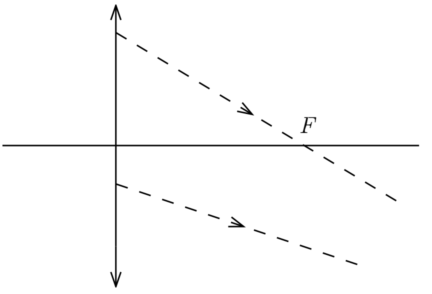


A válaszokat $I_{\max}$, $U_{\max}$, L, C és f segítségével adjuk meg.

(*5 pont*) Közli: *Honyek Gyula,* Veresegyház

P. 5577. Egy gyűjtőlencse bal oldalára egy pontszerű tárgyat helyeztünk, amelyből kiinduló két sugarat ábrázoltunk a lencsén történő áthaladás után. Az egyik sugár éppen a lencse fókuszpontján halad át. Az *ábra* alapján szerkesszük meg (körzővel, vonalzóval) a fényforrás helyét! Írjuk le a szerkesztés lépéseit!

(*4 pont*) Példatári feladat nyomán



P. 5578. Az előreláthatóan 2024-ben tetőző, fokozott naptevékenység következtében 2023. november 5-én este rendkívül látványos sarki fényt figyelhettünk meg Magyarországon, amely azonban a sarkvidéken rendszeresen látható égi jelenséggel ellentétben a domináns zöld szín helyett főképp vöröses színben pompázott. Látható fényt feltételezve legfeljebb hány fényjelenséget okozó ütközésre elegendő a napszéllel 2000 km/s sebességgel érkező egyetlen elektron energiája?

(*3 pont*) Közli: *Kenderes Anett,* Budapest

P. 5579. Helsinkiben karácsonykor kicsit több mint 6 és fél perc alatt kel fel a Nap. Mikor lesz ugyanott az év során a legrövidebb ez az időtartam? Hány percig tart Helsinkiben a leggyorsabb napfelkelte?

Helsinki az északi szélesség 60. fokán fekszik, sík területen. A Nap látszólagos átmérője körülbelül fél fok. A földpálya excentricitásából származó kicsiny eltérésekkel és a légkör hatásával ebben a feladatban ne foglalkozzunk.

(*6 pont*) Közli: *Vankó Péter,* Budapest

❄

Beküldési határidő: 2024. június 15.

Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄

MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL FOR SECONDARY SCHOOLS (Volume 74. No. 5. May 2024)

Problems in Mathematics

New exercises for practice – competition K (see page 288): **K. 814.** On a field, a flock of sheep is grazing. Some of the sheep have been marked, and the ratio of marked to unmarked sheep is $\frac{3}{5}$. Only 17 of the unmarked sheep have been sheared, and all the marked sheep have been sheared, however, the number of sheared and unsheared sheep is equal. Find the number of sheep grazing on the field. (Proposed by *Bálint Bíró*, Eger) **K. 815.** Point D is chosen on leg BC of right triangle ABC satisfying $BC = 4BD$, and point E is chosen on leg AC satisfying $AC = 8CE$. Find the length of hypotenuse AB given that $AD = 164$ and $BE = 52$. (*Vietnamese problem*) **K. 816.** Expression $E(x) = \frac{8x-12}{4x^2-12x+9} - \frac{5x}{2x^2+3x} - \frac{20x}{9-4x^2}$ is given. Find integers x for which $E(x)$ is a natural number. (*Matlap*, Kolozsvár) **K/C. 817.** There are four pieces of paper in a box, and a positive number is written on each of them. We choose some of them from the box in all possible ways, and take the sum of the numbers on the papers. (If we choose a single piece of paper, we take the number that is written on the paper.) Find the numbers written on the papers, if the sums are always consecutive integer numbers. **K/C. 818.** In the right triangle ABC the lengths of the legs are $BC = 6$ and $CA = 8$. Let P and Q denote the trisection point closer to B and the midpoint of leg BC, respectively, let R and S denote the trisection point closer to C and the midpoint of leg CA, respectively, and finally let T and U denote the trisection point closer to A and the midpoint of hypotenuse AB, respectively. Reflect trisection points P, R and T across the other endpoints of the respective sides according to the diagram (see page 288). Find the area of polygon $P'U'R'Q'T'S'$. (Proposed by *Bálint Bíró*, Eger)

New exercises for practice – competition C (see page 289): Exercises up to grade 10: **K/C. 817.** See the text at Exercises **K**. **K/C. 818.** See the text at Exercises **K**. **Exercises for everyone: C. 1813.** Prove that there exist no positive integers m and n, for which $3^m + 3^n + 1$ is a perfect square. (*USA competition problem*) **C. 1814.** A circle with radius r is divided into two parts with a line that has a distance of $\dfrac{r}{\sqrt{2}}$ from the center of the circle. Find the ratio of the areas of the two parts. (Proposed by *András Ringler*, Budapest) **C. 1815.** Solve the following system of equations for natural numbers x, y, z and u: $x^2y - zu^2 = 6$, $x^2z + yu^2 = 11$. (Based on an idea of *Sándor Katz*, Bonyhád) **Exercises upwards of grade 11: C. 1816.** Let the sides of a triangle with side lengths $a = 14$, $b = 13$, $c = 15$ be tangent to a sphere with radius $R = 5$. Find the distance between the center of the sphere and the plane of the triangle. (*Croatian competition problem*) **C. 1817.** We have tossed a coin several times. The sequence of results turned out to be one head, one tail, one head, two tails, one head, three tails, and so on (each time the lengths of the contiguous segments of tails increase by one separated by a single head). Assuming this regularity, after how many tosses will the relative frequency of the heads be exactly $\frac{1}{2023}$? (Proposed by *Mátyás Barczy*, *Gábor Nyul*, Debrecen)

New exercises – competition B (see page 290): **B. 5390.** Is it possible to find even integers $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ for which polynomial $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ is divisible by $x^2 + x + 1$? *(3 points)* (Proposed by *Géza Kós*, Budapest) **B. 5391.** Let C be a point on a circle with unit diameter AB. Let points D and E be chosen on line segment AB such that $BD = BC$ and $AE = AC$. Find the smallest possible value of $AD^2 + DE^2 + EB^2$. *(4 points)* (Proposed by *József Szoldatics*, Budapest) **B. 5392.** Let us consider a trapezoid whose area is equal to the product of the lengths of its bases. Prove that this trapezoid is tangential if and only if it is right. *(5 points)* (Proposed by *László Németh*, Fonyód) **B. 5393.** Let f be a real function (that is, a real-valued function of a real variable) satisfying $|f(x + y + z) + \sin x + \sin y + \sin z| \le 3$, for all $x, y, z \in \mathbb{R}$. Prove that $|f(x) - \sin x| \le 1$ for all $x \in \mathbb{R}$. *(4 points)* (Proposed by *Mihály Bencze*, Brasov) **B. 5394.** Let O be the center of square $ABCD$, and let X be an arbitrary point on its circumcircle. Let T denote the orthogonal projection of X onto BC. Let E denote the intersection of lines XB and AC, and let F denote the intersection of lines XC and BD. Prove the EF is perpendicular to TO. *(4 points)* (Proposed by *Viktor Vígh*, Sándorfalva) **B. 5395.** Let $d(k)$ denote the number of positive divisors of a positive integer k, and let $1 < n$ be an integer. Which sum is larger: $d(2) + d(4) + \cdots + d(2n)$ or $(d(1) + d(3) + \cdots + d(2n-1)) + (d(1) + d(2) + \cdots + d(n))$? *(5 points)* (Proposed by *Péter Pál Pach*, Budapest) **B. 5396.** An equilateral pentagon in the three-dimensional space has four right angles. What can be its fifth angle? *(6 points)* (Proposed by *Péter Dombi*, Pécs) **B. 5397.** Let G be a graph (possibly with multiple edges) with the following property: whenever the vertices of G are partitioned into t disjoint sets, there are at least $2t-2$ edges connecting different sets. Show that the edges of G can be colored red or blue such that the red edges and the blue edges each form a connected graph (and reaching all the vertices). *(6 points)* (Proposed by *Kada Williams*, Cambridge)

New problems – competition A (see page 291): **A. 881.** We visit all squares exactly once on a $n\times n$ chessboard (colored in the usual way) with a king. Find the smallest number of times we had to switch colors during our walk. (Proposed by *Dömötör Pálvölgyi*, Budapest) **A. 882.** Let H_1, H_2, $\ldots$, H_m be non-empty subsets of the positive integers, and let S denote their union. Prove that $\sum_{i=1}^m \sum_{a,b\in H_i} \gcd(a,b) \geq \frac{1}{m} \sum_{a,b\in S} \gcd(a,b)$. (Proposed by *Dávid Matolcsi*, Berkeley) **A. 883.** Let $J \subsetneq I \subseteq \mathbb{R}$ be intervals, and let f_1, f_2, $\ldots$ be real polynomials satisfying the following conditions: • $f_i(x) \geqslant 0$ for all $i \geqslant 1$ and $x \in I$, • $\sum_{i=1}^\infty f_i(x)$ is finite for all $x\in I$, • $\sum_{i=1}^\infty f_i(x) = 1$ for all $x \in J$. Do these conditions imply that $\sum_{i=1}^\infty f_i(x) = 1$ also for all $x \in I$? (Proposed by *András Imolay*, Budapest)

Problems in Physics

(see page 313)

M. 432. Make an "hourglass" from semolina and two PET bottles with their mouths turned towards each other. Insert various reducers between the bottles to vary the diameter of the circular opening d. Measure the time T for the semolina to flow down as a function of the diameter d. The theoretical expectation is $T \sim d^\gamma$. What exponent γ results from the measurement?

G. 853. A police car is driving on the motorway. Its speed was recorded by the computer system of the car, and the following graph $v_\mathrm{r}(t)$ was produced. Suddenly a motorcyclist overtakes the police car, the police car measures the speed of the motorcyclist. The graph $u_\mathrm{m}(t)$ shows the speed of the motorcyclist with respect to the police car. *a)* Plot the graph $v_\mathrm{m}(t)$, which is the speed of the motorcyclist relative to the ground. *b)* During the time period shown in the graphs, when were the two vehicles the furthest from each other? What was this greatest distance? *c)* After the 60th second, they continue at constant speed. When will the police car overtake the motorcyclist? **G. 854.** A spherical balloon is filled with some gas, whose density is smaller than that of the air. In order to make the balloon float at a certain height in the room, paper clips are hung on the free end of the rope, which is tied to the balloon. The floating was not achieved because the balloon rose if 7 paper clips were hung on the end of the rope, but descended if 8 were hung on the end of the rope. What is the density of the gas in the balloon? The density of the air in the room is $1.20\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$. The balloon has a diameter of 26 cm and a mass of 3 g (before it was inflated). The mass of the rope is 2 g, the mass of one paper clip is 0.6 g. The thickness of the material of the balloon, the volume of the rope and the paper clips can be ignored. **G. 855.** Newton did not write the mirror and lens equation in the usual form $\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{k}=\frac{1}{f}\right)$. He measured the object distance x_t from the focus on the side of the object, and the image distance x_k from the focus on the image side as shown in the figure. *a)* Determine the lens equation with these parameters in its simplest form. *b)* How can this formula be used for a diverging lens? **G. 856.** In Budapest during a full Moon in December, or during a full Moon in June is the altitude belonging to the culmination of the Moon higher?

P. 5571. A small ball is dropped from a height of h above the corner of a table of height also h. At most how far from the corner of the table can the ball hit the ground? Consider the impact to be perfectly elastic. **P. 5572.** Alistair, whose mass is 60 kg, attempts a bungee jump from a 50 m high bridge (measured from the water level). The length of the rope is adjusted so that Alistair *just* touches the surface of the water during the jump. Thus, his very light but sufficiently flexible rope has a spring constant of 72 N/m. Benedict, whose mass 80 kg, will attempt a similar jump. His rope is of the same quality as Alistair's, but shorter. *a)* How long are Alistair's and Benedict's bungee ropes? What is the spring constant of Benedict's rope? *b)* What is the maximum acceleration of Alistair and Benedict? *c)* Which of them reaches the surface of the water faster if they jump off the bridge at the same time? We can assume that the elongation of the ropes is directly proportional to the stretching force. Ignore the height of the jumpers and air resistance. **P. 5573.** A uniform-density cylinder was placed on a slope with an angle of inclination of 30°, and tied to the slope at its highest point above the centre of its mass with a horizontal thread as shown *in the figure*. What should be the least value of the coefficient of friction between the cylinder and the slope in order that the cylinder remain at rest in this position? **P. 5574.** Pistons encloses samples of nitrogen gas in a vertical, insulated cylinder sealed at its bottom. Initially the samples have the same volume and the same temperature of $T_1 = 300$ K. The upper piston can move frictionlessly, has a mass of $m = 40$ kg, and is thermally insulated, the lower one is made of good thermal conducting material and is fixed. The external air pressure is 10^5 Pa, the pressure of the gas at the bottom part is $1.2 \cdot 10^5$ Pa. The area of the cross section of the cylinder is $A = 1\ \mathrm{dm}^2$, $h = 0.5$ m. *a)* What are the masses of the samples of nitrogen in the bottom and in the top parts of the cylinder? An electric heating element gives $Q = 1580$ J thermal energy to the system. *b)* By how much does the internal energy of the gases in the top and bottom parts change? *c)* How much does the volume of the upper gas change? **P. 5575.** A small electric dipole is placed above a large grounded metal plate at a height of h. This is done in such a way that its dipole moment $\boldsymbol{p}$ points upwards as shown in the figure. Determine the positions of the points on the metal sheet where the surface charge density is zero. **P. 5576.** Suppose that we have measuring instruments that measure not only the RMS value of sinusoidal AC current or AC voltage, but also that of any periodic signal. *a)* Connect an ideal inductor with self-inductance L to a voltage generator with frequency $f = 1/T$, which provides a symmetrical square-wave signal. Using ideal voltmeter and ammeter, measure the RMS value of the current through the inductor and the RMS value of the voltage across the voltage generator. The first *figure* shows the square waveform, and we know that at time $t = 0$ the current through the inductor is zero. *b)* Connect an ideal capacitor with capacitance C to a voltage generator with frequency $f = 1/T$, which provides a symmetrical square-wave signal. Using ideal voltmeter and ammeter, measure the RMS value of the current through the capacitor and the RMS value of the voltage across the voltage generator. The second *figure* shows the square waveform, and we know that at time $t = 0$ the voltage across the capacitor is zero. What are the readings of the meters for the connection in part *a)* and in part *b)*? Give the answers in terms of $I_{\max}$, $U_{\max}$, L, C and f. **P. 5577.** On the left side of a converging lens, a point-like object was placed, from which two rays were plotted after passing through the lens. One of the rays just passes through the focus of the lens. Using the figure as a guide, construct the position of the light source (using a pair of compasses and a ruler). Describe the steps of construction. **P. 5578.** Due to the increased solar activity expected to peak in 2024, a very spectacular auroral display was observed in Hungary on the evening of 5 November 2023. However, unlike the regular auroral display in the Arctic, it was mainly reddish instead of the dominant green. Assuming visible light, what is the maximum number of collisions of a single electron, arriving with the solar wind at a speed of 2000 km/s, which causes the emission of light? **P. 5579.** In Helsinki, the sun rises in just a bit more than 6.5 minutes on Christmas Day. At which day of the year will the time of the sunrise be the shortest in the same place? How long is the fastest sunrise in Helsinki? Helsinki lies on a plain, at 60 degrees north latitude. The apparent diameter of the sun is about half a degree. Ignore the small variations due to the eccentricity of the Earth's orbit and the effect of the atmosphere in this exercise.

EGMO 2024 – képek az élménybeszámolóhoz

Az egyik veszélyes dínó

A Bagrati székesegyház Kutaisziban

Grúz férfikórus tőrökkel

KöMaL Nyári Fizika Tábor – előzetes tájékoztatás

Kedves kitartó KöMaL Versenyzők, kedves fizika iránt érdeklődő Diákok! Örömmel értesítünk Benneteket, hogy az elmúlt évek hagyományát követve, idén is megrendezésre kerül a KöMaL Nyári Fizika Tábor június 29. és július 5. között a szép természeti környezetet biztosító Dombóvár-Gunaras üdülőfaluban a 9 – 12 osztályt végző, középiskolás diákok számára.

A táborban (külön tanárokkal és programmal) részt vesz a nemzetközi matematikai diákolimpiára készülő „matematikus csapat" is.

A tábor költségének nagy részét (szállás, napi háromszori étkezés, fürdőbelépő, jutalmak, előadók tiszteletdíja stb.) pályázati forrásból biztosítja a MATFUND Alapítvány. A táborba való utazást mindenkinek önállóan kell megoldania.

A rendszerint remek hangulatú táborban öt napon keresztül tudjátok próbára tenni, fejleszteni fizikatudásotokat, miközben új barátokat szerezhettek a csapatmunka során. A táborszervezők minden nap egy-egy érdekes mérési, numerikus és néhány elméleti példa kiadásával tesztelik a csapatok felkészültségét, persze mindezt nyári hangulatban. Az esti órák csoportos beszélgetésekkel szoktak telni, ahol a középiskolai oktatásából kimaradt területekbe is betekintést nyerhetnek az ez iránt érdeklődő táborozók, megtanulhatják például a deriválás vagy az integrálás alapjait. Az izzasztó feladatmegoldás mellett persze számos egyéb programmal is készülünk, melyek nem maradhatnak ki a KöMaL nyári táborából, mint a strandolás, túrázás, krumpliágyú kipróbálása, forrasztás, társasozás, labdajátékok, és a közös éneklés a tábortűz körül.

Ha a fentiek meghozták a kedveteket vagy már „régi" táborozók vagytok, szeretettel várjuk a jelentkezéseteket, találkozzunk a táborban! A KöMaL feladatmegoldóknak a jelentkezési lapokat és további tájékoztatást május közepén fogjuk kiküldeni, és május 31-i határidővel lehet majd jelentkezni a táborba.

A KöMaL előfizetési árai a 2024/25-ös tanévre

példányszám / előfizetés	ár	ajándék példány	példányszám / előfizetés	ár	ajándék példány
1-9 db	12 000 Ft	0	40-49 db	10 400 Ft	5
10-14 db	11 400 Ft	1	50-59 db	9 800 Ft	6
15-19 db	11 400 Ft	2	60-69 db	9 800 Ft	7
20-29 db	10 950 Ft	3	70-79 db	9 800 Ft	8
30-39 db	10 400 Ft	4	80 db-tól	9 800 Ft	9

A következő tanévre szóló megrendelésről a pontos információk várhatóan június elején kerülnek fel a honlapra.

Petőfi Kulturális Ügynökség
Nemzeti Együttműködési Alap
nka Nemzeti Kulturális Alap
Bethlen Gábor Alapkezelő Zrt.
Miniszterelnökség