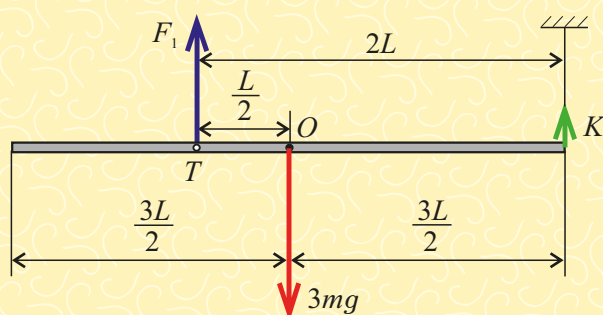


Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok

Informatika rovattal

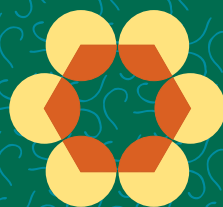
Ábra az 5583-as feladat megoldásához



A Rejtvények, ördöglakatok cikk novemberi
„8 vezér” feladványának megoldása



Ericsson-díjak 2024. | Arcképcsarnok | A tavalyi verseny
eredményei iskolánként | Képek a XVII. Ördöglakat
Találkozóról | KöMaL tartalomjegyzék 2024. |
Fizika feladatok megoldásai



KöMaL

74. évfolyam
9. szám
2024.
december



Képek a XVII. Ördöglakat Találkozóról



Szilassi Lajos



A szétszedhető Szilassi-poliéder szétszedve



Egy ismerős
(KöMaL 2024. február)



Néhány fejtörő



KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK
INFORMATIKA ROVATTAL BŐVÍTVE
ALAPÍTOTTA: ARANY DÁNIEL 1894-ben

74. évfolyam 9. szám

Budapest, 2024. december

Megjelenik évente 9 számban, januártól májusig és szeptembertől decemberig havonta. ÁRA: 1450 Ft

TARTALOMJEGYZÉK

<i>Vígh Viktor</i> : Rejtvények, ördöglakatok – Vágjuk két egyforma darabra!	530
Kiosztották az idei Ericsson-díjakat	532
<i>Tatár Zsuzsanna Mária</i> : Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire	533
<i>Jócsik Csilla</i> : Megoldásvázlatok a 2024./8. szám matematika gyakorló feladatsorához	536
63. Rátz László Vándorgyűlés – A középiskolai tanárversenye feladatainak végeredménye és vázlatos megoldása	546
Matematika feladatok megoldása (5400.)	551
<i>Fried Katalin</i> : Vektorok és bővűs négyzetek ...	554
Helyesbítés	557
A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok (834–838.)	557
A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (837–838., 1833–1837.)	558
A 2023–2024-as tanév pontversenyeinek iskolánként összesített eredménye	560
A Középiskolai Matematika és Fizikai Lapok 74. évfolyamának tartalomjegyzéke (2024) ..	571
A B pontversenyben kitűzött feladatok (5422–5429.)	577
Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (893–895.)	578
Informatikából kitűzött feladatok (643–646.) ..	579
Fizika gyakorlatok megoldása (857., 864.)	585
Fizika feladatok megoldása (5558., 5564., 5565., 5577., 5580., 5582., 5583., 5588.)	588
Fizikából kitűzött feladatok (436., 869–872., 5607–5615.)	602
Problems in Mathematics	605
Problems in Physics	607

Főszerkesztő: KORÁNDI JÓZSEF
Fizikus szerkesztő: VANKÓ PÉTER
Műszaki szerkesztő: FRIED KATALIN
Borító: BURGHARDT ZSUZSA
Kiadja: MATFUND ALAPÍTVÁNY
Alapítványi képviselő: KÓS RITA
Felelős kiadó: KATONA GYULA
Nyomda: OOK-PRESS Kft.
Felelős vezető: SZATHMÁRY ATTILA
INDEX: 25 450 ISSN 1215-9247

A matematika bizottság vezetője:
HERMANN PÉTER

Tagjai: BÁN-SZABÓ ÁRON, BÍRÓ BÁLINT,
GYENES ZOLTÁN, HUJTER BÁLINT,
IMOLAY ANDRÁS, KISS GÉZA, KÓS GÉZA,
KOZMA KATALIN ABIGÉL, LOVAS MÁRTON,
ÖKÖRDI PÉTERNÉ, PACH PÉTER PÁL,
PAULOVICS ZOLTÁN, RATKÓ ÉVA,
SZTRANYÁK ATTILA, VÍGH VIKTOR

A fizika bizottság tiszteletbeli elnöke:
HOLICS LÁSZLÓ

Vezetője:
SZÉCHENYI GÁBOR

Tagjai: BARANYAI KLÁRA, GNÄDIG PÉTER,
HONYEK GYULA, OLOSZ BALÁZS,
SZÁSZ KRISZTIÁN, VÍGH MÁTÉ,
VLADÁR KÁROLY, WOYNAROVICH FERENC

Az informatika bizottság vezetője:
SCHMIEDER LÁSZLÓ

Tagjai: LÓCZI LAJOS, SIEGLER GÁBOR,
TÓTH TAMÁS

Fordítók: GYENES ZOLTÁN, TASNÁDI ANIKÓ
Nyelvi korrektor: ANDICS ÁGNES

Szerkesztőségi titkár: ONDINÉ SZABÓ SÁRA

A szerkesztőség címe: 1117 Budapest,
Pázmány Péter sétány 1/C III. emelet 3.405.
Telefon: + 36 20 320-1143

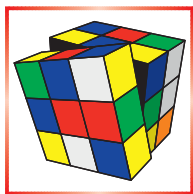
A lap megrendelhető a
<https://komalujsg.mysshoprenter.hu>
oldalon keresztül.

Előfizetési díj egy évre: 12 000 Ft
Kéziratokat nem őrzünk meg és nem küldünk vissza.
Minden jog a KöMaL tulajdonosaié.

E-mail: szerk@komal.hu
Internet: <http://www.komal.hu>

This journal can be ordered from the Editorial office:
Pázmány Péter sétány 1/C III. emelet 3.405.
1117–Budapest, Hungary
telephone: +36 20 320-1143
or on the Internet:

<https://komalujsg.mysshoprenter.hu>.
A Lapban megjelenő hirdetések tartalmáért
felelősséget nem vállalunk.



Rejtvények, ördöglakatok

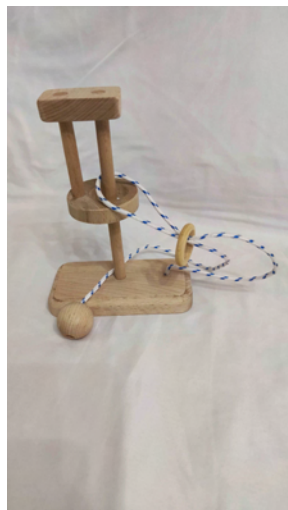
Vágjuk két egyforma darabra!

Rovatunkban minden hónapban valamilyen szórakoztató matematikai fejtörőt mutatunk be. Ezek között fontos helyet foglalnak el a különböző kirakós játékok, topológiai feladványok, ördöglakatok és a matematikát felhasználó bűvészmutatványok.

Manapság szinte mindent meg lehet találni az interneten, de az igazi élményt az adja, ha a feladatokat magunk oldjuk meg, a bűvészmutatványok trükkjeit mi találjuk ki, és a szükséges kellékeket is mi tervezzük meg és készítjük el. Próbáljuk meg a feladatokat továbbgondolni, általánosítani, igyekezzünk új feladatokat kitalálni.

Egyik novemberi feladványunk egy klasszikus zsinóros ördöglakat volt. A játékban egy zsinór körül fog egy farudat, létrehozva ezzel egy „keresztezést”. Ha ezt fel tudjuk oldani, a feladatot megoldottuk. Pontosan egy éve tűztük ki a rovatban „Lánc, lánc, gyereklánc” címmel a feladat alapváltozatát, amelyben két hasonlóan összefűzött zsinórt kellett szétválasztani. Itt annyiban más a helyzet, hogy a zsinór a farúd „meghosszabbítása”, így valamilyen értelemben a zsinór önmagát keresztezi. De a megoldás ötlete ettől ugyanaz marad: vigyük ki a keresztezést valamilyen véghez, ahol a keresztezés „kigombolással” megszüntethető. A játékban a farész önmagára hurkolódik, ott nincs egyszerű végződés, ezért a keresztezést a zsinór végén lévő golyóhoz próbáljuk közelíteni. Innen a megoldás szinte automatikus, a fotókon a lépések jól követhetők, kétszer húzzuk át a keresztezést a rudat körülfogó gyűrűn, végül a karikán, így jutunk el a golyóig. Hogy biztosan jól megértettük-e a módszer lényegét, azt az utolsó képen látható „fejreállított” változaton tesztelhetjük. Sikerül azt is megoldani?



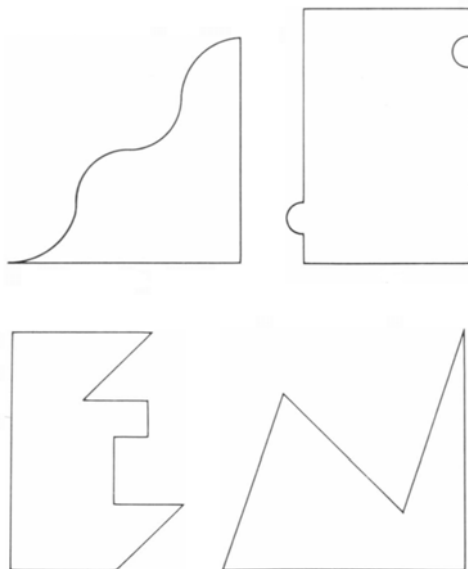


A másik novemberi feladvány öt világos és három sötét királynő elhelyezése volt az 5×5 -ös sakktáblára úgy, hogy különböző színű vezérek ne üssék egymást. Ez a probléma Martin Gardnertől származik, megoldása szintén fotón látható. Az elhelyezést talán azért nehéz megtalálni, mert semmiféle szimmetriát nem tartalmaz.



Az idei KöMaL Ankéton elhangzott „Trükkös darabolások” c. előadáshoz kapcsolódóan tűzünk ki néhány, ugyancsak Martin Gardnertől származó feladványt. Itt ha nem is szimmetriát, de egybevágó darabokat kell találnunk. A feladat min-

den esetben az, hogy a megadott alakzatot egy folytonos vágással két egybevágó darabra vágjuk.



Jó szórakozást!

Vígh Viktor



Kiosztották az idei Ericsson-díjakat

2024. november 21-én hat kategóriában adták át idén az Ericsson-díjakat az Ericsson Magyarország székházában. Összesen kilenc pedagógus nyerte el a rangos elismerést és a vele járó fejenkénti 500 000 Ft-os jutalmat.

A jó hangulatú ünnepélyes díjátadón immár 24. alkalommal nyújtottak át ilyen díjakat a középiskolai matematika- és fizikaoktatás kiemelkedő pedagógusainak, míg a „Digitális kultúra népszerűsítéséért” és „Digitális kultúra tehetségeinek gondozásáért” díjak átadására idén először került sor.

Az egyes kategóriák díjazottjai:

„Ericsson a matematika népszerűsítéséért” díj

Süveges-Szabó Marianna Éva (Baár-Madas Református Gimnázium, Budapest)

„Ericsson a matematika tehetségeinek gondozásáért” díj

Thuróczy Erzsébet Emília (Gödöllői Török Ignác Gimnázium)

dr. Molnár István (Gál Ferenc Egyetem, Szeged)



„Ericsson a fizika népszerűsítéséért” díj

Sinkó Andrea (Szombathelyi Nagy Lajos Gimnázium)

„Ericsson a fizika tehetségeinek gondozásáért” díj

Dr. Nagy Piroska Mária (Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Ált. Isk. és Gimnázium)

Horváth Henrietta (Dunakeszi Radnóti Miklós Gimnázium)

„Ericsson a digitális kultúra népszerűsítéséért” díj

Schmieder László (Eötvös József Gimnázium, Budapest)

„Ericsson a digitális kultúra tehetségeinek gondozásáért” díj

Csató Endre (Miskolci Földes Ferenc Gimnázium)

Tassy Gergely (Veres Péter Gimnázium, Budapest)

Gratulálunk a díjazottaknak!

**Gyakorló feladatsor
emelt szintű matematika érettségire**



I. rész

1. Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán.

a) $\sin^2 x = (1 - \cos x)^2$, (5 pont)

b) $(2x - 1)^2 - \frac{3}{4x^2 - 4x + 1} + 2 = 0$. (6 pont)

2. Egy derékszögű háromszög átfogójához tartozó magasságának T talppontja $16 : 9$ arányban osztja az átfogót, a derékszög szögfelezője pedig a Q pontban $4 : 3$ arányban osztja az átfogót. A két egyenes – magasságvonal és szögfelező – átfogóval való metszéspontjainak távolsága 12 egység.

- a) Mekkora a háromszög oldalai? (7 pont)
 b) Mekkora a (derékszöget felező) szögfelezőszakasz pontos hossza? (3 pont)
 c) Igazoljuk, hogy $c = 5r$, ha r a háromszögbe írható kör sugara, c az átfogó. (3 pont)

3. Három szám egy 15 differenciájú számtani sorozat három egymást követő tagja. Ha az első tagból kivonunk egy számot, és ugyanezt a számot a második tagból is kivonjuk, a harmadik számhoz pedig hozzáadjuk a szám felét, akkor egy olyan mértani sorozat három egymást követő tagját kapjuk, amelyek összege 105.

- a) Mi volt a kiinduló számtani sorozat? (8 pont)
 b) Melyik számot felhasználva kapjuk meg a szóban forgó mértani sorozatot? (5 pont)

4. Egy osztály képviselőket küld az iskolai diákbizottságba. Észrevették, hogy ha 3 fős képviselőcsoportot választanak maguk közül, akkor 10-szer annyi féleképpen tudják kiválasztani a három embert, mintha 2 fős képviselőcsoportot választanának.

- a) Hányan járnak ebbe az osztályba? (6 pont)
 b) Bizonyítsuk be, hogy minden n, k esetén ($n, k \in \mathbb{N}, n \geq k$)

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}. \quad (3 \text{ pont})$$

c) Egy halmaznak pontosan annyi 5 elemű részhalmaza van, mint ahány 6 elemű. Hány elemű a halmaz? (5 pont)

II. rész

5. a) Válasszuk ki a racionális számok halmazába tartozó értékeket az alábbiak közül, és adjuk meg közös nevezőre hozott alakjukat.

$$k = 3,1\bar{2}, \quad l = (\sqrt{5} - 1)^2, \quad m = (\sqrt{5} - 1)(\sqrt{5} + 1), \quad n = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} - \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}. \quad (5 \text{ pont})$$

b) Igazoljuk, hogy a következő egyenlőtlenségnek pontosan egy megoldása van a valós számok halmazán.

$$2^{4\log_2 x} + 4 \leq 4x^2 \quad (7 \text{ pont})$$

c) Adott az $[-8; +8]$ intervallumon értelmezett valós értékű f függvény:

$$f(x) = \begin{cases} 3,5x + 21, & \text{ha } -8 \leq x < -4; \\ |x^2 - 9|, & \text{ha } -4 \leq x < 4; \\ -3,5x + 21, & \text{ha } 4 \leq x \leq 8. \end{cases}$$

Döntsük el, hogy a következő állítások igaz vagy hamis értékűek-e.

- i) Az f függvény értékkészlete: $[-8; 9]$.
 ii) Az f függvény zérushelyeinek száma: 2.
 iii) A függvény páratlan.
 iv) $f(6) = 0$. (4 pont)

6. Adott két dobótetraéder. Olyan tetraéderek, amelyek minden lapján egy-egy számjegy áll, és ugyanakkora eséllyel esnek egy-egy lapra. Az egyik tetraéder számai: 1, 2, 3, 4, a másik tetraéder számai: 5, 6, 7, 8. A tetraéderek esetében tekintsük *dobott számnak* azt az értéket, amely az asztallal érintkező lapjára van írva. Egyszerre dobunk a két tetraéderrel, legyen egy kísérlet kimenetele a dobott számok összege.

a) Mennyi a valószínűsége annak, hogy 10-nél nagyobb számot kapunk eredményül? (2 pont)

b) Mennyi a valószínűsége annak, hogy 8-nál nem nagyobb az eredmény? (2 pont)

c) Határozzuk meg az így definiált valószínűségi változó (dobott számok összege) várható értékét. (3 pont)

d) Vizsgáljuk a két tetraéderrel dobott számok szorzatát. Mennyi a valószínűsége, hogy a szorzat 8-cal osztható? (3 pont)

e) Határozzuk meg a dobott számok szorzatának várható értékét. (3 pont)

Mindkét tetraéderrel tízszer dobtunk, és az eredményeket feljegyeztük:

első tetraéder: 4, 4, 3, 4, 2, 2, 2, 1, 1, 3;

második tetraéder: 8, 5, 5, 7, 6, 6, 6, 7, 8, 8.

f) Igazoljuk, hogy mindkét tetraéder esetében ugyanannyi az adatok szórása. (3 pont)

7. Adott a koordinátasíkon az $y = -x^2 + 12x - 33$ egyenletű parabola.

a) Határozzuk meg a fókuszpontjának koordinátáit és vezéregyenesének egyenletét. (2 pont)

b) Az ABC háromszög két csúcsának koordinátája: $A(1;3)$ és $B(3;7)$.

A háromszög C csúcsa az adott parabola ívéen mozog. Adjuk meg azt a C pontot, amellyel az ABC háromszög területe a legkisebb. (6 pont)

c) Mekkora a legkisebb területű háromszög területének értéke? (3 pont)

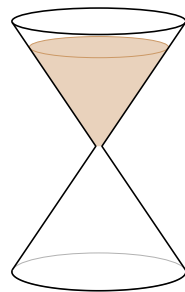
d) Adjuk meg a parabolaív és az x tengely által létrejött zárt görbe területét két tizedesjegyre kerekítve. (5 pont)

8. Egy 70° -os nyílásszögű kettőskúp alakú homokórába töltünk 2 dl homokot.

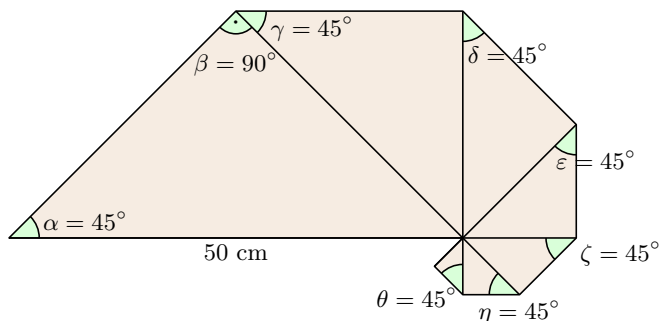
a) Amíg nem indul az óra – nem pereg a homok –, milyen magasan van a homok a felső kúpban, azaz mekkora a csúcstól számítva a homok-kúp magassága? (5 pont)

b) Amikor lepereg az összes homok az alsó kúpba, a keletkező homok-csonkakúp felső körének sugara feleakkora, mint az alapkör sugara. Mekkora a homokóra alapkörének sugara? (8 pont)

c) Mekkora a homok-csonkakúp magassága? (3 pont)



9. Egy hirdetés plakátjához különleges logót készítünk. Kiindulunk egy 50 cm-es befogójú egyenlő szárú derékszögű háromszögből. Ezt kiegészítjük egyik irányba egy-egy újabb egyenlő szárú derékszögű háromszöggel úgy, hogy az új háromszögek átfogója az előző befogója legyen.



a) Ha korlátlan mennyiségben tudnánk így háromszögeket készíteni, majd mind-egyiket maradéktalanul lefesteni, akkor összesen hány négyzetdeciméter felületet festenénk be? (9 pont)

b) A gyakorlatban csak addig végezzük el az ábrakészítést, amíg az új háromszög területe legalább 0,5 négyzetcentiméter. Hány háromszög lesz így az ábrán? (7 pont)

Tatár Zsuzsanna Mária
Esztergom

Megoldásvázlatok a 2024./8. szám matematika gyakorló feladatsorához

I. rész

1. András és Balázs 8–8 millió forintot szeretne gyűjteni saját autók vásárlására. Ehhez minden hónap elején azonos összeget tesznek félre a megtakarítási számlájukon. A bank a számlákon elhelyezett összegre éves 9%-os kamatos kamatot ad havi tőkésítés mellett.

a) Hány forintot kell Andrásnak havonta a számlájára félretenni, hogy a 3. év végére elérje a tervezett megtakarítást? (A választ ezer forintra kerekítve adjuk meg.) (4 pont)

b) Balázs havonta 120 000 forintot tud erre a célra félretenni. Hány év múlva gyűlik neki össze a tervezett összeg? (4 pont)

c) A fiúk négy témakörben összesen 50 kvíz kérdést állítottak össze. Az élővilág témakörből 8-at, a sport témakörből 15-öt, a tudomány témakörből 22-t és 5 bulvár kérdést. Ezekből állítottak össze Cilinek, Dorkának és Evelinnek egy-egy 6 kérdésből

álló feladatsort. Cili olyan kérdéssort kért, amelyben szerepel az élővilág. Dorka szeretné, ha az ő kérdései közül pontosan 3 a tudomány témakörből lenne. Evelin azt kéri, hogy az első két kérdése legyen a sporthoz kapcsolódó, de a többi ne.

A kérdések sorrendjét is figyelembe véve kinek tudnak a fiúk a legtöbbféleképpen kérdéssort összeállítani, ha teljesítik a lányok kéréseit? (4 pont)

Megoldás. a) Jelölje x a számlán havonta elhelyezett összeget, q pedig azt, hogy havonta hányszorosára nő az épp a bankban lévő pénz. Mivel az éves kamat 9%, így $q = 1 + \frac{9}{12 \cdot 100} = 1,0075$. A 36. hónap végén a megtakarítási számlán lévő összeg $xq^{36} + xq^{35} + \dots + xq$. Megoldandó az

$$(1) \quad xq(q^{35} + q^{34} + \dots + 1) = 8 \cdot 10^6$$

egyenlet. A zárójelben olyan mértani sorozat első 36 tagjának összegét látjuk, amelynek első tagja 1, a hányadosa $q = 1,0075$ és a tagok száma 36. A mértani sorozat összegképlete alapján ezek összege $S_{36} = 41,153$. Ezt és q értékét behelyettesítve az (1) egyenletbe azt kapjuk, hogy $x = 192950$. Andrásnak tehát havonta 193000 forintot kell betenni a számlájára.

b) Jelölje y a számlán Balázs által havonta elhelyezett összeget, vagyis $y = 120000$, a havi kamattényező most is $q = 1,0075$. Az n . hónap végén a megtakarítási számlán lévő összeg $yq^n + yq^{n-1} + \dots + yq$. A kérdés tehát az, hogy mi a legkisebb n , amelyre igaz a $120000 \cdot (1,0075^n + 1,0075^{n-1} + \dots + 1,0075) \geq 8 \cdot 10^6$ egyenlőtlenség. A zárójelben olyan mértani sorozat első n elemének összege van, amelynek első tagja 1, hányadosa 1,0075. Az összegképletet használva

$$1,2 \cdot 10^5 \cdot 1,0075 \cdot \frac{1,0075^n - 1}{1,0075 - 1} \geq 8 \cdot 10^6.$$

Behelyettesítés és rendezés után

$$1,0075^n \geq 80 \cdot \frac{0,0075}{1,2 \cdot 1,0075} + 1 \approx 1,4963, \quad \text{ahonnan } n \geq 53,93.$$

Így Balásznak 54 hónapra, vagyis 4,5 évre van szüksége a megtakarításhoz.

c) A Cili számára összeállítható kérdéssorok száma

$$50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 - 42 \cdot 41 \cdot 40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37 = 7664338080.$$

A Dorka számára összeállítható kérdéssorok száma

$$\binom{22}{3} \cdot \binom{28}{3} \cdot 6! = 3632428800.$$

Evelin kérésének megfelelő kérdéssorok száma $15 \cdot 14 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33 \cdot 32 = 263894400$. Tehát Cilinek állítható össze a legtöbbféleképpen kérdéssor.

2. A Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszerben megjelöltük az $A(-2;2)$, $B(1;11)$, $C(5;3)$ és $K(1;6)$ pontokat.

- Igazoljuk, hogy a K pont rajta van a BC szakasz felezőmerőlegesén. (3 pont)
- Határozzuk meg az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AC}$ vektorok skaláris szorzatának értékét. (3 pont)
- Számítsuk ki az ABC háromszög B csúcsából induló magasságának pontos hosszát. (3 pont)
- Igaz-e, hogy a BC átmérőjű kör egyenlete $x^2 + y^2 - 6x - 14y + 37 = 0$? Indokoljuk a választ. (3 pont)

Megoldás. a) A BC szakasz felezőpontjának koordinátái $F(3;7)$, egyik irányvektora $\mathbf{v}(4; -8)$, így a BC szakasz felezőmerőlegesének egyik normálvektora $\mathbf{n}(4; -8)$, az egyenes egyenlete $4x - 8y = -44$. A K pont koordinátáit behelyettesítve ebbe az egyenletbe azonossághoz jutunk, tehát a K pont valóban rajta van a felezőmerőlegesén. Egy másik megoldási lehetőség, ha kiszámítjuk a K pont B és C pontoktól való távolságát. Mindegyik 5 egységre adódik. Hivatkozva a szakasz felezőmerőlegesének azon tulajdonágára, hogy pontosan azon pontok halmaza, amelyek a szakasz két végpontjától egyenlő távolságra vannak adódik a megfogalmazott állítás igazsága. Egy harmadik lehetőség, ha felírjuk a BC és a KF vektor skaláris szorzatát, ami 0-nak adódik.

b) $\overrightarrow{AB} = (3;9)$, $\overrightarrow{AC} = (7;1)$. Skaláris szorzatuk $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3 \cdot 7 + 9 \cdot 1 = 30$.

c) Az AC oldalegyenes egyenlete felírható az $A(-2;2)$ pont és az $\overrightarrow{AC}$ vektor 90° -os elforgatásával kapott $(1; -7)$ normálvektor segítségével: $x - 7y + 16 = 0$. A pont és egyenes távolságára használható összefüggés alapján, az egyenlet 0-ra rendezett alakjába behelyettesítjük a B pont koordinátáit, így a keresett távolság pontos értéke: $m = \left| \frac{1-7 \cdot 11+16}{\sqrt{50}} \right| = 6\sqrt{2}$.

Megjegyzés. A magasság hosszát kiszámíthatjuk a háromszög területének segítségével is ($T = 30$).

d) A BC átmérőjű kör középpontjának koordinátái $(3;7)$, sugara $r = \frac{\sqrt{80}}{2}$. A kör egyenlete tehát $(x-3)^2 + (y-7)^2 = 20$, amelyre a zárójelek felbontása és rendezés után $x^2 + y^2 - 6x - 14y + 38 = 0$ adódik. Így nem a feladat szövegében megadott egyenlethez jutunk, márpedig egy körhöz egy egyenlet tartozik (és viszont).

3. a) Tekintsük az $\bar{a}$ és $\bar{b}$ egyjegyű, valamint $\bar{ba}$ kétjegyű számot. Ezek mindegyikéhez ugyanazt a pozitív valós számot adva ebben a sorrendben egy $q = 9$ hányadosú mértani sorozat egymást követő három tagját kapjuk. Számítsuk ki a már megnövelt számok 3-as alapú logaritmusainak összegét. (8 pont)

b) A $\bar{c}$ ($c \in \{0;1;\dots;9\}$) és $\bar{d}$ ($d \in \{1;2;\dots;9\}$) nem feltétlenül különböző egyjegyű, valamint a $\bar{dc}$ kétjegyű számok esetén tekintsük az alábbi A , illetve B állítást:

$$A: \bar{c} \mid \bar{dc} \quad \text{és} \quad B: \bar{d} \mid \bar{dc}.$$

Ha c és d értékét véletlenszerűen választjuk a megadott halmazokból, mekkora valószínűséggel igaz az $A \wedge B$ állítás? (5 pont)

Megoldás. a) Jelöljük x -szel azt a pozitív valós számot, amelyet az egy-, illetve kétjegyű számokhoz adunk. Ezzel az $a + x$, $b + x$ és $10b + a + x$ szám a $q = 9$ hányadosú mértani sorozat három egymást követő tagja, tehát a feladat szövege alapján a következő egyenletek írhatóak fel:

$$\begin{aligned} b + x &= 9(a + x), & \text{amiből} & \quad b = 9a + 8x, \\ 10b + a + x &= 81(a + x), & \text{amiből} & \quad 10b = 80a + 80x, \quad \text{azaz} \quad b = 8a + 8x. \end{aligned}$$

Ebből azt kapjuk, hogy $a = 0$, azaz $b = 8x$. Mivel x pozitív, b pedig számjegy, kizárólag az $x = 1$ ad jó megoldást, ekkor $b = 8$. A már megnövelt számok 3-as alapú logaritmusainak összege:

$$\log_3(0 + 1) + \log_3(8 + 1) + \log_3(10 \cdot 8 + 0 + 1) = 0 + 2 + 4 = 6.$$

b) Az eseményteret a 10 és 99 közötti 90 darab kétjegyű egész szám alkotja. Ezek között az A és B feltételek mindegyikének eleget tevő kétjegyű számok a következők: 11; 12; 15; 22; 24; 33; 36; 44; 48; 55; 66; 77; 88; 99. A klasszikus valószínűségszámítási modell alapján a keresett valószínűség: $p = \frac{14}{90}$.

4. a) A hatos számrendszerbeli legnagyobb pozitív kétjegyű számhoz hármat hozzáadtunk, majd elosztottuk a hatos számrendszerbeli legkisebb pozitív kétjegyű számnál öttel kisebb számmal. Hány számjegyű az eredmény hatos számrendszerbeli alakja? (4 pont)

b) Igazoljuk, hogy a $\sqrt{\frac{x+3}{x-5}} - 3$ kifejezés értelmezési tartományában a legkisebb egész szám a 6. (5 pont)

c) Oldjuk meg a valós számok halmazán a $\sqrt{\frac{x+3}{x-5}} - 3 = \sqrt{x-5}$ egyenletet. (5 pont)

Megoldás. a) A hatos számrendszerbeli legnagyobb pozitív kétjegyű szám az 55_6 , ennek tízes számrendszerbeli értéke 35. Ehhez 3-at adva a 38-at kapjuk. A hatos számrendszerbeli legkisebb pozitív kétjegyű szám az 10_6 , amelynek tízes számrendszerbeli értéke 6, ebből 5-öt elveszünk, így 1-et kapunk. A megadott osztás eredménye tehát 38. Ennek hatos számrendszerbeli alakja 102_6 , amely 3 számjegyű.

b) Az értelmezési tartomány megadásához oldjuk meg az $\frac{x+3}{x-5} - 3 \geq 0$ egyenlőtlenséget. Közös nevezőre hozás és rendezés után

$$\frac{-2x + 18}{x - 5} \geq 0,$$

amelynek megoldása az $]5; 9]$ intervallum. Itt a legkisebb egész szám valóban a 6.

c) Az egyenlet értelmezési tartománya az $]5; 9]$ intervallum. Négyzetre emelés után mindkét oldalhoz hozzáadunk 3-at. Beszorozva az $x - 5$ nevezővel az

$$x^2 - 8x + 7 = 0$$

másodfokú egyenletet kapjuk. Ennek két megoldása közül az 1 nem eleme az értelmezési tartománynak, a 7 jó megoldásnak adódik az ellenőrzés után.

II. rész

5. a) A kis méretű Bim-Bam cukor doboza 10 mm széles, 32 mm hosszú és 55 mm magas. A nagy méretű Bim-Bam doboz matematikai értelemben hasonló a kicsihez, de háromszor akkora térfogatú. Mekkora a nagyobb doboz méretei egész mm-re kerekítve? (4 pont)

b) A kicsi dobozba 37 cukorkát töltöttek. Ezek alakja egy egyenes henger, amelynek két végét egy-egy 7 mm átmérőjű félgömb zárja le. Mutassuk meg, hogy a doboz térfogatának több mint 70%-át töltik ki a 11 mm hosszú cukorkák. (6 pont)

c) A nagyobb méretű color mix fantázianévre keresztelt dobozban 110 darab cukorka volt, 4-féle színben. A rózsaszínű és zöld cukorkák azonos számban voltak, ami a barnák számának kétszeresénél 7-tel több, de a sárgák számának kétszeresénél 5-tel kevesebb. Hány darab sárga cukorka volt a dobozban? (6 pont)

Megoldás. a) Hasonló alakzatok térfogatának aránya a hasonlóság arányának harmadik hatványával egyezik meg. Ezért $\lambda^3 = 3$, amiből $\lambda = \sqrt[3]{3}$. A nagyobb doboz éleinek hossza mm-ben:

$$\sqrt[3]{3} \cdot 10 \approx 14,4 \approx 14, \quad \sqrt[3]{3} \cdot 32 \approx 46,15 \approx 46 \quad \text{és} \quad \sqrt[3]{3} \cdot 55 \approx 79,3 \approx 79.$$

b) A cukorkák két végén 3,5 mm sugarú félgömb található, ezek térfogata összesen egy 3,5 mm sugarú gömbével egyenlő, tehát $V_{\text{gömb}} = \frac{4 \cdot 3,5^3 \cdot \pi}{3} = 179,6 \text{ mm}^3$. A cukorkák közepe 3,5 mm sugarú és 4 mm magasságú körhenger, ennek térfogata $V_h = 3,5^2 \cdot \pi \cdot 4 \approx 153,94 \text{ mm}^3$. A 37 darab cukorka össztérfogata így

$$V_{37} = 37 \cdot (179,6 + 153,94) \text{ mm}^3 = 12340,98 \text{ mm}^3.$$

A kisebb méretű doboz térfogata $V_{\text{doboz}} = 10 \cdot 32 \cdot 55 = 17600 \text{ mm}^3$. A két térfogat aránya

$$\frac{V_{37}}{V_{\text{doboz}}} = 0,7011.$$

Így valóban a doboz több mint 70%-át töltik ki a cukorkák.

c) Használjuk a színek kezdőbetűit a darabszámok jelölésére. Ezek segítségével felírhatóak a következő egyenletek:

$$\begin{aligned} r &= z, \\ z &= 2b + 7 = 2s - 5, \\ r + z + b + s &= 110. \end{aligned}$$

A második egyenletből fejezzük ki b -t és s -et z segítségével, majd helyettesítsük be ezeket a harmadik egyenletbe. Ennek megoldásával $z = r = 37$, $b = 15$ és $s = 21$ adódik. A dobozban 21 darab sárga cukorka volt.

6. a) Egy $PQRS$ négyszögben a PQ oldal 5, a QR oldal 7, az RS oldal 10 egység hosszú. A Q csúcsnál lévő belső szög 115° , ezzel szemben pedig 50° -os szög található. Számítsuk ki a négyszög SP oldalának hosszát. (4 pont)

b) Egy $ABCD$ húrnégyszög A csúcsánál lévő α szögére teljesül, hogy

$$2\sin^2\alpha + 2\cos\alpha - 1 = 0.$$

Határozzuk meg a húrnégyszög C csúcsánál lévő szögének szinusztát. (6 pont)

c) Legyen β és δ az $ABCD$ húrnégyszög két szemközti szöge. Milyen β és δ esetén veszi fel a

$$\sin(\beta - 60^\circ) - \cos(\delta + 150^\circ)$$

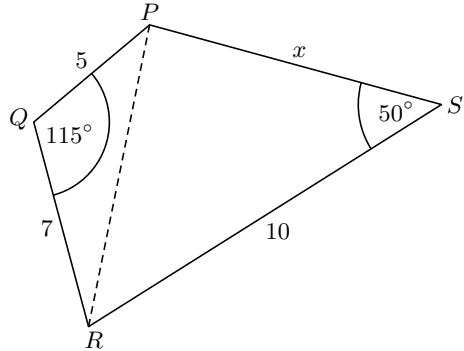
kifejezés a maximumát, és mekkora ez a maximum? (6 pont)

Megoldás. a) Az ábra szerint a $PQRS$ négyszögben behúzzuk a PR átlót.

A PQR háromszögben alkalmazzuk a koszinusztételt:

$$PR^2 = 5^2 + 7^2 - 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \cos 115^\circ,$$

ahonnan $PR \approx 10,18$ egység. Az RSP háromszögben a PS oldal hosszát x -szel jelölve, újabb koszinusztételt használhatunk: $10,18^2 = x^2 + 10^2 - 2 \cdot x \cdot 10 \cdot \cos 50^\circ$. A másodfokú egyenlet pozitív gyöke adja a hiányzó negyedik oldal hosszát: $x \approx 13,13$.



b) A $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$ helyettesítéssel kapott másodfokú egyenlet megoldásával $\cos\alpha_1 = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} > 1$. Ez semmilyen szögnek sem koszinusza. A másik gyök alapján $\cos\alpha_2 = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$. Ezt használva $\sin^2\alpha = 1 - \left(\frac{1 - \sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$. A húrnégyszög szögeinek szinusza pozitív értéket vehet fel, ezért $\sin\alpha = \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}$. A húrnégyszög szemközti szögeinek összege 180° , ezért $\sin\gamma = \sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha = \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}$.

c) A húrnégyszög szemközti szögeinek összege 180° , ezért $\sin\delta = \sin(180^\circ - \beta)$. Behelyettesítve: $\sin(\beta - 60^\circ) - \cos(180^\circ - \beta + 150^\circ) = \sin(\beta - 60^\circ) - \cos(330^\circ - \beta)$. Használjuk az addíciós tételeket és a nevezetes szögek szögfüggvényeinek pontos értékét:

$$\begin{aligned} & \sin\beta \cdot \cos 60^\circ - \cos\beta \cdot \sin 60^\circ - (\cos 330^\circ \cdot \cos\beta + \sin 330^\circ \cdot \sin\beta) = \\ &= \frac{1}{2} \sin\beta - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos\beta - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos\beta + \frac{1}{2} \sin\beta = 2 \left(\frac{1}{2} \sin\beta - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos\beta \right) = 2 \sin(\beta - 60^\circ). \end{aligned}$$

A kifejezés akkor veszi fel a maximumát, ha $\beta - 60^\circ = 90^\circ$, így a maximumhely $\beta = 150^\circ$. Ekkor a kifejezés maximális értéke 2.

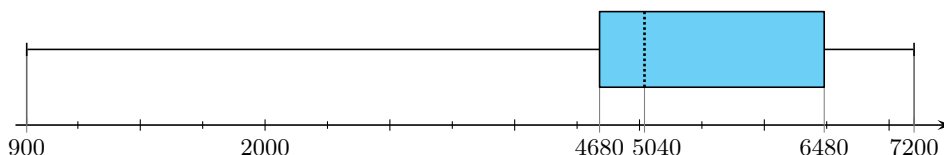
7. a) Egy hegyi kabinos felvonó 9.00 órától kezdődően negyed óránként mindig pontosan indul. A kabinba egyszerre 20 fő tud szállni. A felvonó pénztára 8.30-kor nyit, és minden nap 001-től kezdődően folyamatosan sorszámozott jegyeket adnak ki minden egyes utas részére. A következő táblázat az első két órában, az adott időintervallumban eladott jegyek darabszámát mutatja:

Időintervallum	Eladott jegyek darabszáma
8.30 – 8.59	27
9.00 – 9.14	19
9.15 – 9.29	5
9.30 – 9.44	32
9.45 – 9.59	15
10.00 – 10.14	16
10.15 – 10.29	10

Zsófi a 113-as sorszámu jegyet kapta. Hány órákor induló kabinba tud Zsófi szállni, ha a beszállás a jegyek sorszáma alapján folyamatosan történik? (2 pont)

b) Tekintsük azoknak a kirándulónak a számát 9.00 és 10.29 között, akik helyhiány miatt nem fértek be a felvonó kabinba, és a következőre kellett várniuk. Adjuk meg ezeknek az értékeknek az átlagát, mediánját és szórását. (4 pont)

c) A nyári 91 napos főszezonban a pénztár napi bevételeit vizsgálták euróban. Az adatok alapján sodrófadiagramot készítettek.



A diagram alapján számítsuk ki, hogy mekkora lehet a nyári főszezonra számított összbevétel minimális, illetve maximális értéke? (4 pont)

d) A felvonóra várakozók ajándéktárgyak közül válogathatnak a pénztár melletti trafikban. Az eladó leltárt készített az ajándéktárgyakról:

Ajándéktárgy	Eladott termékek száma	Készlet darabszáma
Bakancsos kulcstartó	400	18
Hűtőmágnés	225	10
Plüss mormota	1625	8
Bögre	250	5

Az eladás alapján számított relatív gyakoriságokat figyelembe véve mekkora a valószínűsége, hogy a leltár elkészítése utáni tizedik vásárló már csak háromféle ajándéktárgy közül választhat, ha mindenki pontosan egy ajándékot vásárol? (6 pont)

Megoldás. a)

Indulás időpontja	Beszálló utas (fő)	Jegyek sorszáma	Várakozó utas (fő)
9.00	20	1.–20.	7
9.15	$7 + 13 = 20$	21.–40.	6
9.30	$6 + 5 = 11$	41.–51.	0
9.45	20	52.–71.	12
10.00	$12 + 8 = 20$	72.–91.	7
10.15	$7 + 13 = 20$	92.–111.	3
10.30	$3 + 10 = 13$	112.–124.	

Tehát Zsófi a 10.30-kor induló kabinba tud szállni.

b) A várakozók számát a fenti táblázat negyedik oszlopa mutatja, ami alapján az átlag $\frac{35}{6}$, a medián 6,5, a szórás pedig $\frac{\sqrt{497}}{6} = 3,72$.

c) A box-plot diagram alapján a növekvő sorba rendezett adatokra:

A minimum, az első adat: $Q_0 = 900$.

Az alsó kvartilis, a 23. adat: $Q_1 = 4680$.

A medián, a 46. adat: $Q_2 = 5040$.

A felső kvartilis, a 69. adat: $Q_3 = 6480$.

A maximum, a 91. adat: $Q_4 = 7200$.

A minimális összbevétel $22 \cdot 900 + 23 \cdot 4680 + 23 \cdot 5040 + 22 \cdot 6480 + 7200 = 393120$.

A maximális összbevétel $900 + 22 \cdot 4680 + 23 \cdot 5040 + 23 \cdot 6480 + 22 \cdot 7200 = 527220$.

d) Az eladás alapján számított relatív gyakoriságok értéke a kulcstartó esetén 0,16, a hűtőmágnese 0,09, a mormotára 0,65 és a bögrére 0,1. A tizedik vásárló két esetben választhat már csak háromféle tárgy közül:

– Az első 9 vásárló közül 8-an vesznek mormotát, egy pedig valami mást. Ennek valószínűsége $p_1 = \binom{9}{8} \cdot 0,65^8 \cdot (1 - 0,65) = 0,1004$.

– Az első 9 vásárló közül 5-en vesznek bögrét, 4-en pedig valami mást. Ennek valószínűsége $p_2 = \binom{9}{5} \cdot 0,1^5 \cdot (1 - 0,1)^4 = 8,3 \cdot 10^{-4}$.

A két valószínűség összege $p_1 + p_2 = 0,1012$ adja a választ.

8. a) Adjuk meg annak az eltolásnak a vektorát, amely az $f(x) = x^2$ függvény grafikonját a $g(x) = x^2 - 10x + 21$ függvény grafikonjába viszi át, ha $D_f = D_g = \mathbb{R}$. (3 pont)

b) Ábrázoljuk a $g: [5; \infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 - 10x + 21$ függvényt. (2 pont)

c) Igazoljuk, hogy a

$g: [5; \infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 - 10x + 21$ és a $h: [-4; \infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x+4} + 5$

függvények esetén $g(h(x)) = h(g(x)) = x$. (5 pont)

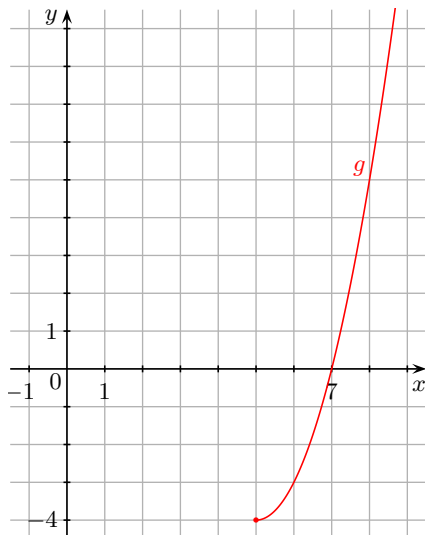
d) Határozzuk meg az $[5; 8]$ intervallumon a $g(x)$ függvény grafikonja és az x -tengely, valamint az $x = 5$ és az $x = 8$ egyenletű egyenesek által határolt zárt síkidom területének pontos értékét. (6 pont)

Megoldás. a) Végezzük el a teljes négyzetté alakítást:

$$g(x) = x^2 - 10x + 21 = (x - 5)^2 - 4,$$

ezért a keresett eltolás vektora a $\mathbf{v}(5; -4)$.

b) Figyeljünk a parabola értelmezési tartományának leszűkítésére.



c) Mivel $g(x) \geq -4$ és $h(x) \geq 5$, így a megadott értelmezési tartományokon értelmes a $g(h(x))$ és a $h(g(x))$ is. Behelyettesítünk a megadott összetett függvényekbe:

$$\begin{aligned} g(h(x)) &= (\sqrt{x+4}+5)^2 - 10(\sqrt{x+4}+5) + 21 = \\ &= x+4+10\sqrt{x+4}+25-10\sqrt{x+4}-50+21 = x, \end{aligned}$$

illetve

$$h(g(x)) = \sqrt{x^2 - 10x + 21 + 4 + 5} = |x - 5| + 5 = x - 5 + 5 = x,$$

mivel $x \geq 5$. Másik megoldásként meghatározhatjuk a $g(x)$ függvény inverzét, amelyre éppen $h(x)$ adódik.

d) A $g(x)$ függvénynek a megadott intervallumon zérushelye van az $x=7$ helyen, amely előtt a függvény az x -tengely alatt, utána pedig az x -tengely felett helyezkedik el. A terület meghatározásához két integrálást kell elvégezni:

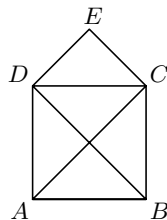
$$T_1 = \left| \int_5^7 (x^2 - 10x + 21) dx \right| = \left| \left[\frac{x^3}{3} - 10\frac{x^2}{2} + 21x \right]_5^7 \right| = \left| \frac{49}{3} - \frac{65}{3} \right| = \frac{16}{3},$$

$$T_2 = \int_7^8 (x^2 - 10x + 21) dx = \left[\frac{x^3}{3} - 10\frac{x^2}{2} + 21x \right]_7^8 = \frac{56}{3} - \frac{49}{3} = \frac{7}{3}.$$

A keresett terület $T = T_1 + T_2 = \frac{23}{3}$.

9. a) Igazoljuk, hogy bármely pozitív egész n érték esetén az $5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1$ kifejezés utolsó három számjegyéből alkotott szám osztható 8-cal. (6 pont)

b) Megrajzoltuk az A, B, C, D, E csúcsokból álló egyszerű G gráfot.



Egészítsük ki az alábbi mondatokat, úgy, hogy azok igazak legyenek.

A fagráf olyan összefüggő egyszerű gráf, amelyben nincs

A G gráf egy Euler-vonala rendre $a(z)$ csúcsokon halad át.

Egy gráfban Hamilton-körnek nevezünk egy kört, ha a gráf minden pontosan egyszer tartalmazza.

A G gráf egy Hamilton-köre rendre $a(z)$ csúcsokon halad át.

(4 pont)

c) Adott az $a_n = \binom{2n+1}{3}$ és a $b_n = \binom{n}{3}$ sorozat, ahol $n > 2$ egész szám. Határozzuk meg az $\frac{a_n}{b_n}$ sorozat határértékét. (6 pont)

Megoldás. a) A kifejezés utolsó három számjegyéből alkotott szám pontosan akkor osztható 8-cal, ha maga a kifejezés osztható 8-cal. A bizonyítást teljes indukcióval végezhetjük. Először $n = 1$ esetén kiszámítjuk a kifejezés helyettesítési értékét: $5^1 + 2 \cdot 3^{1-1} + 1 = 8$, ez valóban osztható 8-cal. (Ellenőrizhetjük $n = 2$ -re is: $5^2 + 2 \cdot 3^{2-1} + 1 = 32$). Tegyük fel, hogy $n = k$ -ra teljesül az oszthatóság, ezt felhasználva igazoljuk $n = k + 1$ -re:

$$5^{k+1} + 2 \cdot 3^{k+1-1} + 1 = 5 \cdot 5^k + 6 \cdot 3^{k-1} + 1 = 5(5^k + 2 \cdot 3^{k-1} + 1) - 4(3^{k-1} + 1).$$

Az első tag az indukciós feltétel miatt osztható 8-cal, a második tag második tényezője biztosan páros, ennek négyszerese pedig osztható 8-cal. Tehát az összeg is osztható 8-cal. A bizonyítást befejeztük.

b) A hiányzó szavak rendre: *kör*; $ABCED$ vagy $BCEDA$ vagy $CEDAB$ stb.; *pontját* vagy *csúcsát*; $ABCEDA$ vagy $ABDECA$ vagy $CEDABC$ vagy $CBADEC$ stb.

c) $\frac{a_n}{b_n} = \frac{(2n+1)2n(2n-1)}{3!} : \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} = \frac{8n^2-2}{n^2-3n+2}$. Ennek határértéke

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n^2-2}{n^2-3n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8 - \frac{2}{n^2}}{1 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}} = 8.$$

Jócsik Csilla
Győr



63. Rátz László Vándorgyűlés

A középiskolai tanárversenye feladatainak végeredménye és vázlatos megoldása

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.
A	A	D	D	C	E	E	C	D	B	E	B	E	D	C
16.	17.	18.	19.	20.	21.	22.	23.	24.	25.	26.	27.	28.	29.	30.
B	B	B	A	C	A	D	A	C	E	C	D	A	B	D

1. (A) $\bigcirc > \bigcirc > \bigcirc > \textcircled{3} < \bigcirc < \bigcirc$

A maradék 5 számból 2-t írunk jobbra, a többi balra a megfelelő sorrendben:
 $\binom{5}{2} = 10$.

2. (A) $1 * (2 * 3) - (1 * 2) * 3 = 1 * 1 - 1 * 3 = 0 - 2 = -2$

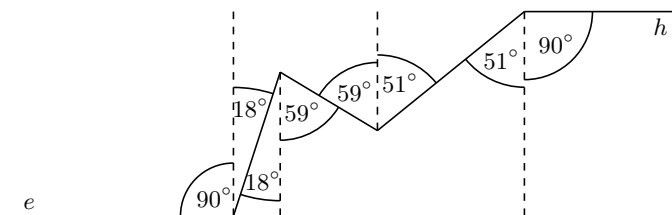
3. (D) $n < 4 < 7 < 10 < 11$ vagy $4 < n < 7 < 10 < 11 \Rightarrow \frac{32+n}{5} = 7 \Rightarrow n = 3$

$4 < 7 < n < 10 < 11 \Rightarrow \frac{32+n}{5} = n \Rightarrow n = 8$

$4 < 7 < 10 < n < 11$ vagy $4 < 7 < 10 < 11 < n \Rightarrow \frac{32+n}{5} = 10 \Rightarrow n = 18 \Rightarrow 3 + 8 + 18 = 29$

4. (C) $512^{10} = (2^9)^{10} = 2^{90} = 2 \cdot 2^{89} = 2^{89} + 2^{89} \Rightarrow x = 89 \Rightarrow 8 + 9 = 17$

5. (C) $\alpha = 90^\circ + 51^\circ = 141^\circ$



6. (E) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{y-x} \Rightarrow \frac{y+x}{xy} = \frac{1}{y-x} \Rightarrow (y+x)(y-x) = xy \Rightarrow 0 = x^2 + xy - y^2$
 $\Rightarrow 0 = \left(\frac{x}{y}\right)^2 + \frac{x}{y} - 1 \Rightarrow \left(\frac{x}{y}\right)_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \in \mathbb{Q}^*$

7. (E) $n = \overline{ab} = 10a + b \Rightarrow ab + a + b = 10a + b \Rightarrow ab - 9a = a(b - 9) = 0$ és $a \neq 0$
 $\Rightarrow b = 9$

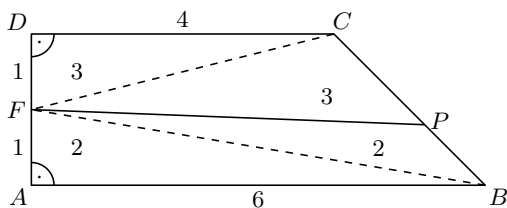
$$8. (C) \cos^2 x - \cos x + 5 = \left(\cos x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{19}{4}$$

$$\begin{aligned} -1 \leq \cos x \leq 1 &\Rightarrow -\frac{3}{2} \leq \cos x - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \leq \left(\cos x - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{9}{4} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{19}{4} \leq \left(\cos x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{19}{4} \leq \frac{28}{4} = 7 \end{aligned}$$

$$9. (D) \text{ Legyen } A(a; \log_2 a) \text{ és } B(b; \log_2 b). \frac{a+b}{2} = 6 \Rightarrow a+b = 12$$

$$\log_2 a + \log_2 b = 2 \Rightarrow ab = 16 \Rightarrow (a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab = 12^2 - 4 \cdot 16 = 80 \Rightarrow \\ \Rightarrow |a-b| = 4\sqrt{5}$$

$$10. (B) \frac{PC}{PB} = \frac{T_{PCF}}{T_{PBF}} = \frac{3}{2}$$



$$11. (E) 4(a+b+c) = 13 \text{ és } 2(ab+bc+ac) = \frac{11}{2} \text{ és } abc = \frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) = \left(\frac{13}{4}\right)^2 - \frac{11}{2} = \frac{169-88}{16} = \frac{81}{16} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{9}{4} \end{aligned}$$

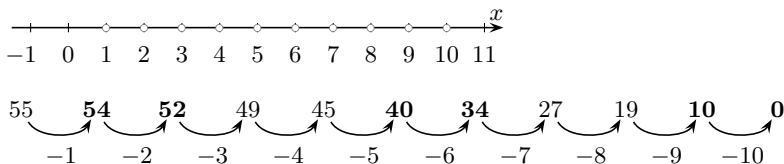
12. (B)

11, 22, ..., 99 9 db $\Rightarrow \frac{9}{100}$ valószínűséggel választunk közülük.

$k \cdot 11$ osztói párba állíthatók, minden párból pontosan az egyik osztható 11-gyel, ez az osztók fele $\Rightarrow P = \frac{9}{100} \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{200}$.

$$13. (E) z = 3x \text{ és } z - 3 + 5 = 4(s + 3 - 5) \Rightarrow 3s + 2 = 4(s - 2) \Rightarrow s = 10 \text{ és } z = 30 \\ \Rightarrow 30 + 2 - (10 - 2) = 24.$$

14. (D) Összesen $1 + 2 + \dots + 10 = 55$ db szorzótényező, ezek közül negatív:



6 db intervallum esetén páros a negatív szorzótényezők száma, vagyis a szorzat pozitív.

15. (C) $R^2 = r^2 + 8^2 \Rightarrow R^2 - r^2 = 64$

$$T = \frac{R^2\pi}{2} - \frac{r^2\pi}{2} = \frac{\pi}{2}(R^2 - r^2) = \frac{\pi}{2} \cdot 64 = 32\pi$$

16. (B) $(b-a)^2 - 4(b-c)(c-a) = 0 \quad / : (c-a)^2$,
ahol $c-a \neq 0$.

$$\left(\frac{b-a}{c-a}\right)^2 - 4\frac{b-c}{c-a} = 0 \quad \left(\frac{b-c}{c-a} + \frac{c-a}{c-a}\right)^2 - 4\frac{b-c}{c-a} = 0.$$

$$\frac{b-c}{c-a} = x \Rightarrow (x+1)^2 - 4x = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 0 \Rightarrow \frac{b-c}{c-a} = a = 1$$

17. (B) A mérkőzések száma: x , a jobbkezes győzelmek száma: j .

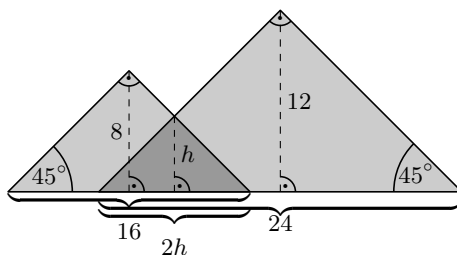
$$x - j = 1,4j, \text{ vagyis } x = 2,4j = \frac{12j}{5} \Rightarrow 12 \mid x \Rightarrow x = 36 \text{ vagy } x = 48.$$

$$x = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{3k(3k-1)}{2} \Rightarrow 3k(3k-1) = 2 \cdot 36 = 9 \cdot 8,$$

$$3k(3k-1) \neq 2 \cdot 48 \Rightarrow x = 36$$

18. (B) $\frac{16 \cdot 8}{2} + \frac{24 \cdot 12}{2} - \frac{2h \cdot h}{2} = 183$

$$h^2 = 64 + 144 - 183 = 25 \Rightarrow h = 5$$



19. (A) Bármely csúcsra:

összes eset: $\binom{5}{2} = 10$ ; kedvező esetek: 3 ; $P = \frac{3}{10}$.

20. (C) $b + c + d = 3c = n^2 \Rightarrow c = 3k^2$

$$a + b + c + d + e = 5c = 15k^2 = m^3 \Rightarrow k_{\min}^2 = 225 \Rightarrow c_{\min} = 675 \Rightarrow e_{\min} = 677 \text{ első számjegye: } 6.$$

21. (A) $\frac{a}{2b} = \frac{2b}{3c} = \frac{3c}{8a} = x \Rightarrow \frac{a}{2b} \cdot \frac{2b}{3c} \cdot \frac{3c}{8a} = \frac{1}{8} = x^3 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

$$\text{Tehát } b = a \text{ és } c = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{3}a = \frac{4}{3}a, \quad \frac{ac+bc}{bc-ab} = \frac{\frac{4}{3}a^2 + \frac{4}{3}a^2}{\frac{4}{3}a^2 - a^2} = \frac{\frac{8}{3}a^2}{\frac{1}{3}a^2} = 8.$$

22. (D) $ADQ\triangle \cong DCP\triangle$

$$x^2 = 14^2 + 46^2 = 4(7^2 + 23^2) = 4(49 + 529) = 4 \cdot 578 = 4 \cdot 289 \cdot 2$$

$$x = 2 \cdot 17 \cdot \sqrt{2}$$

A keresett távolság a négyzet átlójának a

$$\text{fele: } \frac{x\sqrt{2}}{2} = \frac{2 \cdot 17 \cdot 2}{2} = 34.$$

23. (A) Az 1. sor i . eleme $2i - 1$.

$$\text{Az } i. \text{ sor } n. \text{ eleme } 2i - 1 + (n - 1)(i + 1) = 2025 \Rightarrow 2i + 2 + (n - 1)(i + 1) = 2028 \Rightarrow 2 +$$

$$+ n - 1 = \frac{2028}{i + 1} \Rightarrow n = \frac{2028}{i + 1} - 1$$

$$2028 = 2 \cdot 3 \cdot 13^2 \Rightarrow d(2028) = (2 + 1)(1 + 1)(2 + 1) = 18$$

$$i + 1 = 1 \Rightarrow i = 0 \text{ nem megoldás.}$$

$$y + 1 = 2028 \Rightarrow n = 0 \text{ nem megoldás} \Rightarrow 16\text{-szor fordul elő a } 2025.$$

24. (C) A pótdíjmentes tömeg: x kg, a pótdíj p dollár/kg.

$$(77 - 2x) \cdot p = 14 + 20 \text{ és } (77 - x) \cdot p = 94$$

$$\frac{77 - 2x}{77 - x} = \frac{34}{94} \Rightarrow 47(77 - 2x) = 17(77 - x) \Rightarrow (47 - 17) \cdot 77 = (94 - 17)x \Rightarrow x = 30$$

$$\textbf{25. (E)} \quad \frac{3^2 \pi x}{3} = \frac{6^2 \pi y}{3} \Rightarrow x = 4y$$

$$\frac{x_1}{x} = \frac{y_1}{y} = \sqrt[3]{\frac{V+1}{V}} = \lambda \Rightarrow x_1 - x = \lambda x - x = x(\lambda - 1),$$

$$\text{hasonlóan, } y_1 - y = \lambda y - y = y(\lambda - 1); \frac{x_1 - x}{y_1 - y} = \frac{x(\lambda - 1)}{y(\lambda - 1)} = \frac{x}{y} = 4.$$

26. (C)

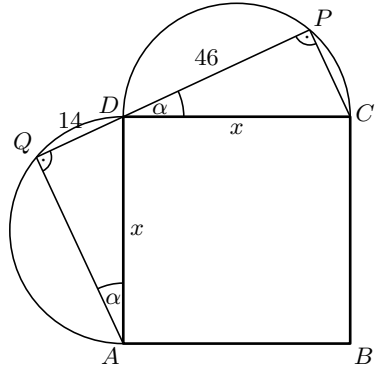
$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{29} \right) + \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{4} + \dots + \frac{2}{29} \right) + \dots + \left(\frac{27}{28} + \frac{27}{29} \right) + \frac{28}{29} = \\ &= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{28} + \frac{2}{28} + \dots + \frac{27}{28} \right) + \left(\frac{1}{29} + \frac{2}{29} + \dots + \frac{28}{29} \right) = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1+2}{3} + \frac{1+2+3}{4} + \dots + \frac{1+2+\dots+27}{28} + \frac{1+2+\dots+28}{29} = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2 \cdot 3}{2 \cdot 3} + \frac{3 \cdot 4}{2 \cdot 4} + \dots + \frac{27 \cdot 28}{2 \cdot 28} = \frac{1+2+\dots+28}{2} = \frac{28 \cdot 29}{2 \cdot 2} = 7 \cdot 29 = 203 \end{aligned}$$

27. (D) Legyen $[x] = e$ és $\{x\} = t \Rightarrow e^2 - 3(e + t) + 2 = 0 \Rightarrow e^2 - 3e + 2 = 3t$.

$$e^3 - 3e + 2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow 3t \in \mathbb{Z} \text{ és } 0 \leq t < 1.$$

$$t = 0 \Rightarrow e^2 - 3e + 2 = 0 \Rightarrow e_1 = 1 \text{ és } e_2 = 2 \Rightarrow x_1 = 1 \text{ és } x_2 = 2.$$

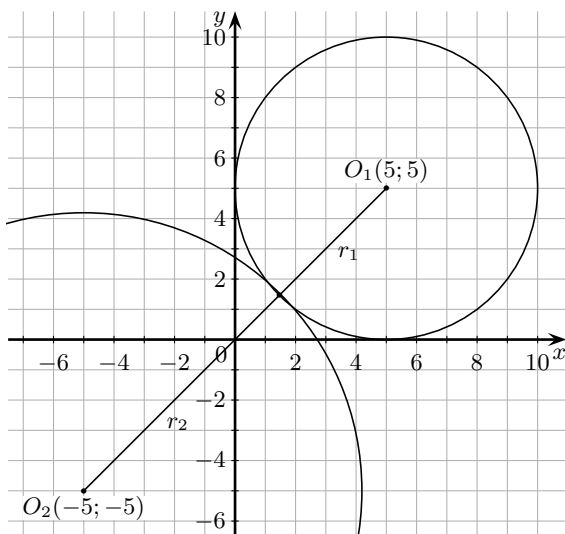
$$t = \frac{1}{3} \Rightarrow e^2 - 3e + 1 = 0 \Rightarrow e \text{ nem egész szám.}$$



$$t = \frac{2}{3} \Rightarrow e^2 - 3e = 0 \Rightarrow e_3 = 0 \text{ és } e_4 = 3 \Rightarrow x_3 = \frac{2}{3} \text{ és } x_4 = \frac{11}{3} \Rightarrow 4 \text{ megoldás van.}$$

$$28. (A) r_1 + r_2 = 10\sqrt{2} \Rightarrow r_2 = 10\sqrt{2} - 5$$

$$(x+5)^2 + (y+5)^2 = (10\sqrt{2} - 5)^2 = 225 - 100\sqrt{2}$$



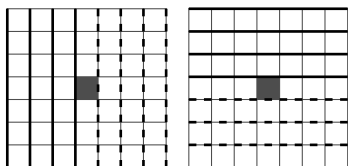
$$29. (B) \frac{1}{x^2 + 5x + 6} + \frac{1}{x^2 + 7x + 12} + \frac{1}{x^2 + 9x + 20} = \frac{1}{270}$$

$$\frac{(x+3) - (x+2)}{(x+2)(x+3)} + \frac{(x+4) - (x+3)}{(x+3)(x+4)} + \frac{(x+5) - (x+4)}{(x+4)(x+5)} = \frac{1}{270}$$

$$\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+4} + \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+5} = \frac{1}{270}$$

$$\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+5} = \frac{1}{270} \Rightarrow 270(x+5) - 270(x+2) = (x+2)(x+5) \Rightarrow x^2 + 7x - 800 = 0$$

A kapott másodfokú egyenletnek két valós gyöke van ($D > 0$), az összegük -7 .

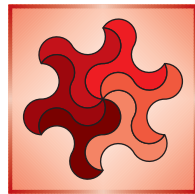


30. (D) A sötét négyzetet tartalmazó téglalapok függőleges oldalai $4 \cdot 4 = 16$ -féleképpen választhatók, vízszintes oldalai szintén $4 \cdot 4 = 16$ -féleképpen, összesen $16 \cdot 16 = 256$ téglalap.

Ezek közül a páratlan egységnégyzetet tartalmazók száma: $(4 \cdot 2) \cdot (4 \cdot 2) = 64 \Rightarrow 256 - 64 = 192$.

A verseny feladatait összeállították: **Fonyóné Németh Ildikó** és **Fonyó Lajos**, Keszthely.

Matematika gyakorlatok megoldása



B. 5400. Egy 3×3 -as bűvös négyzetben az egyik számot 1-gyel megnöveltük. Legalább hány számot kell még megváltoztatnunk ahhoz, hogy ismét bűvös négyzetet kapjunk? (A 3×3 -as bűvös négyzet olyan 3×3 -as számtáblázat, amelynek minden sorában, oszlopában és átlójában szereplő három-három szám összege ugyanannyi.)

Javasolta: Juhász Máté

Megoldás. Vegyük észre, hogy ha az új bűvös négyzetből kivonjuk az eredetit (az egyes helyeken álló számokból a másik ugyanazon helyén álló számait), akkor ismét bűvös négyzetet kapunk. Ennek az az oka, hogy a soronkénti/oszloponkénti/átlónkénti összegekből mindig ugyanannyit vonunk ki (éppen annyit, amennyi az eredeti bűvös összeg), így a sorokban, oszlopokban, átlókban szereplő számok összege ugyanannyival változik, végső soron ugyanazt az eredményt adja.

Alább belátjuk, hogy egy 3×3 -as bűvös négyzetet tetszőlegesen megválasztott négy száma egyértelműen meghatározza; továbbá ha a bűvös négyzetben szerepel négy 0, akkor minden szám 0.

Ez azt jelenti, hogy a megváltoztató (különbség) bűvös négyzetben (amelyben szerepel legalább egy 1-es) legfeljebb három 0 állhat, vagyis legalább még öt számnak meg kell változnia. Ennyi elegendő is, mert bárhol is helyezkedik el az 1-es, ki tudjuk tölteni a bűvös négyzetet úgy, hogy legyen benne három 0. Például ha a különbség bűvös négyzetben az (egyik) 1-es rendre egy csúcsnál, egy élközépnél, illetve a középső négyzetben van:

1	0	-1
-2	0	2
1	0	-1

0	1	-1
-1	0	1
1	-1	0

0	2	1
2	1	0
1	0	2

Megmutatjuk, hogy a bűvös négyzet bármely négy száma egyértelműen meghatározza a többi.

Jelölje a bűvös összeget B , valamint a bűvös négyzetbe írt számokat az ábra szerint $a, b, c, d, e, f, g, h, i$. A bűvös négyzet mezőit középső (e), csúcsnál (a, c, g, i) és élnél vagy oldalnál (b, d, f, h) lévőként fogjuk említeni, a középső mezőre középpontosan szimmetrikus helyzetben lévőket pedig átlellenesnek fogjuk hívni. Mivel

a	b	c
d	e	f
g	h	i

$$\begin{aligned} 3B &= (a + e + i) + (b + e + h) + (c + e + g) = \\ &= (a + b + c) + (g + h + i) + 3e = 2B + 3e, \quad \text{azért} \quad B = 3e. \end{aligned}$$

Eszerint a továbbiakban B helyett írhatunk $3e$ -t.

Ebből az is következik, hogy az átellenes számok összege $2e$, ezért ezek e -vel együtt számtani sorozatot alkotnak: $a, e, i; b, e, h; c, e, g$ és d, e, f .

Legyen tehát adva a bővös négyzetben valamelyik négy szám.

Ha a négy szám között ott van az e , akkor a többi három (páratlan sok) szám között van olyan, amelynek az átellenes párja nincs megadva, de meghatározott. Így egy ötödik szám is megvan.

Ha e ugyan nincs megadva, de adott két átellenes szám (amelyek összege $2e$) vagy három szám egy sorban vagy oszlopban (amelyek összege $3e$), akkor abból megkaphatjuk ötödik számként az e -t.

Ha ezen esetek egyike sem áll fenn, akkor e nincs megadva, és a négy átellenes számpár mindegyikéből egy-egy van megadva, összesen két szomszédos csúcsnál lévő, például a és c , de a köztük lévő b nem, így annak átellenes párja, h is adott. Ekkor $a + b + c = b + e + h$ alapján $e = a + c - h$.

Vagyis négy adott szám esetében meg tudunk határozni legalább még egyet, és az öt szám egyike e .

Tegyük föl tehát, hogy meg van adva öt szám, köztük e , így ismert $B = 3e$ is.

Ha egy oldal mentén ismert két szám, pl. a vagy b , illetve a vagy c , akkor egyértelműen meghatározott a harmadik is, amely ezek összegét $3e$ -re egészíti ki, innen ugyancsak egyértelműen meghatározott a velük szemköztes g, h, i is, végül $d = 3e - a - g$ és $f = 3e - c - i$ is.

Ha nincs két szám megadva egy-egy oldal mentén, akkor csak b, d, e, f, h lehet adva. Mivel $(a + c + b = b + e + h)$ alapján $a + c = e + h$, illetve $a + g = e + f$, ahonnan $2a + g + c = 2e + f + h$; tekintetbe véve, hogy $g + c = 2e$, így

$$2a = f + h. \quad (1)$$

Hasonlóan, $2g = f + b$, és $i = 2e - a$, illetve $c = 2e - g$.

Vagyis egy bővös négyzet négy száma egyértelműen meghatározza a többi.

Mivel a fenti számítás alapján minden további szám (vagy annak egy többszöröse) a már meglévők számszorosai összege és különbsége eredményeként adódik –, négy 0-ból kiindulva a csupa nulla bővös négyzetet kapjuk.

113 dolgozat érkezett. 4 pontot kapott 29 versenyző. 3 pontos 6, 2 pontos 18, 1 pontos 17, 0 pontos 32 dolgozat.

Megjegyzés a B. 5400. feladathoz

a	b	c
d	e	f
g	h	i

Használjuk a megoldásban bevezetett jelölést. Megmutattuk, hogy ha egy (3×3) -as bővös négyzetben ismert négy szám, akkor a bővös négyzet egyértelműen meghatározott. Az is világos azonban, hogy egyes esetekben már három számot is elegendő megadni. Ha például adott a felső sor három száma (a, b és c), akkor ezek átlaga e , és mivel ekkor négy számot ismerünk, adódik az egyértelmű kitöltés.

Felmerül a kérdés, hogy *melyek azok a számhármaskok, amelyek ismeretében egyértelműen befejezhető a bűvös négyzet kitöltése.*

A lehetséges esetek összegyűjtésében segít, ha tudjuk, hogy szimmetriáktól eltekintve hányféleképpen választhatunk ki három mezőt. Éppen erről szólt a KöMaL 2024. évi 3. számában kitűzött K./C. 807. feladat: *Hányféleképpen színezhettünk ki egy 3×3 -as rózsaszín táblán három mezőt zöldre, ha azokat a színezéseket nem tekintjük különbözőnek, amelyek tükrözéssel vagy elforgatással egymásba vihetők?* Erre a kérdésre a válasz 16. A szimmetriáktól most is eltekintünk, így az alábbi eseteket kell megvizsgálni (a megadott számokat pirossal jelöltük):

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.																																																																								
<table><tr><td>a</td><td>b</td><td>c</td></tr><tr><td>d</td><td>e</td><td>f</td></tr><tr><td>g</td><td>h</td><td>i</td></tr></table>	a	b	c	d	e	f	g	h	i	<table><tr><td>a</td><td>b</td><td>c</td></tr><tr><td>d</td><td>e</td><td>f</td></tr><tr><td>g</td><td>h</td><td>i</td></tr></table>	a	b	c	d	e	f	g	h	i	<table><tr><td>a</td><td>b</td><td>c</td></tr><tr><td>d</td><td>e</td><td>f</td></tr><tr><td>g</td><td>h</td><td>i</td></tr></table>	a	b	c	d	e	f	g	h	i	<table><tr><td>a</td><td>b</td><td>c</td></tr><tr><td>d</td><td>e</td><td>f</td></tr><tr><td>g</td><td>h</td><td>i</td></tr></table>	a	b	c	d	e	f	g	h	i	<table><tr><td>a</td><td>b</td><td>c</td></tr><tr><td>d</td><td>e</td><td>f</td></tr><tr><td>g</td><td>h</td><td>i</td></tr></table>	a	b	c	d	e	f	g	h	i	<table><tr><td>a</td><td>b</td><td>c</td></tr><tr><td>d</td><td>e</td><td>f</td></tr><tr><td>g</td><td>h</td><td>i</td></tr></table>	a	b	c	d	e	f	g	h	i	<table><tr><td>a</td><td>b</td><td>c</td></tr><tr><td>d</td><td>e</td><td>f</td></tr><tr><td>g</td><td>h</td><td>i</td></tr></table>	a	b	c	d	e	f	g	h	i	<table><tr><td>a</td><td>b</td><td>c</td></tr><tr><td>d</td><td>e</td><td>f</td></tr><tr><td>g</td><td>h</td><td>i</td></tr></table>	a	b	c	d	e	f	g	h	i
a	b	c																																																																													
d	e	f																																																																													
g	h	i																																																																													
a	b	c																																																																													
d	e	f																																																																													
g	h	i																																																																													
a	b	c																																																																													
d	e	f																																																																													
g	h	i																																																																													
a	b	c																																																																													
d	e	f																																																																													
g	h	i																																																																													
a	b	c																																																																													
d	e	f																																																																													
g	h	i																																																																													
a	b	c																																																																													
d	e	f																																																																													
g	h	i																																																																													
a	b	c																																																																													
d	e	f																																																																													
g	h	i																																																																													
a	b	c																																																																													
d	e	f																																																																													
g	h	i																																																																													
9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.																																																																								
<table><tr><td>a</td><td>b</td><td>c</td></tr><tr><td>d</td><td>e</td><td>f</td></tr><tr><td>g</td><td>h</td><td>i</td></tr></table>	a	b	c	d	e	f	g	h	i	<table><tr><td>a</td><td>b</td><td>c</td></tr><tr><td>d</td><td>e</td><td>f</td></tr><tr><td>g</td><td>h</td><td>i</td></tr></table>	a	b	c	d	e	f	g	h	i	<table><tr><td>a</td><td>b</td><td>c</td></tr><tr><td>d</td><td>e</td><td>f</td></tr><tr><td>g</td><td>h</td><td>i</td></tr></table>	a	b	c	d	e	f	g	h	i	<table><tr><td>a</td><td>b</td><td>c</td></tr><tr><td>d</td><td>e</td><td>f</td></tr><tr><td>g</td><td>h</td><td>i</td></tr></table>	a	b	c	d	e	f	g	h	i	<table><tr><td>a</td><td>b</td><td>c</td></tr><tr><td>d</td><td>e</td><td>f</td></tr><tr><td>g</td><td>h</td><td>i</td></tr></table>	a	b	c	d	e	f	g	h	i	<table><tr><td>a</td><td>b</td><td>c</td></tr><tr><td>d</td><td>e</td><td>f</td></tr><tr><td>g</td><td>h</td><td>i</td></tr></table>	a	b	c	d	e	f	g	h	i	<table><tr><td>a</td><td>b</td><td>c</td></tr><tr><td>d</td><td>e</td><td>f</td></tr><tr><td>g</td><td>h</td><td>i</td></tr></table>	a	b	c	d	e	f	g	h	i	<table><tr><td>a</td><td>b</td><td>c</td></tr><tr><td>d</td><td>e</td><td>f</td></tr><tr><td>g</td><td>h</td><td>i</td></tr></table>	a	b	c	d	e	f	g	h	i
a	b	c																																																																													
d	e	f																																																																													
g	h	i																																																																													
a	b	c																																																																													
d	e	f																																																																													
g	h	i																																																																													
a	b	c																																																																													
d	e	f																																																																													
g	h	i																																																																													
a	b	c																																																																													
d	e	f																																																																													
g	h	i																																																																													
a	b	c																																																																													
d	e	f																																																																													
g	h	i																																																																													
a	b	c																																																																													
d	e	f																																																																													
g	h	i																																																																													
a	b	c																																																																													
d	e	f																																																																													
g	h	i																																																																													
a	b	c																																																																													
d	e	f																																																																													
g	h	i																																																																													

A megoldásban láttuk, hogy ha a három adott számból meghatározható egy negyedik, akkor egyértelműen befejezhető a kitöltés. Az 1. esetben a három egy sorban álló szám, illetve a 6., 7., 9., 15. esetben két átlellenes szám átlagaként megkapjuk e -t. A 3., 8., 11., 14. esetben viszont éppen e segítségével fejezhető ki még legalább egy (valójában két) átlellenes szám.

A 2., a 4., az 5., a 10. esetekben is megkapható (például) az e :

2. $(a + b + c) + (a + d + g) = 6e$, de $c + g = 2e$, tehát $e = \frac{2a + b + d}{4}$.
4. Mivel $i = 2e - a$ és $a + b + c = c + f + i = c + f + 2e - a$, innen $e = \frac{2a + b - f}{2}$.
5. $a + b + c = 3e$, de $c = 2e - g$, tehát $e = a + b - g$.
10. $a + b + c = b + e + h$, innen $e = a + c - h$.

A 12. és 16. esetekben a három adott szám számtani sorozatot alkot, tehát összefüggő, illetve a 13. esetben a megoldásban (1)-gyel jelölt összefüggésből következik, hogy h , a , f is számtani sorozatot alkot, ezért ez a három szám is összefüggő.

Azt látjuk tehát, hogy a középső számot tartalmazó számtani sorozatokon kívül a lóugrásszerűen elhelyezkedő f , a , h számhármask is összefüggő (és ugyancsak számtani sorozatot alkot ebben a sorrendben, nevezetesen a a másik kettő számtani közepe).

Szimmetriáktól eltekintve tehát három összefüggő számhármask van. Ha viszont három összefüggő szám van megadva, akkor az olyan, mintha csak kettő lenne megadva. Két szám azonban nem határozza meg egyértelműen a bűvös négyzet számait, mert e két számhoz harmadikként hozzávéve egy olyat, amelyekkel nem összefüggők, már befejezhető a bűvös négyzet kitöltése, viszont ezt a harmadik számot másként megválasztva, más kitöltést kapunk, tehát a kitöltés nem egyértelmű.

Mindezek alapján ismét választ tudunk adni a feladat kérdésére.

Az eredetihez hozzáadott bűvös négyzetben szerepel (legalább) egy 1-es és a lehető legtöbb 0. Ám a „legtöbb” legfeljebb három lehet, mivel négy vagy több 0 csak a csupa 0 bűvös négyzetben lehet. Három 0-t viszont tartalmazhat is a hozzáadott bűvös négyzet; a mellékelt ábra éppen egy ilyet mutat: alkalmas transzformációval (forgatás, 2-vel való osztás) bármelyik helyre kerülhet a kezdeti 1-es.

1	2	0
0	1	2
2	0	1



Vektorok és bűvös négyzetek

A **B. 5400.** feladat megoldásában említjük, hogy egy bűvös négyzetből kivonva egy másikat ismét bűvös négyzetet kapunk. De nemcsak a kivonás, hanem az összeadás is bűvös négyzetet eredményez.

Ha két bűvös négyzetet összeadunk – a megfelelő mezőkben álló számok összegét vesszük –, akkor ismét bűvös négyzetet kapunk.

a_1	b_1	c_1		a_2	b_2	c_2		a_1+a_2	b_1+b_2	c_1+c_2
d_1	e_1	f_1	+	d_2	e_2	f_2	=	d_1+d_2	e_1+e_2	f_1+f_2
g_1	h_1	i_1		g_2	h_2	i_2		g_1+g_2	h_1+h_2	i_1+i_2

Két (3×3) -as bűvös négyzet összege is bűvös négyzet

Az első bűvös négyzetben a bűvös összeg $3e_1$, a másodikban $3e_2$, és mivel tetszőleges x_1, y_1, z_1 , illetve x_2, y_2, z_2 számokra, amelyek az első, illetve második bűvös négyzet ugyanazon helyén egy sorban/oszlopban/átlóban szerepelnek teljesül, hogy $x_1 + y_1 + z_1 = 3e_1$, illetve $x_2 + y_2 + z_2 = 3e_2$, így ezek összegére fennáll, hogy $(x_1 + y_1 + z_1) + (x_2 + y_2 + z_2) = 3e_1 + 3e_2$, amit átrendezve $(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) + (z_1 + z_2) = 3(e_1 + e_2)$ adódik, és ez éppen azt jelenti, hogy az eredmény tetszőleges egy sorában/oszlopában/átlójában álló három szám összege egyenlő (és egyenlő a középső szám háromszorosával). Az eredmény tehát szintén bűvös négyzet, amelyben a bűvös összeg az összeadandók bűvös összegének az összege.

Nemcsak összeadni lehet bűvös négyzeteket, hanem meg lehet szorozni egy α (valós) számmal úgy, hogy minden, a bűvös négyzetben szereplő számot megszorozunk vele, és ismét bűvös négyzetet kapunk. Ha x_1, y_1, z_1 az eredeti bűvös négyzet tetszőlegesen kiválasztott sorában/oszlopában/átlójában álló három

$$\alpha \cdot \begin{array}{|c|c|c|} \hline a_1 & b_1 & c_1 \\ \hline d_1 & e_1 & f_1 \\ \hline g_1 & h_1 & i_1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \alpha a_1 & \alpha b_1 & \alpha c_1 \\ \hline \alpha d_1 & \alpha e_1 & \alpha f_1 \\ \hline \alpha g_1 & \alpha h_1 & \alpha i_1 \\ \hline \end{array}$$

Egy (3×3) -as bűvös négyzet számszorosa is bűvös négyzet

szám, amelyekre $x_1 + y_1 + z_1 = 3e_1$, akkor az eredményben $\alpha x_1 + \alpha y_1 + \alpha z_1 = \alpha(x_1 + y_1 + z_1) = \alpha \cdot 3e_1 = 3(\alpha e_1)$, vagyis minden megfelelő számhármass összege α -szorosára változik. Tehát továbbra is bűvös négyzetet kapunk, és a bűvös összeg is ugyanazzal a számmal szorozódik.

Ez egyszersmind azt is jelenti, hogy ha adott két bűvös négyzet B_1 és B_2 , akkor ezek α_1, α_2 számszorosai összege (úgynevezett *lineáris kombinációja*), $\alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2$ is bűvös négyzet.

Láttunk már ehhez hasonló matematikai „objektumokat”. Ilyen tulajdonsággal rendelkeznek a vektorok is. A sík vektorait is össze lehet adni (komponensenként), és lehet számmal szorozni (szintén komponensenként). Két síkvektor lineáris kombinációja is síkvektor. A térvektorokra is igaz mindez: számszorosaik, összegük, lineáris kombinációik is térvektorok.

Az ilyen struktúrákat – amelyekben elvégezhető a lineáris kombináció és a műveletek rendelkeznek néhány fontos, de megszokott (és mindjárt részletezett) műveleti tulajdonsággal – az algebraiban *vektortérnek* nevezzük.

Vektorterek

A (*valós számok „fölötti”*) vektortér egy nem üres halmazon (vektorokon) adott olyan struktúra, amelyen értelmezve van egy kommutatív (felcserélhető) és asszociatív (társítható) (vektor)összeadás művelet, elvégezhető a kivonás, illetve meg lehet őket szorozni egy (valós) számmal; alapból minden vektor egyszerese önmagára, $(\alpha_1 \alpha_2) \mathbf{v}_1 = \alpha_1 (\alpha_2 \mathbf{v}_1)$, és teljesül mindkétféle „disztributivitás”: $\alpha_1 (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_1 \mathbf{v}_2$, illetve $(\alpha_1 + \alpha_2) \mathbf{v}_1 = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_1$. (Az α -k (valós) számokat, a $\mathbf{v}$ -k vektorokat jelölnek.)

A (3×3) -as bűvös négyzetek látszólag nem vektorok, de, mint láttuk, mégis vektorteret alkotnak. A síkvektoroknak két komponense van, a térvektoroknak három, a (3×3) -as bűvös négyzeteknek kilenc. Írhatnánk $\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f & g & h & i \end{pmatrix}$ alakban is őket.

A sík kétdimenziós, a tér háromdimenziós. Ezek szerint a (3×3) -as bűvös négyzetek vektortérének a dimenziója 9?

Ahhoz, hogy erre választ adjunk, meg kell értenünk, hogy mit is jelent az, hogy dimenzió.

A vektortér dimenziója és a bázis

A síkvektorok közül kiválasztva két nem egy egyenesbe esőt, az összes síkvektor *felírható* ezek lineáris kombinációjaként, ráadásul ez a felírás *egyértelmű* is.

Ha például az egyik vektor a szokásos Descartes-féle koordináta-rendszerben az $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$, a másik az $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$, akkor tetszőleges $\mathbf{u} = (a, b)$ vektor úgy írható fel az $\mathbf{e}_1$ és az $\mathbf{e}_2$ lineáris kombinációjaként, hogy $a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2$, hiszen $a\mathbf{e}_1 = (a, 0)$, $b\mathbf{e}_2 = (0, b)$, ezek összege pedig $\mathbf{u} = (a, b)$. Vagyis egy vektor végpontjának koordinátái éppen az adott egységvektorokkal felírt lineáris kombinációban szereplő együtthatók.

De választhattunk volna más vektorokat is, például az $\mathbf{e}_1 = (1, 2)$ és az $\mathbf{e}_2 = (3, 4)$ vektort. Akkor az $\mathbf{u} = (11, 16)$ vektor $2 \cdot \mathbf{e}_1 + 3 \cdot \mathbf{e}_2$ alakú, hiszen $2\mathbf{e}_1 = (2, 4)$, $3\mathbf{e}_2 = (9, 12)$, az összegük pedig $(11, 16)$, ami éppen $\mathbf{u}$. Ezzel a két vektorral úgy kapunk meg egy tetszőleges $\mathbf{u} = (a, b)$ vektort $\alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2$ alakban, hogy felírjuk a komponenseit: $\mathbf{u} = (1 \cdot \alpha_1 + 3 \cdot \alpha_2, 2 \cdot \alpha_1 + 4 \cdot \alpha_2)$, ahonnan
$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 + 3\alpha_2 &= a \\ 2\alpha_1 + 4\alpha_2 &= b \end{aligned} \right\}. \text{ Az együttha-}$$

tókat a felírt kétismeretlenes elsőfokú lineáris egyenletrendszer megoldásaként, két egyenes metszéspontja koordinátáiként kapjuk. Ez – ha a két vektor nem esik egy egyenesbe – egyértelmű, esetünkben konkrétan $\alpha_1 = -2a + 1,5b = -22 + 24 = 2$ és $\alpha_2 = a - 0,5b = 11 - 8 = 3$.

Azoknak a vektoroknak az együttesét, amelyek lineáris kombinációi minden vektort egyértelműen előállítanak, *bázisnak* nevezzük. Egy olyan vektortérben, amelyben az együtthatókat a valós számok közül vesszük és amelyben végtelen sok vektor van, végtelen sok bázis van. Elég csak az egyik bázisvektor helyett annak valamely nem nulla számszorosát venni, és máris újabb bázis kapunk. És mivel végtelen sok nem-nullaszorosa van egy bázisvektornak, végtelen sok bázis lesz.

Az, hogy a bázisvektorok egyértelműen állítják elő a vektorokat azt is jelenti, hogy egy bázisvektor nem áll elő a többi bázisvektor lineáris kombinációjaként. (Hiszen ő önmagának az egyszereseként írható fel – egyértelműen!) Erre a tulajdonságra úgy szokás hivatkozni, hogy a bázisvektorok (a többitől, egymástól) *függetlenek*.

A síkot azért nevezzük kétdimenziósnak, mert a sík vektorait két *független* vektor lineáris kombinációjaként lehet felírni. A térben ehhez három vektor szükséges.

Azonban abból, hogy három komponense van egy vektortér elemeinek, még egyáltalán nem következik, hogy háromdimenziós. Vegyük például az $(a, b, 2a - b)$ alakú számhármasokat (a és b , mint eddig is, valós számok). Természetesen a tér pontjainak feleltethetjük meg őket, de valójában csak kétdimenziós vektorteret alkotnak – vagyis ez egy síknak felel meg!¹ És honnan lehet tudni, hogy kétdimenziós? Sejtteni onnan, hogy a harmadik komponens előállítható az első kettőből. Ellenőrizni pedig úgy tudjuk, hogy megmutatjuk, hogy továbbra is elegendő két vektor a vektortér vektorainak előállítására. Vegyük hozzá a kétdimenzióban választott bázis, $(1, 0)$, $(0, 1)$ vektoraihoz is az $(a, b, 2a - b)$ alaknak megfelelő harmadik komponens: $(1, 0, 2)$ és $(0, 1, -1)$. Tudjuk, hogy $(a, b) = a(1, 0) + b(0, 1)$, a kibővített vektor kibővített bázisban való felírása pedig: $a(1, 0, 2) + b(0, 1, -1) = (a, b, 2a - b)$, tehát továbbra is az ugyanazokkal az együtthatókkal képezett lineáris kombináció állítja elő.

Vagyis hiába a három komponens, két vektor továbbra is elegendő ahhoz, hogy a többi (így kapott) vektort egyértelműen felírjuk a kibővített két bázisvektor lineáris kombinációjaként. Ezért ez egy kétdimenziós vektortér (azaz egy sík) a térben. Egy véges dimenziós vektortérben minden bázis ugyanannyi vektorból áll.² *A vektortér dimenziója a bázisai elemszáma.*

Hány dimenziós a (3×3) -as bővös négyzetek vektortere?

Láttuk a feladat megoldásához fűzött megjegyzésben, hogy hiába áll 9 számból a „vektor”, már három (jól megválasztott, azaz független) komponense is meghatározza a többit, kettő viszont nem elegendő.

Ez azt jelenti, hogy a (3×3) -as bővös négyzetek 3-dimenziós vektorteret alkotnak. Keressünk bázist!

Keressünk egy bázist

Legyen a báziselem bővőnégyzeteket meghatározó három (független) szám az első soraikban álló három szám. A térvektorok között szokás az $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$,

¹ Aki nem hiszi, járjon utána! Írja be GeoGebra 3D-ben: $(x, y, 2x - y)$.

² Vannak olyan vektorterek, amelyek végtelen dimenziósak. Ilyenek például a számsorozatok, amelyek k -adik tagja a vektor k -adik komponense.

$(0,0,1)$ bázist felvenni. Használjuk mi is ezeket a (3×3) -as bűvös négyzetek báziselemeinek első sorában. Pontosabban – hogy a középső szám ne tört legyen – a háromszorosukból indulunk ki: $(3,0,0)$, $(0,3,0)$, $(0,0,3)$. Mindhárom bűvös négyzetben $B = 3$, azaz $e = 1$. Ezután töltsük ki a megfelelő bűvös négyzeteket:

$$X = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 0 & 0 \\ \hline -2 & 1 & 4 \\ \hline 2 & 2 & -1 \\ \hline \end{array} \quad Y = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 3 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & -1 & 2 \\ \hline \end{array} \quad Z = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 3 \\ \hline 4 & 1 & -2 \\ \hline -1 & 2 & 2 \\ \hline \end{array}$$

Ez a három bűvös négyzet bázist alkot, mert minden (3×3) -as bűvös négyzetet egyértelműen felírhatunk ezek lineáris kombinációjaként:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline a & b & c \\ \hline d & e & f \\ \hline g & h & i \\ \hline \end{array} = \frac{a}{3}X + \frac{b}{3}Y + \frac{c}{3}Z.$$

Keressünk ettől érdemben különböző – vagyis nem ezen „bázisvektorok” szám-szorosait használó – bázist! (Javaslat: válasszunk másik független számhármast, és abból induljunk ki.)

Fried Katalin
Budapest

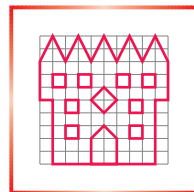
Helyesbítés

Az előző számunkban a Reményi-díjjal jutalmazottak sorából sajnálatos módon kimaradt Czírók Adrienn neve.

Gratulálunk, és ezúton is kérjük az érintettek elnézését!



A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok ABACUS-szal közös pontverseny 9. osztályosoknak (834–839.)



K. 834. A mellékelt összeadásban a különböző betűk különböző, azonos betűk azonos számjegyeket jelölnek. Határozzuk meg az összeadásban szereplő számok és a végeredmény számértékét.

$$\begin{array}{r} \text{É G} \\ \text{É G} \\ + \text{É G} \\ \hline \text{K É K} \end{array}$$

K. 835. Hány olyan négyjegyű szám van, amelyben valamelyik három számjegy összegének háromszorosa megegyezik a negyedik számjeggyel?

K. 836. Az ABC derékszögű háromszög egységnyi hosszúságú AB befogójának B -n túli meghosszabbításán felvettük a D pontot úgy, hogy $BD = \frac{AC}{2}$ teljesüljön. Az AC befogó felezőpontja E . Az AED és ABC háromszögek területének aránya $2:3$. Határozzuk meg BD hosszát.

K/C. 837. Egy 4×4 -es táblázatot sakktáblaszerűen kiszínezzünk. Egy lépésben egy kiszemelt 2×2 -es részen minden mező színét megváltoztatjuk: feketéből fehér, fehérből fekete lesz.

a) Megoldható-e így, hogy az egész tábla fekete színű legyen?

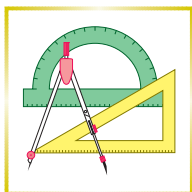
b) És egy 5×5 -ös tábla esetén elérhető-e, hogy az egész tábla fekete legyen?

K/C. 838. Lehet-e 2024 két prímszám négyzetének különbsége?



Beküldési határidő: 2025. január 10.

Elektronikus munkafüzet: <https://www.komal.hu/munkafuzet>



A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (834–838., 1833–1837.)

Feladatok 10. évfolyamig

K/C. 838. A szövegét lásd a **K** feladatoknál.

K/C. 839. A szövegét lásd a **K** feladatoknál.

Feladatok mindenkinek

C. 1833. Oldjuk meg az

$$a + c = b,$$

$$a^3 - c = b^2,$$

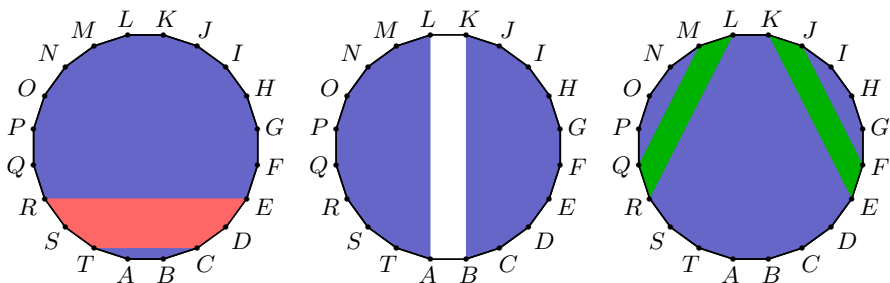
$$a + b = c^3$$

egyenletekből álló egyenletrendszert, ha a , b , c természetes számok.

javasolta: *Bíró Bálint* (Eger)

C. 1834. Három deli herceg versengett Kék király csodálatos leányának kezéért: Piros herceg, Fehér herceg és Zöld herceg. Az első próba a jóízlés próbája volt. A hercegek kaptak egy-egy kék szabályos 20-szöget, amelynek tetszőleges részét átszínezhették a saját színükre, minél ízlésesebben. Azt nem árulta el nekik a királylány, hogy előre eldöntötte, aki a 20-szöge ötödénél többet fest át a saját

színére, az szerinte túl egoista, és ezért nem folytathatja a vetélkedést a kezéért. Az egyes hercegek az alábbi színezéseket készítették:



Melyikük jutott tovább a próbák következő fordulójába? (Ahol a feladat egyébként egy hétfejű sárkány legyőzése és megevése volt, de hát az már egy másik matekpélda.)

Javasolta: *Bertalan Zoltán* (Békéscsaba)

C. 1835. Az x szám egészrészét $[x]$, törtrészét pedig $\{x\}$ jelöli. Bizonyítsuk be, hogy az $[x] \cdot \{x\} = \frac{2024}{2025}$ egyenletnek végtelen sok megoldása van a racionális számok halmazán.

Javasolta: *Bencze Mihály* (Brassó)

Feladatok 11. évfolyamtól

C. 1836. Az egyenlő szárú ABC háromszög AB alapjának végpontjain áthaladó k kör az AC , illetve BC oldalegyeneseket az A , illetve B pontokban érinti. A k körnek egy, az A és B pontoktól különböző pontja P . Igazoljuk, hogy a P pontnak az AB egyenestől mért távolsága legfeljebb akkora, mint az AC és BC egyenesektől mért távolságok számtani közepe.

Javasolta: *Bíró Bálint* (Eger)

C. 1837. Már az ókori görögök is tudták, hogy a $\pi \approx 3,1416$ egészen jól közelíthető a $\frac{22}{7} \approx 3,1429$ törttel. Hány olyan pozitív egész számokból álló $(a;b)$ számpár van, amelyekre $1 < b < 100$ és az $\frac{a}{b}$ tizedes tört alakja úgy kezdődik, hogy 3,14?

Javasolta: *Kozma Katalin Abigél* (Győr)



Beküldési határidő: 2025. január 10.

Elektronikus munkafüzet: <https://www.komal.hu/munkafuzet>





A 2023–2024-as tanév pontversenyeinek iskolánként összesített eredménye

Az alábbiakban azokat az iskolákat gyűjtöttük össze, amelyeknek legalább egy diákját felsoroltuk a 2024/6. számban közölt pontverseny eredményekben. A zárójelekben az értékelt versenyzők száma, pontszámuk összege áll az egyes kategóriákban, illetve a tanáraik neve. A szaktanárok neve úgy szerepel, ahogyan azt a versenyzők a regisztrációkor megadták, ezért előfordulhat, hogy a tanár nem oktatója a versenyző iskolájának. Az esetleges névelírásokért szíves elnézésüket kérjük.

A táblázatokban használt jelölések:

benev.: benevezettek, akik legalább 1 dolgozatot beküldtek;

értékelt: akiknek neve szerepelt a szeptemberi számban a **2023–2024-es tanévi pontversenyek eredménylistáiban**.

Matematika

Évfolyam	K, C verseny		A, B verseny		Összesen	
	benev.	értékelt	benev.	értékelt	benev.	értékelt
1–8. oszt.	40	21	30	18	51	32
9. oszt.	320	115	87	31	386	143
10. oszt.	185	51	104	54	241	99
11. oszt.	195	70	125	43	257	106
12. oszt.	40	13	66	37	96	49
Összesen	780	270	412	183	1031	429

BÁCS-KISKUN VÁRMEGYE

Kecskemét:

Kecskeméti Bányai Júlia Gimnázium 5 versenyző (K, C: 4/607; A, B: 2/300; Badó Zsolt, Halász Alexandra, Reiterné Makra Zsuzsanna),

Kecskeméti Katona József Gimnázium 3 versenyző (K, C: 3/426; A, B: 1/47; Csordásné Szécsi Jolán, Kovácsné Szipán Andrea, Nádháziné Borbola Éva, Reiter István),

Kecskeméti Kodály Zoltán Ének-zenei Általános Iskola, Gimnázium 1 versenyző (K, C: 1/115; Szalainé Bagány Emese).

BARANYA VÁRMEGYE

Pécs:

Ciszterci Rend Nagy Lajos Gimnáziuma és Kollégiuma 2 versenyző (K, C: 1/152; A, B: 1/221; Baráti Ákos, Pánczél Róbert),

Koch Valéria Gimnázium, Általános Iskola, Óvoda, Kollégium és Pedagógiai Intézet 2 versenyző (K, C: 2/346; Khinné Deák Mária),

Pécsi Leőwey Klára Gimnázium 2 versenyző (K, C: 1/296; A, B: 1/179; Kiss Zoltán, Porkoláb Tamás),

Pécsi Tudományegyetem Gyakorló Általános Iskola, Gimnázium és Óvoda Babits Mihály Gimnáziuma 1 versenyző (K, C: 1/176).

BÉKÉS VÁRMEGYE

Gyula:

Erkel Ferenc Gimnázium 1 versenyző (K, C: 1/221; Dr. Oroszné Honfi Valéria, Székely András).

Orosháza:

Táncsics Mihály Gimnázium és Szakközépiskola 1 versenyző (K, C: 1/152; Nagyné Dömötör Márta).

BORSOD-ABAÚJ-ZEMPLÉN VÁRMEGYE

Miskolc:

Földes Ferenc Gimnázium 33 versenyző (K, C: 28/2727; A, B: 5/569; Csendi Balázs, Csetneki Csilla, Fejér Szabolcs, Grallert Krisztina, Győry Ákos, Kovács Attila Andrásné, Kurunczi Gábor, Merkelné Vodila Noémi, Szabadfalviné Kormányos Anikó, Tóth Tibor),

Miskolci Herman Ottó Gimnázium 26 versenyző (K, C: 26/2088; Dezsőfi György, Juhász Attila, Pilzné Nagylaki Tünde, Takács Zoltán, Taricska Dávid, Veres Pálné).

BUDAPEST

Budapest:

Baár-Madas Református Gimnázium, Általános Iskola és Kollégium 5 versenyző (K, C: 3/290; A, B: 2/108; Rakamazi Richárd),

Balassi Bálint Nyolcévfolyamos Gimnázium 2 versenyző (K, C: 1/191; A, B: 1/179),

Békásmegyeri Veres Péter Gimnázium 33 versenyző (K, C: 24/2367; A, B: 11/1106; Dobos Sándor, Gyenes Zoltán, Holló Gábor, Kilinné Vörös Bernadett, Kötél Tamás, Molnár-Szabó Vilmos, Pósa Lajos, Simon János, Simon Péter, Surányi László, Számadóné Békéssy Szilvia, Tassy Gergely, Varga Mária),

Bem József általános Iskola 1 versenyző (K, C: 1/133; A, B: 1/77),

Berzsenyi Dániel Gimnázium 10 versenyző (K, C: 8/712; A, B: 2/210; Baranyai Klára, Csernovszky Zoltán, Gál Györgyné, Károlyi Gergely, Nemcskó István),

Budai Ciszterci Szent Imre Gimnázium 1 versenyző (K, C: 1/232; Stirling Anna),

Budai Nagy Antal Gimnázium 1 versenyző (K, C: 1/162; Buglyóné Ludmann Mária, Dani Péter, Nagy Emese),

Budapest I. Kerületi Toldy Ferenc Gimnázium 2 versenyző (K, C: 2/99),

Budapest V. Kerületi Eötvös József Gimnázium 9 versenyző (K, C: 5/878; A, B: 4/291; Czírók Adrienn, Deák Anna, Farkas Noémi, Illés János, Székely Péter),

Budapest-Fasori Evangélikus Gimnázium 1 versenyző (A, B: 1/108),

Budapesti Egyetemi Katolikus Gimnázium 21 versenyző (A, B: 21/462),

Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 48 versenyző (K, C: 3/379; A, B: 47/5971; Ádám Réka, Bereczki Zoltán, Damásdi Gábor,

Dobos Sándor, Farkas Margit Ilona, Fazakas Tünde, Gyenes Zoltán, Hujter Bálint, Kiss Géza, Kocsis Szilveszter, Lenger Dániel, Mazug Péter, Nagy Zoltán Lőránt, Pereczes Marianna, Pósa Lajos, Rubóczy György, Simon Péter, Sokvári Olivér, Somodi Zoltán, Surányi László, Szepessy Luca, Terpai Tamás),
ELTE Apáczai Csere János Gyakorló Gimnázium és Kollégium 7 versenyző (K, C: 5/564; A, B: 2/292; Antal Zoltán, Csányi János, Suta Judit, Tóth Attila),
ELTE Radnóti Miklós Gyakorló Általános Iskola és Gyakorló Gimnázium 2 versenyző (K, C: 1/212; A, B: 1/46; Steller Gábor),
ELTE Trefort Ágoston Gyakorló Gimnázium 3 versenyző (K, C: 3/457; Ujházy Márton),
Karínthy Frigyes Gimnázium 3 versenyző (K, C: 1/113; A, B: 2/259; Pilter Adorján),
Kempelen Farkas Gimnázium 3 versenyző (K, C: 3/663; Romhányi Katalin),
Lauder Javne Gimnázium 1 versenyző (K, C: 1/263; Dávid Anett),
Móricz Zsigmond Gimnázium 3 versenyző (K, C: 2/125; A, B: 1/213; Somodi Zoltán),
Óbudai Árpád Gimnázium 4 versenyző (K, C: 3/504; A, B: 1/147; Besenyei Ádám, Blumenau-Szabó Zsuzsanna, Kézér Ildikó, Nemeckóné Szabó Zsuzsanna, Számadó László, Sztojcsévné Fekete Mária),
Patrona Hungariae Gimnázium 1 versenyző (K, C: 1/106),
Szent Gellért Katolikus Általános Iskola és Gimnázium 1 versenyző (K, C: 1/191; Königné Mohácsi Teodóra),
Szent István Gimnázium 6 versenyző (K, C: 1/88; A, B: 5/581; Dankowsky Anna Zóra, Juhász István, Juhász Péter, Kornis Ferenc, Molnár-Sáska Ildikó),
Szent Margit Gimnázium 1 versenyző (A, B: 1/60; Richlik-Horváth Katalin),
Táncsics Mihály Általános Iskola és Gimnázium 1 versenyző (K, C: 1/297),
Városmajori Gimnázium 15 versenyző (K, C: 15/1687; A, B: 1/29; Bärnkopf Péterné, Kovács Veronika, Pálfiné Kovács Erika, Pintér László).

CSONGRÁD-CSANÁD VÁRMEGYE

Hódmezővásárhely:

Bethlen Gábor Református Gimnázium és Szathmáry Kollégium 1 versenyző (K, C: 1/139; Prikler György).

Szeged:

Karolina Gimnázium 1 versenyző (K, C: 1/237),
SZTE Gyakorló Gimnázium és Általános Iskola 3 versenyző (K, C: 2/230; A, B: 1/242; Ábrahám Gábor, Matos Zoltán, Torma Bence),
Szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium 77 versenyző (K, C: 51/6600; A, B: 30/2763; Balogné Cseh Judit, Mike János, Schultz János, Szaszko-Bogárné Eckert Bernadett, Tigyi István, Vincze István).

GYŐR-MOSON-SOPRON VÁRMEGYE

Győr:

Czuczor Gergely Bencés Gimnázium 1 versenyző (K, C: 1/197; Dr. Horváthné Harmati Szilvia, Környei Lászlóné),

Kazinczy Ferenc Gimnázium 2 versenyző (K, C: 1/141; A, B: 1/174; Poóczáné Kecskeméty Szilvia),

Révai Miklós Gimnázium és Kollégium 3 versenyző (K, C: 1/206; A, B: 2/95).

Pannonhalma:

Pannonhalmi Bencés Gimnázium, Egyházzenei Szakközépiskola és Kollégium 1 versenyző (K, C: 1/270).

HAJDÚ-BIHAR VÁRMEGYE

Debrecen:

Debreceni Egyetem Kossuth Lajos Gyakorló Gimnáziuma és Általános Iskolája 1 versenyző (K, C: 1/149),

Debreceni Fazekas Mihály Gimnázium 18 versenyző (K, C: 9/1309; A, B: 10/924; Balázs Tivadar, Gaál Istvánné, Kántor Sándor, Kovács Péter, Mester Gyula, Pósa Lajos, Remeténé Orvos Viola, Tóth Mariann),

Debreceni Református Kollégium Dóczy Gimnáziuma 2 versenyző (K, C: 2/169; Csáky Pálné, Flaskár Ibolya).

HEVES VÁRMEGYE

Eger:

Dobó István Gimnázium 3 versenyző (K, C: 2/153; A, B: 1/208; Pappné Balázs Judit),

Neumann János Gimnázium, Technikum és Kollégium 2 versenyző (K, C: 2/280; Horváth Zita, Petrásné Szűcs Eleonóra).

JÁSZ-NAGYKUN-SZOLNOK VÁRMEGYE

Jászberény:

Lehel Vezér Gimnázium 2 versenyző (K, C: 2/483; Nagyné Kontra Nóra).

Szolnok:

Varga Katalin Gimnázium 1 versenyző (K, C: 1/69; Kiss László),

Verseyhy Ferenc Gimnázium 3 versenyző (K, C: 3/644; Pogány Gyula).

KOMÁROM-ESZTERGOM VÁRMEGYE

Esztergom:

Esztergomi Dobó Katalin Gimnázium 1 versenyző (K, C: 1/145; Tatár Zsuzsanna).

Tatabánya:

Tatabányai Árpád Gimnázium 1 versenyző (K, C: 1/63; Németh Ildikó).

NÓGRÁD VÁRMEGYE

Balassagyarmat:

Balassagyarmati Balassi Bálint Gimnázium 1 versenyző (A, B: 1/245; Hegedűs Csaba).

PEST VÁRMEGYE

Cegléd:

Ceglédi Kossuth Lajos Gimnázium 1 versenyző (K, C: 1/78).

Dunakeszi:

Dunakeszi Radnóti Miklós Gimnázium 1 versenyző (K, C: 1/120; A, B: 1/77; Druzsina Zsuzsanna).

Fót:

Fóti Garay János Általános Iskola 1 versenyző (A, B: 1/161).

Gödöllő:

Gödöllői Török Ignác Gimnázium 2 versenyző (A, B: 2/293; Ábrahám-Huszár Éva, Thuróczy Erzsébet, Tóthné Kovács Judit).

Szentendre:

Ferences Gimnázium 1 versenyző (A, B: 1/31; Atzél Kata),
II. Rákóczi Ferenc Általános Iskola és Gimnázium 1 versenyző (K, C: 1/64).

SOMOGY VÁRMEGYE

Kaposvár:

Kaposvári Táncsics Mihály Gimnázium 1 versenyző (A, B: 1/139; Szigeti Tamás, Trembeczki Csaba).

SZABOLCS-SZATMÁR-BEREG VÁRMEGYE

Mátészalka:

Esze Tamás Gimnázium 1 versenyző (K, C: 1/72).

Nyíregyháza:

Szent Miklós Görögkatolikus Általános Iskola 1 versenyző (K, C: 1/213; A, B: 1/113; Róka Sándor, Silimonné Rác Andrea).

TOLNA VÁRMEGYE

Bonyhád:

Bonyhádi Petőfi Sándor Evangélikus Gimnázium és Kollégium 1 versenyző (K, C: 1/55).

VAS VÁRMEGYE

Szombathely:

ELTE Bolyai János Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 1 versenyző (K, C: 1/290; Fekete Márta).

VESZPRÉM VÁRMEGYE

Pápa:

Türr István Gimnázium és Kollégium 1 versenyző (K, C: 1/212; A, B: 1/184; Obermayer Réka).

Veszprém:

Lovassy László Gimnázium 1 versenyző (A, B: 1/73; Márffy Katalin, dr. Kántorné Kovács Csilla).

ZALA VÁRMEGYE

Keszthely:

Keszthelyi Vajda János Gimnázium 1 versenyző (K, C: 1/52).

Nagykanizsa:

Batthyány Lajos Gimnázium 1 versenyző (K, C: 1/106; Erdős Gábor, Zsovár Anita).

Zalaegerszeg:

Zalaegerszegi Zrínyi Miklós Gimnázium 10 versenyző (K, C: 10/982; Kiss Zsolt, Pálovics Róbert, Péteri Szabolcs, Rónaky Attila, Schneider János).

HATÁRON TÚLRÓL

AMERIKAI EGYESÜLT ÁLLAMOK

New Hampshire, Litchfield:

Campbell High School 1 versenyző (A, B: 1/165).

Pittsburgh:

Mt. Lebanon Senior High School 1 versenyző (A, B: 1/40).

Portland:

Jesuit High School 1 versenyző (A, B: 1/9).

BULGÁRIA

Szófia:

First Private Mathematical Gymnasium 1 versenyző (A, B: 1/62).

HONGKONG

Hongkong:

Sa Tin College 1 versenyző (A, B: 1/58).

KÍNA

Shenzhen:

Shenzhen Middle School 1 versenyző (A, B: 1/49; Wei Wu).

NÉMETORSZÁG

Neufahrn bei Freising:

Oscar Maria Graf Gymnasium 1 versenyző (K, C: 1/175; A, B: 1/83).

ROMÁNIA

Bukarest:

International Computer High School of Bucharest 1 versenyző (A, B: 1/14).

Csikszereda:

Márton Áron Líceum 1 versenyző (A, B: 1/372; Pál Olga).

Kolozsvár:

Spark Generation 1 versenyző (A, B: 1/293; Brătfălean-Igna Iulia, Simion Radu).

Románvásár:

Colegiul National "Roman-Vodă" 1 versenyző (A, B: 1/147; Ursărescu Marian).

Sepsiszentgyörgy:

Székelly Mikó Kollégium 1 versenyző (A, B: 1/79; Ugron Szabolcs).

Székellyudvarhely:

Tamási Áron Gimnázium 1 versenyző (K, C: 1/176; A, B: 1/190).

SZLOVÁKIA

Érsekújvár:

Jedlik Ányos Elektrotechnikai Szakközépiskola 1 versenyző (K, C: 1/302).

Galánta:

Kodály Zoltán Gimnázium 3 versenyző (K, C: 3/462; Ballyák Bán Andrea).

Révkomárom:

Selye János Gimnázium 5 versenyző (K, C: 5/927; Bukor Emőke, Bukorné Both Emőke, Lami Zsuzsanna).

Rimaszombat:

Gömöralmágyi Alapiskola és Óvoda 1 versenyző (A, B: 1/110; Kovács Árpád).

Informatika

Évfolyam	I verseny	
	benev.	értékelt
1–8. oszt.	10	4
9. oszt.	14	6
10. oszt.	26	10
11. oszt.	19	5
12. oszt.	7	5
Összesen	76	30

BÁCS-KISKUN VÁRMEGYE

Kecskemét:

Kecskeméti Bányai Júlia Gimnázium 1 versenyző (I: 1/267),
Kecskeméti Bolyai János Gimnázium 2 versenyző (I: 2/218; Kutas Tibor).

BARANYA VÁRMEGYE

Pécs:

Koch Valéria Gimnázium, Általános Iskola, Óvoda, Kollégium és Pedagógiai Intézet
 1 versenyző (I: 1/136; Gönczi Nikoletta),
Pécsi Janus Pannonius Gimnázium 1 versenyző (I: 1/68; Gyöngyiné Mester Henriette).

BORSOD-ABAÚJ-ZEMPLÉN VÁRMEGYE

Miskolc:

Földes Ferenc Gimnázium 2 versenyző (I: 2/188; Csató Endre).

BUDAPEST

Budapest:

Berzsenyi Dániel Gimnázium 1 versenyző (I: 1/93),

Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 2 versenyző
(I: 2/373; Blénassy Gabriella, Nikhazy László, Pásztor Attila, Szoldatics József),

ELTE Apáczai Csere János Gyakorló Gimnázium és Kollégium 1 versenyző (I: 1/97;
Pirity Tamás Gábor),

Madách Imre Gimnázium 1 versenyző (I: 1/66; Benis Erzsébet),

Sztehlo Gábor Evangélikus Óvoda, Általános Iskola és Gimnázium 6 versenyző
(I: 6/326).

CSONGRÁD-CSANÁD VÁRMEGYE

Szeged:

Szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium 4 versenyző (I: 4/853; Beke Ferenc,
Gutai Árpád Tamás, Juhász Fruzsina, Kelemen András Félix).

HAJDÚ-BIHAR VÁRMEGYE

Debrecen:

Debreceni Fazekas Mihály Gimnázium 1 versenyző (I: 1/59).

HEVES VÁRMEGYE

Eger:

Dobó István Gimnázium 2 versenyző (I: 2/170; Fazekasné Vincze Henrietta),

Neumann János Gimnázium, Technikum és Kollégium 1 versenyző (I: 1/263).

KOMÁROM-ESZTERGOM VÁRMEGYE

Esztergom:

Esztergomi Dobó Katalin Gimnázium 1 versenyző (I: 1/61; Tatár Zsuzsanna).

SOMOGY VÁRMEGYE

Kaposvár:

Kaposvári Táncsics Mihály Gimnázium 1 versenyző (I: 1/264; Biczóné Lengyel
Beáta, Raskoványi Miklós).

ZALA VÁRMEGYE

Nagykanizsa:

Batthyány Lajos Gimnázium 1 versenyző (I: 1/233).

HATÁRON TÚLRÓL

NAGY-BRITANNIA

Tiverton:

Blundell's School 1 versenyző (I: 1/91).

Fizika

Évfolyam	P, G verseny		M verseny		Összesen	
	benev.	értékelt	benev.	értékelt	benev.	értékelt
1–8. oszt.	25	13	4	0	27	13
9. oszt.	76	37	16	8	78	41
10. oszt.	90	40	13	7	97	46
11. oszt.	86	37	11	5	90	39
12. oszt.	45	27	3	2	46	28
Összesen	322	154	47	22	338	167

BÁCS-KISKUN VÁRMEGYE

Kecskemét:

Kecskeméti Bányai Júlia Gimnázium 2 versenyző (P, G: 2/244; Bakk János, Szittyai István),

Kecskeméti Bolyai János Gimnázium 1 versenyző (P, G: 1/80; Vincze Zoltán),

Kecskeméti Katona József Gimnázium 4 versenyző (P, G: 4/243; Szalai Péter).

BARANYA VÁRMEGYE

Pécs:

Koch Valéria Gimnázium, Általános Iskola, Óvoda, Kollégium és Pedagógiai Intézet 1 versenyző (P, G: 1/53; Markovics Ákos),

Pécsi Janus Pannonius Gimnázium 1 versenyző (P, G: 1/163; Lehócz Mária, Pál-falvi László),

Pécsi Leőwey Klára Gimnázium 6 versenyző (P, G: 4/429; M: 3/79; Almási László, Hegedüs János, Simon Péter).

BORSOD-ABAÚJ-ZEMPLÉN VÁRMEGYE

Miskolc:

Földes Ferenc Gimnázium 2 versenyző (P, G: 2/201; Bíró István, Pál Mihály),

Miskolci Herman Ottó Gimnázium 1 versenyző (P, G: 1/171; Dezsőfi György, Dudás Imre, Kovács Benedek, Pántyáné Kuzder Mária, Pilzné Nagylaki Tünde, Taricska Dávid, Veres Pálné).

BUDAPEST

Budapest:

Baár-Madas Református Gimnázium, Általános Iskola és Kollégium 5 versenyző (P, G: 5/507; M: 1/54; Horváth Norbert),

Néhányan a 2023–2024-es tanév legszorgalmasabb megoldói közül

6–9. évfolyam



**Molnár-Sáska
Tamás**



Aravin Peter



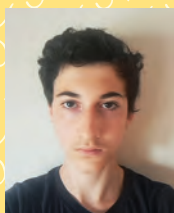
Blaskovics Bálint



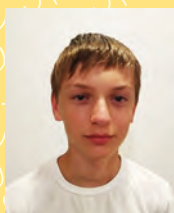
Sógor-Jász Soma



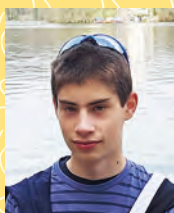
Baran Júlia



Sági Mihály



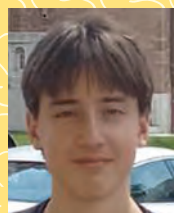
**Sánta Gergely
Péter**



Gáti Benjamin



Tóth Luca



Blaskovics Ádám



**Barth Albert
Krisztián**



Csató Hanna Zita



Kis Boglárka



Németh Ábel



Papp Emese Petra

- 1. sor:** Molnár-Sáska Tamás 6. o. (Budapest, ELTE Radnóti Miklós Gyak. Ált. Isk. és Gimn.), Aravin Peter 7. o. (Budapesti Fazekas Mihály Gyak. Ált. Isk. és Gimn.), Blaskovics Bálint 7. o. (Budapest, Óbudai Árpád Gimn.), Sógor-Jász Soma 8. o. (Szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimn.), Baran Júlia 8. o. (Debreceni Fazekas Mihály Gimn.).
- 2. sor:** Sági Mihály 9. o. (Budapest, Mórícz Zsigmond Gimn.), Sánta Gergely Péter 9. o. (Budapesti Fazekas Mihály Gyak. Ált. Isk. és Gimn.), Gáti Benjamin 9. o. (Budapest, Berzsényi Dániel Gimn.), Tóth Luca 9. o. (Budapest, Kempelen Farkas Gimn.), Blaskovics Ádám 9. o. (Budapesti Fazekas Mihály Gyak. Ált. Isk. és Gimnázium).
- 3. sor:** Barth Albert Krisztián 9. o. (Budapest, ELTE Apáczai Csere János Gyak. Gimn. és Koll.), Csató Hanna Zita 9. o. (Budapesti Fazekas Mihály Gyak. Ált. Isk. és Gimn.), Kis Boglárka 9. o. (Kecskeméti Katona József Gimn.), Németh Ábel 9. o. (Szombathely, ELTE Bolyai János Gyak. Ált. Isk. és Gimn.), Papp Emese Petra 9. o. (Budapest, ELTE Apáczai Csere János Gyak. Gimn. és Koll.).

10. évfolyam



Bodor Mátyás



Szakács Ábel



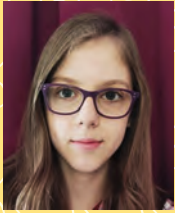
Diaconescu Tashi



Ali Richárd



Vigh Zalán



Veres Dorottya



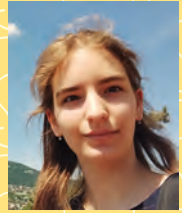
Kerekes András



Baráth Borbála



Bús László Teodor



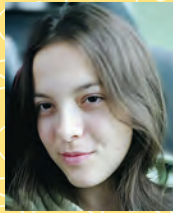
Barna Krisztina



Prohászka Bulcsú



Jávor Botond



Beke Natália



Ollé Sarolta



Herczeg Viktória

1. sor: Bodor Mátyás 10. o. (Csíkszereda, Márton Áron Líceum), Szakács Ábel 10. o. (Budapesti Fazekas Mihály Gyak. Ált. Isk. és Gimn.), Diaconescu Tashi 10. o. (Kolozsvár, Spark Generation), Ali Richárd 10. o. (Gödöllői Török Ignác Gimnázium), Vigh Zalán 10. o. (Szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimn.).

2. sor: Veres Dorottya 10. o. (Budapesti Fazekas Mihály Gyak. Ált. Isk. és Gimn.), Kerekes András 10. o. (Szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimn.), Baráth Borbála 10. o. (Szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gim.), Bús László Teodor 10. o. (Ceglédi Kossuth Lajos Gim.), Barna Krisztina 10. o. (Pécs, Koch Valéria Gimn., Ált. Isk., Óvoda, Koll. és Pedagógiai Intézet).

3. sor: Prohászka Bulcsú 10. o. (Budapesti Fazekas Mihály Gyak. Ált. Isk. és Gimn.), Jávor Botond 10. o. (Budapest, Városmajori Gimn.), Beke Natália 10. o. (Révkomárom, Selye János Gimnázium), Ollé Sarolta 10. o. (Hódmezővásárhely, Bethlen Gábor Református Gimn. és Szathmáry Koll.), Herczeg Viktória 10. o. (Hódmezővásárhely, Bethlen Gábor Református Gimn. és Szathmáry Koll.).

10–11. évfolyam



Czirják Márton Pál



Körmöndi Márk



Heteyi Dániel



Márfai Dóra



Beke Botond



Csiszár András



**Wodala Gréta
Klára**



Szabó Donát



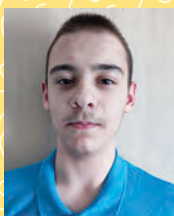
Balogh Péter



**Kiss Adorján
Timon**



Hodossy Réka



Guthy Gábor



Gyönki Dominik



Simon Bálint



**Christ Miranda
Anna**

- 1. sor:** Czirják Márton Pál 10. o. (Budapesti Fazekas Mihály Gyak. Ált. Isk. és Gimn.), Körmöndi Márk 10. o. (Szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimn.), Heteyi Dániel 10. o. (Győr, Révai Miklós Gimn. és Koll.), Márfai Dóra 11. o. (Szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimn.), Beke Botond 11. o. (Budapest, Békásmegyeri Veres Péter Gimn.).
- 2. sor:** Csiszár András 11. o. (Szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimn.), Wodala Gréta Klára 11. o. (Szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimn.), Szabó Donát 11. o. (Miskolci Herman Ottó Gimn.), Balogh Péter 11. o. (Szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimn.), Kiss Adorján Timon 11. o. (Kaposvári Táncsics Mihály Gimnázium).
- 3. sor:** Hodossy Réka 11. o. (Balassagyarmati Balassi Bálint Gimn.), Guthy Gábor 11. o. (Debreceni Fazekas Mihály Gimn.), Gyönki Dominik 11. o. (Eger, Neumann János Gimn., Techn. és Koll.), Simon Bálint 11. o. (Miskolc, Földes Ferenc Gimn.), Christ Miranda Anna 11. o. (Budapesti Fazekas Mihály Gyak. Ált. Isk. és Gimnázium).

11–12. évfolyam



**Kovács Benedek
Noel**



Nagy Korina



Sütő Áron



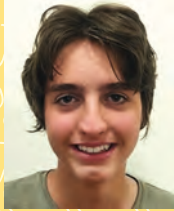
Foris Dávid



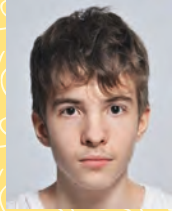
Klement Tamás



Tarján Bernát



Virág Rudolf



Zömbik Barnabás



**Seprődi Barnabás
Bendegúz**



**Virág Lénárd
Dániel**



Főrizs Emma



Fehérvári Donát



Kovács Kristóf



Csóka Péter



Szabó Levente

- 1. sor:** Kovács Benedek Noel 11. o. (Budapesti Fazekas Mihály Gyak. Ált. Isk. és Gimn.), Nagy Korina 11. o. (Kecskeméti Bányai Júlia Gimn.), Sütő Áron 11. o. (Eger, Dobó István Gimn.), Foris Dávid 12. o. (Gödöllői Török Ignác Gimn.), Klement Tamás 11. o. (Pécsi Leőwey Klára Gimn.).
- 2. sor:** Tarján Bernát 12. o. (Budapest, Békásmegyeri Veres Péter Gimn.), Virág Rudolf 12. o. (Budapesti Fazekas Mihály Gyak. Ált. Isk. és Gimn.), Zömbik Barnabás 12. o. (Budapest, V. Kerületi Eötvös József Gimn.), Seprődi Barnabás Bendegúz 12. o. (Budapest, Óbudai Árpád Gimn.), Virág Lénárd Dániel 11. o. (Budapest, ELTE Apáczai Csere János Gyak. Gimn. és Koll.).
- 3. sor:** Főrizs Emma 12. o. (Budapest, V. Kerületi Eötvös József Gimn.), Fehérvári Donát 12. o. (Miskolc, Földes Ferenc Gimn.), Kovács Kristóf 12. o. (Révkomárom, Selye János Gimn.), Csóka Péter 12. o. (Pécsi Janus Pannonius Gimn.), Szabó Levente 12. o. (Budapest, Szent István Gimn.).

Békásmegyeri Veres Péter Gimnázium 1 versenyző (P, G: 1/68; Marsiczki Roland, Rakovszky Andorás),
Berzsenyi Dániel Gimnázium 4 versenyző (P, G: 1/50; M: 3/53; Baranyai Klára),
Budai Ciszterci Szent Imre Gimnázium 1 versenyző (P, G: 1/68; Stirling Anna),
Budapest V. Kerületi Eötvös József Gimnázium 3 versenyző (P, G: 3/317; Holicsné Csejki Gabriella, Varga Balázs),
Budapest XVI. Kerületi Szerb Antal Gimnázium 1 versenyző (P, G: 1/90; Köles Gábor),
Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 9 versenyző (P, G: 9/861; Nagy Piroska Mária, Schramek Anikó),
ELTE Apáczai Csere János Gyakorló Gimnázium és Kollégium 28 versenyző (P, G: 28/1750; M: 1/54; Deák Márta, Gyertyán Attila, Suta Judit, Szentivánszki Soma, Vass Miklos, Zsigri Ferenc),
Óbudai Árpád Gimnázium 2 versenyző (P, G: 2/229; Gärtner István, Tarr Levente),
Piarista Gimnázium 1 versenyző (P, G: 1/78; M: 1/13; Chikán Éva),
Szent István Gimnázium 1 versenyző (P, G: 1/147),
Városmajori Gimnázium 12 versenyző (P, G: 12/935; Ábrám László).

CSONGRÁD-CSANÁD VÁRMEGYE

Hódmezővásárhely:

Bethlen Gábor Református Gimnázium és Szathmáry Kollégium 3 versenyző (P, G: 3/249; M: 1/10; Berecz János, Kovács Eszter).

Szeged:

SZTE Gyakorló Gimnázium és Általános Iskola 2 versenyző (P, G: 2/155),
Szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium 32 versenyző (P, G: 32/1668; M: 1/11; Csányi Sándor, Horváthné Fazekas Erika, Mike Péter, Vincze István).

HAJDÚ-BIHAR VÁRMEGYE

Debrecen:

Debreceni Ady Endre Gimnázium 1 versenyző (P, G: 1/47),
Debreceni Református Kollégium Dóczy Gimnáziuma 1 versenyző (P, G: 1/109; Tófalusi Péter),
Tóth Árpád Gimnázium 3 versenyző (M: 3/33).

HEVES VÁRMEGYE

Eger:

Dobó István Gimnázium 3 versenyző (P, G: 3/200; Pecsénye Pál).

JÁSZ-NAGYKUN-SZOLNOK VÁRMEGYE

Szolnok:

Verseyhy Ferenc Gimnázium 1 versenyző (P, G: 1/141).

KOMÁROM-ESZTERGOM VÁRMEGYE

Tata:

Tatai Református Gimnázium 1 versenyző (P, G: 1/75; Illés Dániel).

PEST VÁRMEGYE

Cegléd:

Ceglédi Kossuth Lajos Gimnázium 1 versenyző (P, G: 1/97).

Dunakeszi:

Dunakeszi Radnóti Miklós Gimnázium 1 versenyző (P, G: 1/72; Horváth Henrietta).

SOMOGY VÁRMEGYE

Kaposvár:

Kaposvári Táncsics Mihály Gimnázium 1 versenyző (P, G: 1/150; Hunka Gáborné).

VAS VÁRMEGYE

Szombathely:

ELTE Bolyai János Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 1 versenyző (P, G: 1/70; Pájer Szabolcs).

ZALA VÁRMEGYE

Zalaegerszeg:

Zalaegerszegi Zrínyi Miklós Gimnázium 7 versenyző (P, G: 7/342; Bóbics Lilla, Kovács Tibor).

HATÁRON TÚLRÓL

HONGKONG

Hongkong:

Sha Tin College 1 versenyző (P, G: 1/17).

NÉMETORSZÁG

Neufahrn bei Freising:

Oscar Maria Graf Gymnasium 1 versenyző (P, G: 1/76).

ROMÁNIA

Kolozsvár:

Spark Generation 1 versenyző (P, G: 1/56; Douglas Jake).

Székelyudvarhely:

Tamási Áron Gimnázium 7 versenyző (P, G: 3/296; M: 5/145).

SZLOVÁKIA

Révkomárom:

Selye János Gimnázium 10 versenyző (P, G: 8/623; M: 3/107; Hevesi Anikó, Kus-tyán Marianna).

A Középiskolai Matematika és Fizikai Lapok

74. évfolyamának tartalomjegyzéke (2024)

Közlemények:

Felhívás a 2024. évi Ankétra	322
Tájékoztató a folyóirat előfizetéséről ...	337

Versenyek, beszámolók:

Versenykiírás a KöMaL 2024–2025. évi pontversenyeire	337
A 2023–2024-es tanévi pontversenyek végeredménye	352
Kiosztották az idei Ericsson-díjakat	532
A 2023–2024-as tanév pontversenyeinek iskolánként összesített eredménye ...	560
A Középiskolai Matematika és Fizikai Lapok 74. évfolyamának tartalomjegyzéke (2024)	571
Néhányan a 2023–2024-es tanév legszorgalmasabb megoldói közül	

Helyesbítés: 168, 274, 557

MATEMATIKA

Közlemények:

Rázt Tanár Úr Életműdíj 2023	9
Matematikai képzések az ELTE TTK-n	31
Matematikatanár-képzés az ELTE TTK-n	32
63. Rázt László Vándorgyűlés	474
63. Rázt László Vándorgyűlés – A középiskolai tanárverseny feladatainak végeredménye és vázlatos megoldása	546

Versenyek, beszámolók:

Jelentés a 2023. évi Kürschák József Matematikai Tanulóversenyről	66
A 2023. évi Kürschák József Matematikai Tanulóverseny feladatainak megoldásai	68
Kiss Melinda Flóra, Baran Zsuzsa: Beszámoló a 2024. évi EGMO versenyről	258

Harangi Viktor: Beszámoló a 65. Nemzetközi Matematikai Diákolimpiáról	323
A 65. Nemzetközi Matematikai Diákolimpia feladatai	325
Olimpiai előkészítő szakkörök a 2024/25. tanévben	326
EGMO 2024/2025 felhívás	327
Kós Géza: A 65. Nemzetközi Matematikai Diákolimpia feladatainak megoldása, I.	402
A 65. Nemzetközi Matematikai Diákolimpia feladatainak megoldása, II. .	466
A 2024-es nyári dombóvár-gunarasi tábor	471

Cikkek:

Makay Géza: Matematika és informatika – kéz a kézben, avagy egy 2023-as Schweitzer példa előzménye	2
Kós Géza: Rejtvények, Ördöglakatok – Ördöglakatok az erdőből	10
Kós Géza: Rejtvények, Ördöglakatok – Képek és szögek	74
Kós Géza: Rejtvények, Ördöglakatok – Átbújtatás a köbön: a Meleda játék	130
Vígh Viktor: Képakasztó játék	132
Szmerka Gergely: Két nő az elsők között	154
Barbarics Márta: Matek az utcán – a matematika világnapja (π -nap) alkalmából	201
Kós Géza: Rejtvények, ördöglakatok – Ikrek: Bújj át a lyukon!	218
Kós Géza: Rejtvények, ördöglakatok – Átkelés a folyón	331
Vígh Viktor: Rejtvények, ördöglakatok .	406
Kincsek a KöMaL múltjából	409
Vígh Viktor: Rejtvények, ördöglakatok .	473
Vígh Viktor: Vágjuk két egyforma darabra!	530
Fried Katalin: Vektorok és bűvös négyzetek	554

Emelt szintű matematikai érettségi gyakorló feladatsorok és megoldásvázlatok:

<i>Tatár Zsuzsanna Mária:</i> Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire.....	12
<i>Kozma Katalin Abigél:</i> Megoldásvázlatok a 2023/9. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához...	14
<i>Egyed László:</i> Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire.....	77
<i>Tatár Zsuzsanna Mária:</i> Megoldásvázlatok a 2024/1. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához...	79
<i>Teleki Olivér:</i> Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire.....	143
<i>Egyed László:</i> Megoldásvázlatok a 2024/2. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához.....	146
<i>Róka Bálint:</i> Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire.....	205
<i>Teleki Olivér:</i> Megoldásvázlatok a 2024/3. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához.....	208
<i>Róka Bálint:</i> Megoldásvázlatok a 2024./4. szám feladatsorához.....	265
Az emelt szintű gyakorló feladatsorokról	265
<i>Kós Géza:</i> Rejtvények, ördöglakatok – Az amőba kabátja.....	275
<i>Kozma Katalin Abigél:</i> Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire.....	328
<i>Németh László:</i> Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire	417
<i>Kozma Katalin Abigél:</i> Megoldásvázlatok a 2024./6. szám matematika gyakorló feladatsorához.....	420
<i>Jócsik Csilla:</i> Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire.....	480
<i>Németh László:</i> Megoldásvázlatok a 2024./7. szám matematika gyakorló feladatsorához.....	483
<i>Tatár Zsuzsanna Mária:</i> Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire.....	533
<i>Jócsik Csilla:</i> Megoldásvázlatok a 2024./8. szám matematika gyakorló feladatsorához.....	536

Megoldások:

K/C gyakorlatok megoldásai:

793.....	88	778.....	277
----------	----	----------	-----

C gyakorlatok megoldásai:

1728.....	89	1792.....	332
1773.....	158	1803.....	492
1790.....	278		

B feladatok megoldásai:

5305.....	21	5390.....	429
5344., 5347.....	90	5400.....	551
5339.....	220		

Nehezebb feladatok (A) megoldásai:

863.....	92	865.....	282
----------	----	----------	-----

Kitűzések:

A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok:

794–798.....	27	819–823.....	348
799–803.....	96	824–828.....	431
804–808.....	159	829–833.....	493
809–813.....	224	834–838.....	557
814–818.....	288		

A K/C pontversenyben kitűzött gyakorlatok:

797–798.....	28	822–823.....	349
799–800.....	97	827–828.....	431
807–808.....	160	832–833.....	494
812–813.....	225	837–838.....	558
817–818.....	289		

A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok:

1793–1797.....	28	1818–1822.....	349
1798–1802.....	97	1823–1827.....	431
1803–1807.....	160	1828–1832.....	494
1808–1812.....	225	1833–1837.....	558
1813–1817.....	289		

A B pontversenyben kitűzött feladatok:

5358–5365.....	29	5382–5389.....	226
5366–5373.....	99	5390–5397.....	290
5374–5381.....	161	5398–5405.....	350

5406–5413.	433	5422–5429.	577
5414–5421.	495		

Az A pontversenyben kitűzött feladatok:

869–871.	30	884–886.	351
872–874.	100	887–889.	434
875–877.	163	890–892.	497
878–880.	227	893–895.	578
881–883.	291		

Angol nyelvű kivonatok:

New exercises for practice, problems and advanced problems: 61, 125, 189, 254, 317, 397, 461, 525, 605	
Problems of the 2023 Kürschák competition	127

INFORMATIKA

Az I pontversenyben kitűzött feladatok:

611–614.	33	619–622.	164
615–618.	101	623–626.	228

627–630.	292	639–642.	498
631–634.	372	643–646.	579
635–638.	435		

FIZIKA

Közlemények:

Fizika alapszak és fizikatanár-képzés az ELTE TTK Fizikai Intézetében ...	38
Felhívás az idei Kunfalvi Rezső Olimpiai Válogatóversenyre	121
Felhívás a Fagypont Fizikátáborra ...	524

Versenyek, beszámolók:

Beszámoló a 2023. évi Eötvös-versenyről	41
Ifjú Fizikusok Nemzetközi Versenye, Versenyfelhívás és beszámoló	441

Cikkek:

<i>Kiss Adorján Timon, Puppi Barna, Trembeczki Csaba:</i> A P. 5534. fizika feladat matematikai margójára	194
<i>Gnädig Péter:</i> Komplex számok a fizikában, I. rész: A komplex számok mechanikai alkalmazásai	233
<i>Olosz Balázs:</i> Komplex számok a fizikában, II. rész: Váltóáramú feladatok megoldása komplex számokkal	297

<i>Gnädig Péter:</i> Matematikai eredmények – fizikai megfontolásokkal	303
<i>Szász Krisztián, Vankó Péter:</i> Beszámoló a 8. Európai Fizikai Diákolimpiáról	377
<i>Csóka Péter, Seprődi Barnabás:</i> Fizika problémák megoldása numerikus módszerrel	505

Megoldások:

A mérési feladatok megoldása:

425.	50	429.	382
426.	105	430.	443
427.	169	432.	511

A fizika gyakorlatok megoldása:

824., 828.	110	844., 848., 851.	386
830.	176	855., 856.	446
839.	242	853.	513
838.	305	857., 864.	585

A fizika feladatok megoldása:

5499., 5504., 5506.	54
--------------------------	----

5509., 5511., 5516.	114
5514., 5517., 5518., 5528.	177
5532., 5534.	245
5520., 5529., 5543.	308
5531., 5537., 5540.	389
5547., 5548., 5555., 5566.	449
5549., 5556., 5557.	515
5558., 5564., 5565., 5577., 5580., 5582.,	
5583., 5588.	588

Kitűzések:

Kitűzött mérési feladatok:

428.	58	433.	394
429.	122	434.	457
430.	186	435.	519
431.	250	436.	602
432.	313		

Kitűzött gyakorlatok:

837–840.	58	857–860.	394
841–844.	122	861–864.	457
845–848.	186	865–868.	519
849–852.	250	869–872.	602
853–855.	313		

Kitűzött elméleti feladatok:

5535–5543.	58	5571–5579.	313
5544–5552.	122	5580–5588.	394
5553–5561.	186	5589–5597.	457
5562–5570.,		5598–5606.	519
Áprilisi pótfel-		5607–5615.	602
adat.)	250		

Angol nyelvű kivonatok:

Problems in Physics 63, 127, 191, 255, 319, 399, 463, 527, 607

A pontversenyben megoldott és kitűzött matematika és fizika példák csoportosítása tárgykörök szerint

A példák száma mögött zárójelben az oldalszám olvasható, ha két szám fordul elő, az első a kitűzés, a második a megoldás helyét jelöli. A matematika feladatok felsorolásának sorrendje: A jelű nehezebb feladatok, B feladatok, C gyakorlatok, K gyakorlatok, K/C gyakorlatok. A fizika feladatok felsorolásának sorrendje: M mérési feladatok, G gyakorlatok, P feladatok.

MATEMATIKA

Aritmetika, algebra (műveletek számokkal, kifejezésekkel, azonosságok):

A. 869 (30); 882 (291); 886 (351); 892 (497); – B. 5347 (91); 5358 (29); 5370 (99); 5400 (350., 551); 5401 (350); 5406 (433); – C. 1820 (349); 1823 (431); 1828 (494); 1830 (494); 1837 (560); – K. 794 (27); 799 (96); 814 (288); 816 (288); 820 (348); 830 (493); 835 (558); – K/C. 793 (88); 808 (160); 817 (288); 828 (431).

Számelméleti feladatok (egész számok, prím-számok, oszthatóság, számrendszerek):

– A. 882 (291); 886 (351); 892 (497);
– B. 5347 (91); 5361 (29); 5366 (99); 5375 (162); 5376 (162); 5378 (162); 5382 (226); 5395 (291); 5399 (350); 5405

(351); 5406 (433); 5407 (433); 5419 (496); 5422 (577); 5423 (577); 5428 (578); – C. 1800 (98); 1803 (160., 492); 1808 (225); 1813 (289); 1818 (349); 1822 (349); 1828 (494); 1833 (559); – K. 800 (96); 809 (224); 816 (288); 826 (431); 829 (493); – K.C. 812 (224); 817 (288); 828 (431); 838 (558).

Halmazok (ponthalmazok is):

A. 872 (100); – C. 1830 (494); – K/C. 803 (97).

Valószínűség, kombinatorika, statisztika (kiválasztás, leszámolás, binomiális együtthatók):

B. 5361 (29); 5364 (29); 5368 (99); 5372 (100); 5386 (226); 5388 (226); 5409 (433); 5411 (433); 5415 (495); 5424 (577); 5426 (577); – C. 1806 (161);

1817 (290); 1818 (349); 1821 (349);
1824 (432); – K. 795 (27); 804 (159);
– K/C. 807 (159); 832 (493).

Logikai kérdések (játékok, színezések, táblázatok, sakktábla):

A. 874 (100); 879 (227); 881 (291); 884 (351); 890 (497); 893 (578); – B. 5368 (99); 5400 (350., 551); 5420 (496); – C. 1808 (225); K. 811 (224); 819 (348); 824 (431); 830 (493); 834 (558); – K/C. 793 (88); 832 (493); 837 (558).

Egyenletek (arányosság, százalék):

B. 5344 (90); 5375 (162); – C. 1798 (97); 1805 (160); 1810 (225); 1811 (225); – K. 794 (27).

Speciális egyenletek (egész rész, törtrész, exponenciális, logaritmikus):

B. 5365 (30); 5411 (433); 5423 (577); – C. 1728 (89); 1773 (158); 1795 (28); 1835 (559).

Egyenletrendszerek:

B. 5400 (350., 551); 5416 (495); – C. 1815 (289); 1831 (495); 1833 (559); – K/C. 803 (97).

Egyenlőtlenségek, becslések (geometriai is):

A. 869 (30); 889 (434); – B. 5370 (99); 5376 (162); 5377 (162); 5378 (162); 5382 (226); 5384 (226); 5417 (495); – C. 1790 (278); 1797 (28); 1820 (349); 1826 (432); 1836 (560); 1837 (560); – K. 806 (159).

Függvények (szélsőérték, határérték, függvényvizsgálat):

A. 869 (30); 874 (100); 880 (227); 883 (291); 895 (579); – B. 5380 (162); 5416 (495); – C. 1790 (278); 1793 (28); 1811 (225); – K. 801 (96).

Polinomok:

B. 5364 (29); 5373 (100); 5380 (162); 5390 (290., 429).

Sorozatok:

A. 872 (100); 883 (291); – B. 5361 (29); 5407 (433); – C. 1801 (98); – K. 805 (159); 809 (224).

Gráfok:

A. 870 (30); 887 (434); 888 (434); – B. 5388 (226); 5397 (291); 5403 (350); 5412 (434).

Síkmértani bizonyítások:

A. 871 (30); 873 (100); 878 (227); 885 (351); 891 (497); – B. 5305 (21); 5339 (220); 5360 (29); 5367 (99); 5369 (99); 5371 (99); 5374 (161); 5379 (162); 5381 (162); 5383 (226); 5389 (226); 5392 (290); 5394 (290); 5398 (350); 5402 (350); 5404 (350); 5408 (433); 5410 (433); 5413 (434); 5418 (496); 5421 (496); 5425 (577); 5427 (577); 5429 (578); – C. 1792 (332); 1794 (28); 1802 (98); 1804 (160); 1807 (161); 1809 (225); 1812 (225); 1819 (349); 1822 (349); 1825 (432); 1827 (432); 1829 (494); 1836 (560); – K. 810 (224); K/C. 802 (97); 822 (348); 823 (348); 827 (431); 833 (494).

Síkmértani számítások:

B. 5359 (29); 5362 (29); 5383 (226); 5385 (226); 5391 (290); 5402 (350); 5408 (433); 5410 (433); 5414 (495); – C. 1799 (98); 1802 (98); 1814 (289); 1819 (349); 1829 (494); 1832 (495); 1834 (559); – K. 796 (27); 810 (224); 815 (288); 831 (493); 836 (558); – K/C. 778 (277); 797 (27); 798 (27); 813 (224); 818 (288); 822 (348); 823 (348); 827 (431); 833 (494).

Kombinatorikus geometria, síkidomok darabolása, sík lefedése:

A. 887 (434); – B. 5387 (226); – K. 825 (431).

Mértani helyek:

A. 871 (30).

Koordinátagometria:

C. 1811 (225); 1837 (560).

Trigonometria, goniometria:

B. 5393 (290); – C. 1812 (225); 1827 (432).

Térmértani bizonyítások:

A. 894 (578); – B. 5367 (99); 5372 (100); – C. 1796 (28).

Térmértani számítások (térelemek távolsága, szöge, felszín, térfogat):

B. 5363 (29); 5396 (291); – C. 1796 (28); 1816 (289); – K. 801 (96); 821 (348); – K/C. 798 (27).

Kinematika:

G. 839 (59., 242); 842 (122); 845 (187); 853 (313., 513); 861 (457); 865 (519); – M. 433 (394); – P. 5509 (114); 5536 (59); 5544 (122); 5546 (123); 5553 (187); 5571 (314); 5580 (395., 593); 5589 (458); 5601 (522); 5607 (587); 5608 (587).

Pontmechanika:

G. 828 (112); 840 (59); 849 (250); 857 (394., 585); 862 (458); 870 (587); – M. 427 (169); 436 (586); – P. 5499 (54); 5517 (182); 5534 (246); 5537 (59., 390); 5538 (60); 5541 (60); 5547 (123., 449); 5548 (123., 450); 5555 (188., 452); 5556 (188., 516); 5562 (251); 5563 (251); 5566 (252., 453); 5568 (252); 5572 (315); 5581 (395); 5582 (395., 595); 5590 (459); 5598 (521); 5599 (522); 5606 (524); 5608 (587); 5610 (588).

Merev testek mechanikája:

G. 830 (176); 859 (394); 869 (586); – G. 434 (457); 435 (519); – P. 5511 (117); 5516 (118); 5528 (185); 5539 (60); 5549 (124., 515); 5557 (188., 518); 5564 (251., 589); 5573 (315); 5583 (395., 596); 5591 (459); 5598 (521); 5600 (522); 5609 (587); 5611 (588).

Kötelek, láncok, granulált anyagok mechanikája:

G. 824 (110); – M. 432 (313); 432 (511); – P. 5518 (184); 5561 (189); 5565 (251., 590); 5592 (459); 5601 (522).

Rugalmasságtan:

M. 430 (186., 443); 436 (586); – P. 5539 (60); 5572 (315).

Hangtan:

P. 5560 (189).

Folyadékok és gázok mechanikája:

G. 846 (187); 854 (314); 863 (458); 866 (519); 870 (587); – M. 426 (105); 429 (122., 382); 435 (519); – P. 5529 (309); 5535 (59); 5584 (396).

Fénytan:

G. 838 (59., 305); 843 (122); 848 (187., 387); 851 (250., 388); 855 (314., 446); – M. 431 (250); – P. 5531 (389); 5543 (61., 310); 5550 (124); 5559 (188); 5577 (317., 592); 5586 (396); 5595 (460); 5603 (523).

Hőtan:

G. 840 (59); 844 (122., 386); 867 (520); 871 (587); – M. 428 (58); – P. 5520 (308); 5540 (60., 392); 5545 (123); 5554 (187); 5567 (252); 5574 (315); 5585 (396); 5593 (460); 5602 (523); 5612 (588).

Csillagászat, asztrofizika:

G. 856 (314., 447); 858 (394); – P. 5514 (177); 5556 (188., 516); 5579 (317); 5582 (395., 595); 5587 (396); 5597 (461); 5610 (588).

Statisztikus fizika:

G. 837 (58).

Elektrosztatika:

P. 5514 (177); 5552 (124); 5575 (316); 5588 (396., 599); 5594 (460); 5613 (588).

Magnetosztatika:

P. 5504 (56); 5552 (124); 5558 (188., 588); 5568 (252).

Elektrodinamika:

P. 5532 (245); 5613 (588).

Egyenáramú hálózatok:

G. 847 (187); 850 (250); 860 (394); 864 (458., 586); 868 (521); 872 (587); – P. 5604 (523).

Váltakozóáramú hálózatok:

M. 428 (58); – P. 5542 (61); 5570 (253); 5576 (316); 5615 (588).

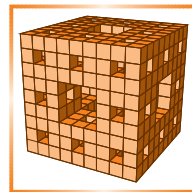
Atomfizika és magfizika:

G. 852 (251); – P. 5506 (57); 5541 (60); 5551 (124); 5569 (253); 5578 (317); 5605 (524); 5614 (588).

Egyéb:

G. 837 (58); 841 (122); – M. 425 (50); 432 (313., 511); – G. 5532 (245); 5560 (189); 5561 (189); 5587 (396); 5596 (461). – Áprilisi pótfeladat. (253., 311).

A B pontversenyben kitűzött feladatok (5422–5429.)



B. 5422. Két természetes szám egymás *rokona*, ha legfeljebb egy számjegyük különbözik. Van-e olyan szám, amelynek minden rokona összetett?

(3 pont)

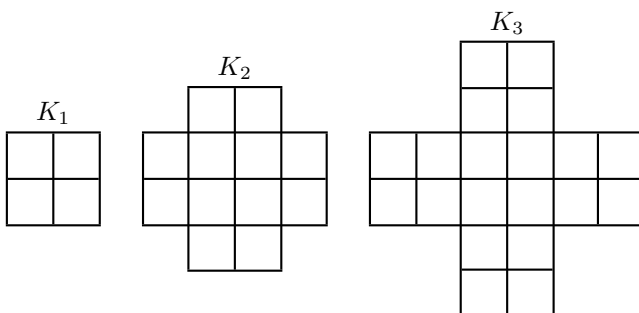
Javasolta: *Lovas Márton* (Budakalász)

B. 5423. Az x szám törtresztét $\{x\}$ jelöli. Létezik-e olyan n pozitív egész szám, amelyre $\{\sqrt{2}n\} \cdot \left\{\frac{n}{\sqrt{2}}\right\}$ racionális?

(3 pont)

Javasolta: *Hujter Bálint* (Budapest)

B. 5424. Tetszőleges pozitív egész n esetén K_n -nel jelöljük azt az alakzatot, amelyet úgy kapunk, hogy egy $(2n) \times (2n)$ méretű „sakktábla” mind a négy sarkából kivágunk egy-egy $(n-1) \times (n-1)$ nagyságú négyzetet, az ábráknak megfelelően.



Jelöljük a_n -nel azt, ahányféleképpen lefedhető K_n hézag- és átfedésmentesen (2×1) -es dominókkal. (Például $a_1 = 2$, illetve $a_2 = 8$.) Igazoljuk, hogy $2a_n$ minden n -re négyzetszám.

(4 pont)

Javasolta: *Sztranyák Attila* (Budapest)

B. 5425. Legyen $ABCD$ húrnégyszög köré írt körének középpontja O , az AC átlójának felezőpontja pedig E . Tegyük fel továbbá, hogy O és E különbözőek. Mutassuk meg, hogy ha $OEBD$ is húrnégyszög, akkor EC felezi a DEB szöget.

(4 pont)

Javasolta: *Somogyi Ákos* (London)

B. 5426. Ugri, a szöcske a számegyenes pozitív egész számain ugrál úgy, hogy mindegyiket pontosan egyszer látogatja meg. Lehetséges-e, hogy ugrásainak hosszai között minden pozitív egész pontosan egyszer szerepel?

(5 pont)

Javasolta: *Lovas Márton* (Budakalász)

B. 5427. Az ABC háromszög belső pontja P . Az AP , BP és CP egyenesek a BC , CA és AB oldalakat rendre az L , M és N pontokban metszik. Mutassuk meg, hogy P pontosan akkor súlypontja ABC -nek, ha súlypontja LMN -nek.

(5 pont)

Crux Mathematicorum

B. 5428. Oldjuk meg a következő egyenletet a nemnegatív egész számok halmazaán: $5^a + 12^b = 13^c$.

(6 pont)

Javasolta: *Somogyi Ákos* (London)

B. 5429. Tetszőleges X , Y , Z pontokra jelölje $[XYZ]$ az XYZ háromszög területét. Mutassuk meg, hogy ha az A , B , C , D , E , F pontok egy nem elfajuló kúpszeletre esnek, akkor

$$[ABC] \cdot [CDE] \cdot [EFA] \cdot [BDF] = [BCD] \cdot [DEF] \cdot [FAB] \cdot [ACE].$$

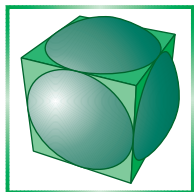
(6 pont)

Javasolta: *Kós Géza* (Budapest)



Beküldési határidő: 2025. január 10.

Elektronikus munkafüzet: <https://www.komal.hu/munkafuzet>



Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (893–895.)

A. 893. Egy szövegszerkesztő programban kezdetben egy lábnyom jel (L) szerepel, amelyet szeretnénk megsokszorozni. Sajnos hekkertámadás áldozata lett a gépünk, és csak két funkció működik: a Másolás és a Beillesztés, ráadásul mindkettő 1 Dürer dollárba kerül használatonként. A Másolás funkció használatakor kijelölhetünk egy vagy több egymás utáni jelet a meglévők közül, és a gép megjegyzi azok darabszámát. A Beillesztés funkció használatakor annyi új lábnyom jelet tesz hozzá a gép a jelsorozathoz, amennyit a legutóbbi Másolásnál kijelöltünk. Ha még nem Másoltunk, nem használhatjuk a Beillesztést. Jelölje $D(n)$ azt, hogy legkevesebb hány Dürer dollár kell ahhoz, hogy pontosan n darab lábnyom jelet kapjunk. Bizonyítsuk be, hogy bármilyen pozitív egész k -ra létezik olyan N pozitív egész szám, amelyre

$$D(N) = D(N+1) + 1 = D(N+2) = D(N+3) + 1 = D(N+4) = \dots \\ \dots = D(N+2k-1) + 1 = D(N+2k).$$

Dürer Verseny feladat alapján

A. 894. Az $ABCDE$ konvex poliéder olyan, hogy a DE szakasz az ABC háromszög síkját a háromszög belsejében metszi el. Forgassuk el a D pontot az AB , BC , CA egyenesek körül kifelé az ABC síkba; a kapott pontok legyenek D_1 , D_2 és D_3 . Hasonlóan, az E pontot is forgassuk az ABC síkba az AB , BC , CA egyenesek körül kifelé; a kapott pontok legyenek E_1 , E_2 és E_3 .

Mutassuk meg, hogy ha a poliédernek van beírt gömbje, akkor a $D_1D_2D_3$ és az $E_1E_2E_3$ háromszögek köréírt körei koncentrikusak.

JavaSolta: Kós Géza (Budapest)

A. 895. Nevezzünk egy $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt *gyengén periodikusnak*, ha folytonos és $f(x+1) = f(f(x)) + 1$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén.

a) Létezik-e olyan gyengén periodikus függvény, amelyre $f(x) > x$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén?

b) Létezik-e olyan gyengén periodikus függvény, amelyre $f(x) < x$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén?

JavaSolta: Imolay András (Budapest)



Beküldési határidő: 2025. január 10.

Elektronikus munkafüzet: <https://www.komal.hu/munkafuzet>



Informatikából kitűzött feladatok (643–646.)



I. 643. Készítsünk programot, amely egy pozitív egész számról megállapítja, hogy a szám osztói négyzetösszegének osztója-e maga a szám.

A program standard bemenetének egyetlen sorában az N ($1 \leq N \leq 10\,000$) pozitív egész szám áll.

A program a standard kimenet egyetlen sorába az IGEN vagy a NEM szöveget írja ki, attól függően, hogy a szám osztója-e az osztói négyzetösszegének.

Példa:

Bemenet	Kimenet
175	IGEN

Magyarázat: a 175 osztói 1, 5, 7, 25, 35, 175, amelyek négyzetösszege 32550, ami 175 többszöröse.

Beküldendő egy tömörített *i643.zip* állományban a program forráskódja és rövid dokumentációja, amely megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben fordítható.

(10 pont)

I. 644. Egy 30×30 -as négyzetháló véletlenszerűen választott 9 mezőjében elhelyezzük 1-től 9-ig a számokat. Tekintsük úgy, hogy ezek a számok a négyzethálón egy útvonal egyes állomásait mutatják. A négyzetháló egy mezőjéről csak a vele élszomszédos mezőre lehet lépni, így pl. a $(3; 5)$ mezőről a $(7; 8)$ mezőre például 7 lépésben el lehet jutni útközben 6 mezőt érintve.

Készítsünk táblázatkezelő munkafüzetet, amelyben megoldjuk a következő feladatokat. A megoldás során csak a táblázatkezelő beépített függvényeit használjuk, saját kódot vagy makrót ne alkalmazzunk.

1. Egy munkalapon alakítsunk ki az A1-es cellától kiindulva a feladatban szereplő 30×30 -as táblázatrészt, amelyben az oszlopok és sorok magassága egyenlő érték.
2. A táblázatrészben jelöljük 1-től 30-ig a mezők X és Y koordinátáit a mintához hasonlóan.
3. A négyzethálót tartalmazó táblázatrészben állítsunk be a celláknak vékony szegélyt, és igazítsuk a cellák tartalmát vízszintesen és függőlegesen középre.
4. Helyezzük el 1-től 9-ig a számokat a négyzetháló valamely 9 mezőjében.
5. Állítsunk be feltételes formázást a négyzetháló celláiban, amely a nem üres cellák hátterét világoskék színnel jeleníti meg, valamint a cella tartalmát fehér színű, felkövér betűvel mutatja.
6. A négyzethálótól jobbra vegyünk fel egy másik táblázatrészt a mintához hasonlóan. Ebben részben adjuk meg az útvonal állomásait 1-től 9-ig.
7. Keressük meg képletek és/vagy segéd táblázatok alkalmazásával, hogy az egyes állomások hol találhatóak a négyzethálón. A kapott X és Y értékeket a sorszámok mellett jelenítsük meg.
8. Adjuk meg képlet segítségével, hogy az egymást követő állomások között legkevesebb hány lépést kell megtennünk a négyzethálón haladva. Az eredményeket a mintának megfelelően adjuk meg az állomások mellett.
9. Ezen táblázatrész alatt adjuk meg képlet segítségével a legrövidebb útszakasz kezdő és végső állomásának számát, és jelenítsük meg az eredményeket a mintának megfelelően.

10. Adjuk meg a legrövidebb útszakasz egy lehetséges bejárását az érintett mezők koordinátáinak megjelenítésével az előző eredmények alatt. A megoldáshoz képletet és/vagy segédcellákat alkalmazzunk. Feltehetjük, hogy nem lesz 14 lépésnél hosszabb a legrövidebb útvonal.

Minta:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	AA	AB	AC	AD	AE	AF	AG	AH	AI	AJ	AK	AL
1		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30				Áll	X	Y	Lép
2	1																																		1	6	5	
3	2																																		2	22	8	19
4	3														9																				3	24	24	18
5	4																																		4	16	24	8
6	5						1																												5	18	12	14
7	6																																		6	9	19	16
8	7																																		7	26	15	21
9	8																					2												8	4	25	32	
10	9																																		9	14	3	32
11	10																																					
12	11																																					
13	12																																					
14	13																																					
15	14																																					
16	15																																					
17	16																																					
18	17																																					
19	18																																					
20	19																																					
21	20																																					
22	21																																					
23	22																																					
24	23																																					
25	24																																					
26	25																																					
27	26																																					
28	27																																					
29	28																																					
30	29																																					
31	30																																					
32																																						

Legrövidebb szakasz			
Indul	Vége		
3	4		

Lépések	
23	24
22	24
21	24
20	24
19	24
18	24
17	24
16	24

11. Formázzuk az előző feladatokban szereplő táblázatrészeket is a mintának megfelelően.

Beküldendő egy tömörített *i644.zip* állományban a megoldást adó munkafüzet, valamint egy rövid dokumentáció, amely megadja az alkalmazott táblázatkezelő nevét és verzióját.

(10 pont)

I. 645. A diafilmek nézése újra népszerű, és olvasása minden gyereknek, felnőttnek örömet szerez. A Magyarországon megjelent oktató, ismeretterjesztő és szórakoztatási célokat szolgáló diafilmeket a Diafilm-történeti Gyűjtemény gyűjti és rendszerezi (*virtuális Diamúzeum*: <http://dia.osaarchivum.org/public/index.php>). A gyűjtemény mesediafilmjeinek adatai a *film.txt*, a *kapcsolo.txt* és a *kiado.txt* állományokban állnak rendelkezésre.

A feladat megoldásához a digitális kultúra emelt szintű érettségien használható XAMPP használatát javasoljuk.

1. Készítsünk új adatbázist *diafilmek* néven. A mellékelt állományokat (*film.txt*, *kapcsolok.txt*, *kiado.txt*) importáljuk az adatbázisba a fájlnevvvel azonos tábla-néven. Az állományok tabulátorral tagolt, UTF-8 kódolású szövegfájlok, az első soruk a mezőneveket tartalmazza. A létrehozás során állítsuk be a megfelelő típusokat és a kulcsokat. A táblák kialakításához vegyük figyelembe az alábbi táblaleírásokat és kapcsolatokat:

Tábla:

film (*id*, *cim*, *kiadasiev*, *kocka*, *színes*)

id a diafilm azonosítója (szám), ez a kulcs

cim a diafilm címe (szöveg)

kiadasiev a film kiadásának éve (szám), kitöltetlen, ha az adat ismeretlen

kocka a film diakockáinak száma (szám)

színes a film színes-e (logikai), ha színes, akkor igaz (1), ha fekete-fehér, akkor hamis (0)

kapcsolok (*filmid*, *kiadoid*)

filmid a diafilm azonosítója (szám), kulcs

kiadoid a kiadó azonosítója (szám), kulcs

kiado (*id*, *nev*)

id a kiadó azonosítója (szám), ez a kulcs

nev a kiadó neve (szöveg)



A következő feladatokat megoldó SQL parancsokat a *diafilm_megoldas.sql* nevű állományban rögzítsük a feladatok végén zárójelben megadott névvel. A javítás

során csak ennek az állománynak a tartalma lesz értékelve. Ügyeljünk arra, hogy a lekérdezésekben pontosan a kívánt mezők szerepeljenek, felesleges mezőket ne jelenítsünk meg.

2. Készítsünk lekérdezést, amely a kiadási év nélküli diafilmek címét és kockaszámát ábécérendben megjeleníti. (**2hianyos**)
3. Lekérdezés segítségével írassuk ki azoknak a diafilmeknek a címét, kockaszámát és kiadási évét, amelyekben szerepel a „**mazsola**” név. (**3mazsola**)
4. Készítsünk lekérdezést, amely megadja azoknak a diafilmeknek a címét, amelyeket több kiadó is megjelentetett. (**4tobb**)
5. Lekérdezés segítségével írassuk ki a legtöbb kiadást megélt diafilm címét és a kiadások számát. (**5nepszeru**)
6. Készítsünk lekérdezést, amely megadja, hogy évente hány diafilmet adtak ki. A számláláskor hagyjuk figyelmen kívül a kiadási évszámmal nem rendelkező filmeket. A listát darabszám szerint csökkenően jelenítsük meg. (**6idodb**)
7. Több diafilmet egyszerre, ugyanabban az évben, fekete-fehér és színes változatban is kiadtak. Lekérdezés segítségével gyűjtsük ki ezeknek a filmeknek a címét és kiadási évét. (**7egyszerre**)
8. Lekérdezés segítségével írassuk ki, hogy a filmek hány százaléka fekete-fehér. (**8mono**)
9. Lekérdezés segítségével listázzuk ki az „**Aranyfalu**” mese kiadója többi diafilmjének címét, a kiadás évét és a diakockák számát. A listában minden cím egyszer jelenjen meg, az „**Aranyfalu**” pedig ne szerepeljen benne. (**9aranyfalu**)

Letölthető állomány: *film.txt*, *kapcsolo.txt* és *kiado.txt*

Beküldendő egy tömörített *i645.zip* állományban az adatbázis exportját tartalmazó *diafilm.sql* és a feladatok megoldását tartalmazó *diafilm_megoldas.sql* nevű állomány.

(10 pont)

I. 646. A „*Lorem ipsum*” kezdetű szövegek véletlenszerűen egymás mellé helyezett latin szavakból állnak. A kapott mondatok nyelvtanilag nem helyesek, nincs értelmük, leginkább akkor használjuk őket, amikor rövidebb-hosszabb szövegre lenne szükségünk, melynek valójában csak a kinézetét, formázását akarjuk megvizsgálni.

Készítsünk programot, amely az angol nyelv weben előforduló 5000 leggyakoribb szavát felhasználva alkot mondatokat. A program B számú bekezdést hozzon létre, melyek mindegyikében M számú mondat, és egy-egy mondatban legfeljebb S szó szerepeljen.

A szövegben minden mondat végén pont álljon, a 10 szónál hosszabb mondatokban a szavak között egy helyen legyen egy vessző. A mondatok nagybetűvel

kezdődjenek, az írásjelek után és a szavak között egy szóköz szerepeljen. Az írásjelek előtt ne legyen szóköz.

A program olvassa be a honlapunkról letölthető eng5000.txt egyszerű szöveges állományt a mondatok elkészítéséhez. Az állományban gyakoriság szerint csökkenő sorrendben szerepelnek a szavak, illetve azok gyakorisága egy bizonyos méretű adathalmazon. A szavak véletlenszerű kiválasztását úgy oldjuk meg, hogy a létrehozott szövegben a szavak gyakoriság szerinti sorrendje közel egyező legyen azok eredeti gyakoriság szerinti sorrendjével.

A program standard bemenetének egyetlen sorában szóközzel elválasztva a bekezdések B ($1 \leq B \leq 100$) száma, az egy bekezdésben szereplő mondatok M ($1 \leq M \leq 20$) száma, illetve az egy mondatban legfeljebb előforduló szavak S ($1 \leq S \leq 30$) száma áll.

A program a standard kimenet B darab sorában adja meg a létrehozott szöveget.

Példa:

Bemenet	Egy lehetséges kimenet
2 4 24	Emerging www foundation, directors worldwide to largest island ways have remaining the is problems privacy though. In references button that full homepage australia position in years view now race, leaders for family city it ebay description compare community play. Progress hit for this matters will the you kitchen billy, was r and by local environmental drama. Products differences c function or, can other b is the links the so way mortgage twin and kill have and a. To of he another. Article the on the. At thu in that is index said. Education of within caribbean may an poker driver page food this threads returns date, yahoo page monthly rates or australian look age.

Forrás: <https://www.kaggle.com/datasets/rtatman/english-word-frequency/>

Letölthető állomány: eng500.txt

Beküldendő egy tömörített i646.zip állományban a program forráskódja és rövid dokumentációja, amely megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben fordítható.

(10 pont)

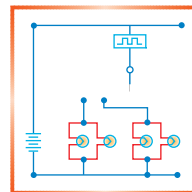


Beküldési határidő: 2025. január 15.

Elektronikus munkafüzet: <https://www.komal.hu/munkafuzet>



Fizika gyakorlatok megoldása



G. 857. Egy súrlódásmentes domb tetején áll egy kicsiny test. Ha kissé meglökjük, akkor 4 m/s sebességgel éri el a domb alját. Mekkora sebességgel érné el a lejtő alját, ha nem nyugalomból, hanem 3 m/s kezdősebességgel indítanánk el?

(3 pont)

I. megoldás. Az első esetben a kezdeti sebesség 0 , a végsebesség $v_1 = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, a második esetben a kezdeti sebesség $v_0 = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, a keresett végsebesség v_2 . Használjuk mindkét esetben a munkatételt ($W_{\text{neh}} = \Delta E_{\text{mozg}}$):

$$mgh = \frac{1}{2}mv_1^2 - 0,$$

$$mgh = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_0^2.$$

Rendezve:

$$2gh = v_1^2,$$

$$v_2^2 = v_0^2 + 2gh = v_0^2 + v_1^2,$$

amiből a keresett végsebesség:

$$v_2 = \sqrt{v_0^2 + v_1^2} = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Huba Zsombor (Pécsi Leówey Klára Gimn., 10. évf.)

II. megoldás. A test gyorsulása és a megtett út a két esetben megegyezik. Használjuk az I. megoldás jelöléseit, ezeken kívül az első esetben a lecsúszás idejét jelölje t_1 , a második esetben t_2 . A gyorsulás az első eset alapján:

$$a = \frac{v_1}{t_1},$$

a megtett utat pedig mindkét esetben felírjuk:

$$s = \frac{v_1}{2}t_1 \quad (1. \text{ eset}), \quad s = v_0t_2 + \frac{a}{2}t_2^2 = v_0t_2 + \frac{v_1}{2t_1}t_2^2 \quad (2. \text{ eset}).$$

A kettőt egyenlővé téve, rendezve, v_0 és v_1 numerikus értékét behelyettesítve, majd tovább alakítva:

$$\frac{v_1}{2}t_1 = v_0t_2 + \frac{v_1}{2t_1}t_2^2,$$

$$0 = t_2^2 + \frac{2v_0}{v_1}t_1t_2 - t_1^2,$$

$$0 = t_2^2 + \frac{3}{2}t_1t_2 - t_1^2,$$

$$0 = (t_2 + 2t_1)\left(t_2 - \frac{t_1}{2}\right).$$

A két zérushely közül a $t_2 = \frac{t_1}{2}$ pozitív. Tehát a második esetben feleannyi idő alatt jut le a test, és így a sebességváltozása is csak feleakkora, mint az első esetben. A keresett végsebesség ez alapján:

$$v_2 = v_0 + \frac{v_1}{2} = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Sógor-Jász Soma (Szegedi Radnóti M. Kísérleti Gimn., 9. évf.)

Megjegyzés. A másodfokú egyenletet *paraméteresen* megoldva:

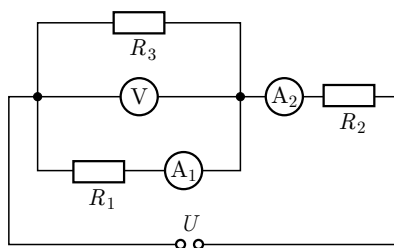
$$\frac{t_2}{t_1} = -\frac{v_0}{v_1} + \sqrt{\frac{v_0^2}{v_1^2} + 1},$$

amiből a keresett végsebesség (az I. megoldás paraméteres végeredményével összhangban):

$$v_2 = v_0 + \frac{t_2}{t_1} v_1 = \sqrt{v_0^2 + v_1^2}.$$

57 dolgozat érkezett. Helyes 46 megoldás. Kicsit hiányos (2 pont) 3, hiányos (1 pont) 3, hibás 4, nem értékelt 1 dolgozat.

G. 864. Az ábrán látható kapcsolási rajz szerint összeállított, $U = 24 \text{ V}$ egyenfeszültséget szolgáltató feszültségforrásról táplált áramkörben a voltmérőről 10 V , az A_1 ampermérőről $0,2 \text{ A}$, az A_2 ampermérőről pedig $0,7 \text{ A}$ olvasható le.



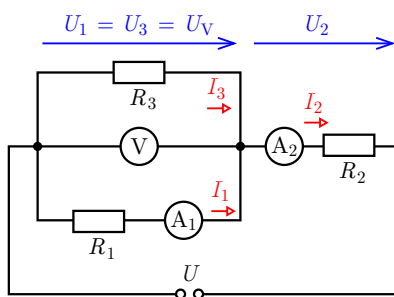
(4 pont)

a) Határozzuk meg az egyes ellenállások értékét!

b) Mennyi hő fejlődik 2 perc alatt az áramkörben?

Mindhárom mérőműszer ideálisnak tekinthető. A feszültségforrás belső ellenállása és az összekötő vezetékek ellenállása elhanyagolható.

Tornyai Sándor Fizikaverseny, Hódmezővásárhely



I. megoldás. a) A jelölések az ábrán láthatók. A három párhuzamosan kapcsolt ágon ugyanakkora feszültség esik:

$$U_1 = U_3 = U_V = 10 \text{ V},$$

a sorba kötött ellenálláson eső feszültség pedig:

$$U_2 = U - U_V = 24 \text{ V} - 10 \text{ V} = 14 \text{ V}.$$

Az I_1 és I_2 áramerősségek megegyeznek az A_1 és A_2 árammérők által mutatott értékekkel, a párhuzamosan kapcsolt ágba az áramerősség:

$$I_3 = I_2 - I_1 = 0,7 \text{ A} - 0,2 \text{ A} = 0,5 \text{ A}.$$

Az ellenállások értéke tehát az Ohm-törvény alapján:

$$R_1 = \frac{U_1}{I_1} = 50 \, \Omega, \quad R_2 = \frac{U_2}{I_2} = 20 \, \Omega, \quad R_3 = \frac{U_3}{I_3} = 20 \, \Omega.$$

b) Az ellenállásokon fejlődő hőteljesítmény megegyezik az áramkör teljes teljesítményével:

$$P = UI_2 = 16,8 \, \text{W},$$

amiből a 2 perc alatt fejlődő hő:

$$Q = Pt = 16,8 \, \text{W} \cdot 120 \, \text{s} = 2016 \, \text{J} \approx 2 \, \text{kJ}.$$

Szűcs Kitti (Kecskeméti Katona J. Gimn., 10. évf.)

II. megoldás. a) Mivel a voltmérő és R_1 párhuzamosan vannak kapcsolva, az R_1 ellenálláson is a voltmérőn leolvasott U_V feszültség esik. Az Ohm-törvény alapján:

$$R_1 = \frac{U_V}{I_1} = \frac{10 \, \text{V}}{0,2 \, \text{A}} = 50 \, \Omega.$$

Az R_2 ellenállás és a voltmérő sorosan vannak kapcsolva, tehát az R_2 ellenálláson eső feszültség:

$$U_2 = U - U_V = 24 \, \text{V} - 10 \, \text{V} = 14 \, \text{V},$$

amiből:

$$R_2 = \frac{U_2}{I_2} = \frac{14 \, \text{V}}{0,7 \, \text{A}} = 20 \, \Omega.$$

R_1 és R_3 párhuzamosan vannak kapcsolva, tehát $I_1 + I_3 = I_2$, amiből:

$$I_3 = I_2 - I_1 = 0,7 \, \text{A} - 0,2 \, \text{A} = 0,5 \, \text{A},$$

és így:

$$R_3 = \frac{U_V}{I_3} = \frac{10 \, \text{V}}{0,5 \, \text{A}} = 20 \, \Omega.$$

b) Az ellenállásokon leadott teljesítmény:

$$P_1 = U_V I_1 = 10 \, \text{V} \cdot 0,2 \, \text{A} = 2 \, \text{W},$$

$$P_2 = U_2 I_2 = 14 \, \text{V} \cdot 0,7 \, \text{A} = 9,8 \, \text{W},$$

$$P_3 = U_V I_3 = 10 \, \text{V} \cdot 0,5 \, \text{A} = 5 \, \text{W}.$$

Az összteljesítmény ezek összege:

$$P = P_1 + P_2 + P_3 = 16,8 \, \text{W},$$

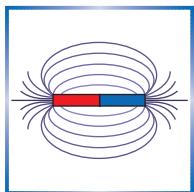
a 2 perc alatt fejlődő hő pedig:

$$Q = Pt = 16,8 \, \text{W} \cdot 120 \, \text{s} = 2016 \, \text{J} \approx 2 \, \text{kJ}.$$

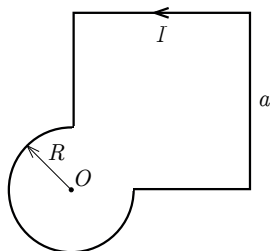
Patócs Péter (Budapest, Kempelen Farkas Gimn., 9. évf.)

Megjegyzés. A ma használt digitális voltmérők belső ellenállása legalább $1\text{ M}\Omega$, így a feladatban előforduló ellenállásokhoz képest nagyon nagy, „végtelennek” tekinthető, tehát az ideális műszer közelítés a voltmérő esetében mindenképp jogos. Az ampermérők belső ellenállása viszont a méréshatártól függően akár $1\text{ k}\Omega$ is lehet, ami egyáltalán nem elhanyagolható az ellenállások értéke mellett. (Épp ezért lehetőség szerint úgy kell kialakítani a mérőáramkört, hogy a voltmérő csak az ellenálláson eső feszültséget mérje, az ampermérőn esőt ne.) Esetünkben az lehet a megoldás, hogy az ampermérőt 10 A -es méréshatáron használjuk, ahol az ellenállása csak néhány tized ohm, ami ha nem is „nulla”, mint az ideális műszer esetében, de aránylag kicsi a feladatban szereplő ellenállások értékéhez viszonyítva. (Így viszont az áram értékét kevésbé pontosan tudjuk csak mérni.)

43 dolgozat érkezett. Helyes 35 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 6, hiányos (1–2 pont) 2 dolgozat.



Fizika feladatok megoldása



P. 5558. Az ábrán látható háromnegyed kör sugara R , a hiányos négyzet oldalainak hosszúsága a . A zárt vezető körben I erősségű áram folyik. Határozzuk meg a mágneses indukcióvektor értékét a kör O középpontjában!

Útmutatás: Egy ℓ oldalhosszúságú, I árammal átjárt, négyzet alakú vezetőkeret középpontjában a mágneses indukció értéke:

$$B = \frac{2\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi \ell}.$$

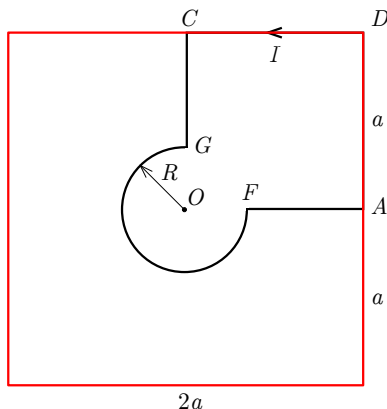
(4 pont)

Közli: Kotek László, Pécs

Megoldás. Az O középpontban a mágneses indukcióvektor értéke két tér szuperpozíciójaként értelmezhető. A hiányos négyzet és a háromnegyed kör által létrehozott indukció egyaránt az ábra síkjára merőleges és abból kifelé mutat, így a mágneses indukció nagysága a két érték összege lesz.

A hiányos négyzetből az FA és GC szakaszok nem hoznak létre mágneses indukciót O -ban, mivel a szakaszok meghosszabbítása átmeny az O ponton. Az AD és DC szakaszok által létrehozott indukció meghatározásához vegyünk fel egy $2a$ oldalhosszúságú, O középpontú négyzetet. Ez a négyzet

$$B^* = \frac{2\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi \cdot 2a} = \frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi a}$$



indukciót hozna létre a középpontjában. Az AD és DC szakaszok együttesen éppen a nagy négyzet negyedét adják, így az általuk létrehozott indukció:

$$B_1 = \frac{1}{4} \frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi a}.$$

A háromnegyed körvezető által létrehozott indukció a középpontban a Biot–Savart-törvény (vagy a teljes körvezető ismert $\frac{\mu_0 I}{2R}$ indukciója) alapján:

$$B_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R^2} \frac{3}{2} R\pi = \frac{3\mu_0 I}{8R}.$$

Így a mágneses indukció nagysága az O pontban:

$$B = B_1 + B_2 = \frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{4\pi a} + \frac{3\mu_0 I}{8R} = \mu_0 I \left(\frac{\sqrt{2}}{4\pi a} + \frac{3}{8R} \right).$$

Klement Tamás (Pécsi Leówey Klára Gimn., 11. évf.)

25 dolgozat érkezett. Helyes 15 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 8, hiányos (1 pont) 2 dolgozat.

P. 5564. Egy pingponglabda a vízszintes síkú pingpongütőn nyugszik. Az ütőt vízszintes irányban mozgatni kezdjük úgy, hogy az nulla kezdősebességű, A amplitúdójú, ω körfrekvenciájú rezgőmozgást végezzen. Adjuk meg a labda középpontjának elmozdulását az idő függvényében! Milyen hosszú nyomot hagy az enyhén begrafított labda az ütőn? (Tegyük fel, hogy a labda nem hagyja el az ütő felületét és nem csúszik meg rajta.)

(5 pont)

Közli: Vigh Máté, Biatorbágy

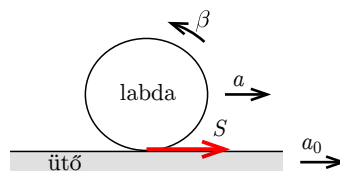
Megoldás. Legyen a labda tömege m , sugara R , tömegközéppontjának gyorsulása a , szöggyorsulása β . Az ütő gyorsulása a_0 , a labdára ható tapadási súrlódási erő S . A pozitív irányokat a mozgásról készített vázlatos oldalnézeti ábra mutatja.

A labda mozgásegyenletei:

$$\begin{aligned} ma &= S, \\ \Theta\beta &= SR, \end{aligned}$$

amiből

$$\beta = \frac{mR}{\Theta} a.$$



A tapadás miatt a labda ütővel érintkező pontjának gyorsulása minden időpillanatban megegyezik az ütő gyorsulásával:

$$a + R\beta = a_0.$$

Behelyettesítve β kifejezését

$$a \left(1 + \frac{mR^2}{\Theta} \right) = a_0,$$

és felhasználva, hogy a vékony falú gömbhéj tehetetlenségi nyomatéka $\Theta = \frac{2}{3}mR^2$:

$$a = \frac{2}{5}a_0.$$

A labda gyorsulása minden pillanatban arányos az ütő gyorsulásával, és a $t = 0$ pillanatban mindkét test nyugalomban volt, így a kitérésük aránya is ugyanekkora. Az ütő A amplitúdójú, ω körfrekvenciájú rezgést végez, így kitérése – felhasználva a $v_0(0) = 0$ és $x_0(0) = 0$ feltételeket:

$$x_0(t) = A(1 - \cos \omega t),$$

amiből a labda kitérése az idő függvényében:

$$x(t) = \frac{2}{5}x_0(t) = \frac{2}{5}A(1 - \cos \omega t).$$

A labda ütőhöz viszonyított relatív elmozdulása:

$$x_{\text{rel}} = x - x_0 = -\frac{3}{5}A(1 - \cos \omega t),$$

a relatív mozgás amplitúdója:

$$A_{\text{rel}} = \frac{3}{5}A,$$

és így a grafitnyom hosszúsága:

$$\ell = 2A_{\text{rel}} = \frac{6}{5}A.$$

Csóka Péter (Pécsi Janus Pannonius Gimn., 12. évf.)

25 dolgozat érkezett. Helyes 10 megoldás. Kicsit hiányos (3–4 pont) 4, hiányos (1–2 pont) 8, hibás 2, nem értékelt 1 dolgozat.

P. 5565. Egy hosszú, hajlékony, súlyos lánc egyik végét rögzítettük. A lelógó lánc akkor szakadna el, ha a saját súlyánál nagyobb terhet akasztanánk rá.

A láncot az ábrán látható helyzetben elengedjük. (A mozgó és a már megfeszült láncdarab is függőleges egyenesnek tekinthető.) Vajon elszakad-e a lánc?

(5 pont)

Közli: Gerencsér Jenő, Kaposvár

Megoldás. Könnyen belátható, hogy a legnagyobb erő a lánc rögzített végét terheli, így ezt fogjuk vizsgálni. A lánc akkor szakad el, ha az itt fellépő erő meghaladja a lánc súlyának kétszeresét. Ez az erő két erő eredője: a rögzítésnek egyrészt meg kell tartania a lánc már nyugalomban lévő darabjának F_g súlyát, másrészt biztosítania kell az éppen megálló láncdarab fékezéséhez szükséges F_f erőt.

Jelölje a lánc teljes tömegét M , teljes hosszát L , és az egy-ségnyi hosszra eső tömeget $\varrho = \frac{M}{L}$. A folyamatot jellemezzük a lánc szabad végének az elengedés pontjától mért $0 \leq h \leq L$ távolságával. A már nyugalomban lévő láncdarab hossza legyen ℓ , amelyet h függvényében az

$$\ell = \frac{L}{2} + \frac{h}{2}$$

kifejezéssel adhatunk meg, hiszen kezdetben a lánc fele lóg a rögzített oldalon, a leeső darabnak pedig szintén a fele kerül arra az oldalra (ábra).

A nyugalomban lévő láncdarab súlya:

$$F_g = \varrho \ell g = Mg \left(\frac{h}{2L} + \frac{1}{2} \right).$$

A fékezéshez szükséges erő meghatározásához meg kell határoznunk, hogy egy kicsiny dt idő alatt mekkora tömeget mekkora sebességről kell lefékezni. A lánc rögzítetlen része szabadeséssel zuhan, így h út megtétele után a sebessége:

$$v = \sqrt{2gh},$$

a lefékezendő tömeg pedig:

$$dm = \varrho \frac{dh}{2} = \frac{M}{2L} v(h) dt.$$

A fékezéshez szükséges erőt az impulzusváltozásból határozhatjuk meg:

$$F_f = \frac{dmv}{dt} = \frac{Mv^2}{2L} = \frac{Mgh}{L}.$$

A lánc felfüggesztésénél fellépő erő:

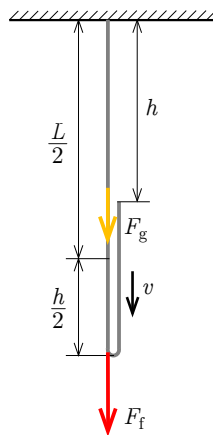
$$F = F_g + F_f = Mg \left(\frac{h}{2L} + \frac{1}{2} \right) + Mg \frac{h}{L} = Mg \left(\frac{3h}{2L} + \frac{1}{2} \right) \leq 2Mg,$$

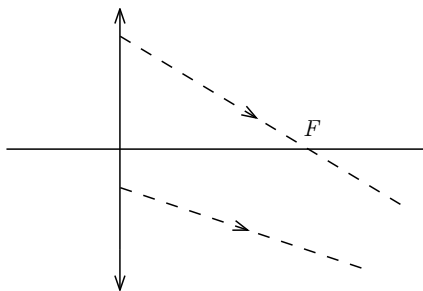
hiszen $h \leq L$. A lánc tehát nem szakad el.

Szabó Donát (Miskolci Herman Ottó Gimn., 11. évf.)

Megjegyzés. Egy láncot kétféleképpen is modellezhetünk. Ha a felső végei kicsit távolabb vannak egymástól, és a lánc nagyon hajlékony, a láncban végig húzófeszültség lesz, és így a leeső rész gyorsulása g -nél nagyobb lehet. Ilyenkor a rendszer konzervatív. Ha a láncot közelítjük az egydimenziós esethez, elromlik a konzervativitás, a kanyarulatnál lévő láncszemek rugalmatlanul ütköznek, egy-egy láncszem impulzusa hirtelen nullává válik, és ez rántja meg a már nem mozgó részt. A feladat megoldása ezt a második értelmezést követi: az energia disszipálódik, a leeső láncdarab feszültségmentes, és így szabadon esik.

35 dolgozat érkezett. Helyes 5 megoldás. Kicsit hiányos (3–4 pont) 7, hiányos (1–2 pont) 14, hibás 5, nem értékelt 3 dolgozat.



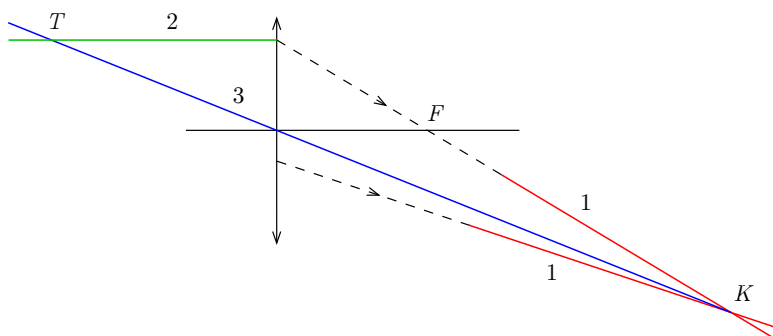


P. 5577. Egy gyűjtőlencse bal oldalára egy pontszerű tárgyat helyeztünk, amelyből kiinduló két sugarat ábrázoltunk a lencsén történő áthaladás után. Az egyik sugár éppen a lencse fókuszpontján halad át. Az ábra alapján szerkesszük meg (körzővel, vonalzóval) a fényforrás helyét! Írjuk le a szerkesztés lépéseit!

(4 pont)

Példatári feladat nyomán

I. Megoldás. A szerkesztés lépései:



1. ábra

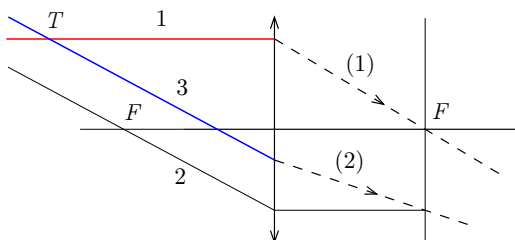
1. Meghosszabbítjuk a két megadott sugármenetet úgy, hogy messék egymást, így létrejön a képpont.

2. Ismert, hogy az optikai tengellyel párhuzamos fénysugár fog a törés után a fókuszpontban át haladni, így a felső sugármenetnek a lencsével való metszéspontján át párhuzamost szerkesszünk az optikai tengellyel.

3. Ismert, hogy az optikai középponton át beérkező fénysugár irányváltoztatás nélkül áthalad a lencsén, ezért összekötjük a képpontot az optikai középponttal, és az egyenest meghosszabbítjuk egészen addig, amíg nem metszi az előbbi egyenest. Az így kapott metszéspon lesz a tárgy (a fényforrás).

Klement Tamás (Pécsi Leówey Klára Gimn., 11. évf.)

II. Megoldás. A szerkesztés lépései:



2. ábra

1. Az (1)-es fénysugár átmegy a fókuszpontban, így biztosan az optikai tengellyel párhuzamosan érkezett a lencséhez: abban a pontban, ahol áthalad a lencsén, párhuzamost szerkesszünk az optikai tengellyel.

2. Azok a fénysugarak, amelyek párhuzamosan érkeznek a lencsére,

a fókusz síkon metszik egymást. A fókuszponton áthaladó, lencsével párhuzamos sík a fókusz sík, ezt megszerkesztve megkapjuk, hol metszi ezt a (2)-es fénysugár. Ezután könnyen megszerkeszthetünk egy olyan (nem a fényforrásból kiinduló) fénysugarat, amely a túlsó fókuszponton át érkezik, és így az optikai tengellyel párhuzamosan érkezik ebbe a pontba.

3. A (2)-es fénysugár a lencse előtt ezzel párhuzamos, így azt könnyen megszerkeszthetjük. A két fénysugár metszéspontja megadja a fényforrás helyét.

Antigravitációs kupac csapat:

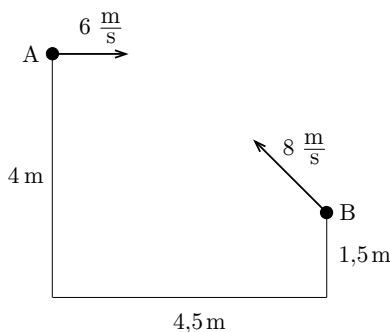
Papp Emese Petra, Nguyen Thien Minh, Pozsonyi Márk
(Budapest, ELTE Apáczai Csere J. Gyak. Gimn., 9. évf.)

17 dolgozat érkezett. Helyes 10 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 6, hibás 1 dolgozat.

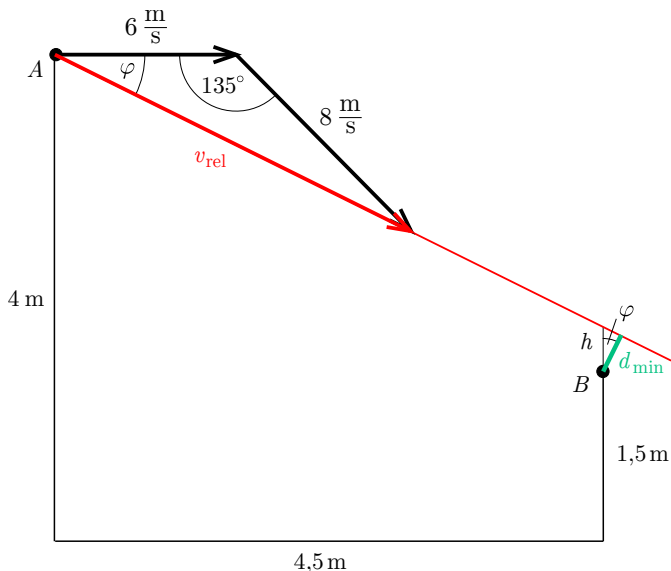
P. 5580. Két testvér a lakásuk lépcsőházában (vízszintesen mérve) 4,5 m távolságból „zoknicsatázik” az ábra szerint. Anikó a pihenőről, 4 m magasságból 6 m/s, Bálint pedig 1,5 m magasságból, a vízszintessel 45° -os szöget bezáró 8 m/s kezdősebességgel dobja el a zoknigombócot. Határozzuk meg a két gombóc legkisebb távolságát, ha a gyerekek egyszerre dobták el azokat! (A közegellenállást ne vesszük figyelembe.)

(4 pont)

Közli: Kis Tamás, Heves



I. megoldás. A két test gyorsulásának nagysága és iránya is megegyezik, ezért ha a mozgást egy velük együtt gyorsuló vonatkoztatási rendszerből figyeljük, akkor mindkét test egyenesvonalú egyenletes mozgást végez 6 m/s, illetve 8 m/s sebes-



séggel. Továbbá, ha a vonatkoztatási rendszerünket a B pontból eldobott testhez rögzítjük, akkor az A pontból eldobott testet a két test sebességvektorának különbségével látjuk mozogni, míg a B pontból eldobott test nyugalomban van.

A relatív sebesség nagysága a koszinusztétel alapján:

$$v_{\text{rel}} = \sqrt{6^2 + 8^2 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \cos 135^\circ} = 12,96 \text{ m/s},$$

vízszintessel bezárt szöge pedig a szinusztétel alapján:

$$\sin \varphi = \frac{8 \cdot \sin 135^\circ}{12,96} = 0,437 \quad \Rightarrow \quad \varphi = 25,9^\circ.$$

Az ábrára berajzoltuk az A pontból eldobott test pályáját (a B ponthoz rögzített vonatkoztatási rendszerben): ez egy $\text{tg}(-\varphi) = -0,485$ meredekségű egyenes. Az egyenes

$$h = 4 \text{ m} - 0,485 \cdot 4,5 \text{ m} - 1,5 \text{ m} = 0,316 \text{ m}$$

magasan halad el a B pont felett, és így a távolsága a B ponttól:

$$d_{\text{min}} = h \cos \varphi \approx 0,28 \text{ m}.$$

A két test közötti legkisebb távolság tehát 28 cm.

Domján Noémi Dóra (Kecskeméti Katona J. Gimn., 11. évf.)

Megjegyzés. A testek kiterjedése (és az elhanyagolt légellenállás) miatt a távolságot nincs értelme nagyobb pontossággal megadni.

II. megoldás. Válasszuk az origót az A pont alatt a talajszinten. Az A pontból eldobott test vízszintes hajítással mozog, koordinátái az idő függvényében:

$$x_1(t) = v_1 t \quad \text{és} \quad y_1(t) = h_1 - \frac{g}{2} t^2,$$

ahol $v_1 = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $h_1 = 4 \text{ m}$ és $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. A B pontból eldobott test ferde hajítással mozog, koordinátái az idő függvényében:

$$x_2(t) = d - v_{2x} t \quad \text{és} \quad y_2(t) = h_2 + v_{2y} t - \frac{g}{2} t^2,$$

ahol $d = 4,5 \text{ m}$, $v_{2x} = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \cos 45^\circ = 5,66 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $v_{2y} = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \sin 45^\circ = 5,66 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ és $h_2 = 1,5 \text{ m}$.

A két test d távolságának minimumát keressük. Ez ugyanakkor lesz, amikor $d^2(t)$ minimális (hiszen $d \geq 0$).

$$\begin{aligned} d^2(t) &= (x_2(t) - x_1(t))^2 + (y_2(t) - y_1(t))^2 = \\ &= (d - v_{2x} t - v_1 t)^2 + \left(h_2 + v_{2y} t - \frac{g}{2} t^2 - \left(h_1 - \frac{g}{2} t^2 \right) \right)^2 = \\ &= 167,9 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \cdot t^2 - 133,2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \cdot t + 26,5 \text{ m}^2 = at^2 + bt + c. \end{aligned}$$

A másodfokú kifejezés a

$$t_{\min} = \frac{-b}{2a} = 0,397 \text{ s}$$

időpontban lesz minimális. A minimum értéke $d^2(t_{\min}) = 0,081 \text{ m}^2$, amiből a keresett minimális távolság:

$$d_{\min} = \sqrt{d^2(t_{\min})} \approx 0,28 \text{ m.}$$

Vincze Anna (Kecskeméti Katona J. Gimn., 10. évf.)

Megjegyzés. A minimum helye és értéke deriválással vagy grafikus módszerrel is megkapható.

76 dolgozat érkezett. Helyes 45 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 8, hiányos (1–2 pont) 9, hibás 13, nem értékelt 1 dolgozat.

P. 5582. A Cassini-űrszonda adatainak feldolgozásával látványos videó³ készült, amelyen az látható, hogy a Jupiter Europa holdja „lehagyja” az Io nevű holdat. Ez látszólag ellentmond a Kepler-törvényeknek, hiszen a Jupiterhez közelebb lévő Io keringési sebessége nagyobb, mint a távolabbi Europa holdé. A paradoxon feloldása: a Cassini-szonda is mozgott, amikor a felvétel készült. Legfeljebb milyen messze lehet a Jupitertől egy, a bolygó körül keringő űrszonda, és milyen irányba kering, hogy egy ilyen furcsa „szerepcsere” létrejöjjön? Tekintsük úgy, hogy a holdak és az űrszonda közel azonos síkban, körpályákon keringenek.

(5 pont)

Közli: Gnädig Péter, Vácduka

Megoldás. A jelenség csak akkor lehetséges, ha az űrszonda a holdakkal ellentétes irányba kering (ezt a végén meg fogjuk mutatni). Az Europa akkor előzi meg látszólag az Iot, ha az űrszondából nézve nagyobb látszólagos szögsebességgel mozog:

$$\omega_{2,3} > \omega_{1,3},$$

azaz (az ábra jelöléseit használva):

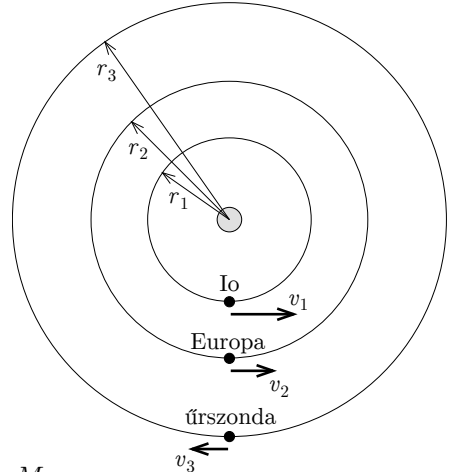
$$(1) \quad \frac{v_2 + v_3}{r_3 - r_2} > \frac{v_1 + v_3}{r_3 - r_1}.$$

A gravitáció hatására körpályán mozgó test mozgásegyenlete:

$$m \frac{v^2}{r} = \gamma \frac{mM}{r^2},$$

amiből

$$v = \sqrt{\frac{\gamma M}{r}}.$$



³<https://www.flickr.com/photos/kevinmgill/44583965185/>

Ezt felhasználva (és $\sqrt{\gamma M}$ -mel mindkét oldalt elosztva) az egyenlőtlenség

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{r_2}} + \frac{1}{\sqrt{r_3}}}{r_3 - r_2} > \frac{\frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_3}}}{r_3 - r_1}$$

alakba írható. A számlálóban lévő törteteket közös nevezőre hozva, a nevezőket pedig szorzattá bontva:

$$\frac{\frac{\sqrt{r_3} + \sqrt{r_2}}{\sqrt{r_2}\sqrt{r_3}}}{(\sqrt{r_3} + \sqrt{r_2})(\sqrt{r_3} - \sqrt{r_2})} > \frac{\frac{\sqrt{r_3} + \sqrt{r_1}}{\sqrt{r_1}\sqrt{r_3}}}{(\sqrt{r_3} + \sqrt{r_1})(\sqrt{r_3} - \sqrt{r_1})},$$

majd egyszerűsítve és tovább alakítva:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{r_2}(\sqrt{r_3} - \sqrt{r_2})} &> \frac{1}{\sqrt{r_1}(\sqrt{r_3} - \sqrt{r_1})}, \\ \sqrt{r_2}\sqrt{r_3} - r_2 &< \sqrt{r_1}\sqrt{r_3} - r_1, \\ \sqrt{r_3}(\sqrt{r_2} - \sqrt{r_1}) &< r_2 - r_1, \\ \sqrt{r_3} &< \sqrt{r_2} + \sqrt{r_1}, \\ r_3 &< (\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2})^2. \end{aligned}$$

A táblázatokban megtalálható adatok szerint $r_1 = 422$ ezer km és $r_2 = 671$ ezer km, amiből az űrszonda lehetséges pályasugarára $r_3 < 2,16$ millió km adódik.

Amennyiben az űrszonda a holdakkal azonos irányba keringene, az (1) egyenlet így módosulna:

$$\frac{v_2 - v_3}{r_3 - r_2} > \frac{v_1 - v_3}{r_3 - r_1},$$

és ebből az előzőkhöz hasonló átalakítások után a

$$\sqrt{r_3}(\sqrt{r_2} - \sqrt{r_1}) < r_1 - r_2$$

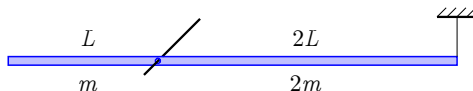
egyenlőtlenség adódna, amely nem teljesülhet, hiszen a bal oldal pozitív, a jobb oldal pedig negatív.

Az űrszonda tehát legfeljebb 2,16 millió km sugarú pályán keringhetett.

Kovács Tamás (Szeged, SZTE Gyak. Gimn. és Ált. Isk., 11. évf.)

16 dolgozat érkezett. Helyes 6 megoldás. Kicsit hiányos (3–4 pont) 5, hiányos (1–2 pont) 5 dolgozat.

P. 5583. Az ábrán látható $3m$ tömegű és $3L$ hosszúságú vékony, homogén tömegeloszlású rúd az egyik végétől L távolságra lévő vízszintes tengely körül függőlegesen sűrűdásmentesen foroghat. A rudat a másik végéhez csatlakozó függőleges fonál segítségével vízszintesen tartjuk.



a) Mekkora erőt fejt ki a fonál és a tengely a rúdra ebben az egyensúlyi állapotban?

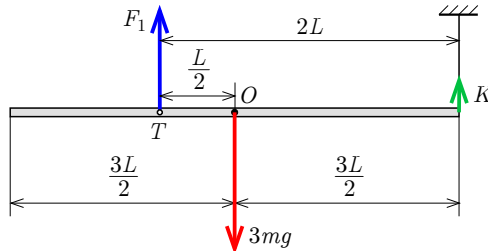
b) A fonál elvágását követően mekkora lesz a rúd alsó végpontjának sebessége akkor, amikor a rúd a függőleges egyenesen halad át?

c) Mekkora ebben a pillanatban a tengely által kifejtett erő?

(4 pont)

Közli: Veres Dénes, Szolnok

Megoldás. a) A $3m$ tömegű, homogén tömegeloszlású rúdra az O geometriai középpontjában hat $3mg$ erő, illetve a rudat a jobb oldali végén a fonál függőlegesen felfelé mutató K erővel tartja.



1. ábra

A forgatónyomatékok egyensúlya a T tengelyre:

$$3mg \frac{L}{2} = K \cdot 2L,$$

amiből a keresett kötélerő:

$$K = \frac{3}{4}mg.$$

Mivel $K < 3mg$, így a tengely is kifejt a rúdra egy függőlegesen felfelé mutató F_1 erőt. Az erők egyensúlya:

$$F_1 + K = 3mg,$$

amiből a tengely által ebben az egyensúlyi állapotban kifejtett erő:

$$F_1 = 3mg - K = \frac{9}{4}mg.$$

b) A fonál elvágását követően megszűnik a K erő, így a $3mg$ erő elkezd forgatni a testet a tengely körül. Egy vékony, ℓ hosszúságú, M tömegű rúd tömegközéppontján átmenő tengelyre számított tehetetlenségi nyomatéka:

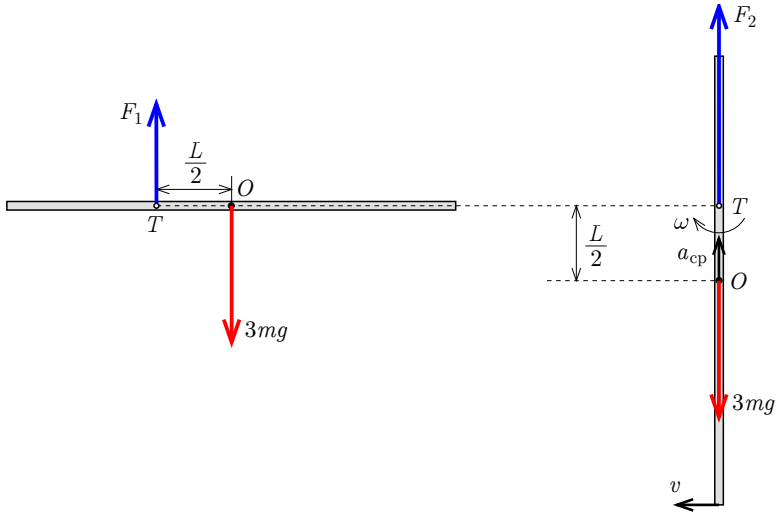
$$\Theta_{\text{tkp}} = \frac{1}{12}M\ell^2,$$

esetünkben:

$$\Theta_O = \frac{1}{12}3m(3L)^2 = \frac{9}{4}mL^2.$$

A Steiner-tétel alapján a T tengelyre számított tehetetlenségi nyomaték:

$$\Theta_T = \Theta_O + 3m \left(\frac{L}{2} \right)^2 = \frac{9}{4}mL^2 + \frac{3}{4}mL^2 = 3mL^2.$$



2. ábra

A helyzeti energia szempontjából csak a rúd tömegközéppontjának a helyzete számít. Legyen a 0-szint a rúd függőleges helyzetében a tömegközéppont helye. Ekkor a vízszintes helyzetben a nyugalomban lévő rúd helyzeti energiája:

$$E_h = 3mg \frac{L}{2} = \frac{3}{2}mgL.$$

A függőleges helyzetben (ahol a test helyzeti energiája nulla) a rúd már ω szögsebességgel forog a tengely körül, így a mozgási („forgási”) energiája:

$$E_m = \frac{1}{2}\Theta_T\omega^2 = \frac{3}{2}mL^2\omega^2.$$

A rúdra semmilyen fékezőerő nem hat, így teljesül a mechanikai energia megmaradása a vízszintes és a függőleges helyzet között:

$$\begin{aligned} E_h &= E_m, \\ \frac{3}{2}mgL &= \frac{3}{2}mL^2\omega^2, \\ \omega &= \sqrt{\frac{g}{L}}. \end{aligned}$$

A rúd alsó végpontja $2L$ távolságra van a tengelytől, így a keresett sebesség:

$$v = 2L\omega = 2\sqrt{Lg}.$$

c) A függőleges helyzetben a tömegközéppont centripetális gyorsulása:

$$a_{\text{cp}} = \omega^2 \frac{L}{2} = \frac{g}{2}.$$

A testre a nehézségi erő és a tengely által kifejtett, függőlegesen felfelé mutató F_2 erő hat. A mozgásegyenlet:

$$3ma_{\text{cp}} = F_2 - 3mg,$$

amiből a tengely által ebben a pillanatban kifejtett erő:

$$F_2 = 3ma_{\text{cp}} + 3mg = \frac{9}{2}mg.$$

Varga Vivien (Szegedi Radnóti M. Kísérleti Gimn., 10. évf.)

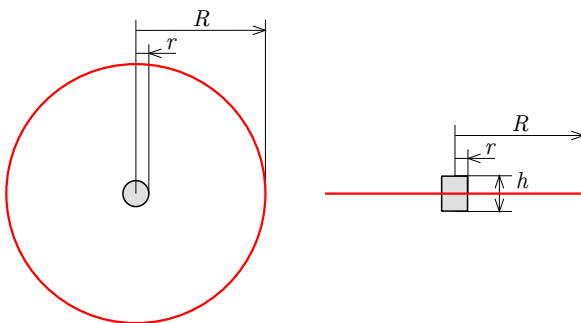
79 dolgozat érkezett. Helyes 20 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 15, hiányos (1–2 pont) 41, hibás 3 dolgozat.

P. 5588. Egy R sugarú, vékony, $+Q$ töltéssel egyenletesen töltött szigetelőgyűrű vízszintes síkban helyezkedik el. A rögzített gyűrű átmérője mentén (pl. egy kifesztett horgászszinóron) egy $+q$ töltésű, m tömegű pontszerű test mozoghat súrlódásmentesen. A pontszerű testet egyensúlyi helyzetéből kicsit kitérítjük. Mekkora a bekövetkező kis rezgések periódusideje?

(6 pont)

Közli: Vigh Máté, Biatorbágy

I. megoldás. Kezdetben vizsgáljuk a szigetelőgyűrűt a kis q töltés nélkül. Írjuk fel a Gauss-törvényt egy kicsiny hengerre, amely a szigetelőgyűrű középpontjában helyezkedik el, tengelye egybeesik a gyűrű tengelyével, sugara $r \ll R$ és magassága $h \ll R$ (1. ábra).



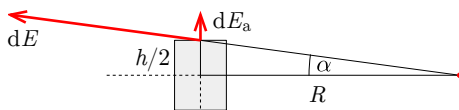
1. ábra

Szimmetria miatt a kicsiny henger palástján a térerősség a tengely felé mutat, a henger alapjain pedig kifelé. Mivel $r \ll R$, vehetjük úgy, hogy a két körlap az elektromos tér homogén, így elég meghatározni a térerősséget a körlapok közepén. A λ vonalmenti töltéssűrűségű gyűrű kicsiny $d\ell$ hosszúságú darabja által a henger fedőlapjának közepén keltett térerősség (2. ábra):

$$dE = \frac{\lambda d\ell}{4\pi\epsilon_0 \left(R^2 + \left(\frac{h}{2} \right)^2 \right)},$$

ennek axiális (tengelyirányú) komponense (a radiális komponensekkel nem kell foglalkoznunk, mert a szimmetria miatt az összegzésnél kioltják egymást):

$$dE_a = dE \sin \alpha = \frac{\lambda d\ell}{4\pi\epsilon_0 \left(R^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2\right)} \sin \alpha.$$



2. ábra

Esetünkben $\frac{h}{2R} \ll 1$, így használhatjuk az $\epsilon \ll 1 \Rightarrow (1 + \epsilon)^n \approx 1 + n\epsilon$, valamint az $\alpha \ll 1 \Rightarrow \sin \alpha \approx \tan \alpha = \frac{h}{2R}$ közelítéseket:

$$dE_a = \frac{\lambda d\ell}{4\pi\epsilon_0 R^2} \left(1 + \left(\frac{h}{2R}\right)^2\right) \frac{h}{2R},$$

majd a harmadrendű tagokat elhagyva:

$$dE_a = \frac{\lambda h}{8\pi\epsilon_0 R^3} d\ell.$$

Az összegzés könnyen elvégezhető, hiszen a $d\ell$ előtt álló tényező egy konstans:

$$E_a = \frac{\lambda h}{8\pi\epsilon_0 R^3} 2\pi R = \frac{Qh}{8\pi\epsilon_0 R^3},$$

ahol felhasználtuk, hogy $2\pi R\lambda = Q$, a gyűrű össztöltése.

Így a kicsiny henger két körlapján összesen

$$\Phi_a = 2E_a r^2 \pi = \frac{Qhr^2}{4\epsilon_0 R^3}$$

fluxus lép ki, és így – mivel a hengeren belül nincsen töltés – a palástján ugyanekkora fluxus lép be:

$$\Phi_p = -\frac{Qhr^2}{4\epsilon_0 R^3},$$

ahol a negatív előjel a belépésre utal. Mivel $\frac{h}{2} \ll R$, a térerősség nagyságát vehetjük a palást felületén mindenhol ugyanakkorának, és így a $2hr\pi$ felületű paláston a radiális irányú térerősség:

$$E_r = \frac{\Phi_p}{2hr\pi} = -\frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R^3} r,$$

ahol a negatív előjel ismét azt mutatja, hogy a térerősség befelé, a középpont felé mutat.

Most helyezzük a m tömegű, q töltésű kis testet a zsinórra. Az egyensúlyi helyzete a gyűrű síkjában a szimmetriatengelyen van. Innen radiálisan r távolságra kimozdítva az eddigiek alapján rá

$$F_r = qE_r = -\frac{Qq}{8\pi\epsilon_0 R^3}r$$

(befelé mutató, sugárirányú) erő fog hatni, és így a mozgásegyenlet alapján

$$a_r = \frac{F_r}{m} = -\frac{Qq}{8\pi\epsilon_0 m R^3}r$$

(kitéréssel ellentétes irányú) gyorsulása lesz. Ez a harmonikus rezgőmozgás jól ismert differenciálegyenlete, melynek megoldása

$$r(t) = r_0 \sin(\omega t + \varphi_0),$$

ahol

$$\omega = \sqrt{\frac{Qq}{8\pi\epsilon_0 m R^3}},$$

amiből a keresett periódusidő

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{8\pi\epsilon_0 m R^3}{Qq}} = 2\pi \sqrt{\frac{2m R^3}{kQq}}.$$

II. megoldás. A gyűrű terét a gyűrű síkjában, a középponttól r távolságra közvetlenül is kiszámíthatjuk. Egy $d\ell$ hosszúságú gyűrűdarab által létrehozott térerősség itt (a 3. ábra alapján, valamint a korábbi jelöléseket használva):

$$dE = \frac{\lambda d\ell}{4\pi\epsilon_0 x^2},$$

ahol $x^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos \varphi$. Ennek radiális komponense:

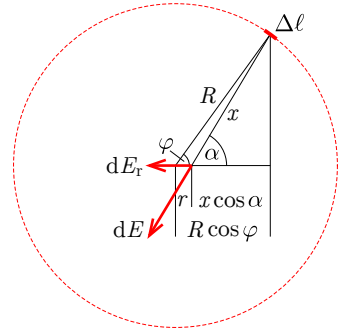
$$dE_r = -dE \cos \alpha,$$

ahol a negatív előjel arra utal, hogy a térerősség befelé mutat. Szintén a 3. ábra alapján:

$$R \cos \varphi = r + x \cos \alpha \quad \Rightarrow \quad \cos \alpha = \frac{R \cos \varphi - r}{x}.$$

Behelyettesítve $\cos \alpha$ és x kifejezését, majd $r \ll R$ miatt $\frac{r}{R}$ magasabb hatványait elhanyagolva, és az $\varepsilon \ll 1 \Rightarrow (1 + \varepsilon)^n \approx 1 + n\varepsilon$ közelítést ismét alkalmazva, végül felhasználva, hogy $d\ell = R d\varphi$:

$$dE_r = -\frac{\lambda d\ell (R \cos \varphi - r)}{4\pi\epsilon_0 x^3} = -\frac{\lambda d\ell (\cos \varphi - \frac{r}{R})}{4\pi\epsilon_0 R^2 (1 + \frac{r^2}{R^2} - 2\frac{r}{R} \cos \varphi)^{\frac{3}{2}}} \approx$$



3. ábra

$$\begin{aligned}
&\approx -\frac{\lambda d\ell}{4\pi\epsilon_0 R^2} \left(\cos\varphi - \frac{r}{R}\right) \left(1 + 3\frac{r}{R}\cos\varphi\right) \approx \\
&\approx -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R^2} \left(3\frac{r}{R}\cos^2\varphi + \cos\varphi - \frac{r}{R}\right) d\ell = \\
&= -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} \left(3\frac{r}{R}\cos^2\varphi + \cos\varphi - \frac{r}{R}\right) d\varphi.
\end{aligned}$$

Az eredő radiális térerősség pedig ennek a teljes gyűrűre vett integrálja:

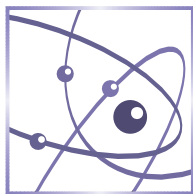
$$\begin{aligned}
E_r &= \int dE_r = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} \int_0^{2\pi} \left(3\frac{r}{R}\cos^2\varphi + \cos\varphi - \frac{r}{R}\right) d\varphi = \\
&= -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} \left(3\pi\frac{r}{R} + 0 - 2\pi\frac{r}{R}\right) = -\frac{\lambda}{4\epsilon_0 R^2} r = -\frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R^3} r.
\end{aligned}$$

Megjegyzés. Felhasználtuk, hogy $\int_0^{2\pi} \cos^2\varphi d\varphi = 2\pi \cdot \frac{1}{2} = \pi$. Ez az effektív érték ismert kiszámításából, vagy a $\cos^2\varphi = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\varphi)$ összefüggés segítségével is megkapható.

Ugyanarra a kifejezésre jutottunk, mint az előző megoldásban, innentől a két megoldás megegyezik.

Tóth Kolos Barnabás (Budapest V. Ker. Eötvös József Gimn., 11. évf.)

19 dolgozat érkezett. Helyes 6 megoldás. Kicsit hiányos (4–5 pont) 3, hiányos (1–3 pont) 7, nem versenyszerű 3 dolgozat.

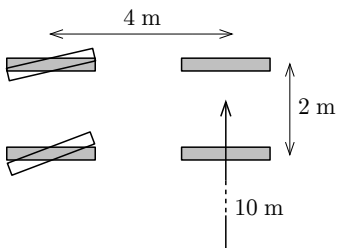


Fizikából kitűzött feladatok

M. 436. Vizsgáljuk egy pingponglabda pattogásait hangfeldolgozó program vagy telefonos alkalmazás segítségével legalább három különböző szilárd felületen (fa, üveg, járólap stb.). Mérjük meg a pattogásokra jellemző ütközési számot!

(6 pont)

Közlí: *Vigh Máté*, Biatorbágy



G. 869. Egy gépkocsi első, illetve hátsó kerekei egy olyan téglalap csúcsaiban helyezkednek el, melynek oldalai 4 m és 2 m, ahogy ez az ábrán látható.

a) Ha a hátsó kerekek alkotta szakasz közép-pontja az autó kanyarodásakor $R = 10$ m sugarú körön fordul körbe, akkor az autó vizes kerekei mekkora sugarú köröket rajzolnak a száraz aszfaltra?

b) Kanyarodás közben mekkora az első kerekek függőleges tengely körüli szögelfordulása?

(3 pont)

G. 870. Számítsuk ki, mekkora erővel lehet víz alatt tartani egy szabványos pingponglabdát!

(3 pont)

G. 871. A hűtővíz hőmérséklete $240\text{ }^{\circ}\text{F}$, amikor elhagyja az autó forró motorját. Miután áthalad az autó hűtőjén, a hőmérséklete $175\text{ }^{\circ}\text{F}$ -re csökken. Számítsuk ki, hogy a motorból a hűtőrendszeren keresztül 1 óra alatt mennyi hő jut a környezetbe, ha az autóban összesen 2 gallon hűtőfolyadék van, ami 15 másodperc alatt áramlik körbe a hűtőrendszeren! A hűtőfolyadék fajhője $3,5\text{ }\frac{\text{J}}{\text{g}\text{ }^{\circ}\text{C}}$, sűrűsége megegyezik a víz sűrűségével.

(3 pont)

Amerikai feladat nyomán

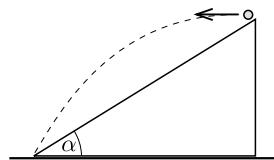
G. 872. Egy $100\text{ }\Omega$ ellenállású lámpa, egy $50\text{ }\Omega$ ellenállású kenyérpirító és egy $500\text{ }\Omega$ ellenállású vízszűrő párhuzamosan csatlakozik a 230 V -os hálózatra. Mekkora az ellenállása annak a villanyvasalónak, amely a hálózathoz annyi áramot vesz fel, mint a fenti három készülék együttesen, és mekkora ez az áram?

(3 pont)

P. 5607. Egy rögzített lejtő tetejéről vízszintesen elhajított kicsiny test éppen a lejtő aljánál csapódik be (ábra). A becsapódáskor a sebessége a lejtő síkjával $\beta = 19^{\circ}$ -os szöget zár be. Mekkora a lejtő hajlásszöge?

(3 pont)

Közli: Zsigri Ferenc, (Budapest)



P. 5608. A vízszinteshez viszonyítva 60° -os szögben 120 m/s sebességgel kilőtt 8 kg tömegű robbanó lövedék pályájának tetőpontján egy 3 kg és egy 5 kg tömegű darabra robban úgy, hogy azok egymáshoz képesti sebessége merőleges a kilőtt lövedék pályasíkjára. A robbanáskor felszabaduló 12 kJ energia 80% -a a darabok mozgási energiájának növelésére használandó el. A kilövés helyétől

a) mekkora távolságban és

b) mekkora sebességgel ér talajt a két rész?

(A légellenállást hanyagoljuk el!)

(4 pont)

Közli: Holics László, Budapest

P. 5609. Egy 330 ml -es üdítőitalos dobozt közelítsünk homogén tömegeloszlású hengerfelülettel, melynek magassága $H = 14,6\text{ cm}$, első átmérője $d = 5,4\text{ cm}$. A doboz tömege $M = 14\text{ g}$. Mennyi vizet töltsünk a dobozba, hogy a lehető legalacsonyabban legyen a rendszer tömegközéppontja? Milyen magasan van ekkor a tömegközéppont?

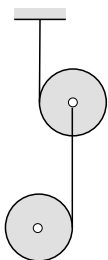
(4 pont)

Közli: Szentivánszki Soma, Budapest

P. 5610. Az Eros kisbolygó 1,13 CSE-re közelíti meg a Napot, naptávolságban 1,78 CSE-re kerül tőle. CSE a csillagászati egység, a Nap-Föld közepes távolsága. Mekkora az Eros kisbolygó legnagyobb és legkisebb sebessége?

(5 pont)

Közli: Simon Péter, Pécs



P. 5611. Az ábrán látható „kettős jojó” két egyforma, homogén tömegeloszlású korongból és a rájuk tekert fonalakból áll.

A két testet a fonalak függőleges helyzetéből kezdősebesség nélkül indítjuk el.

a) Melyik korong tengelyének lesz nagyobb a sebessége egy bizonyos idő elteltével, és hányszorosa ez a sebesség a másik korongénak?

b) Melyik korong szögsebessége lesz nagyobb egy bizonyos idő elteltével, és hányszorosa ez a szögsebesség a másik korongénak?

(A kérdéses pillanatban a fonalak még nem tekeredtek le a korongokról.)

(5 pont)

Közli: Gnädig Péter, Vácduka

P. 5612. 25 °C-os nitrogéngázzal 1000 J hőt közlünk, miközben állandó hőmérsékleten kitágul. Ezután a gázt adiabatikusan tágítjuk, amelynek hatására 0 °C hőmérsékletre hűl. Ugyanebbe a végállapotba juthattunk volna, ha a gázt először adiabatikusan, majd izotermikusan tágítjuk. Mennyi hőt kellene ebben az esetben közölni a gázzal az izoterm folyamat során?

(4 pont)

Közli: Széchenyi Gábor, Budapest

P. 5613. Egy mol rézből készült lapos korongot 1 m/s nagyságú, vízszintes irányú sebességgel mozgatunk szintén vízszintes, a sebességre merőleges, 1 T erősségű, homogén mágneses térben. A korong úgy helyezkedik el, hogy alap- és fedőlapja is vízszintes. Az alap- és fedőlap átmérője hússzorosa a korong magasságának.

Becsüljük meg, hogy a mozgási indukció következtében hány elektron halmozódik fel a korong negatívra töltődő lapján!

(4 pont)

Példatári feladat nyomán

P. 5614. Számos olyan radioaktív izotóp létezik, melyek pozitív béta-bomlásra és elektronbefogásra egyaránt képesek (mindkét esetben ugyanaz a mag keletkezik). Melyik folyamatnak nagyobb a bomlási energiája és mennyivel?

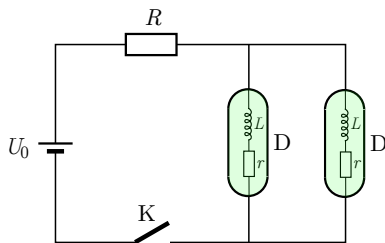
(4 pont)

Közli: Honyek Gyula, Veresegyház

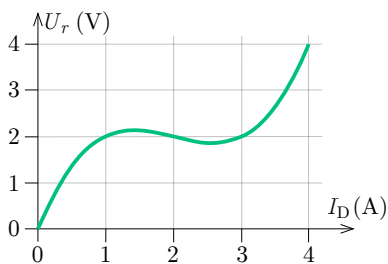
P. 5615. Egy $U_0 = 4$ V feszültségű ideális telep, egy $R = 0,5 \Omega$ ellenállású fogyasztó, egy kapcsoló és két *dűrisztor* (D) felhasználásával az a) ábrán látható kapcsolást állítjuk össze. A *dűrisztor* egy olyan áramköri elem, amely egy $L = 1$ H induktivitású ideális tekercs és egy nemlineáris r ellenállás soros kapcsolásából áll. Az ellenállás $U_r(I_D)$ karakterisztikáját a b) ábra mutatja.

a) Mekkora lehetnek stacionárius (azaz időben állandó) esetben a mellékágakban folyó áramok?

Segítség: Lásd a P. 5604. feladatot és annak megoldását a munkafüzetben.



a)



b)

b) A $t = 0$ pillanatban bekapcsoljuk a kapcsolót. Vázoljuk fel a diórisztorokon átfolyó áramokat az idő függvényében. Mekkora lesznek ezek az áramok hosszabb idő után?

Segítség: Tegyük fel, hogy eközben a szimmetria miatt a két diórisztoron azonos áram folyik.

c) Az egyensúlyi állapotban egy kis zavar keletkezik: az egyik diórisztor árama egy nagyon kicsit lecsökken, a másiké pedig ugyanennyivel megnő. Vázoljuk fel a két diórisztor áramát ezután az idő függvényében. Mekkora lesznek az egyes diórisztorok áramai hosszabb idő után? Mit állíthatunk az a) kérdésben megadott stacionárius megoldások stabilitásáról?

Segítség: Felhasználhatjuk, hogy ha a kis zavar az első egyensúlyi állapothoz képest szimmetrikus, akkor a két diórisztor áramának összege állandó marad.

(6 pont)

Dürer Verseny feladata nyomán

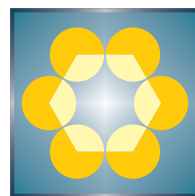


Beküldési határidő: 2025. január 15.

Elektronikus munkafüzet: <https://www.komal.hu/munkafuzet>



MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL FOR SECONDARY SCHOOLS (Volume 74. No. 9. December 2024)



Problems in Mathematics

New exercises for practice – competition K (see page 557): **K. 834.** In the addition $IT + IT + IT = DID$ different letters stand for different numbers, the same letters stand for the same numbers. Find the numerical value of the addends and the result. **K. 835.** Determine the number of four digit numbers, in which one of the digits equals the triple of the sum of the other three digits. **K. 836.** For right triangle ABC point D is chosen on the extension of the unit length leg AB beyond B with the property $BD = AC/2$. Let E denote the midpoint of leg AC . The ratio of the areas of triangles AED and ABC is $2 : 3$. Determine the length of line segment BD . **K/C. 837.** We have a 4×4 table with a chessboard pattern. In a step we change the color of each square in a 2×2 part of the table: black squares

become white and white squares become black. *a)* Is it possible to turn the whole table into black? *b)* And if we start with a 5×5 board, is it possible to turn the whole table into black? **K/C. 838.** Can the difference of the square of two prime numbers be 2024?

New exercises for practice – competition C (see page 558): **Exercises up to grade 10:** **K/C. 837.** See the text at Exercises **K.** **K/C. 838.** See the text at Exercises **K.** **Exercises for everyone:** **C. 1833.** Solve the system of equations $a + c = b$, $a^3 - c = b^2$, $a + b = c^3$ for natural numbers a , b and c . (Proposed by: *Bálint Bíró*, Eger) **C. 1834.** Three handsome princes competed for the hand of the beautiful daughter of the Blue King: the Red Prince, the White Prince, and the Green Prince. The first trial was the test of good taste. The princes were each given a regular blue 20-sided polygon and were allowed to color any part of it with their own color, as tastefully as possible. What the princess did not tell them was that she had already decided in advance: anyone who painted more than one-fifth of the 20-sided polygon with their own color would be considered too egotistical and therefore would not be allowed to continue competing for her hand. The princes created the following patterns (see page 559). Which of them advanced to the next round of the trials? (Where the task was actually to defeat and eat a seven-headed dragon, but that's another math problem altogether.) (Proposed by: *Zoltán Bertalan*, Békéscsaba) **C. 1835.** $[x]$ denotes the floor of number x , and $\{x\}$ denotes its fractional part. Prove that equation $[x] \cdot \{x\} = \frac{2024}{2025}$ has an infinite number of solutions on the set of rational numbers. (Proposed by: *Mihály Bence*, Brassó)

Exercises upwards of grade 11: **C. 1836.** Circle k containing the endpoints of the base AB of isosceles triangle ABC touches lines AC and BC at A and B . Let P be a point of circle k that is different from points A and B . Prove that the distance of P from side AB is at most the average of its distances from sides AC and BC . (Proposed by: *Bálint Bíró*, Eger) **C. 1837.** The ancient Greeks were already familiar with the fact that $\pi \approx 3.1416$ can be approximated with the fraction $22/7 \approx 3.1429$. How many pairs of positive integers $(a; b)$ satisfy the following properties: $1 < b < 100$ and the decimal form of $\frac{a}{b}$ starts as 3.14? (Proposed by: *Katalin Abigél Kozma*, Győr)

New exercises – competition B (see page 577): **B. 5422.** Two natural numbers are *relatives* if they differ in at most one digit. Does there exist a number whose relatives are all composite? (3 points) (Proposed by: *Márton Lovas*, Budakalász) **B. 5423.** $\{x\}$ denotes the fractional part of x . Does there exist a positive integer n for which $\{\sqrt{2}n\} \cdot \{\frac{n}{\sqrt{2}}\}$ is rational? (3 points) (Proposed by: *Bálint Hujter*, Budapest) **B. 5424.** For an arbitrary positive integer n let K_n denote the shape obtained by cutting out an $(n-1) \times (n-1)$ square from all four corners of a $(2n) \times (2n)$ ‘chessboard’ according to the diagrams (see page 577). Let a_n denote the number of ways K_n can be partitioned into 1×2 ‘dominoes’ (for example, $a_1 = 2$ and $a_2 = 8$). Prove that $2a_n$ is a perfect square for every n . (4 points) (Proposed by: *Attila Sztranyák*, Budapest) **B. 5425.** Let $ABCD$ be a cyclic quadrilateral, let E be the midpoint of AC and O be the centre of the circumcircle such that O and E are distinct. Prove that if $OECD$ is cyclic then EC bisects angle DEB . (4 points) (Proposed by: *Ákos Somogyi*, London) **B. 5426.** Jumpy, the grasshopper is jumping around on the positive integers of the numberline, visiting each exactly once. Is it possible that the lengths of his jumps produce every positive integer exactly once? (5 points) (Proposed by: *Márton Lovas*, Budakalász) **B. 5427.** Let P be an internal point in triangle ABC . Let lines AP , BP and CP intersect sides BC , CA and AB in points L , M and N , respectively. Prove that P is the centroid of triangle ABC if and only if P is the centroid of triangle LMN . (5 points) (Crux Mathematicorum) **B. 5428.** Solve the equation $5^a + 12^b = 13^c$ on non-negative integers. (6 points) (Proposed by: *Ákos Somogyi*, London) **B. 5429.** For every points X , Y , Z , denote by $[XYZ]$ the area

of triangle XYZ . Show that if points A, B, C, D, E, F lie on a non-degenerate conic section then $[ABC] \cdot [CDE] \cdot [EFA] \cdot [BDF] = [BCD] \cdot [DEF] \cdot [FAB] \cdot [ACE]$. (6 points)
(Proposed by: Géza Kós, Budapest)

New problems – competition A (see page 578): **A. 893.** In a text editor program, initially there is a footprint symbol (L) that we want to multiply. Unfortunately, our computer has been the victim of a hacker attack, and only two functions are working: Copy and Paste, each costing 1 Dürer dollar to use. Using the Copy function, we can select one or more consecutive symbols from the existing ones, and the computer memorizes their number. When using the Paste function, the computer adds as many new footprint symbols to the sequence as were selected in the last Copy. If no Copy has been done yet, Paste cannot be used. Let $D(n)$ denote the minimum number of Dürer dollars required to obtain exactly n footprint symbols. Prove that for any positive integer k , there exists a positive integer N such that $D(N) = D(N+1) + 1 = D(N+2) = D(N+3) + 1 = \dots = D(N+2k-1) + 1 = D(N+2k)$. (Based on a problem of the Dürer Competition) **A. 894.** In convex polyhedron $ABCDE$ line segment DE intersects the plane of triangle ABC inside the triangle. Rotate the point D outward into the plane of triangle ABC around the lines AB, BC, CA ; let the resulting points be D_1, D_2 , and D_3 . Similarly, rotate the point E outward into the plane of triangle ABC around the lines AB, BC, CA ; let the resulting points be E_1, E_2 , and E_3 . Show that if the polyhedron has an inscribed sphere, then the circumcircles of $D_1D_2D_3$ and $E_1E_2E_3$ are concentric. (Proposed by: Géza Kós, Budapest) **A. 895.** Let's call a function $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ *weakly periodic* if it is continuous and satisfies $f(x+1) = f(f(x)) + 1$ for all $x \in \mathbb{R}$. a) Does there exist a weakly periodic function such that $f(x) > x$ for all $x \in \mathbb{R}$? b) Does there exist a weakly periodic function such that $f(x) < x$ for all $x \in \mathbb{R}$? (Proposed by: András Imolay, Budapest)

Problems in Physics

(see page 602)

M. 436. Investigate the bounces of a ping-pong ball on at least three different solid surfaces (wood, glass, paving slabs, etc.) using a sound processing program or a phone application. Measure the coefficient of restitution, typical for the bounces.

G. 869. A car's front and rear wheels are at the vertices of a rectangle with sides 4 m and 2 m, as shown in the *figure*. a) If the centre of the line segment between the rear wheels turns around a circle of radius $R = 10$ m when the car turns, what is the radius of the circles drawn by the wet wheels of the car on the dry asphalt? b) During turning, what is the angle turned by the front wheels about the vertical axis? **G. 870.** Calculate the force needed to keep a standard ping-pong ball under water. **G. 871.** The temperature of the coolant of a car is 240°F when it leaves the engine of the car. After it passes through the car's radiator, its temperature drops to 175°F . Calculate how much heat is released from the engine through the cooling system to the environment in 1 hour if there are 2 gallons of coolant in the car, which circulates through the cooling system in 15 seconds. The coolant has a specific heat of $3.5 \frac{\text{J}}{\text{g}^\circ\text{C}}$ and density equal to that of water. **G. 872.** A lamp, of resistance 100Ω , a toaster of resistance 50Ω and an electric water filter of resistance 500Ω are connected in parallel to the 230 V voltage supply. What is the resistance of the electric iron that draws as much current from the mains supply as the three appliances together, and what is this current?

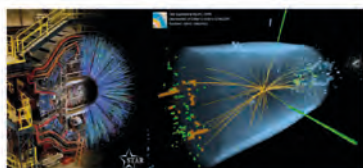
P. 5607. A small body is projected horizontally from the top of a fixed slope, and hits the bottom of the slope (see the *figure*). On impact, its velocity makes an angle of $\beta = 19^\circ$ with the plane of the slope. What is the angle of inclination of the slope? **P. 5608.** An explosive projectile of mass 8 kg is fired at an angle of 60° with respect to the horizontal,

with an initial speed of 120 m/s. It explodes at the top of its trajectory into two pieces of masses 3 kg and 5 kg such that the relative velocities of the two pieces are perpendicular to the plane of the trajectory of the projectile. 80% of the 12 kJ energy released in the explosion is used to increase the kinetic energy of the pieces. From the position of the launch *a*) how far and *b*) at what speed will the two pieces reach the ground? (Neglect air resistance.) **P. 5609.** Approximate a beverage can of volume 330 ml with a uniform mass distribution cylinder of height $H = 14.6$ cm and inside diameter of $d = 5.4$ cm. The mass of the can is $M = 14$ g. How much water should be poured into the can in order that the centre of mass of the system be as low as possible? At what height is the centre of mass then? **P. 5610.** The minor planet Eros approaches the Sun at 1.13 AU (when it is at the closest point), and it is 1.78 AU away from the Sun at the furthest point of its orbit. AU is the abbreviation of astronomical unit, 1 AU is the mean distance between the Sun and the Earth. What is the maximum and minimum speed of the minor planet Eros? **P. 5611.** The “double yo-yo” shown in the *figure* consists of two identical discs with uniform mass distribution and the yarns wound on them. The two discs are released with zero initial velocity such that the yarns are vertical. *a*) Which of the two discs’ axis will have a greater speed after a certain time elapsed, and how many times this speed is greater than the speed of the axis of the other disc? *b*) Which disc’s angular speed will be greater after a certain time elapsed, and by what factor will this angular speed be greater than that of the other disc? (At the moment in question, the yarns have not yet been unwound from the discs.) **P. 5612.** A 1000 J thermal energy is transferred to a sample of nitrogen gas, which expands at a constant temperature of 25 °C. Then the gas further expands adiabatically such that the gas cools to a temperature of 0 °C. The same final state could have been reached, if the gas had first expanded adiabatically and then isothermally. In this case, how much heat would have to be transferred to the gas during the isothermal process? **P. 5613.** A flat disc, made of 1 mole copper, is moved at a horizontal velocity of 1 m/s in a horizontal and uniform magnetic field of 1 T, which is perpendicular to the velocity of the copper disc. The disc is positioned so that both its base and top are horizontal. The diameter of the base and top plates is twenty times the height of the disc. Estimate the number of electrons that accumulate on the negatively charged side of the disc due to the motional induction. **P. 5614.** There are several radioactive isotopes that can both undergo positive beta decay and electron capture (both of which produce the same nuclide). Which has a higher decay energy and by how much? **P. 5615.** Using an ideal battery with an electromotive force of $U_0 = 4$ V, a load with a resistance of $R = 0.5 \Omega$, a switch and two *düristors* (D), we construct the circuit shown in *figure a*. A *düristor* is a circuit element consisting of an ideal coil with inductance $L = 1$ H and a non-linear resistor of resistance r , which are connected in series. The $U_r(I_D)$ characteristics of the resistor is shown in *figure b*. *a*) In the stationary (that is, constant in time) case, what are the currents in the sub-branches? *Hint:* See problem **P. 5604.** and its solution in the workbook. *b*) At the moment $t = 0$ we turn on the switch. Sketch the currents flowing through the *düristors* as a function of time. What will these currents be after a long time elapsed? *Hint:* Suppose that during this time, due to symmetry, the same current flows through each *düristor*. *c*) During the equilibrium state a small imbalance occurs: the current through one of the *düristors* decreases by a very small amount, and the current of the other increases by the same amount. Plot the currents of the two *düristors* as a function of time, after this imbalance occurs. What will the currents of each of the two *düristors* be after a long time elapsed? What can we say about the stability of the stationary solutions given in *a*)? *Hint:* We can use that if the small imbalance is symmetric with respect to the first equilibrium state, then the sum of the currents through the two *düristors* remains constant.



- Mikromechanika
- Hidrogén tárolás
- Nanoszerkezetek
- Röntgen vonalprofil analízis

Anyagfizika



Atomfizika

- Csillagászat gravitációs hullámokkal (LIGO-Virgo Kollaboráció)
- Atommagütközések kísérleti és elméleti vizsgálata (CERN)
- Asztrofizika

- Biológiai rendszerek által inspirált robotok
- Evolúció különböző időskálákon
- Döntéshozatal és hierarchiák

Biológiai fizika



Csillagászat

- Bolygórendszerek és eredetük
- Galaktikus és extragalaktikus csillagászat
- A Nap és a csillagok fizikája
- űridőjárás

- Univerzum alapvető építőkövei és kölcsönhatásuk
- Univerzum alakulása a Nagy Bumm után napjainkig
- Környezeti áramlások

Elméleti fizika



Komplex rendszerek fizikája

- Kvantuminformatika
- Atomi vékonyrétegek
- Genomika
- Mesterséges Intelligencia

Ha érdekel a fizika, akkor felvételiz fizika alapszakunkra!

További információk az ELTE Fizikai és Csillagászati Intézetéről: <https://physics.elte.hu/>

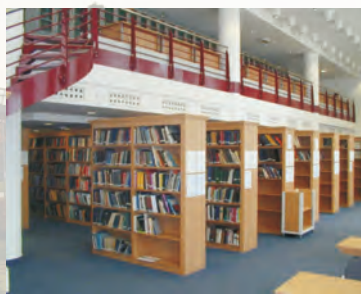


Az ELTE a legrégebbi, mindmáig
működő magyar egyetem



Természettudományi Kar

Az ELTE Természettudományi Kara (TTK) minden felmérés szerint az egyik legjobb egyetemi kar Magyarországon. A képzések a természettudományok teljes spektrumát felölelik: *matematika, biológia, fizika, földrajz, földtudományi, kémia, környezettan* alapszakok (BSc) – ezeken belül különböző szakirányok (biofizikus, csillagász, meteorológus...) – kerülnek meghirdetésre. <https://ttk.elte.hu/>



Matematikai Intézet



A matematika alapszak (BSc) egyaránt felkészít a kutatói életpályára és a matematika különböző területeken történő magas szintű alkalmazására is – kiváló karrierlehetőségeket nyújtva.

Az intézetben nagy hangsúlyt helyezünk a tehetséggondozásra és arra, hogy a választható szintek és blokkok révén mindenki megtalálja a neki megfelelő kurzusokat.

Az intézetben általános- és középiskolai tanárképzést is folytatunk osztatlan *matematikatanári* szakon. <http://www.math.elte.hu/>

Az ELTE TTK idén december 10-én tartja nyílt napját: https://ttk.elte.hu/nyiltnap_2024. Ha esetleg későn jutna el hozzád ez a hír, a program a fenti linken vissza is nézhető.

