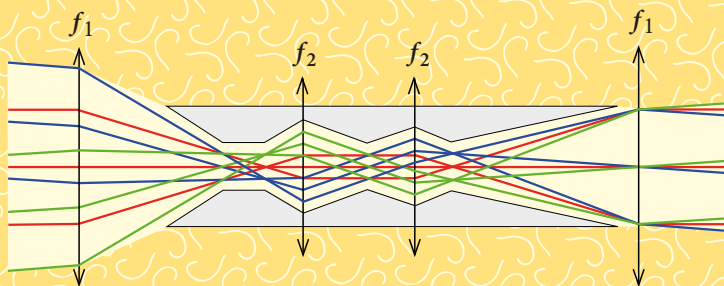


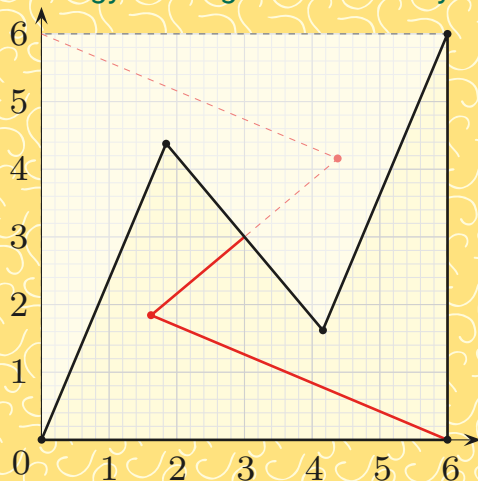
# Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok

Informatika rovattal

Ábra az Eötvös verseny 3. feladatának  
megoldásához



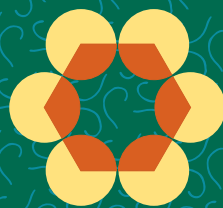
A decemberi egyik ördöglakat-feladvány megoldása



Beszámoló a 2024. évi Eötvös-versenyről |

Matematika és fizika feladatok megoldásai |

Ördöglakat Találkozó 2024 | Az idei Rátz Tanár Úr  
Életműdíjak | Készítsünk szimmetrikus síkidomokat!



# KöMaL

75. évfolyam

1. szám

2025.  
január



## SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM

### BOLYAI INTÉZET

<http://www.math.u-szeged.hu>  
[studentinfo@math.u-szeged.hu](mailto:studentinfo@math.u-szeged.hu)



A Szegedi Tudományegyetem Bolyai Intézete 1921 óta a matematika oktatásának és kutatásának jelentős európai centruma. Szeged az egyik legjobbnak tartott egyetemi város – nemcsak hazai mércével mérve –, kulturális és szellemi központ. A Bolyai Intézet tantermei egy modern, hallgatóbarát, akadálymentesített épületben találhatók.

### Államilag finanszírozott képzéseink

#### Matematika BSc (Alapképzés)

A felsőfokú matematikai végzettség számos állás betöltésének feltétele. Alapképzésünk olyan diplomát nyújt, amely egyrészt könnyű elhelyezkedést tesz lehetővé a munkaerőpiacon, másrészt kiváló lehetőséget teremt magasabb fokú egyetemi tanulmányokhoz, itthon és külföldön egyaránt. Államilag finanszírozott hat féléves képzésünk három félév közös alapozással kezdődik. Ezt követően a hallgatók az alábbi ötféle lehetőség közül választhatnak érdeklődési körük és további terveik szerint (Alkalmazott matematikus specializáció, Gazdasági specializáció, Informatikai specializáció, Matematikus specializáció, Specializáció nélküli képzés).

#### Tanárképzés

A 2022 szeptemberében indult új osztatlan képzés során 5 év alatt középiskolai kétszakos tanárokat képezünk. A matematika mellé másik szak a Szegedi Tudományegyetem kínálatából választható. Szegeden a matematikatanár képzésnek nagyon nagy hagyománya van. Az itt végzett matematikatanárok jelenleg is a közoktatás, ezen belül a matematikatanítás meghatározó és mértékadó szereplői országos viszonylatban is.

#### Alkalmazott matematikus MSc (Mesterszak)

Az itt szerzett mesterszakos diploma birtokosát karrierlehetőségek várják mind a versenyszférában, mind a tudományos pályán, elsősorban azokon a területeken, ahol a matematika alkalmazásainak magas szintű használata szükséges konkrét gyakorlati problémák megoldásához (Alkalmazott analízis specializáció, Műszaki matematika specializáció, Pénzügy-matematika specializáció, Matematikai adattudomány specializáció).

#### Matematikus MSc (Mesterszak)

E mesterképzésben diplomát szerzett matematikusok biztosítják majd zömében a szakember-utánpótlást a hazai felsőoktatásban és kutatásban.

#### Doktori képzés

A tudományos fokozatot szerezni szándékozók az SZTE Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskolájában is folytathatják tanulmányaikat, ahol a doktori képzés után megszerezhetik a doktori (PhD) fokozatot.



# KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK

## INFORMATIKA ROVATTAL BŐVÍTVE

### ALAPÍTOTTA: ARANY DÁNIEL 1894-ben

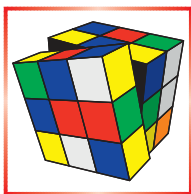
75. évfolyam 1. szám

Budapest, 2025. január

Megjelenik évente 9 számban, januártól májusig és szeptembertől decemberig havonta. ÁRA: 1450 Ft

| TARTALOMJEGYZÉK                                                                                               |    | Főszerkesztő: KORÁNDI JÓZSEF                                                                                                                                                                                                                               |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <i>Vígh Viktor</i> : Rejtvények, ördöglakatok – Szimmetriakeresők .....                                       | 2  | Fizikus szerkesztő: VANKÓ PÉTER                                                                                                                                                                                                                            |
| <i>Birkás György</i> : Beszámoló a 2024-es Ördöglakatok Találkozósról .....                                   | 6  | Műszaki szerkesztő: FRIED KATALIN                                                                                                                                                                                                                          |
| <i>Orosz Gyula</i> : Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire .....                            | 7  | Borító: BURGHARDT ZSUZSA                                                                                                                                                                                                                                   |
| <i>Tatár Zsuzsanna Mária</i> : Megoldásvázlatok a 2024./9. szám matematika gyakorló feladatsorához .....      | 11 | Kiadja: MATFUND ALAPÍTVÁNY                                                                                                                                                                                                                                 |
| Helyesbítés .....                                                                                             | 20 | Alapítványi képviselő: KÓS RITA                                                                                                                                                                                                                            |
| Rátz Tanár úr életműdíj 2024 .....                                                                            | 21 | Felelős kiadó: KATONA GYULA                                                                                                                                                                                                                                |
| Matematika C gyakorlatok megoldása (1822.) ..                                                                 | 22 | Nyomda: OOK-PRESS Kft.                                                                                                                                                                                                                                     |
| Matematika feladatok megoldása (5394., 5399., 5402.) .....                                                    | 24 | Felelős vezető: SZATHMÁRY ATTILA                                                                                                                                                                                                                           |
| A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok (839–843.) .....                                                      | 32 | INDEX: 25 450 ISSN 1215-9247                                                                                                                                                                                                                               |
| A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (842–843., 1838–1842.) .....                                          | 33 | <b>A matematika bizottság vezetője:</b><br>HERMANN PÉTER                                                                                                                                                                                                   |
| A B pontversenyben kitűzött feladatok (5430–5437.) .....                                                      | 34 | <b>Tagjai:</b> BÁN-SZABÓ ÁRON, BÍRÓ BÁLINT, CZETT MÁTYÁS, GYENES ZOLTÁN, HUJTER BÁLINT, IMOLAY ANDRÁS, KISS GÉZA, KÓS GÉZA, KOZMA KATALIN ABIGÉL, LOVAS MÁRTON, ÓKÖRDI PÉTERNÉ, PACH PÉTER PÁL, PAULOVIČS ZOLTÁN, RATKÓ ÉVA, SZTRANYÁK ATTILA, VÍGH VIKTOR |
| Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (896–898.) .....                                              | 35 | <b>A fizika bizottság tiszteletbeli elnöke:</b><br>HOLICS LÁSZLÓ                                                                                                                                                                                           |
| Informatikából kitűzött feladatok (647–650.) ..                                                               | 36 | <b>Vezetője:</b><br>SZÉCHENYI GÁBOR                                                                                                                                                                                                                        |
| <i>Széchenyi Gábor, Vankó Péter, Vígh Máté, Vladár Károly</i> : Beszámoló a 2024. évi Eötvös-versenyről ..... | 41 | <b>Tagjai:</b> BARANYAI KLÁRA, GNÄDIG PÉTER, HONYEK GYULA, OLOSZ BALÁZS, SZÁSZ KRISZTIÁN, VÍGH MÁTÉ, VLADÁR KÁROLY, WOYNAROVICH FERENC                                                                                                                     |
| Fizika feladatok megoldása (5575., 5589.) .....                                                               | 55 | <b>Az informatika bizottság vezetője:</b><br>SCHMIEDER LÁSZLÓ                                                                                                                                                                                              |
| Helyreigazítás .....                                                                                          | 58 | <b>Tagjai:</b> LÓCZI LAJOS, SIEGLER GÁBOR, TÓTH TAMÁS                                                                                                                                                                                                      |
| Fizikából kitűzött feladatok (437., 873–876., 5616–5624.) .....                                               | 59 | <b>Fordítók:</b> GYENES ZOLTÁN, TASNÁDI ANIKÓ                                                                                                                                                                                                              |
| Problems in Mathematics .....                                                                                 | 62 | <b>Nyelvi korrektor:</b> ANDICS ÁGNES                                                                                                                                                                                                                      |
| Problems in Physics .....                                                                                     | 63 | <b>Szerkesztőségi titkár:</b> ONDINÉ SZABÓ SÁRA                                                                                                                                                                                                            |

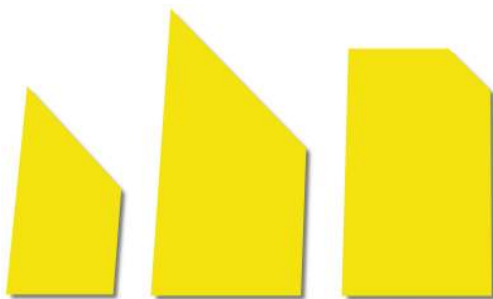
A szerkesztőség címe: 1117 Budapest,  
Pázmány Péter sétány 1/C III. emelet 3.405.  
Telefon: +36 20 320-1143  
A lap megrendelhető a  
<https://komalujzag.myshoprenter.hu>  
oldalon keresztül.  
Előfizetési díj egy évre: 12 000 Ft  
Kéziratokat nem őrzünk meg és nem küldünk vissza.  
Minden jog a KöMaL tulajdonosaié.  
E-mail: [szerk@komal.hu](mailto:szerk@komal.hu)  
Internet: <http://www.komal.hu>  
This journal can be ordered from the Editorial office:  
Pázmány Péter sétány 1/C III. emelet 3.405.  
1117-Budapest, Hungary  
telephone: +36 20 320-1143  
or on the Internet:  
<https://komalujzag.myshoprenter.hu>  
A Lapban megjelenő hirdetések tartalmáért  
felelősséget nem vállalunk.



## Rejtvények, ördöglakatok Szimmetriakeresők

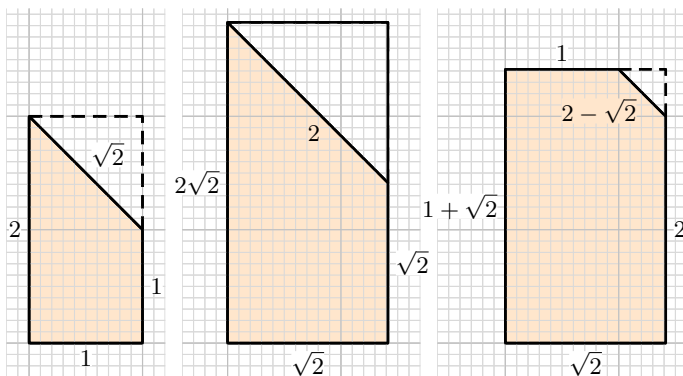
Rovatunkban minden hónapban valamilyen szórakoztató matematikai fejtörőt mutatunk be. Ezek között fontos helyet foglalnak el a különböző kirakós játékok, topológiai feladványok, ördöglakatok és a matematikát felhasználó bűvészmutatványok.

Manapság szinte mindent meg lehet találni az interneten, de az igazi élményt az adja, ha a feladatokat magunk oldjuk meg, a bűvészmutatványok trükkjeit mi találjuk ki, és a szükséges kellékeket is mi tervezzük meg és készítjük el. Próbáljuk meg a feladatokat továbbgondolni, általánosítani, igyekezzünk új feladatokat kitalálni.



Az *International Puzzle Party* (röviden IPP) az „ördöglakatos” közösség legnagyobb, nemzetközi rendezvénye, amelynek egyik fő attrakciója a *Yob Noshigahara Puzzle Design Competition*. Erre az évente megrendezett versenyre a világ minden tájáról érkeznek új feladványok, amelyeket egy szakértőkből álló zsűri, és a (jobbára szintén szakértőkből ál-

ló) közönség is díjaz. 2010-ben **Hiroshi Yamamoto** az EX 3 névre keresztelt játékkal nevezett. *A feladvány egyszerű, rakjunk össze a három megadott síklapból valami szimmetrikusat.* (Az elemek itt is, és minden további bemutatott feladatban is átfordíthatóak a másik oldalukra.) Ez a puzzle lényegében kategóriateremtő lett, korábban ilyen jellegű feladatok nem léteztek. Az EX 3 pedig azonnal pokoli magasra is tette a léceket, meglehetősen ártatlannak tűnik elsőre, de a megoldása nagyon-nagyon nehéz, noha semmiféle „csalafintaság” nincs benne, a három síklap összeállítható egy összefüggő, szimmetrikus sokszöggé. A játék pontos mérete-

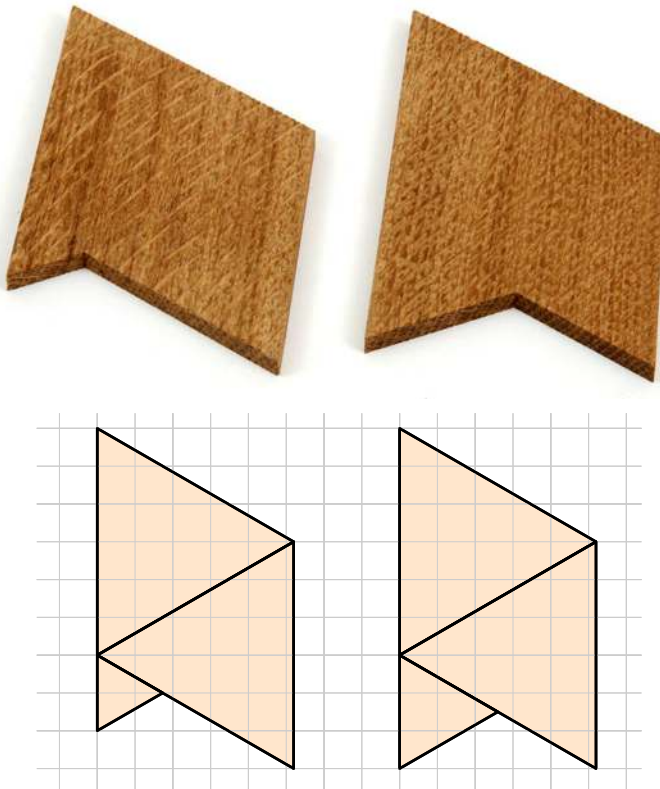




ihéz készítettünk egy magyarázó szerkesztést is: mindhárom puzzledarab egy-egy téglalapból keletkezik, amelyekből egy-egy egyenlő szárú derékszögű háromszöget vágunk le. A kisebb derékszögű trapéz oldalai  $1, 1, \sqrt{2}$  és  $2$  egység hosszúak, a nagyobbé  $\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2$  és  $2\sqrt{2}$  egységnyiek. Az ötszög oldalai  $\sqrt{2}, 2, 2 - \sqrt{2}, 1$  és  $1 + \sqrt{2}$  egységnyiek.

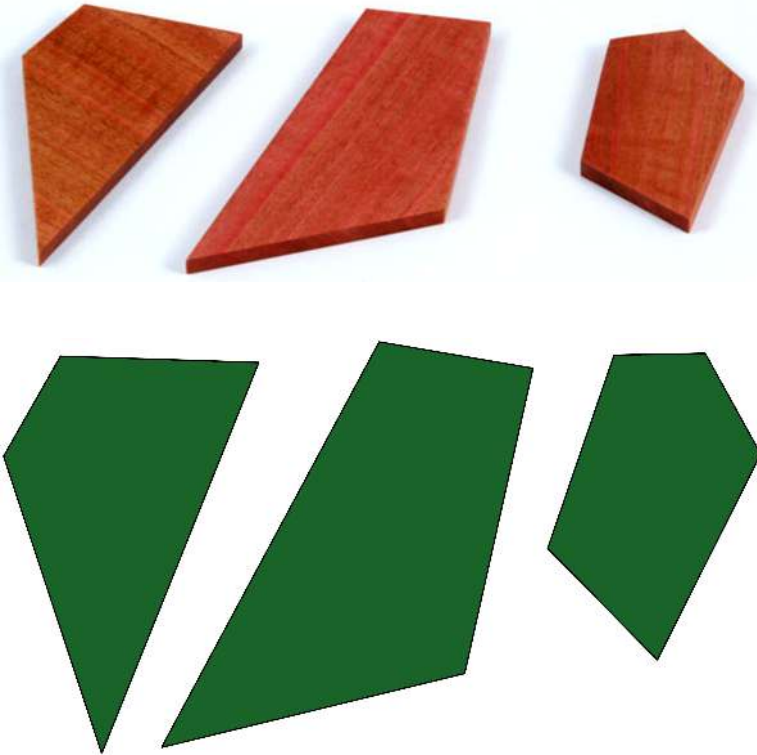
### Symmetrick

Az EX 3 a 2010-es versenyen különdíjat kapott, és viszonylag gyorsan népszerű lett a játékos körökben nehézsége és újszerűsége miatt. Hamar elkezdtek különféle variációkat kitalálni rá, és az egyik fő cél az volt, hogy *igazán jó* játékot készítsünk csupán két elemből. A zseniális finn játéktervező, **Vesa Timonen** a 2013-as versenyre nevezett Symmetrick nevű játékaival, ahol a feladat ismét csak annyi, hogy rakjunk össze valami szimmetrikusat, de immár csupán két puzzledarabunk van. Az elemek itt matematikailag nagyon könnyen leírhatók, mindkettő alapja egy  $60^\circ$ -os (azaz két szabályos háromszögből álló), egységnyi oldalhosszúságú rombusz, amihez egyik esetben  $1/2$  oldalhosszúságú, másik esetben  $1/3$  oldalhosszúságú szabályos háromszöget ragasztunk. A Symmetrick a versenyen éppen lemaradt a díjról (hatodiknak rangsorolták), de később az egyszerű elkészíthetősége ellenére nyújtott remek játékelménye okán nagyon népszerű lett.



## Unicum

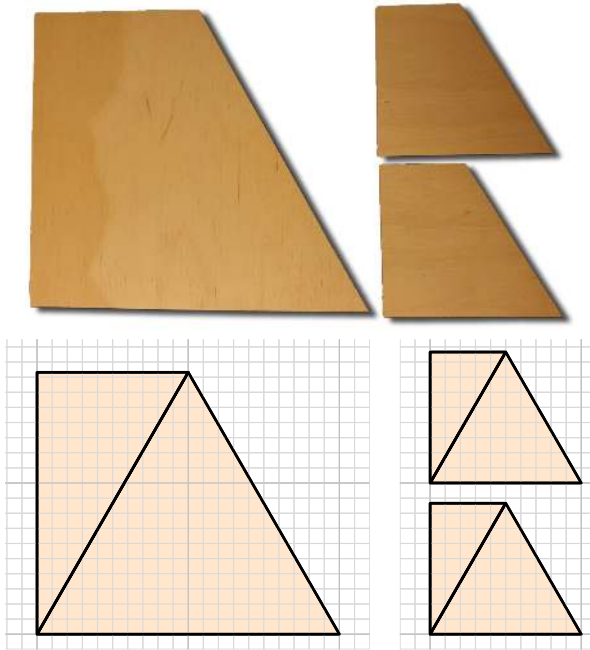
A magyar tervezőket is megihlette az EX 3 és a Symmetrick sikere, de a szimmetriakeresős játékok gombamódra szaporodtak, ezért egyre nehezebb volt egy-egy tervvel kitűnni. A 2018-as versenyre **Galla Norbert** Unicum nevű játékával nevezett, ami ugyan nem ért el helyezést, de a közösség nagyon jól fogadta, és később kereskedelmi forgalomba is került. Itt az elemek alakjának precíz matematikai leírása hosszadalmas, így inkább azt javasoljuk, hogy a zöld alakzatokról készített fénymásolatból kivágott darabokkal próbáljuk megoldani a feladatot. A feladat továbbra is: rakjunk össze valami szimmetrikusat. Az Unicum is három darabból áll, ennek megfelelően nagyon nehéz, de érdemes vele időt tölteni, a megoldás igazán esztétikus.



## Traple

Végezetül egy viszonylag új tervet mutatunk, amely **Bozóki Sándortól**, az egyik legaktívabb magyar tervezőtől származik 2023 elejéről. Az elemek geometriája nagyon egyszerű, mindegyik egy derékszögű trapéz, amelyet úgy kapunk, hogy egy szabályos háromszöghöz egy ugyanolyan háromszög felét ragasztjuk. A két kisebb darab egybevágó, a nagyobb darab hozzájuk hasonló, de kétszer akkora. Ez a játék igazán akkor csillogtatja meg szépségét, ha előtte már némi rutint szereztünk a szimmetriakeresős játékokban, tehát azt javasoljuk, hogy a fenti három feladvány

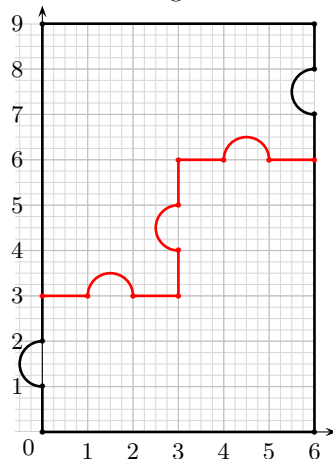
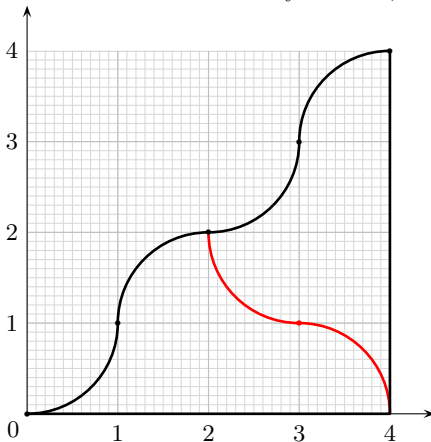
megoldása után álljunk csak neki. A feladat itt is: rakjunk össze valami szimmetrikus!

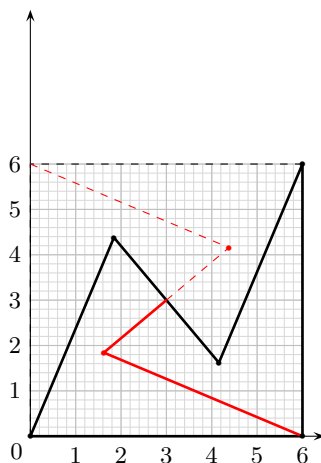
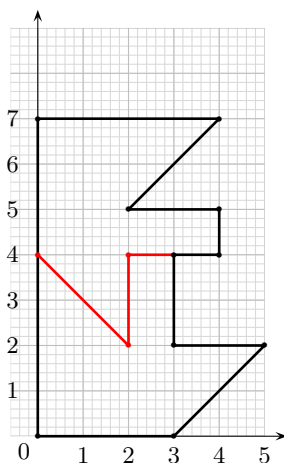


A képek forrása: [www.johnrausch.com](http://www.johnrausch.com)

### A múlt havi feladványok megoldása

A múlt hónapban néhány Martin Gardnertől származó rejtvényt adtunk fel. A feladat minden esetben az volt, hogy a megadott síkidomot daraboljuk két egybevágó részre. Hosszadalmas magyarázatok helyett beszéljenek a rajzok, mindegyiket koordináta-rendszerben helyeztük el, ezzel segítve az ábrák megértését.





Vígh Viktor



## Beszámoló a 2024-es Ördöglakat Találkozóról

2024. november 9-én került megrendezésre a XVII. Országos Ördöglakat Találkozó a Magyar Kereskedelmi és Vendéglátóipari Múzeumban. Az eseményen a logikai játékok szerelmeseinek lelkes közössége előadásokat hallgathatott, a kiállított tárgyakat kipróbálhatta, sőt, a vállalkozó kedvűek ördöglakat megoldó versenyen is részt vehettek. Az ingyenes rendezvény nemcsak kihívásokat, hanem inspirációt is jelentett minden résztvevő számára.

Az első előadó Mágori Marcell volt, aki már elsőéves egyetemistaként is számos Rubik-kocka variánst tervezett. Itt a Floppy Comet Plust mutatta be az ötlettől a megvalósulásig.

Az alapötlet az volt, hogy mi történne, ha egy Floppy Cube-ot ( $1 \times 3 \times 3$ -as kocka) az egyik lapátlója mentén megnyújtanánk. A nyújtás után persze új vágásokat – és így újjáalakított alkatrészeket – kell az eszközhöz hozzáadni, hogy a forgathatóság megmaradjon. Hogy minél kevesebb ilyen vágás legyen szükséges, a rombusz hegyes belső szögét  $72^\circ$ -osnak célszerű választani.

A kész eszköz érdekessége, hogy jóval kisebb az összes lehetséges pozíciója, mint a Rubik-kockának ( $7!^2 \cdot 4 = 101\,606\,400$ , míg a  $3 \times 3 \times 3$ -as Rubik-kockánál ez körülbelül  $4 \cdot 10^{19}$ ), az Isteni száma – ez az a szám, amelynél nem több forgatással az eszköz bármely helyzetből alapállásba hozható, amely a Rubik-kockánál 20 – viszont 30, azaz van olyan pozíciója, amelyből 30-nál kevesebb forgatással nem lehet „kirakni” a FCP-t. (68 ilyen pozíciója van.)

A következő előadó Kós Géza volt, aki a  $B\omega G16$  elnevezésű ördöglakatát mutatta be, amelyet az tesz egyedivé, hogy különböző nehézségi szintek állíthatóak



be rajta. Az előadás során a résztvevők itt is betekintést nyerhettek az ördöglakat megalkotásának folyamatába: hogyan lett a „trükkös fickó” nevű alapötletből egy komplex, több lépésben megoldható fejtörő.

Gáspár Merse Előd az AI és a logikai játékok találkozási pontjáról tartott lebilincselő előadást. A mesterséges intelligencia diffúziós modelljeit bemutatva ismertette, hogyan képesek ezek a rendszerek véletlenszerű zajból részletgazdag képeket generálni. Az előadás fő témája az illúziók gyártása volt: hogyan lehet egy kép például egyszerre olyan, hogy attól függően látunk rajta zsiráfot vagy pingvint, hogy melyik irányból nézzük. Az előadó rengeteg példát mutatott arra, hogy az AI milyen kreatív megoldásokkal képes előállni, például egyetlen képen belül több értelmezési lehetőséget is elrejtve.

Vígh Viktor előadása a síkidomok egybevágó részekre való darabolásáról szólt. Nem csak a fejtörőket és megoldásukat mutatta be, hanem számos példát mutatott arra, hogyan lehet felfedezni egy-egy darabolási megoldást logikai következtetésekkel. Például részletesen elmagyarázta, milyen matematikai elvek mentén lehet egy kört úgy felbontani egybevágó részekre, hogy legyen olyan darab, amelyik nem tartalmazza a kör középpontját még a határán sem.

Gál Péter előadása a logikai labirintusokról szólt. A jól ismert útvesztő helyett most számokkal, nyilakkal, színekkel és formákkal kellett eljutnunk a starttól a célig.

Az előadások felkerültek a <https://www.youtube.com/@ordoglakat4717> weboldalra, meg lehet őket nézni a korábbi találkozók néhány előadásával együtt.

**Birkás György**

## **Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire**



### **I. rész**

1. István gazda háromfajta őszibarackot árul a piacon, három különböző asztalon. Az A típusú barack ára 700 Ft, a B típusúé 820 Ft, a C típusúé 890 Ft kilogrammonként.

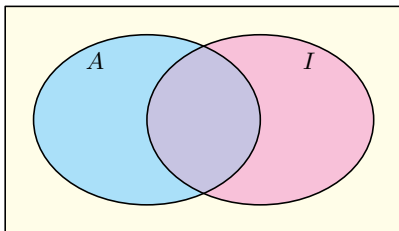
a) Délelőtt 10 óráig összesen 64 kg barackot adott el, az A típusúból éppen kétszer annyit, mint a C típusúból. Melyik fajta barackból mennyit adott el, ha a barack eladásából származó bevétele 50 100 Ft volt? (4 pont)

b) 10 és 12 óra között csak 16 kg barackot sikerült eladnia, összesen 13370 forintért. Az eladási bizonylatok sajnos elvesztek, utólag csak arra emlékszik a gazda, hogy mindegyik fajtából egész kilogrammnyi árut vásároltak. Ki tudja számítani, hogy melyik barackból mennyit adott el? (5 pont)

c) István gazda kisfia véletlenszerűen kiválaszt 9 barackot, és kiteszi őket az eladópultra. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az A típusból 2, a B-ből 3 és

a C-ből 4 darabot választ? (Minden húzás során a három típusból választ egyet, bármelyiket egyenlő valószínűséggel, és onnan vesz ki egy barackot.) (6 pont)

2. a) A piacon egy másik kereskedőnek összesen 420 kg A és B típusú barackja van, ezek egy része I. osztályú (egy bizonyos méret felettiek), a többi II. osztályú. Az A típusú barackok 40%-a I. osztályú, a II. osztályú barackok  $\frac{4}{7}$  része B típusú, és még azt is tudjuk, hogy B típusú, I. osztályú barackja 60 kg van. Számítsuk ki, hogy az egyes fajtákból hány kg barackja van a kereskedőnek, és ez alapján töltsük ki az alábbi Venn-diagram négy tartományát. (Az A halmaz az A típusú, az I az I. osztályú barackot jelöli; az egyes tartományokba a megfelelő fajta barack mennyisége kerül kg-ban számolva.) (5 pont)



b) A nem válogatott almák mérete természetesen különböző. Az egyik eladónál egy mintavétel során a következő adatokat kapták az almák maximális átmérőjére (fél cm-re kerekítve):

|    |   |   |     |    |     |   |     |
|----|---|---|-----|----|-----|---|-----|
| cm | 4 | 5 | 5,5 | 6  | 6,5 | 7 | 7,5 |
| db | 1 | 6 | 8   | 13 | 6   | 5 | 2   |

Számítsuk ki az adatok szórását, és készítsünk az adatokból egy sodrófadiagramot! (8 pont)

3. Egy  $\{a_n\}$  számtani sorozat első tagja 100, különbsége 0,2. Egy  $\{b_n\}$  számtani sorozat 8. tagja 4, a 20. tagja 10.

a) Mely  $n$  értékekre lesz  $S(b_n) > S(a_n)$ ? ( $S$  az első  $n$  tag összegét jelöli.) (6 pont)

Egy  $\{c_n\}$  mértani sorozat 3. tagja  $\frac{27}{4}$ , hányadosa 1,5. Egy  $\{d_n\}$  mértani sorozat első tagja 1000, a hányadosa 1,2.

b) Mely  $n$  értékekre lesz  $S(c_n) > 10^6$ ? (5 pont)

c) Mely  $n$  értékekre lesz  $c_n > d_n$ ? (3 pont)

4. Felsorolunk három implikáció típusú igaz állítást.

Legyenek  $a, b, c$  pozitív számok.

1. Ha  $a, b, c$  egy háromszög oldalhosszai, akkor  $(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c) > 0$ .

Legyen a  $G$  egyszerű gráf 4 pontú, 4 élű.

2. Ha  $G$ -ben van 4 hosszú kör, akkor  $G$  összefüggő.

Legyenek  $f$  és  $g$  az  $[a; b]$  intervallumon értelmezett integrálható függvények.

3. Ha  $f(x) = g(x)$  minden  $x \in [a; b]$  esetén, akkor  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx$ .

Fogalmazzuk meg az állítások megfordítását. Melyik igaz, melyik hamis közülük? A válaszokat indokoljuk meg. (9 pont)

## II. rész

5. Egy négyszög alakú földterület három csúcsát a derékszögű koordináta-rendszerben az  $A(7;7)$ ,  $B(11;9)$  és  $C(15;1)$  koordinátájú pontokkal modellezhetjük, ahol 1 egység a valóságban 10 méternek felel meg.

A földterület gazdája nem ismeri pontosan a negyedik ( $D$ ) csúcs helyét, de a korabeli feljegyzések alapján arra jutott, hogy az az  $x$  tengely által szemléltetett folyóparton kétféleképpen helyezkedhet el.

Az egyik lehetőség a  $D_1$  pontot úgy kijelölni, hogy ekkor  $\angle AD_1C = 90^\circ$  legyen.

Egy másik lehetőség szerint az  $ABCD_2$  földdarab területe éppen  $3900 \text{ m}^2$ .

a) Számítsuk ki a  $D$  csúcs fenti esetekben lehetséges koordinátáit. ( $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  körüljárási iránya az óramutató járásával megegyező.) (12 pont)

b) A koordináta-rendszer origóját jelölje  $O$ , és tekintsük a  $Q(0;5)$  pontot. Az  $ABC$  háromszög kerületének tetszőleges  $P$  pontjára kiszámítjuk az  $\overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OP}$  skaláris szorzatot. Mennyi a szorzat minimuma? (4 pont)

6. Egy üzemegeységben nagy mennyiségű dísz tárgyat gyártanak, amelynek az eladási ára 20 euró. A korábbi évek tapasztalatai alapján egy adott értékesítési időszakban a termékeknek csak 40%-a fogy el, akciós árleszállítással viszont arányosan egyre több terméket lehet eladni. Például 20 eurós eladási ár esetén 60% marad meg, míg ha ingyen adják a termékeket, akkor mind elfogy. A két szélső helyzet közötti árazásnál pedig jó közelítéssel arányos a termék ára és a megmaradó mennyisége.

1000 termék eladását vizsgáljuk.

a) Mennyi a bevétel 18 euró eladási ár esetén? (3 pont)

b) Milyen eladási ár esetén lesz a bevétel a lehető legnagyobb? (A választ tized euró pontossággal adjuk meg.) (5 pont)

c) Az elkészült dísz tárgyakat kocka alakú konténerekben szállítják. Legyen egy konténer alsó lapja  $A$ , felső lapja  $B$ , a közöttük lévő négy lap pedig sorban  $C$ ,  $D$ ,  $E$ ,  $F$  betűzésű. A konténer mindegyik lapját négy szín (piros, kék, zöld, sárga) valamelyikére festhetjük úgy, hogy a közös éllel csatlakozó lapok különböző színűek legyenek. (Nem szükséges mindegyik színt felhasználni.) Hányféleképpen színezhető egy konténer? (8 pont)

7. Egy épületrész alapja  $ABC$  derékszögű háromszög alakú, amelyben:  $AC = 8$  méter,  $BC = 6$  méter és  $\angle ACB = 90^\circ$ . A  $C$  pontban az  $ABC$  síkra merőlegest állítanak, s ezen vesznek fel az épület tetejének  $D$  pontját, így az épület alakja az  $ABCD$  háromszög alapú gúla. (A gúla  $CA$ ,  $CB$  és  $CD$  élei páronként merőlegesek.)

a) Hogyan kell megválasztani a  $CD$  magasságot, hogy az épület  $ABD$  tetősíkja az  $ABC$  alappal  $50^\circ$ -os szöget zárjon be? (7 pont)

b) Az épület  $D$  csúcsába egy (pontoszerűnek tekinthető) lámpát helyeznek el, olyan lámpaernyővel, amely a talajon a  $B$  sarkot még éppen megvilágítja, de a lámpától távolabbi pontokat már nem. Az  $ABC$  háromszög területének hány százalékát világítja meg a lámpa? (9 pont)

8. a) Az  $x^3 - 3x^2 + Ax + B = 0$  harmadfokú egyenletnek három különböző valós gyöke van. Tudjuk, hogy két gyök egymás ellentettje, valamint az egyik gyök kétszerese egy másik gyöknek. Határozzuk meg az  $A$  és  $B$  együtthatók, valamint a három gyök értékét. (7 pont)

b) Igazoljuk, hogy a valós számokon értelmezett  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 27$  függvény görbéje középpontosan szimmetrikus az inflexiós pontjára. (9 pont)

9. Egy erősen összetett szám olyan pozitív egész szám, amelynek több (pozitív) osztója van, mint bármelyik nála kisebb pozitív egész számnak. A kifejezés már Platón görög filozófusnál is megjelenik, aki szerint 5040 a városlakók ideális száma, mivel 5040-nek több osztója van a nála kisebb pozitív egész számoknál.

Az alábbi táblázat első sorában a pozitív egész számokat 1-től 15-ig, a számok alatt a (pozitív) osztóik számát soroltuk fel, továbbá az erősen összetett számok pirossal szerepelnek.

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |    |    |    |    |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 1 | 2 | 2 | 3 | 2 | 4 | 2 | 4 | 3 | 4  | 1  | 6  | 2  | 4  | 4  |

Tegyük fel, hogy a pozitív egész számok prímtényezőzős felbontásában a prímtényezőket monoton növekvő sorrendben soroljuk fel, például  $12 = 2^2 \cdot 3$ ,  $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$  vagy  $840 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ . (Ezek mind erősen összetett számok.)

a) Kezdődhet-e egy  $A$  erősen összetett szám prímtényezőzős felbontása például  $2^2 \cdot 3 \cdot 7$  módon? (3 pont)

b) Mutassuk meg, hogy egy  $C$  erősen összetett szám prímtényezőzős felbontása nem kezdődhet  $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$  módon. (3 pont)

c) Leavitt: Az *indiai hivatalnok* (Európa, 2010) c. könyvben megemlítik, hogy az indiai matematikus, Rámánudzsan 6746328388800-ig kiszámította az erősen összetett számokat. Viszont McMahon őrnagy talált egyet, amelyet kihagyott a felsorolásból, és megadta a 29331862500 számot. A történet szerint: végül „átadja Rámánudzsannak a cédulát, amire Rámánudzsan megsebzett arckifejezéssel néz.”

Lehet-e erősen összetett szám a könyvben szereplő 29331862500? (4 pont)

d) 1-től 50-ig 8 darab erősen összetett szám van (a táblázatban szereplőkön kívül ilyen szám még a 24, 36 és 48, rendre 8, 9, 10 osztóval.)

Az 1, 2, 3, ..., 50 számok közül véletlenszerűen kiválasztunk 3 számot először „visszatevéssel” (a kiválasztott számok között lehet ismétlődés), majd „visszatevés nélkül” (ekkor a kiválasztott számok között nincs ismétlődés). Számítsuk ki a két esetben, mennyi annak a valószínűsége, hogy a számok között lesz erősen összetett szám. (6 pont)

**Orosz Gyula**  
Budapest

# Megoldásvázlatok a 2024./9. szám matematika gyakorló feladatsorához

## I. rész

1. Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán.

a)  $\sin^2 x = (1 - \cos x)^2$ , (5 pont)

b)  $(2x - 1)^2 - \frac{3}{4x^2 - 4x + 1} + 2 = 0$ . (6 pont)

**Megoldás.** a) Alakítsuk az egyenletet ismert azonosságok felhasználásával:

$$\begin{aligned} 1 - \cos^2 x &= (1 - \cos x)^2, \\ (1 - \cos x)(1 + \cos x) - (1 - \cos x)^2 &= 0, \\ (1 - \cos x)(1 + \cos x - 1 + \cos x) &= 0, \\ (1 - \cos x) \cdot 2 \cos x &= 0. \end{aligned}$$

Innen  $\cos x = 1$  vagy  $\cos x = 0$ , amiből

$$x = k \cdot 2\pi, \quad k \in \mathbb{Z};$$

vagy

$$x = \frac{\pi}{2} + l \cdot \pi, \quad l \in \mathbb{Z}.$$

Ekvivalens átalakításokat végeztünk.

b) Értelmezési tartomány:  $x \neq \frac{1}{2}$  valós szám. A  $(2x - 1)^2 = 4x^2 - 4x + 1$  kifejezés helyett vezessük be az  $y (> 0)$  ismeretlent:

$$\begin{aligned} y - \frac{3}{y} + 2 &= 0, \\ y^2 + 2y - 3 &= 0. \end{aligned}$$

Innen  $y = -3$  vagy  $y = 1$ . Csak  $y = 1$  lehet a megoldás, tehát  $(2x - 1)^2 = 1$ , azaz  $2x - 1 = 1$ , innen  $x_1 = 1$ , illetve  $2x - 1 = -1$ , innen  $x_2 = 0$ . Ellenőrzés: helyettesítéssel megmutatható, hogy mindkét eredmény helyes.

2. Egy derékszögű háromszög átfogójához tartozó magasságának  $T$  talppontja  $16 : 9$  arányban osztja az átfogót, a derékszög szögfelezője pedig a  $Q$  pontban  $4 : 3$  arányban osztja az átfogót. A két egyenes – magasságvonal és szögfelező – átfogóval való metszéspontjainak távolsága 12 egység.

a) Mekkora a háromszög oldalai? (7 pont)

b) Mekkora a (derékszöget felező) szögfelezőszakasz pontos hossza? (3 pont)

c) Igazoljuk, hogy  $c = 5r$ , ha  $r$  a háromszögbe írható kör sugara,  $c$  az átfogó. (3 pont)

**Megoldás.** a) Jelöljük  $4x$ -szel és  $3x$ -szel a szögfelező által levágott darabokat, valamint  $16y$ -nal és  $9y$ -nal a magasság által levágott darabokat, így az átfogó

hossza:

$$(1) \quad c = 7x = 25y.$$

A magasságtétel felhasználásával adódik az átfogóhoz tartozó magasság hossza:

$$(2) \quad m = 12y.$$

A  $TQ$  szakasz hossza:

$$(3) \quad 3x - 9y = 12.$$

Az (1) és a (3) összefüggés felhasználásával:  $3x - 9 \cdot \frac{7x}{25} = 12$ , azaz  $x = 25$ ,  $y = 7$ . Ebből  $c = 175$  egység,  $m = 84$  egység. A Pitagorasz-tétel felhasználásával a befogók hossza:  $a = 140$  egység,  $b = 105$  egység.

b) Az átfogóhoz tartozó magasság ( $m = 84$  egység), a szögfelező és az adott 12 egység hosszúságú szakasz derékszögű háromszöget alkot. Így Pitagorasz-tétellel a szögfelező hossza:  $f = 60\sqrt{2}$ .

c) A háromszög kerülete:  $K = 140 + 105 + 175 = 420$  egység, ekkor a félkerület hossza:  $s = 210$  egység. A derékszögű háromszög területe:  $\frac{140 \cdot 105}{2} = 7350$  terület-egység, a  $T = r \cdot s$  összefüggést felhasználva:  $r = \frac{7350}{210} = 35$  egység. Ekkor  $5r = 5 \cdot 35 = 175 = c$ . Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

*Megjegyzés.* Befogótétellel könnyen beláthatjuk, hogy ha a derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó magassága  $p : q$  arányban osztja az átfogót, akkor a befogók aránya  $\sqrt{p} : \sqrt{q}$ , és a szögfelezőtétel miatt ez egyenlő azzal az aránnyal, amelyre a derékszög szögfelezője osztja az átfogót.

**3.** Három szám egy 15 differenciájú számtani sorozat három egymást követő tagja. Ha az első tagból kivonunk egy számot, és ugyanezt a számot a második tagból is kivonjuk, a harmadik számhoz pedig hozzáadjuk a szám felét, akkor egy olyan mértani sorozat három egymást követő tagját kapjuk, amelyek összege 105.

a) Mi volt a kiinduló számtani sorozat? (8 pont)

b) Melyik számot felhasználva kapjuk meg a szóban forgó mértani sorozatot? (5 pont)

**Megoldás.** a) A számtani sorozat tagjai legyenek:

$$a - 15; \quad a; \quad a + 15.$$

A mértani sorozatot az  $x$  érték felhasználásával így kapjuk:

$$a - 15 - x; \quad a - x; \quad a + 15 + 0,5x.$$

A három tag összege 105;  $a - 15 - x + a - x + a + 15 + 0,5x = 105$ ,  $3a - 1,5x = 105$ , amiből

$$x = 2a - 70.$$

A mértani sorozat definícióját felhasználva:

$$\frac{a - x}{a - 15 - x} = \frac{a + 15 + 0,5x}{a - x},$$

$$\frac{70 - a}{55 - a} = \frac{2a - 20}{70 - a},$$

$$a^2 - 90a + 2000 = 0.$$

Innen  $a = 40$  vagy  $a = 50$ . Az első esetben a számtani sorozat tagjai: 25; 40; 55, a második esetben pedig: 35; 50; 65.



b) Mivel  $x = 2a - 70$ , az első esetben  $x = 30$ , a második esetben:  $x = 10$ .

Első megoldás: számtani sorozat: 35; 50; 65, mértani sorozat: 5; 20; 80, a kvóciens: 4.

Második megoldás: számtani sorozat: 25; 40; 55, mértani sorozat: 15; 30; 60, a kvóciens: 2.

Ezek valóban megoldásai a feladatnak.

4. Egy osztály képviselőket küld az iskolai diákbizottságba. Észrevették, hogy ha 3 fős képviselőcsoportot választanak maguk közül, akkor 10-szer annyi féleképpen tudják kiválasztani a három embert, mintha 2 fős képviselőcsoportot választanának.

a) Hányan járnak ebbe az osztályba? (6 pont)

b) Bizonyítsuk be, hogy minden  $n, k$  esetén ( $n, k \in \mathbb{N}, n \geq k$ )

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}. \quad (3 \text{ pont})$$

c) Egy halmaznak pontosan annyi 5 elemű részhalmaza van, mint ahány 6 elemű. Hány elemű a halmaz? (5 pont)

**Megoldás.** a) Ha az osztály  $n$  fős, akkor a háromfős csoportot  $\binom{n}{3}$ -féleképpen, míg a kétfős csoportot  $\binom{n}{2}$ -féleképpen választhatjuk ki. Így

$$\binom{n}{3} = 10 \cdot \binom{n}{2}; \quad \frac{n!}{3! \cdot (n-3)!} = 10 \cdot \frac{n!}{2! \cdot (n-2)!}.$$

Rendezve:  $n-2 = 30$ ,  $n = 32$ . Ellenőrzés:  $\binom{32}{3} = 4960$ , illetve  $\binom{32}{2} = 496$ . Az osztály 32 fős.

b) Az  $\binom{n}{k}$  kifejezés definícióját behelyettesítve:

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} &= \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}, \\ \binom{n}{n-k} &= \frac{n!}{(n-k)! \cdot (n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}. \end{aligned}$$

Ezzel beláttuk, hogy az állítás igaz.

c) Egy  $n$  elemű halmaz  $k$  elemű részhalmazainak száma  $\binom{n}{k}$ . Az állítás szerint  $\binom{n}{5} = \binom{n}{6}$ . A b) részben bebizonyított állítás szerint  $5 = n - 6$ , azaz  $n = 11$ .

Ellenőrzés:  $\binom{11}{5} = \binom{11}{6} = 462$ . A halmaz 11 elemű.

## II. rész

5. a) Válasszuk ki a racionális számok halmazába tartozó értékeket az alábbiak közül, és adjuk meg közösleges tört alakjukat.

$$k = 3, \dot{1}\dot{2}, \quad l = (\sqrt{5} - 1)^2, \quad m = (\sqrt{5} - 1)(\sqrt{5} + 1), \quad n = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} - \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}. \quad (5 \text{ pont})$$

b) Igazoljuk, hogy a következő egyenlőtlenségnek pontosan egy megoldása van a valós számok halmazán.

$$2^{4\log_2 x} + 4 \leq 4x^2 \quad (7 \text{ pont})$$

c) Adott az  $[-8; +8]$  intervallumon értelmezett valós értékű  $f$  függvény:

$$f(x) = \begin{cases} 3,5x + 21, & \text{ha } -8 \leq x < -4; \\ |x^2 - 9|, & \text{ha } -4 \leq x < 4; \\ -3,5x + 21, & \text{ha } 4 \leq x \leq 8. \end{cases}$$

Döntsük el, hogy a következő állítások igaz vagy hamis értékűek-e.

i) Az  $f$  függvény értékkészlete:  $[-8; 9]$ .

ii) Az  $f$  függvény zérushelyeinek száma: 2.

iii) A függvény páratlan.

iv)  $f(6) = 0$ .

(4 pont)

**Megoldás.** a)  $k = 3, \dot{1}\dot{2} = 3 + \frac{12}{100} + \frac{12}{10000} + \frac{12}{10^6} + \dots = 3 + \frac{4}{33} = \frac{103}{33}$ , ami racionális szám. Az átalakításban felhasználtuk, hogy végtelen mértani sorról van szó, amelynek kvóciense:  $\frac{1}{100}$ .

$l = (\sqrt{5} - 1)^2 = 6 - 2\sqrt{5}$ , ami nem racionális szám.

$m = (\sqrt{5} - 1)(\sqrt{5} + 1) = (\sqrt{5})^2 - 1^2 = 4$ , racionális.

$n = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} - \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = \sqrt{(\sqrt{2} + 1)^2} - \sqrt{(\sqrt{2} - 1)^2} = |\sqrt{2} + 1| - |\sqrt{2} - 1| = 2$ , racionális.

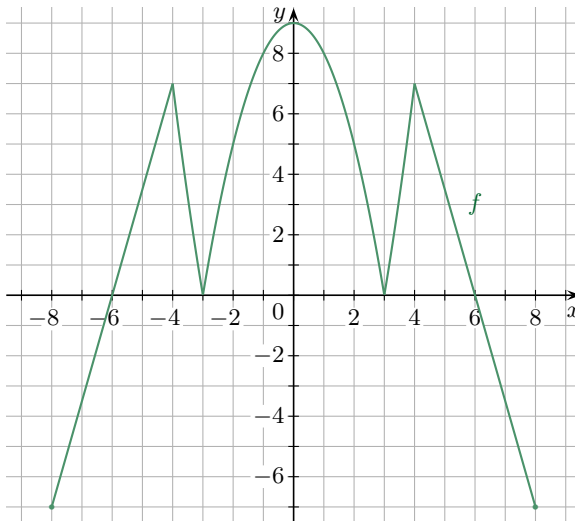
b) Az egyenlőtlenség minden  $x > 0$  valós számra értelmezhető. A logaritmussal kapcsolatos átalakításokat elvégezve:

$$2^{\log_2 x^4} = x^4,$$

ekkor az egyenlőtlenség a következő alakban írható:  $x^4 - 4x^2 + 4 \leq 0$ ,  $(x^2 - 2)^2 \leq 0$ . Innen  $x^2 = 2$  lehet csak. Ennek pozitív megoldása:  $x = \sqrt{2}$ .

Tehát az egyenlőtlenségnek valóban csak egy megoldása van.

c) Vázoljuk a függvény grafikonját:



A grafikont látva, könnyen meg tudjuk határozni az állítások logikai értékét:  
i) igaz, ii) hamis, iii) hamis, iv) igaz.

**6.** Adott két dobótetraéder. Olyan tetraéderek, amelyek minden lapján egy-egy számjegy áll, és ugyanakkora eséllyel esnek egy-egy lapra. Az egyik tetraéder számai: 1, 2, 3, 4, a másik tetraéder számai: 5, 6, 7, 8. A tetraéderek esetében tekintjük *dobott számnak* azt az értéket, amely az asztallal érintkező lapjára van írva. Egyszerre dobunk a két tetraéderrel, legyen egy kísérlet kimenetele a dobott számok összege.

a) Mennyi a valószínűsége annak, hogy 10-nél nagyobb számot kapunk eredményül? (2 pont)

b) Mennyi a valószínűsége annak, hogy 8-nál nem nagyobb az eredmény? (2 pont)

c) Határozzuk meg az így definiált valószínűségi változó (dobott számok összege) várható értékét. (3 pont)

d) Vizsgáljuk a két tetraéderrel dobott számok szorzatát. Mennyi a valószínűsége, hogy a szorzat 8-cal osztható? (3 pont)

e) Határozzuk meg a dobott számok szorzatának várható értékét. (3 pont)

Mindkét tetraéderrel tízszer dobtunk, és az eredményeket feljegyeztük:

első tetraéder: 4, 4, 3, 4, 2, 2, 2, 1, 1, 3;

második tetraéder: 8, 5, 5, 7, 6, 6, 6, 7, 8, 8.

f) Igazoljuk, hogy mindkét tetraéder esetében ugyanannyi az adatok szórása. (3 pont)

**Megoldás.** A dobott értékek összegét mutatja az alábbi táblázat:

| összeg | 1 | 2  | 3  | 4  |
|--------|---|----|----|----|
| 5      | 6 | 7  | 8  | 9  |
| 6      | 7 | 8  | 9  | 10 |
| 7      | 8 | 9  | 10 | 11 |
| 8      | 9 | 10 | 11 | 12 |

Az összes eset száma: 16. Klasszikus valószínűségi modellel a táblázat alapján:

a)  $P(10\text{-nél nagyobb számot kapunk eredményül}) = \frac{3}{16}.$

b)  $P(8\text{-nál nem nagyobb az eredmény}) = \frac{6}{16}.$

c) Az egyes kimenetek valószínűsége:

| kimenetel    | 6              | 7              | 8              | 9              | 10             | 11             | 12             |
|--------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| valószínűség | $\frac{1}{16}$ | $\frac{2}{16}$ | $\frac{3}{16}$ | $\frac{4}{16}$ | $\frac{3}{16}$ | $\frac{2}{16}$ | $\frac{1}{16}$ |

A várható érték:

$$E = 6 \cdot \frac{1}{16} + 7 \cdot \frac{2}{16} + 8 \cdot \frac{3}{16} + 9 \cdot \frac{4}{16} + 10 \cdot \frac{3}{16} + 11 \cdot \frac{2}{16} + 12 \cdot \frac{1}{16} = 9.$$

d)  $P(\text{a szorzat 8-cal osztható}) = \frac{5}{16}.$

| szorzat | 1 | 2  | 3  | 4  |
|---------|---|----|----|----|
| 5       | 5 | 10 | 15 | 20 |
| 6       | 6 | 12 | 18 | 24 |
| 7       | 7 | 14 | 21 | 28 |
| 8       | 8 | 16 | 24 | 32 |

e) A várható érték:  $E = \frac{260}{16} = 16,25.$

| kimenetel    | 5              | 6              | 7              | 8              | 10             | 12             | 14             | 15             | 16             | 18             | 20             | 21             | 24             | 28             | 32             |
|--------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| valószínűség | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{2}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ |

f) A dobott értékeket sorba rendezve:

1; 1; 2; 2; 2; 3; 3; 4; 4; 4,

illetve

5; 5; 6; 6; 6; 7; 7; 8; 8; 8.

Látszik, hogy az első számsor elemeihez 4-et adva megkapjuk a második számsort, így mindkét esetben ugyanannyi a szórás. (Megközelítőleg 1,11.)

7. Adott a koordináta síkon az  $y = -x^2 + 12x - 33$  egyenletű parabola.

a) Határozzuk meg a fókuszpontjának koordinátáit és vezéregyenesének egyenletét. (2 pont)

b) Az  $ABC$  háromszög két csúcsának koordinátája:  $A(1;3)$  és  $B(3;7)$ .

A háromszög  $C$  csúcsa az adott parabola ívén mozog. Adjuk meg azt a  $C$  pontot, amellyel az  $ABC$  háromszög területe a legkisebb. (6 pont)

c) Mekkora a legkisebb területű háromszög területének értéke? (3 pont)

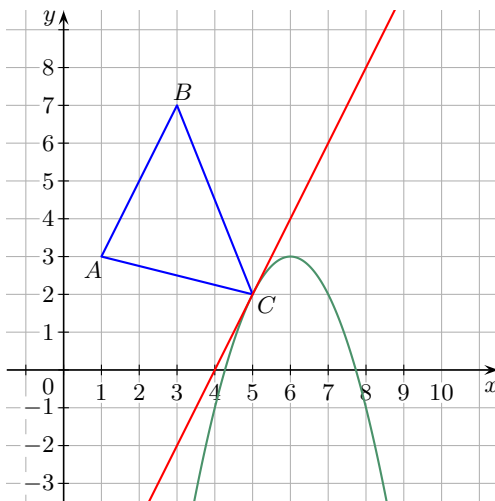
d) Adjuk meg a parabolaív és az  $x$  tengely által létrejött zárt görbe területét két tizedesjegyre kerekítve. (5 pont)

**Megoldás.** a) A parabola egyenletét átalakítjuk

$$y = -x^2 + 12x - 33 = -(x - 6)^2 + 3,$$

amiből a tengelypontja:  $T(6;3)$ , paramétere  $p = 0,5$ , fókuszpontja:  $F(6;2,75)$ , a vezéregyenesének egyenlete:  $y = 3,25$ .

b) A parabola  $AB$  szakasszal párhuzamos érintőjének és a parabolának a közös pontja adja meg azt a  $C$  pontot, amellyel a háromszög területe a legkisebb.



Az  $AB$  egyenesének meredeksége:  $m = \frac{7-3}{3-1} = 2$ , így  $y = 2x + b$  alakban keressük az érintő egyenletét. A parabolával egy közös pontja van, vagyis az alábbi egyenletrendszernek egy megoldása van:

$$y = 2x + b,$$

$$y = -x^2 + 12x - 33,$$

amiből  $2x + b = -x^2 + 12x - 33$ ,  $x^2 - 10x + b + 33 = 0$ . Az egyenlet diszkriminánsa akkor 0, ha  $b = -8$ . Az érintő egyenlete:  $y = 2x - 8$ . Az érintő és a parabola metszéspontja:  $2x - 8 = -x^2 + 12x - 33$ , innen:  $(x - 5)^2 = 0$ ,  $x = 5$ .

A megfelelő  $C$  csúcs koordinátái:  $C(5;2)$ .

c) Az  $AB$  szakasz hossza:  $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ . A háromszög  $AB$  oldalához tartozó magasság ( $m$ ) hossza az  $AB$  szakasz és az érintő távolsága. Megkaphatjuk az  $A$  pont és az érintő távolságaként, hiszen az  $AB$  szakasz és az érintő párhuzamos. A pont és egyenes távolsága összefüggést felhasználva:

$$m = \frac{|2x - y - 8|}{\sqrt{5}} = \frac{9}{\sqrt{5}},$$

$$t = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} \cdot \frac{9}{\sqrt{5}} = 9 \text{ területegység.}$$

Másképp: az  $ABC$  háromszöget téglalapba foglalva a téglalap koordinátái:

$$(1; 2), \quad (1; 7), \quad (5; 2), \quad (5; 7).$$

A 20 területegységnyi téglalapból kivonjuk azoknak a derékszögű háromszögeknek a területét, amelyek kiegészítik az  $ABC$  háromszöget a téglalapra, azaz

$$t = 20 - 2 - 4 - 5 = 9 \text{ területegység.}$$

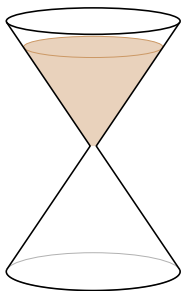
d) Meghatározzuk a parabola és az  $x$  tengely metszéspontjait:

$$-x^2 + 12x - 33 = 0,$$

$$x_1 = 6 - \sqrt{3}, \quad x_2 = 6 + \sqrt{3}.$$

A terület meghatározása:

$$\int_{6-\sqrt{3}}^{6+\sqrt{3}} (-x^2 + 12x - 33) dx = \left[ -\frac{x^3}{3} + \frac{12x^2}{2} - 33x \right]_{6-\sqrt{3}}^{6+\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}.$$



8. Egy  $70^\circ$ -os nyílásszögű kettőskúp alakú homokórába töltünk 2 dl homokot.

a) Amíg nem indul az óra – nem pereg a homok –, milyen magasan van a homok a felső kúpban, azaz mekkora a csúctól számítva a homok-kúp magassága? (5 pont)

b) Amikor leperreg az összes homok az alsó kúpba, a keletkező homok-csonkakúp felső körének sugara feleakkora, mint az alapkör sugara. Mekkora a homokóra alapkörének sugara? (8 pont)

c) Mekkora a homok-csonkakúp magassága? (3 pont)

**Megoldás.** a) A homok térfogata  $V = 2 \text{ dl} = 0,2 \text{ l} = 0,2 \text{ dm}^3$ .

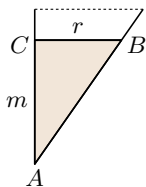
$$\frac{r}{m} = \operatorname{tg} 35^\circ, \quad r = m \cdot \operatorname{tg} 35^\circ.$$

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot m}{3} = 0,2,$$

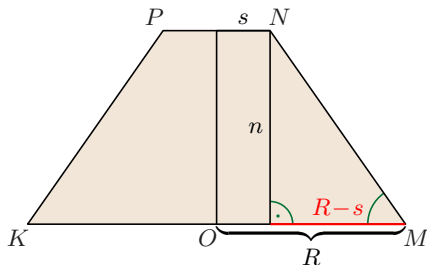
$$m^2 \cdot \operatorname{tg}^2 35^\circ \cdot \pi \cdot m = 0,6,$$

$$\text{amiből } m^3 \approx 0,3895, \quad m \approx 0,7303 \text{ dm} \approx 7,303 \text{ cm.}$$

A homok a felső kúpban 7,303 cm magasan állt.



b) A keletkező homok-csonkakúp felső körének sugara legyen:  $s$ , alsó körének sugara pedig:  $R$ , a csonkakúp magassága:  $n$ . A tengelymetszet egy szimmetrikus trapéz:



A trapéz alapján fekvő  $NMO$  szög nagysága  $55^\circ$ , ezért

$$\frac{n}{R-s} = \operatorname{tg} 55^\circ.$$

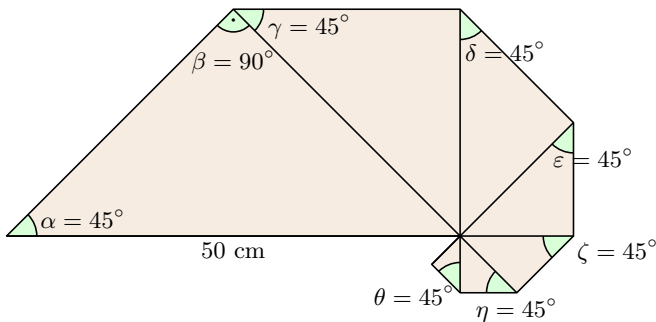
Adott, hogy  $V = 0,2 \text{ dm}^3 = \frac{\pi \cdot n}{3}(R^2 + Rs + s^2)$ . Mivel  $R = 2 \cdot s$ , így

$$0,6 = \pi \cdot \operatorname{tg} 55^\circ \cdot s \cdot 7 \cdot s^2.$$

Ebből  $s^3 = \frac{0,6}{7\pi \cdot \operatorname{tg} 55^\circ} \approx 0,0191 \text{ dm}^3$ , azaz  $s \approx 0,2673 \text{ dm} = 2,67 \text{ cm}$ . Eszerint a homokóra alapkörének sugara: 5,35 cm.

c) A csonkakúp magassága:  $n = \operatorname{tg} 55^\circ \cdot s \approx 3,82 \text{ cm}$ .

9. Egy hirdetés plakátjához különleges logót készítettünk. Kiindulunk egy 50 cm-es befogójú egyenlő szárú derékszögű háromszögből. Ezt kiegészítjük egyik irányba egy-egy újabb egyenlő szárú derékszögű háromszöggel úgy, hogy az új háromszögek átfogója az előző befogója legyen.



a) Ha korlátlan mennyiségben tudnánk így háromszögeket készíteni, majd mind-egyiket maradéktalanul lefesteni, akkor összesen hány négyzetdeciméter felületet festenénk be? (9 pont)

b) A gyakorlatban csak addig végezzük el az ábrakészítést, amíg az új háromszög területe legalább 0,5 négyzetcentiméter. Hány háromszög lesz így az ábrán? (7 pont)



**Megoldás.** a) Az első háromszög területe:  $\frac{50^2}{2} \text{ cm}^2$ , a második háromszög területe:  $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{50}{\sqrt{2}}\right)^2$ , a harmadik háromszög területe:  $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{50}{\sqrt{2}^2}\right)^2$ . Az összeg:

$$T = \frac{50^2}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}^2} + \frac{1}{\sqrt{2}^4} + \frac{1}{\sqrt{2}^6} + \dots\right),$$

a zárójelben végtelen mértani sor van, amelynek első tagja 1, kvóciense:  $\frac{1}{\sqrt{2}^2} = \frac{1}{2}$ .

Így

$$T = \frac{50^2}{2} \cdot 2 = 2500 \text{ cm}^2 = 25 \text{ dm}^2.$$

b) Az  $n$ . háromszög területe:  $t = \frac{50^2}{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n-2}$ , ami a feladat feltétele alapján

$$\frac{50^2}{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n-2} \geq 0,5.$$

Ekkor  $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n-2} \geq 0,5 \cdot \frac{2}{2500}$ , mind a két oldal pozitív, ezért

$$(2n-2) \cdot \lg\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \geq \lg \frac{1}{2500},$$

$$(2n-2) \cdot (-0,1505) \geq -3,3979,$$

$$2n-2 \leq 22,58,$$

amiből

$$n \leq 12,29.$$

A 12. háromszög területe még nagyobb, mint  $0,5 \text{ cm}^2$ , de a 13. háromszögé már kisebb. Ezért 12 háromszög lesz az ábrán.

**Tatár Zsuzsanna Mária**  
Esztergom

## Helyesbítés

A 2024. novemberi számunkban közölt Emelt szintű gyakorló matematika érettségire felkészítő feladatsor **3. a)** feladatába nyomdahiba csúszott (481. oldal). A „valós” szó helyett helyesen az „egész” szónak kellene szerepelnie. A szöveg helyesen:

Tekintsük az  $\bar{a}$  és  $\bar{b}$  egyjegyű, valamint a  $\overline{ba}$  kétjegyű számokat. Ezek mindegyikéhez ugyanazt a pozitív egész számot adva ebben a sorrendben egy  $q = 9$  hányadosú mértani sorozat egymást követő három elemét kapjuk. Számítsuk ki a már megnövelt számok 3-as alapú logaritmusainak összegét.

A hibáért elnézést kérünk!

## Rátz Tanár úr életműdíj 2024



Rátz László működésének legendás színhelyén, a Budapest-Fasori Evangélikus Gimnáziumban adták át december 10-én természettudományos tárgyakat oktató pedagógusoknak a 2024. évi Rátz Tanár úr Életműdíjakat. Rátz László tanár úrról születésének 160-adik évfordulója alkalmából 2023. májusában jelent meg cikk a KöMaL-ban. A róla elnevezett rangos díjjal hazánk kiemelkedő általános- és középiskolai pedagógusait tünteti ki évente a Magyar Természettudományos Oktatásért Alapítvány. Olyan tanároknak ítéli oda, akik különösen sokat tettek a hazai reál-oktatás fejlesztéséért, tehetséges diákok mentorálásáért és a természettudományos tárgyak iránti érdeklődés felkeltéséért.

A díjat alapító három nagyvállalat, az Ericsson Magyarország, a Graphisoft és a Richter Gedeon Nyrt. közel 25 éve dolgozik azon, hogy tisztelettel adózzon a kiváló magyarországi pedagógusok előtt.

Az életművet díjazó elismerésre bárki felterjesztheti a saját életében meghatározó szerepet betöltő pedagógusát, éppen ezért az Alapítvány folyamatosan bátorítja a diákokat, szülőket, kollégákat és intézményeket az ország egész területén, hogy nevezzék azokat a reáltárgyakat oktató tanárokat, akiket érdemesnek tartanak a díjra. 2024-ben közel 110 pályázat érkezett, a pályázati időszak lezárását követően pedig a négytagú kuratórium választotta ki a díjazottakat. 2000 óta az Alapítvány összesen 184 pedagógust díjazott a matematika-, a fizika-, a kémia- és a biológia-oktatás területén nyújtott kimagasló teljesítményéért.

A kitüntetést 2024-ben az alábbi pedagógusoknak ítélte oda a kuratórium:

### **Matematika:**

Csatár Katalin – ELTE Radnóti Miklós Gyakorló Általános Iskola és Gyakorló Gimnázium, Budapest

Csordásné Szécsi Jolán – Kecskeméti Katona József Gimnázium, Kecskemét

### **Fizika:**

Chikán Éva – Piarista Gimnázium, Budapest

Pálovics Róbert – Zalaegerszegi Zrínyi Miklós Gimnázium, Zalaegerszeg

### **Kémia:**

Baranyi Ilona – Dabasi Táncsics Mihály Gimnázium, Dabas

Dr. Miklós Endréné – Kaposvári Táncsics Mihály Gimnázium, Kaposvár

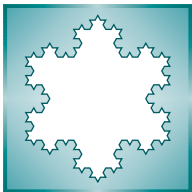
### **Biológia:**

Dr. Krizsánné Józsa Piroska – Mezőtúri Református Kollégium, Gimnázium, Technikum, Óvoda és Bölcsőde, Mezőtúr

Kerényi Zoltán – Premontrei Iskolaközpont, Gödöllő

A KöMaL szerkesztősége is kíván mindnyájuknak – és tanártársaiknak is – további erőt a tanításhoz, a tehetséges és érdeklődő diákok felkutatásához, támogatásához!

A kitüntettek részletes bemutatása és az évente megújuló felhívás megtalálható a Rátz Tanár Úr Életműdíj hivatalos honlapján: <https://www.ratztanaruridij.hu>



## Matematika C gyakorlatok megoldása

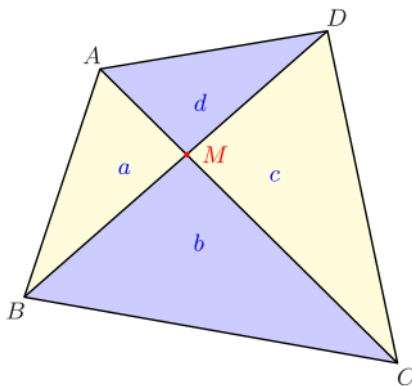
**C. 1822.** Az  $ABCD$  konvex négyszög  $AC$  és  $BD$  átlói az  $M$  pontban metszik egymást. Az átlók által létrehozott  $ABM$ ,  $BCM$ ,  $CDM$  és  $DAM$  háromszögek területének számértékei rendre az  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  pozitív egész számok.

a) Bizonyítsuk be, hogy  $a \cdot b \cdot c \cdot d$  négyzetszám.

b) Tegyük fel, hogy az  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  számok között pontosan két, egymástól különböző páratlan prímszám van. Határozzuk meg az  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  számokat úgy, hogy az  $ABCD$  négyszög területe a lehető legkisebb négyzetszám legyen.

Javasolta: Bíró Bálint (Eger)

**Megoldás.** a) Tekintsük az ábrát.



Ha egyáltalán létezik ilyen négyszög (még nem tudjuk), akkor arra teljesül, hogy az  $ACB$  háromszög  $AC$  oldalhoz tartozó magassága egyszersmind az  $AMB$  háromszög  $AM$  oldalhoz és a  $BMC$  háromszög  $CM$  oldalhoz tartozó magassága, így

$$\frac{a}{b} = \frac{|AM|}{|CM|}.$$

Hasonló teljesül a felosztásban szereplő bármely két szomszédos háromszögre, így például

$$\frac{d}{c} = \frac{|AM|}{|CM|}.$$

E két összefüggésből következik, hogy  $ac = bd$ , ahonnan  $abcd = (ac)^2$ , tehát négyzetszám.

Ezen feltételek mellett tetszőleges  $a, b, c, d$  pozitív számokra (tehát nem csak egészekre) tudunk ilyen négyszöget konstruálni. Legyen például az átlók által bezárt szög derékszög, és jelölje az  $AM$  szakasz hosszát  $x$ , ahol nyilván  $x > 0$ . Erre a következő értékeket kapjuk:  $|AM| = x$ ,  $|BM| = 2a/x$ ,  $|CM| = bx/a$ ,  $|DM| = 2d/x$ . Valóban, az  $AMB$  háromszög területe  $a$ , a  $BMC$  háromszög területe  $b$ , a  $CMD$  háromszög területe  $bd/a = ac/a = c$  és a  $DMA$  háromszög területe  $d$ .

b) Nem sérti az általánosságot, ha feltesszük, hogy az egyik páratlan prímszám az  $a$ . Ekkor a feladatban szereplő másik páratlan prímszám vagy a  $c$ , vagy a  $b$  és a  $d$  valamelyike lehet.

Ha  $a$  és  $b$  a két páratlan prímszám, akkor  $ac = bd$  szerint  $(a, b) = 1$  miatt  $a \mid d$  és  $b \mid c$ , de sem  $a = d$ , sem  $b = c$  nem állhat fenn, mert sem  $d$ , sem  $c$  nem páratlan prímszám. Így  $c$ -t és  $d$ -t felírhatjuk  $bc_1$ , illetve  $ad_1$  alakban, tehát  $ac = a(bc_1) = bd = b(ad_1)$ , innen viszont  $b_1 = c_1$  következik, de  $c_1 = d_1 > 1$ .

A négy háromszög területének összege  $a + bc_1 + b + ac_1 = (a + b)(1 + c_1)$ . Mivel  $(a + b)$  páros és legalább  $3 + 5 = 8$ ,  $c_1 > 1$ , így  $(1 + c_1) \geq 3$ , azért egy 24-nél nagyobb páros négyzetszámot keresünk. A legkisebb ilyen a 36, és erre léteznek is megfelelő értékek:  $a + b = 5 + 7 = 12$ ,  $c_1 = 2$  és  $(a + b)(1 + c_1) = 36$ . Ennél kisebb négyzetszám ebben az esetben nem lehet a terület mérőszáma.

Ezek szerint a két páratlan prímszám két egymással szomszédos háromszög területe, míg a másik két terület mérőszáma a velük szomszédos prímszám mérőszámú területek kétszerese.

Konkrétan lehet például merőleges átlók és  $a = 5$ ,  $b = 7$ ,  $c = 14$ ,  $d = 10$  mellett  $|AM| = 5$ ,  $|BM| = 2$ ,  $|CM| = 7$ ,  $|DM| = 4$ .

Ha viszont  $a$  és  $c$  a két páratlan prímszám, akkor mivel  $ac$  páratlan,  $ac = bd$  miatt csak az fordulhat elő, hogy  $b$  és  $d$  közül az egyik 1, a másik  $ac$ . Ekkor a négyszög területe  $ac + a + c + 1 = (a + 1)(c + 1)$ , ami két páros szám szorzata, tehát osztható 4-gyel, és mivel  $a \geq 3$  és  $c \geq 3$ , ám  $a \neq c$ , így a legkisebb ilyen szorzat a  $4 \cdot 6 = 24$ , de mivel négyzetszámot keresünk, a szorzatnak legalább 36-nak kell lennie. Azonban a 36 két 3-nál nagyobb különböző páros szám szorzataként nem írható fel, így az előző esetnél csak nagyobb területet kaphatunk.

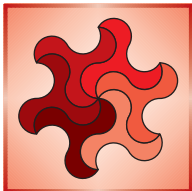
*Pink István* (Péchy Mihály Építőipari Technikum, Debrecen, 11. évf.)  
dolgozata és a honlapon szereplő megoldás alapján

*Megjegyzések.* 1. A beérkezett 55 megoldásból 11 dolgozat kapta meg a maximális 5 pontot. A helyes megoldások nagy része a honlapon található megoldásnak megfelelő volt, illetve esetszétválasztást alkalmazott.

2. Több olyan helyes megoldás is született, ahol a versenyző a négyszög átlói által létrehozott háromszögek területeit a trigonometrikus területképlettel adta

meg, úgy, hogy felhasználta a  $\sin \alpha = \sin(180^\circ - \alpha)$  összefüggést. Ezt az alacsonyabb pontszámú dolgozatok szerzői is alkalmazták.

A feladatra összesen 56 versenyző és csapat küldött megoldást. 5 pontos 11, 4 pontos 3, 3 pontos 17, 2 pontos 16, 1 pontos 6, 0 pontos 2, nem értékelhető 1.



## Matematika feladatok megoldása

**B. 5394.** Az  $ABCD$  négyzet középpontja  $O$ , körülírt körének egy tetszőleges pontja  $X$ . Jelölje  $T$  az  $X$  merőleges vetületét  $BC$ -n. Legyen az  $XB$  és  $AC$  egyenesek metszéspontja  $E$ , az  $XC$  és  $BD$  egyeneseké pedig  $F$ . Mutassuk meg, hogy  $EF$  merőleges  $TO$ -ra.

(4 pont)

Javasolta: Vígh Viktor (Sándorfalva)

**1. megoldás (Koordináta-geometria).** Ez a megoldás lényegében megegyezik a honlapon megjelenttel, de másik koordináta-rendszert választunk, és a kört is másképp kezeljük.

Válasszuk úgy a derékszögű koordináta-rendszert, hogy a négyzet csúcsai  $A(1,0)$ ,  $B(0,1)$ ,  $C(-1,0)$  és  $D(0,-1)$ ; középpontja  $O(0,0)$  legyen. Az  $OX_+$  félegyenes  $x$ -tengellyel bezárt szögét  $t$ -vel jelölve az  $X$  pont koordinátái  $(\cos t, \sin t)$ .

A  $BC$  egyenes egyenlete  $y - x = 1$ . Az  $XT$  egyenes merőleges  $BC$ -re, így egy normálvektora  $(1,1)$ , amelyből az egyenlete  $x + y = \cos t + \sin t$ . Ezekből egyszerűen számíthatóak a  $T$  pont koordinátái, ezekre  $((-1 + \cos t + \sin t)/2, (1 + \cos t + \sin t)/2)$  adódik.

Két adott pontra illeszkedő egyenes egyenleteként szintén azonnal kapjuk, hogy  $BX$ :  $x(1 - \sin t) + y \cos t = \cos t$ , valamint  $CX$ :  $-x \sin t + y(1 + \cos t) = \sin t$ . Ezek tengelyekkel vett metszéspontjai adják  $E$  és  $F$  pontokat, amelyeket  $y = 0$ , illetve  $x = 0$  helyettesítéssel kapunk:  $E(\cos t/(1 - \sin t), 0)$ , valamint  $F(0, \sin t/(1 + \cos t))$ .

Végül a merőlegesség igazolásához kiszámítjuk az  $\overrightarrow{OT}$  és  $\overrightarrow{FE}$  skalárszorzatát.

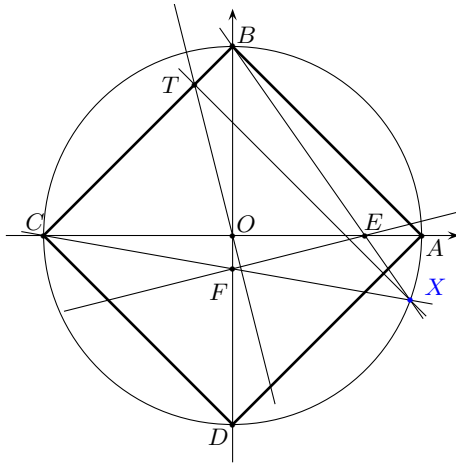
$$\overrightarrow{OT} \left( \frac{-1 + \cos t + \sin t}{2}, \frac{1 + \cos t + \sin t}{2} \right) \quad \text{és} \quad \overrightarrow{FE} \left( \frac{\cos t}{1 - \sin t}, -\frac{\sin t}{1 + \cos t} \right)$$

alapján:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OT} \cdot \overrightarrow{FE} &= \frac{(-1 + \cos t + \sin t) \cos t}{2(1 - \sin t)} - \frac{(1 + \cos t + \sin t) \sin t}{2(1 + \cos t)} = \\ &= \frac{(-1 + \cos t + \sin t)(1 + \cos t) \cos t - (1 + \cos t + \sin t)(1 - \sin t) \sin t}{2(1 - \sin t)(1 + \cos t)} = \\ &= \frac{(\cos^2 t - 1 + \sin t + \sin t \cos t) \cos t - (1 - \sin^2 t + \cos t - \sin t \cos t) \sin t}{2(1 - \sin t)(1 + \cos t)} = \end{aligned}$$

$$= \frac{(-\sin^2 t \cos t + \sin t \cos t + \sin t \cos^2 t) - (\cos^2 t \sin t + \cos t \sin t - \sin^2 t \cos t)}{2(1 - \sin t)(1 + \cos t)} = 0.$$

Ezzel az állítást beláttuk. A számolás során kihasználtuk, hogy  $\sin t \neq 1$  és  $\cos t \neq -1$ , azaz  $X \neq B$  és  $X \neq C$ , ami feltehető, hiszen ezen esetekben  $E$ , illetve  $F$  pontok nem jól definiáltak.



**2. megoldás (Komplex számok).** Az 1. megoldáshoz hasonlóan, de a számolást komplex számokkal végezve járunk el. A megoldásban a pontokat és az őket koordinátázó komplex számokat azonosítjuk, és ugyanazzal a betűvel jelöljük.

Bizonyítás nélkül felhasználjuk a következő segédállítást (lásd például: Matematikonyv feladatgyűjtemény, Geometria 11–12. (Szerkesztette: Dobos Sándor, Hraskó András, Kiss Géza, Surányi László) 4.31. feladatát): Ha  $a_1, a_2, b_1$  és  $b_2$  egységnyi abszolútértékű komplex számok, akkor az  $a_1 a_2$  és  $b_1 b_2$  egyenesek metszéspontja

$$s = \frac{(a_1 + a_2)b_1 b_2 - (b_1 + b_2)a_1 a_2}{b_1 b_2 - a_1 a_2}.$$

Speciálisan, ha  $a_1 a_2 \perp b_1 b_2$ , akkor

$$s = \frac{a_1 + a_2 + b_1 + b_2}{2}.$$

Válasszuk úgy a komplex síkot, hogy  $A = 1, B = i, C = -1$  és  $D = -i$ . A feltételek szerint  $|X| = 1$ , azaz  $\bar{X} = 1/X$ . ( $\bar{X}$  az  $X$  komplex szám komplex konjugáltját jelöli.)

Tekintsük az egységnyi abszolútértékű  $X' = i\bar{X} = i/X$  komplex számot. Ekkor

$$\frac{X - X'}{B - C} = \frac{X - i\bar{X}}{1 + i} = \frac{1}{\sqrt{2}}(X - i\bar{X})(1 - i) = \frac{1}{\sqrt{2}}[(X - \bar{X}) + i(X + \bar{X})],$$

ami egy tisztán képzetes szám, hiszen  $X - \bar{X}$  tisztán képzetes, míg  $X + \bar{X}$  valós. Ezért  $XX' \perp BC$ . Ebből a segédállítás szerint

$$T = \frac{B + C + X + X'}{2} = \frac{-1 + i + X + i/X}{2} = \frac{-X + iX + X^2 + i}{2X}.$$

Szintén a segédállítás segítségével azonnal kiszámíthatjuk  $E$ -t és  $F$ -et:

$$E = \frac{(A+C)XB - (X+B)AC}{XB - AC} = \frac{X+B}{XB+1} = \frac{X+i}{iX+1};$$

$$F = \frac{(B+D)XC - (X+C)BD}{XC - BD} = \frac{-(X+C)}{XC-1} = \frac{-X+1}{-X-1}.$$

Ezekből

$$E - F = \frac{X+i}{iX+1} - \frac{X-1}{X+1} = \frac{(1-i)X^2 + 2iX + i + 1}{iX^2 + iX + X + 1}.$$

Végül

$$\begin{aligned} \frac{2(T-O)}{E-F} &= \frac{X^2 + (-1+i)X + i}{X} \cdot \frac{iX^2 + (1+i)X + 1}{(1-i)(X^2 + (-1+i)X + i)} = \\ &= \frac{i}{1-i}X + \frac{1}{1-i}\bar{X} + \frac{1+i}{1-i} = \frac{i-1}{2}X + \frac{1+i}{2}\bar{X} + i = \\ &= \frac{i-1}{2}X - \left(\frac{i-1}{2}X\right) + i, \end{aligned}$$

ami viszont ismét tisztán képzetes, hiszen egy komplex szám és konjugáltjának különbsége tisztán képzetes. Eszerint  $(T-O)/(E-F)$  tisztán képzetes, ami miatt  $TO \perp EF$ , amivel az állítást beláttuk. A megoldás ismét rövid diszkusszióra szorul, a megoldásban kihasználtuk, hogy  $X \neq -1$  és  $X \neq i$  (különben nullával osztanánk). Ez azonban feltehető, hiszen  $X = B$  és  $X = C$  esetben  $E$ , illetve  $F$  pontok nem jól definiáltak.

*Lakner Hanna* (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.)  
megoldása alapján

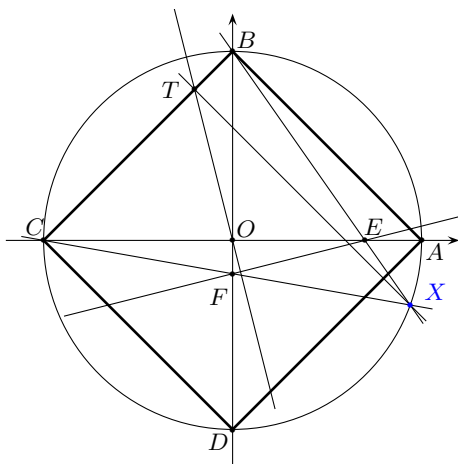
**Megjegyzés.** Ha egy körön lévő pontokkal adott egyenesek metszéspontjaival kell dolgoznunk, sokszor hasznos bevezetni a komplex számokat. De a komplex számok ereje leginkább a forgatások egyszerű kezelésében rejlik, ebben a feladatban a szokásos koordináta-rendszert használó megoldás kevesebb és könnyebb számolást igényel.

**3. megoldás (Elemi megfontolások.)** Használjuk az ábra jelöléseit, legyen  $XT$  és  $BD$  egyenesek metszete  $K$ ,  $TO$  és  $EF$  egyenesek metszéspontja pedig  $M$ . Tegyük fel, hogy  $X$  a rövidebbik  $AD$  íven fekszik, és  $XA < XD$ .

Mivel  $XA$ -n nyugvó kerületi szögek, így  $XCA \sphericalangle = XBA \sphericalangle$ . Továbbá  $XT \parallel AB$  miatt  $TXB \sphericalangle = XBA \sphericalangle$ , hiszen váltószögek. Így  $FCO \sphericalangle = TXB \sphericalangle$ , ezért az  $FCO$  és  $XTB$  derékszögű háromszögek hasonlóak, azaz  $FO/OC = BT/TX$ . Ugyanígy látható, hogy  $EO/OB = CT/TX$ . A kapott két egyenlőséget egymással elosztva, kihasználva az  $OC = OB$  (a négyzet félátlói) összefüggést kapjuk, hogy

$$\frac{FO}{EO} = \frac{BT}{CT}.$$

Most vegyük észre, hogy  $KTB$  egyenlő szárú, derékszögű háromszög, ezért  $TB = TK$ . Az előző észrevételünk szerint tehát  $CTK$  és  $FOE$  derékszögű háromszögekben a befogók aránya egyenlő  $TK/CT = FO/EO$ , ezért a két háromszög hasonló, és így  $OEF \sphericalangle = KCT \sphericalangle$ .



Mivel  $CK$  szakasz a  $T$  és  $O$  pontok mindegyikéből derékszög alatt látszik, ezért  $OKTC$  húrnégyszög. A kerületi szögek tétele miatt így  $KCT\angle = TOK\angle$ , továbbá  $TOK\angle = FOM\angle$ , mivel csúcsszögek. Összevetve az eddigieket:

$$OEF\angle = TCK\angle = TOK\angle = FOM\angle.$$

Felhasználva a  $90^\circ = OFE\angle + OEF\angle = OFM\angle + FOM\angle$  összefüggést az  $FMO$  háromszögben adódik, hogy  $FMO\angle = 90^\circ$ , ami éppen a feladat állítása.

A megoldás lényegében ugyanígy működik azokban az esetekben, amikor  $X$  a kör többi ívein helyezkedik el, de a precíz diszkusszió viszonylag hosszadalmas, részleteit az érdeklődő olvasóra bízunk.

*Bui Thuy-Trang Nikolett* (Budapest, Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 9. évf.) megoldása alapján

*Megjegyzés.* Az elemi érvelés nyilvánvalóan elegánsabb, mint bármelyik számolás. Azonban az 1. és 2. megoldások nagy előnye, hogy lényegesen egyszerűbb a diszkussziójuk.

**B. 5399.** Egy ötjegyű négyzetszámnak nincs 9-es számjegye. Mindegyik számjegyéhez 1-et hozzáadva ismét négyzetszámot kapunk. Melyik lehet ez a négyzetszám? (3 pont)

*Kiss Géza* (Csömör)

**1. megoldás.** Egyik helyiértéken sincsen 9-es számjegy, ezért nem lesz tízes átlépés, ha mindegyik számjegyéhez 1-et hozzáadunk. Vagyis a szám 11 111-gyel lesz nagyobb. Legyen az eredeti szám  $a^2$ , ahol  $a$  pozitív egész szám, majd ehhez hozzáadva 11 111-et, kapjuk a  $b^2$  számot:  $a^2 + 11\,111 = b^2$ , ahol  $b$  pozitív egész szám.

$$11\,111 = b^2 - a^2 = (b + a)(b - a).$$

Mivel  $b^2 > a^2$  és mindkettő pozitív egész szám, így  $b + a$  és  $b - a$  is pozitív, illetve  $b - a < b + a$ .



11 111 prímtényező felbontása  $41 \cdot 271$ , ezért kétféleképpen lehet két természetes szám szorzatára bontani a 11 111-et:  $41 \cdot 271$  és  $1 \cdot 11\,111$ .

Az első esetben  $b + a = 271$ ,  $b - a = 41$ , ahonnan  $b = (271 + 41)/2 = 156$ ,  $a = 271 - 156 = 115$ , és ekkor  $a^2 = 115^2 = 13\,225$  és  $b^2 = 156^2 = 24\,336$  – ezek a számok eleget is tesznek a feladat feltételeinek.

A második esetben  $b + a = 11\,111$ ,  $b - a = 1$ , ahonnan  $b = (11\,111 + 1)/2 = 5556$ ,  $a = 5556 - 1 = 5555$ . Ekkor  $a^2 = 5555^2 > 10\,000$ , nem ötjegyű szám.

Vagyis a keresett négyzetszám 13 225.

*Erdélyi Kata* (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 12. évf.)

*Megjegyzés.* Felhasználva, hogy két egymást követő négyzetszám különbsége páratlan szám, felírhatjuk két tetszőleges négyzetszám különbségét egymást követő páratlan számok összegeként. (Ahogyan például *Veres Dorottya* (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.) tette.) Ez a megoldás technikailag más, de a lényegét illetően megegyezik az 1. megoldással.

**2. megoldás.** Vizsgáljuk a kiinduló négyzetszámot. Azok a számok, amelyek négyzete ötjegyű,  $\sqrt{10\,000}$  és  $\sqrt{99\,999}$  közé esnek. A legkisebb ilyen szám a 100, a legnagyobb a 316. Ráadásul a kisebbik négyzetszám legfeljebb 88 888, mert nincs 9-es számjegye, vagyis a szám, amelynek a kiinduló szám a négyzete, legfeljebb 298.

A négyzetszámok utolsó számjegye 0, 1, 4, 5, 6, (9 – ezt kizártuk) lehet, tehát a kisebbik négyzetszám végződése 0 vagy 4 vagy 5 lehet, azonban a 0-ra végződő négyzetszámok végződése 00, viszont 11 végű négyzetszám nincs, mert az 4-gyel osztva 3 maradékot adna, ami nem lehet, mert egy négyzetszám 4-gyel osztva 0 vagy 1 maradékot ad. Az 5-tel osztható számok négyzete pedig 25-re végződik, viszont a 14 nem lehet négyzetszám végződése ugyancsak a 4-gyel való oszthatósági maradék miatt, ezért a nagyobbik négyzetszám nem végződhet 5-re, a kisebbik nem végződhet 4-re.

Marad tehát az 5 végződés a kisebbik és a 6 végződés a nagyobbik négyzetszám esetén.

A két négyzetszám különbsége, 11 111, nem osztható 3-mal, ezért a két négyzetszám más-más maradékot ad 3-mal osztva, de egyik maradék sem lehet 2, mert egy négyzetszám 3-mal osztva 0 vagy 1 maradékot ad. Mivel a 11 111 3-mal osztva 2 maradékot ad, a kisebbik számnak 1, a nagyobbiknak 0 maradékot kell adnia.

A 100 és 298 közé eső, 5-re végződő, 3-mal osztva 1 maradékot adó számok a következők: 115, 145, 175, 205, 235, 265, 295.

Ezeket ellenőrizve azt kapjuk, hogy csak a 115 felel meg, erre  $115^2 = 13\,225$ , illetve 24 336 alapján a nagyobbik szám 156.

A keresett ötjegyű szám tehát a 13 225.

*Németh Bernát* (Szeged, Radnóti M. Gimn. 11. évf.) dolgozata alapján

181 dolgozat érkezett. Hibátlan (3 pontos) 120, kissé pontatlan (2 pontos) 50, hiányos (1 pontos) 7. 0 pontos 4 dolgozat.

**B. 5402.** Egy háromszög oldalainak hosszúsága  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Tegyük fel, hogy fennáll

$$a^2 + b^2 + c^2 = a^2 b^2 c^2.$$

Bizonyítandó, hogy a háromszög területe legfeljebb  $\frac{3}{4}$ , és egyenlőség csak az egyenlő oldalú háromszög esetében lehetséges.

(5 pont)

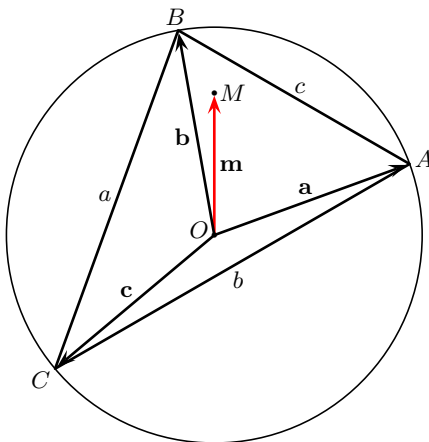
Hujter Mihály (Budapest)

**1. megoldás.** Jelölje a háromszög magasságpontját  $M$ , a köré írt kör sugarát  $R$ , középpontját  $O$ , és vegyük föl az  $O$ -ból a csúcsokba, illetve a magasságpontba mutató megfelelő vektorokat:  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{m}$ . Ismert, hogy ekkor  $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{m}$ , tehát

$$(1) \quad \mathbf{m}^2 = (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})^2 = \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2 + 2\mathbf{a}\mathbf{b} + 2\mathbf{b}\mathbf{c} + 2\mathbf{c}\mathbf{a},$$

ahonnan, mivel  $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{c}| = R$ , azért  $\mathbf{a}^2 = \mathbf{b}^2 = \mathbf{c}^2 = R^2$ , tehát

$$\mathbf{m}^2 = 3R^2 + 2\mathbf{a}\mathbf{b} + 2\mathbf{b}\mathbf{c} + 2\mathbf{c}\mathbf{a}.$$



Továbbá mivel  $a = |\overrightarrow{BC}| = |\mathbf{c} - \mathbf{b}|$ , így  $a^2 = (\mathbf{c} - \mathbf{b})^2 = \mathbf{c}^2 + \mathbf{b}^2 - 2\mathbf{b}\mathbf{c}$ , innen  $2\mathbf{b}\mathbf{c} = 2R^2 - a^2$ , és hasonlóan,  $2\mathbf{c}\mathbf{a} = 2R^2 - b^2$ ,  $2\mathbf{a}\mathbf{b} = 2R^2 - c^2$ , tehát (1) alapján

$$\mathbf{m}^2 = 9R^2 - a^2 - b^2 - c^2$$

adódik, és mivel  $\mathbf{m}^2 \geq 0$ ,

$$(2) \quad a^2 + b^2 + c^2 \leq 9R^2.$$

Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha  $|\mathbf{m}| = 0$ , ekkor  $O$  és  $M$  egybeesik, ami csak akkor fordulhat elő, ha a háromszög szabályos.

A háromszög területe felírható  $T = \frac{abc}{4R}$  alakban, tehát

$$T^2 = \frac{a^2 b^2 c^2}{16R^2}.$$

A feladat feltétele szerint viszont  $a^2 b^2 c^2 = a^2 + b^2 + c^2$ , így (2) miatt:

$$T^2 = \frac{a^2 b^2 c^2}{16R^2} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{16R^2} \leq \frac{9R^2}{16R^2} = \frac{9}{16}.$$

Ebből következik, hogy  $T \leq 3/4$ .

Azonban, mint láttuk,  $a^2 + b^2 + c^2 = 9R^2$  csak abban az esetben állhat fenn, ha  $a = b = c$ , vagyis a háromszög egyenlő oldalú, és ekkor a feltételből következően  $a^2 b^2 c^2 = a^2 + b^2 + c^2$  miatt  $a^6 = 3a^2$ , tehát  $a = b = c = \sqrt[4]{3}$ .

*HTeam csapat: Barán Kornél, Németh Barnabás, Horváth Ábel Nándor*  
(Budapest, Szent István Gimn., 11. évf.) megoldása alapján

*Megjegyzés.* A versenyzők nagy része az állítást az ismert  $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma \leq \frac{9}{4}$  vagy az ezzel ekvivalens  $\cos(2\alpha) + \cos(2\beta) + \cos(2\gamma) \geq -\frac{3}{2}$  egyenlőtlenségre vezette vissza. Ezek legrövidebb bizonyítása éppen a fenti vektoros számolás, lásd például Reiman István, Dobos Sándor: *Nemzetközi Matematikai Diákolimpiák* című könyvében az 1964/2. feladatot és megoldását, valamint a könyv végén a [12] kiegészítést vagy Reiman István: *Geometria és határterületei* című könyvét.

**2. megoldás.** Ha felírjuk a Hérón-képletet, akkor rövid úton homogenizálhatjuk az állítást:

$$16T^2 = 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4 \stackrel{?}{\leq} 9 = 9 \cdot \frac{a^2b^2c^2}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Átszorozva és rendezve ez a következő alakra hozható:

$$a^2(a^2 - b^2)(a^2 - c^2) + b^2(b^2 - c^2)(b^2 - a^2) + c^2(c^2 - a^2)(c^2 - b^2) \stackrel{?}{\geq} 0.$$

Ez az úgynevezett *Schur-egyenlőtlenség* ([https://en.wikipedia.org/wiki/Schur's\\_inequality](https://en.wikipedia.org/wiki/Schur's_inequality)) egy speciális esete. Az ismeretlenek szimmetriája miatt feltehetjük, hogy  $a \geq b \geq c$ , ekkor

$$\begin{aligned} & a^2(a^2 - b^2)(a^2 - c^2) + b^2(b^2 - c^2)(b^2 - a^2) + c^2(c^2 - a^2)(c^2 - b^2) \geq \\ & \geq b^2(a^2 - b^2)(b^2 - c^2) + b^2(b^2 - c^2)(b^2 - a^2) + 0 \cdot (c^2 - a^2)(c^2 - b^2) = 0. \end{aligned}$$

Az első tag becslésében:

$$a^2(a^2 - b^2)(a^2 - c^2) \geq b^2(a^2 - b^2)^2;$$

akkor áll egyenlőség, ha  $a = b$  vagy  $(a^2 - b^2)(a^2 - c^2) = 0$ , de mivel  $a^2 - c^2 \geq a^2 - b^2 \geq 0$ , ez is csak  $a = b$  esetén igaz.

Hasonlóan, az utolsó tagban

$$c^2(c^2 - a^2)(c^2 - b^2) = c^2(a^2 - c^2)(b^2 - c^2) \geq 0;$$

egyenlőség csak  $(a^2 - c^2)(b^2 - c^2) = 0$  esetén áll, de  $a^2 - c^2 \geq b^2 - c^2 \geq 0$  miatt ez csak  $b = c$  esetén lehetséges.

Tehát a bizonyítandó állításban csak  $a = b = c$  esetén áll egyenlőség; az  $a^2 b^2 c^2 = a^2 + b^2 + c^2$  feltétel miatt  $a = b = c = \sqrt[4]{3}$ .

*Diaconescu Tashi* (Kolozsvár, Spark Generation, 11 o. t.) dolgozata alapján

*Megjegyzés.* A Hérón-képlettel számolt még *Aravin Péter* (Budapesti Fazekas Mi. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 8. évf.), *Bodor Ádám* (Csíkszereda, Márton Áron Líceum, 9. évf.), *Görömbey Tamás* (Debreceni Fazekas Mihály Gimnázium, 11. évf.), *Kovács Benedek Noel* (Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium, 12. évf.), *Molnár István Ádám* (Miskolc, Földes Ferenc Gimnázium, 12. évf.) is.

*További megjegyzések.* A szinusztételből felírható, hogy

$$a^2 + b^2 + c^2 = 4R^2(\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma),$$

a körülírt kör sugarával felírt területképlet alapján viszont  $T^2 = \frac{a^2 b^2 c^2}{16R^2}$ , tehát  $a^2 b^2 c^2 = 16T^2 R^2$ , ahonnan a feladat feltétele:

$$16T^2 R^2 = 4R^2(\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma),$$

azaz

$$4T^2 = \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma.$$

Mivel pedig  $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 2 + 2\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$ , ez ekvivalens azzal, hogy

$$2T^2 = 1 + \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma,$$

innen pedig

$$T = \sqrt{(\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma + 1)/2}.$$

Mivel, mint ismeretes, tetszőleges háromszögben teljesül, hogy  $\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \leq 1/8$ , így

$$\sqrt{(\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma + 1)/2} \leq 3/4.$$

Tehát a feladat most így szól:

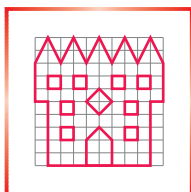
Bizonyítsuk be, hogy ha egy háromszögben a terület egy olyan kifejezéssel egyenlő, amelynek maximuma  $3/4$ , akkor a terület legfeljebb  $3/4$ . Ez eléggé nyilvánvaló.

Mikor van egyenlőség? Akkor, ha  $\alpha = \beta = \gamma$  és  $T = 3/4$ , vagyis a  $3/4$  területű szabályos háromszög esetén. Más háromszögben nem. Vagy a feltétel nem teljesül, vagy a területe nem  $3/4$  (vagy egyik sem).

De van-e egyáltalán olyan nem szabályos háromszög, amelyre teljesül a feladat feltétele (és akkor szükségszerűen a területe kisebb, mint  $3/4$ )?

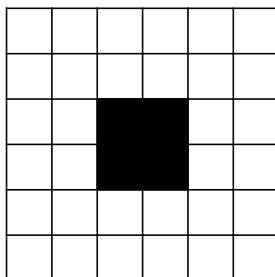
Vegyünk egy tetszőleges nem szabályos háromszöget, amelyre  $T > 3/4$ , és akkor persze nem teljesülhet rá a feladat feltétele. Legyen  $C = \sqrt{(\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma + 1)/2}$ , ami nyilván kisebb, mint  $3/4$ . Vegyük azt a háromszöget, amely ennek a háromszögnek a  $\sqrt{C/T}$  arányú hasonlósággal kapott képe. A hasonlóság miatt ehhez ugyanaz a  $C$  érték tartozik. A területe viszont  $T \cdot (C/T) = C$ , tehát teljesül rá a feladat feltétele, de a területe  $C \leq 3/4$  miatt legfeljebb  $3/4$ , viszont nem egyenlő  $3/4$ -del, mert azt csak a  $\sqrt[4]{3}$  oldalú szabályos háromszög tudja.

79 dolgozat érkezett, közülük 4 csapatmunka. 5 pontos 25, 4 pontos 11, 3 pontos 3, 2 pontos 5, 1 pontos 12. 0 pontot kapott 23 beküldő.



**A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok  
ABACUS-szal közös pontverseny  
9. osztályosoknak  
(839–843.)**

**K. 839.** Hány olyan négyzet rajzolható az alábbi ábrába a rácsvonalak mentén, amely tartalmaz a kis fekete négyzetek közül legalább egyet?



**K. 840.** A digitális számjegyek kis hatszögekből épülnek fel. A 0 hat darab, az 1 két darab, a 2 öt darab hatszögből és így tovább (lásd az ábrát). Hány olyan szomszédos pozitív egész számokból álló pár van, amelyek digitális számjegyekkel, ilyen módon leírt alakja ugyanannyi hatszögből épül fel?



**K. 841.** 2025. január 25-én (2025.01.25.) ünnepeljük Fekete István író (művei pl. Vuk, Kele, Tüskevár) születésének 125. évfordulóját. A 20 250 125 szám 11-gyel nem osztható, és 3-mal osztva 2-t ad maradékul. Hány olyan nyolcjegyű szám készíthető ezen szám számjegyeinek átrendezésével, amely osztható 11-gyel és ugyancsak 2-t ad maradékul 3-mal osztva?

**K/C. 842.** Hány olyan nem üres részhalmaza van a  $H = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$  halmaznak, amelyben az elemek összege páros?

**K/C. 843.** Az  $ABC$  egyenlő szárú derékszögű háromszög  $AB$  befogójának  $B$ -n túli meghosszabbításán felvettük a  $D$  pontot úgy, hogy  $BD = AB$  teljesüljön. Az  $AC$  befogó felezőpontja  $E$ , az  $ED$  szakasz a  $BC$  átfogót az  $F$  pontban metszi. Határozzuk meg az  $AED$  és  $FEC$  háromszögek területének arányát.

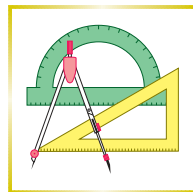


**Beküldési határidő: 2025. február 10.**

**Elektronikus munkafüzet: <https://www.komal.hu/munkafuzet>**



## A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (842–843., 1838–1842.)



### Feladatok 10. évfolyamig

**K/C. 842.** A szövegét lásd a **K** feladatoknál.

**K/C. 843.** A szövegét lásd a **K** feladatoknál.

### Feladatok mindenkinek

**C. 1838.** Egy táblára felírtuk az 1, 2, 3, ..., 2024, 2025 számokat. Farkas és Piroska felváltva törölnek egy-egy számot a tábláról, amíg csak két szám marad a táblán. Hogyan nyerhet Piroska, ha ő kezd, és akkor nyer, ha a táblán utoljára maradt két szám összege osztható 11-gyel?

(német versenyfeladat alapján)

**C. 1839.** Adott két párhuzamos egyenes és az egyiken két pont,  $A$  és  $B$ . Szerkesszük meg az  $AB$  szakasz felezőpontját úgy, hogy csak egy darab egyélű vonalzó használhatunk.

**C. 1840.** Legyen  $-20,25 < K < 0$ . Oldjuk meg az

$$\begin{aligned}x + y + z &= K, \\x^3 + y^3 + z^3 &= 1, \\xyz &= -2024\end{aligned}$$

egyenletrendszert a valós számhármasok halmazán.

Javasolta: *Berkó Erzsébet* (Szolnok)

### Feladatok 11. évfolyamtól

**C. 1841.** A  $PQRS$  konvex négyszögben  $QR = 4$ ,  $RS = 6$ ,  $SP = 5$ , és a  $P$ , illetve  $Q$  csúcsoknál levő belső szögek  $60^\circ$ -osak. Ha tudjuk, hogy  $2PQ = a + \sqrt{b}$ , ahol  $a$  és  $b$  pozitív egészek, akkor határozzuk meg az  $a + b$  összeg értékét.

(ausztrál versenyfeladat)

**C. 1842.** Oldjuk meg a valós számok halmazán a  $9^x + (6x - 23) \cdot 3^x + 5x^2 - 39x + 76 = 0$  egyenletet.

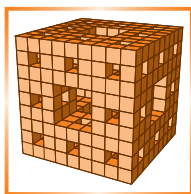
Javasolta: *Bencze Mihály* (Brassó)



**Beküldési határidő: 2025. február 10.**

**Elektronikus munkafüzet:** <https://www.komal.hu/munkafuzet>





## A B pontversenyben kitűzött feladatok (5430–5437.)

**B. 5430.** Legfeljebb hány különböző pozitív egész számot lehet felírni egy kör kerületére úgy, hogy bármely két szomszédos szám szorzata kisebb legyen, mint 2025?

(3 pont)

Javasolta: Sztranyák Attila (Budapest)

**B. 5431.** Az  $ABC$  háromszög beírt köre  $k$ , a  $k$  középpontja  $I$ . Az  $AI$  egyenes  $k$ -t  $A$ -hoz közelebb  $D$ -ben,  $A$ -tól távolabb  $E$ -ben metszi. Legyen  $k$  érintési pontja  $AC$ -n  $F$ . Az  $E$  pontban a  $k$ -hoz húzott érintő  $AC$ -t  $G$ -ben metszi. Igazoljuk, hogy  $GI$  párhuzamos  $FD$ -vel.

(3 pont)

Javasolta: Lovas Márton (Budakalász)

**B. 5432.** Vannak-e olyan valós  $a$ ,  $b$ ,  $c$  számok, amelyekre az alábbi három függvény közül egyiknek sincs zérushelye?

$$p_1(x) = ax^2 - (b^2 + 1)x + c,$$

$$p_2(x) = bx^2 - (c^2 + 1)x + a,$$

$$p_3(x) = cx^2 - (a^2 + 1)x + b.$$

(4 pont)

Kámán Ildikó (Budapest) ötletéből

**B. 5433.** Mutassuk meg, hogy tetszőleges négyszög alapú gúlában az oldallapok súlypontjait a szemközti alapél felezőpontjával összekötő szakaszok egy ponton mennek át.

(4 pont)

Javasolta: Kiss Géza (Csömör)

**B. 5434.** Milyen  $m > 1$  pozitív egész számokhoz létezik olyan egész együtthatós  $f(x)$  polinom, amelyre bármely  $k$  egész szám esetén  $k$  és  $f(k)$  közül pontosan az egyik osztható  $m$ -mel?

(5 pont)

Javasolta: Hujter Bálint (Budapest) és Kós Géza (Budapest)

**B. 5435.** Az  $ABC$  háromszög beírt köre a  $BC$ ,  $AC$  és  $AB$  oldalakat rendre a  $D$ ,  $E$  és  $F$  pontokban érinti. Legyen továbbá  $P$ ,  $Q$  és  $R$  rendre az  $AD$ ,  $BE$  és  $CF$  szakaszok  $A$ -hoz,  $B$ -hez, illetve  $C$ -hez közelebbi harmadolópontja. Mutassuk meg, hogy a  $P$ ,  $Q$  és  $R$  pontok közül legalább egy a beírt kör belsejében vagy a határán helyezkedik el.

(5 pont)

Javasolta: Lovas Márton (Budakalász)

**B. 5436.** Legyen  $p$  páratlan prím. Jelölje  $d_k(n)$  az  $n$  azon pozitív osztóinak számát, amelyek  $p$ -vel osztva  $k$  maradékot adnak ( $0 \leq k < p$ ).

Legyen  $A \subseteq \{0, 1, \dots, p-1\} = S$  olyan, hogy

$$\sum_{k \in A} d_k(n) \geq \sum_{j \in S \setminus A} d_j(n)$$

teljesül minden pozitív egész  $n$  számra. Legalább hány elemű az  $A$  halmaz?

(6 pont)

Javasolta: Lovas Márton (Budakalász)

**B. 5437.** Az  $ABC$  háromszögben  $BC < AC$ , és  $D$  olyan pont az  $AC$  oldalon, hogy  $BC = DC$ . A  $\Gamma$  kör belülről érinti az  $ABC$  háromszög köréírt körének  $B$ -t nem tartalmazó  $AC$  ívét  $X$ -ben, valamint érinti  $AC$ -t  $D$ -ben. A  $B$ -ből  $\Gamma$ -hoz húzott  $C$ -hez közelebbi érintő  $AC$ -t  $Y$ -ban metszi,  $\Gamma$ -t pedig  $Z$ -ben érinti. Igazoljuk, hogy ha  $A$ ,  $Y$ ,  $X$ , és az  $ABC$  háromszög körülírt körének középpontja egy körön helyezkednek el, akkor  $AZ = CZ$ .

(6 pont)

Javasolta: Lovas Márton (Budakalász)

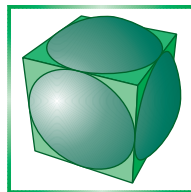


**Beküldési határidő: 2025. február 10.**

**Elektronikus munkafüzet:** <https://www.komal.hu/munkafuzet>



## Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (896–898.)



**A. 896.** A tengerbiológusok egy új kagylófajt vizsgálnak, amelynek az első generációját 100 kagyló alkotja, és a kolóniájuk a következőképpen szaporodik: ha egy adott generációban  $N$  kagyló van (ahol  $5 \mid N$  mindig teljesül), akkor  $N/5$  darab 5 kagylóból álló csoportra osztják magukat, és mindegyik csoportnak közösen születik 15 darab utódja, akik a következő generációt alkotják. A kagylók között néhányban található egy darab gyöngy, de egy kagylóban csak akkor lehet gyöngy, ha az egyenes felmenői közül senkiben sem volt gyöngy. Egy gyöngy értékét az határozza meg, hogy az őt tartalmazó kagyló hányadik generációs: az  $n$ -ik generáció esetén az érték  $1/3^n$ . Legfeljebb mennyi lehet a gyöngyök összértéke a kolóniában?

Javasolta: Beke Csongor (Cambridge)

**A. 897.** A derékszögű koordináta-rendszerben jelölje  $O$  az origót és  $\gamma$  az  $(1, 0)$  középpontú, egység sugarú kört. Legyen  $\lambda$  egy valós szám a  $(0, 2)$  intervallumból, és legyen az  $x = \lambda$  egyenes és a  $\gamma$  kör két metszéspontja  $P$  és  $Q$ . Az  $OP$  és  $OQ$  egyenesek az  $x = 2 - \lambda$  egyenest rendre a  $P'$  és  $Q'$  pontokban metszik. Az ilyen  $P'$ ,



$Q'$  pontok mértani helyét jelöljük  $\mathcal{G}$ -vel, ahogy  $\lambda$  bejárja a  $(0, 2)$  intervallumot. Mutassuk meg, hogy vannak olyan  $O$ -tól különböző  $R$  és  $S$  pontok a síkon, amelyekre minden  $A \in \mathcal{G}$  pontra létezik olyan  $A'$  pont az  $OA$  egyenesen, hogy

$$A'R^2 = (A'S - OS)^2 = A'A \cdot A'O.$$

Javasolta: *Bán-Szabó Áron* (Budapest)

**A. 898.** Legyen  $n$  egy adott pozitív egész szám. Ana és Bob a következő játékot játsszák: Ana választ egy egész együtthatós  $n$ -edfokú  $p$  polinomot. Bob minden egyes körben választhat egy pozitív egészekből álló véges  $S$  halmazt, Ana pedig egy listával válaszol, mely a  $p$  polinom  $S$  halmazon felvett értékeit tartalmazza multiplicítással (növekvő sorrendben). Határozzuk meg  $n$  függvényében azt a legkisebb  $k$  pozitív egész számot, melyre Bob mindig ki tudja találni a  $p$  polinomot legfeljebb  $k$  kör alatt.

Javasolta: *Andrei Chirita* (Cambridge)



**Beküldési határidő: 2025. február 10.**

**Elektronikus munkafüzet:** <https://www.komal.hu/munkafuzet>



## Informatikából kitűzött feladatok (647–650.)

**I. 647.** Egy játéksorozatban mindig feljegyezték a győztes játékosok azonosítóit. Utólag meg szeretnénk vizsgálni, hogy mely játékosok hány játékon keresztül domináltak.

Készítsünk programot *i647* néven, amely a győztesek  $N$  ( $1 \leq N \leq 1000$ ) játéksorozatában meghatározza azt a leghosszabb folyamatos részt, amelyen belül legfeljebb csak három különböző játékos van.

A program standard bemenetének első sorában a befejezett játékok  $N$  száma található. A következő sorban az  $N$  játék győzteseinek azonosítói szerepelnek egy-egy szóközzel elválasztva.

A programmal a standard kimenetre írjuk ki soronként a leghosszabb, legfeljebb három győztes azonosítóját tartalmazó rész hosszát, majd ennek a három játékosnak az azonosítóját.

Példa:

| Bemenet               | Kimenet |
|-----------------------|---------|
| 11                    | 5       |
| 2 9 2 5 6 2 5 9 4 5 2 | 2 5 6   |

Beküldendő egy tömörített *i647.zip* állományban a program forráskódja és rövid dokumentációja, amely megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben fordítható.

(10 pont)

**I. 648.** 1-től kezdve  $N$ -ig egyesével felírjuk a számokat egymás mellé, majd több lépésben kihúzzunk közülük néhány egymást követő számból álló szakaszt. A kihúzott szakaszok nem fedik egymást.

Készítsünk programot *i648* néven, amely megadja, hogy hányadik kihúzás után volt a legtöbb összefüggő, nem kihúzott számokból álló szakasz, és ez hány darab volt.

A program standard bemenetének első sorában a sorozat legnagyobb értéke,  $N$  ( $1 \leq N \leq 1\,000\,000$ ) és a húzások  $M$  ( $1 \leq M \leq 1000$ ) száma található. A következő  $M$  sorban a kihúzott részletek első és utolsó számai ( $1 \leq E_i \leq U_i \leq N$ ) szerepelnek egy-egy szóközzel elválasztva.

A programmal a standard kimenetre írjuk ki, hogy hányadik kihúzás után volt a legtöbb szakasz (több megoldás esetén a legkisebb sorszámú), és ekkor hány szakasz volt.

Példa:

| Bemenet (a / jel sortörést helyettesít) | Kimenet |
|-----------------------------------------|---------|
| 18 5 / 11 13 / 6 7 / 2 2 / 3 4 / 8 10   | 3 4     |

Magyarázat (pirossal a kihúzások):

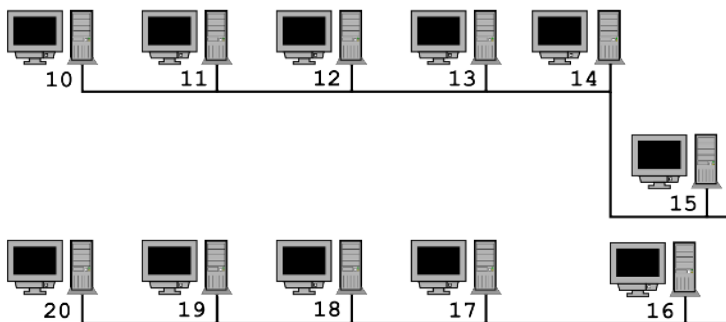
|   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |

Beküldendő egy tömörített *i648.zip* állományban a program forráskódja és rövid dokumentációja, amely megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben fordítható.

(10 pont)

**I. 649.** A lapunk októberi számában megjelent I. 637. feladatban a Token Ring hálózattal foglalkoztunk. A most következő feladatban a sín topológiájú, Ethernet típusú hálózatok modellezése lesz a cél.

Ebben a hálózatban a számítógépek egy vonal mentén sorban egymás után kapcsolódnak az adatokat átvivő közeghez. A számítógépek folyamatosan figyelik a közös vonalat, és érzékelik, ha azon adat érkezik, illetve érzékelik, hogy a vonalon nincs adat. Egy gép csak akkor kezd adatot küldeni a vonalon, ha azon más adat nem érkezik. Az adat tartalmazza a feladó és a célszámítógép címét. Az adat feldolgozását természetesen csak a címzett gép végzi el, a többiek eldobják a nem nekik szólót. Tekintsük úgy, hogy a vonalon az egyik gép által küldött adat 1 időegység alatt jut el minden másik géphez.



Az adatküldés meghiúsul, ha a közös vonalon ugyanabban az időpontban több számítógép is küld adatot. Ekkor mindegyik gép érzékeli, hogy az adat átvitele nem történhetett meg hibamentesen. Az adott időpontban éppen adatokat küldő gépek egy véletlen időegységig várnak, mielőtt újra megpróbálnák elküldeni az adatot. A várakozás véletlen idejét az  $[1;N]$  intervallumból választják, ahol  $N$  a hálózatban lévő gépek száma. Ha a várakozási idő letelt, akkor a következő olyan időpontban kezdik az adatküldést, amikor a vonal szabad, tehát más nem küld adatot.

A szimuláció során minden gép, amely éppen nem kíván adatot küldeni, egy véletlenszámtól függően eldönti, hogy a következő időegységtől kezdve küld-e adatot, vagy sem. Az adatküldésre való hajlandóságot egy  $H$  véletlenszámmal adjuk meg. Ha egy gép egyszer úgy döntött, hogy küldeni szeretne, akkor egészen addig ebben az állapotában marad, amíg az adat elküldése sikeresen, ütközés érzékelése nélkül meg nem történik. A program standard bemenetének egyetlen sorában a gépek  $N$  száma ( $2 \leq N \leq 255$ ), a gépek adatküldését jellemző  $H$  valószínűség ( $0 \leq H < 1$ ) való szám, valamint a szimuláció teljes idejét időegységben megadó  $T$  egész érték ( $1000 \leq T < 100\,000$ ) található egy-egy szóközzel elválasztva.

A program a standard kimenetre egy egész és egy valós számot írjon szóközzel elválasztva: mennyi adatot sikerült a szimuláció során átjuttatni a hálózaton, illetve átlagosan mennyi idő telt el egy-egy adat esetén a küldési hajlandóságtól a sikeres adatküldésig.

Példák:

| Bemenet           | Kimenet    |
|-------------------|------------|
| 10 0.1 20000      | 7279 18.4  |
| 10 0.2 20000      | 6637 25.9  |
| 20 0.5 20000      | 5501 71.4  |
| 100 0.25 20000    | 4936 394.8 |
| 200 0.001 100000  | 19296 29.3 |
| 250 0.0001 100000 | 2517 4.4   |

Beküldendő egy tömörített *i649.zip* állományban a program forráskódja és rövid dokumentációja, amely megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben fordítható.

(10 pont)

**I. 650.** A [youtube.com](https://www.youtube.com) oldal népszerűsége és látogatottsága más közösségimédia-felületek mellett ma is óriási. A <https://www.kaggle.com/datasets/rashminslk/youtube-subscribers-data-2024> oldalon elérhető az első 50 legtöbb feliratkozóval rendelkező Youtube-csatorna néhány adata. Ebben a feladatban az adatok elemzését kell elvégezni táblázatkezelő alkalmazás segítségével.

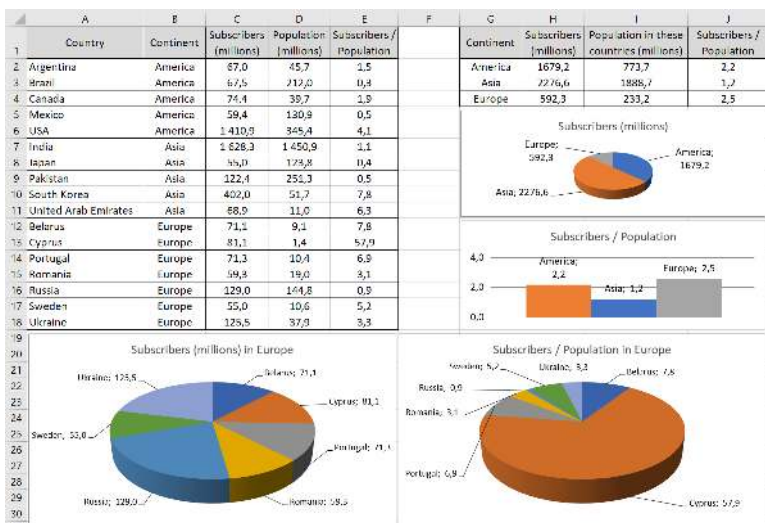
A feladatok megoldásához először érdemes letölteni a fenti honlapon elérhető *.csv* állományt, majd abban egyszerű szövegszerkesztővel a vesszőket pontosvesszőre, a pontokat vesszőre cserélni. Az első lépéssel a cellák határolójelét, a második lépéssel a tizedesvesszőt tudjuk a magyar nyelvi beállításokkal rendelkező táblázatkezelőhöz feldolgozhatóvá igazítani.

Nyissuk meg az előbb átalakított állományt táblázatkezelő alkalmazással, oldjuk meg az alábbi feladatokat, és mentjük munkánkat *youtube* néven a program alapértelmezett formátumában. A megoldás során – ahol csak lehetséges – függvényt és hivatkozást használjunk, hogy a kapott megoldással pl. a következő évi adatokat is kis változtatással feldolgozhassuk.

1. Az adatsorozatban néhány helyen a táblázatkezelőben hibásan megjelenő karakterek vannak. Töröljük a hibásan megjelenő szavakat és értelmezhetetlen jeleket.
2. Válasszuk el vesszővel és szóközzel azokban a cellákban az adatokat, ahol több érték is szerepel, például az országnevek, az elsődleges nyelv, vagy a kategória esetében.
3. Cseréljük a *United States* szöveget az *USA* szövegre az országnevekben.
4. Egészítsük ki az adatokat úgy, hogy tartalmazzák az országok mellett a földrészt is – földrajzi ismereteinkre támaszkodva. Ahol több földrészről szerepel ország, ott több földrészt megadva.
5. Formázzuk a táblázatot a minta szerint, állítsuk be az oszlopok szélességét, a cellák igazítását, szegélyét, alakítsuk ki az első sorban a fejléct.
6. Készítsünk statisztikai elemzést a forrásadatokról a következő minta alapján egy másik munkalapon országok és földrészek szerint.

|    | A                                     | B             | C                      | D                | E             | F             | G               |
|----|---------------------------------------|---------------|------------------------|------------------|---------------|---------------|-----------------|
|    | Name                                  | Brand channel | Subscribers (millions) | Primary language | Category      | Country       | Continent       |
| 2  | MrBeast                               | No            | 335                    | English          | Entertainment | USA           | America         |
| 3  | T-Series                              | No            | 280                    | Hindi            | Music         | India         | Asia            |
| 4  | Cocomelon - Nursery Rhymes            | Yes           | 186                    | English          | Education     | USA           | America         |
| 5  | SET India                             | Yes           | 180                    | Hindi            | Entertainment | India         | Asia            |
| 6  | Vlad and Niki                         | No            | 129                    | English          | Entertainment | Russia        | Europe          |
| 7  | Kids Diana Show                       | Yes           | 128                    | English          | Entertainment | USA, Ukraine  | America, Europe |
| 8  | Like Nastya                           | No            | 123                    | English          | Entertainment | USA, Ukraine  | America, Europe |
| 9  | Zee Music                             | Yes           | 112                    | Hindi            | Music         | India         | Asia            |
| 10 | PewDiePie                             | No            | 110                    | English          | Entertainment | Sweden, Japan | Asia, Europe    |
| 11 | WWE                                   | Yes           | 105                    | English          | Sports        | USA           | America         |
| 12 | Goldmines                             | Yes           | 101                    | Hindi            | Film          | India         | Asia            |
| 13 | Stokes Twins                          | No            | 100                    | English          | Entertainment | USA           | America         |
| 14 | Sony SAB                              | Yes           | 97,5                   | Hindi            | Entertainment | India         | Asia            |
| 15 | Blackpink                             | No            | 95,3                   | Korean           | Music         | South Korea   | Asia            |
| 16 | ChuChu TV Nursery Rhymes & Kids Songs | Yes           | 94,2                   | Hindi            | Education     | India         | Asia            |

- Figyeljünk arra, hogy vannak több országhoz, és így több földrészhez is tartozó csatornák. Ezek esetében a feliratkozók számát egyenlően osszuk el a két ország és földrész között. Amennyiben szükséges, úgy alkalmazzunk segéd-táblázatokat. Kihashználhatjuk, hogy legfőljebb két ország vagy két földrész között kell az adatokat megosztani.
- Az országok 2024. évi népességadatait például a <https://www.worldometers.info/world-population/population-by-country/> oldalról tudjuk beszerezni.
- Készítsük el az adatok alapján a mintán látható diagramokat, és formázzuk őket a mintának megfelelően.



Beküldendő egy tömörített *i650.zip* állományban a feladat megoldását tartalmazó táblázatkezelő munkafüzet és egy rövid dokumentáció, amely megadja az alkalmazott táblázatkezelő nevét és verziószámát.

(10 pont)



**Beküldési határidő: 2025. február 15.**

**Elektronikus munkafüzet: <https://www.komal.hu/munkafuzet>**



## Beszámoló a 2024. évi Eötvös-versenyről



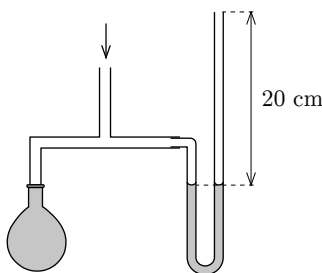
Az Eötvös Loránd Fizikai Társulat 2024. évi Eötvös-versenye október 11-én délután 3 órai kezdettel tíz magyarországi helyszínen<sup>1</sup> került megrendezésre. Ezért külön köszönettel tartozunk mindazoknak, akik ebben szervezéssel, felügyelettel a segítségünkre voltak. A versenyen a három feladat megoldására 300 perc áll rendelkezésre, bármely írott vagy nyomtatott segédeszköz használható, de (nem programozható) zsebszámológépen kívül minden elektronikus eszköz használata tilos. Az Eötvös-versenyen azok vehetnek részt, akik vagy középiskolai tanulók, vagy a verseny évében fejezték be középiskolai tanulmányaikat. Összesen 54 versenyző adott be dolgozatot, 24 egyetemista és 30 középiskolás.

Ismertetjük a feladatokat és azok megoldását.



**1.** Egy léggömb elasztikus viselkedése a fal rugalmas energiája segítségével jellemezhető. Ha a jó közelítéssel mindvégig gömb alakú lufi mérete a feszítetlen méret  $\lambda$ -szorosára változik, akkor a léggömb rugalmas energiája a  $2\lambda^2 + \lambda^{-4} - 3$  kifejezéssel egyenes arányban növekszik egészen addig, míg végül  $\lambda \approx 3$  érték körül a lufi kidurran.

A kezdetben ernyedt állapotú léggömböt egy kompresszorhoz csatlakoztatott T-alakú elosztó egyik kivezetésére kötjük, a másik kivezetésre pedig egy vékony üvegcsőből készült vizes manométert rögzítünk az 1. ábrán látható módon. A víz a cső 20 cm hosszú szakaszát foglalja el. A kompresszor elindítása után azt tapasztaljuk, hogy a folyadékszintek az eredeti helyzetükhöz képest lassan 5 cm-rel mozdulnak el, mialatt a léggömb átmérője 5%-kal növekszik. Mi fog történni ezután?



1. ábra

(Vigh Máté)

<sup>1</sup>Részletek a verseny honlapján: <http://eik.bme.hu/~vanko/fizika/eotvos.htm>

**Megoldás.** A lufi rugalmas energiája egy alkalmas  $E_0$  konstans bevezetésével így írható:

$$E = E_0 (2\lambda^2 + \lambda^{-4} - 3).$$

Meggyőződhetünk róla, hogy nyújtatlan állapotban (azaz  $\lambda = 1$  esetén) a rugalmas energia a várakozásnak megfelelően zérus,  $\lambda > 1$  értékekre pedig  $E(\lambda)$  monoton növekvő függvény. Vajon hogyan határozható meg ebből az összefüggésből a lufiban uralkodó  $p$  túlnyomás értéke? Alkalmazzuk a virtuális munka elvét: ha a léggömb térfogatát kis  $\Delta V$  értékkel megnöveljük, a bezárt és a külső levegő együttes munkavégzése éppen egyenlő a rugalmas energia növekedésével:

$$p\Delta V = \Delta E.$$

A lufi pillanatnyi térfogata a kezdeti  $V_0$  térfogattal  $V = V_0\lambda^3$  módon fejezhető ki. Ennek kicsiny megváltozása a magasabb rendű tagok elhanyagolásával a következőképpen közelíthető:

$$\Delta V \approx 3V_0\lambda^2\Delta\lambda.$$

Ehhez hasonlóan a rugalmas energia kifejezése is sorba fejthető:

$$\Delta E \approx E_0 (4\lambda - 4\lambda^{-5}) \Delta\lambda.$$

Az eddigiek felhasználásával a túlnyomás kiszámítható:

$$p = \frac{\Delta E}{\Delta V} = \frac{4E_0(\lambda - \lambda^{-5})\Delta\lambda}{3V_0\lambda^2\Delta\lambda} = p_0 \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^7} \right),$$

ahol a rövidség kedvéért bevezettük a  $p_0 = \frac{4E_0}{3V_0}$  jelölést (ami nem azonos a külső légnyomással).

A feladat szövegéből tudjuk, hogy  $p(\lambda = 1,05) = 10$  vízcm, hiszen ha a vízszintek 5 cm-rel mozdulnak el, akkor a folyadékszintek különbsége 10 cm lesz. Ebből:

$$p_0 = \frac{10 \text{ vízcm}}{1,05^{-1} - 1,05^{-7}} = 41,4 \text{ vízcm}.$$

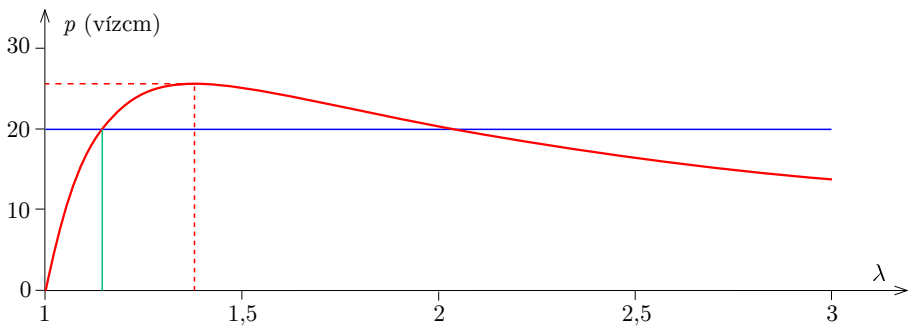
Érdemes kiszámítani a nyomás értékét a következő két speciális esetben:

$\lambda = 1$  esetén (ernyedtt állapotban)  $p$  valóban nulla, ahogy várjuk.

$\lambda = 3$  esetén (azaz a kidurranás határán)  $p = 13,8$  vízcm.

Ekkora túlnyomást a manométerben lévő 20 cm hosszú vízoszlop ki tud fejteni. Ebből azt a *hibás* következtetést vonhatjuk le, hogy a lufi felfújódása egészen addig folytatódik, míg a vízszintek elmozdulása  $\frac{13,8}{2} = 6,9$  cm-re nő, majd ekkor a lufi kidurran.

Vajon hol a hiba ebben a gondolatmenetben? Ehhez vizsgáljuk meg részletebben a  $p(\lambda)$  függvényt (2. ábra)! Numerikus értékek behelyettesítésével észrevehetjük, hogy a nyomásnak  $\lambda = 1$  és  $\lambda = 3$  között maximuma van. (A jelenséget tapasztalatból is ismerjük: egy lufit kezdetben nehezebb, majd egy bizonyos méret felett könnyebb felfújni.)



2. ábra

A maximum pontos helye deriválással határozható meg:

$$\frac{dp}{d\lambda} = p_0 (-\lambda^{-2} + 7\lambda^{-8}).$$

Ez a derivált zérus, ha

$$\lambda = \lambda^* = \sqrt[6]{7} = 1,38, \quad \text{ahol} \quad p(\lambda^*) = 25,7 \text{ vízcm.}$$

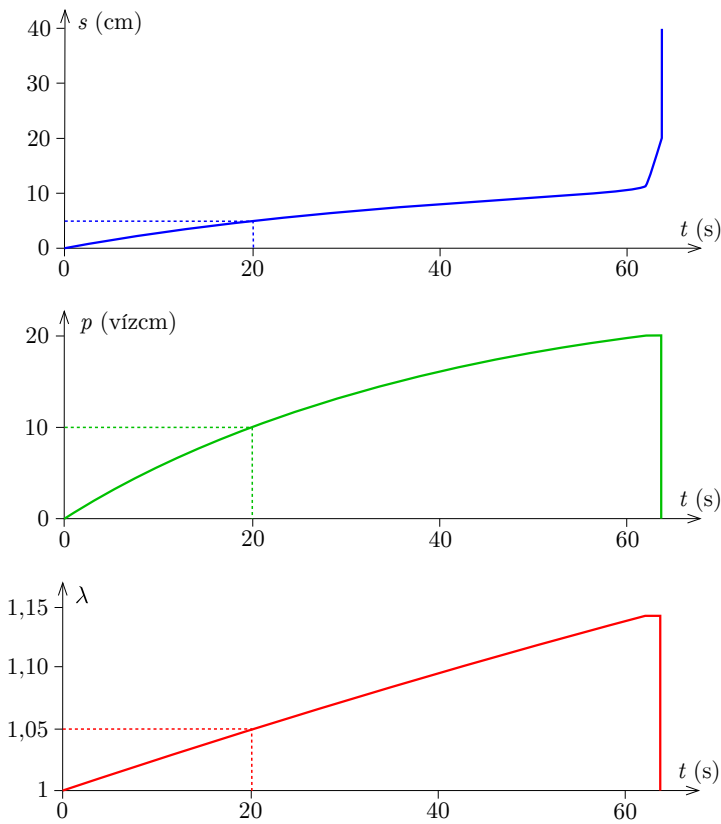
Mi fog tehát történni? Ahogy az a 2. ábráról látszik, a lufi tovább növekszik egészen addig, amíg a túlnyomás eléri a 20 vízcm-es értéket, azaz a folyadékoszlop már ekkor teljes egészében a jobb oldali csőszár függőleges részébe kerül. Innentől a nyomás nem növekszik tovább, és így a lufi mérete is egy ideig állandó marad, a kompresszor pedig immár gyorsabban emeli a vízoszlopot a csőben (hiszen a lufiba már nem kell levegőt fújni). Amikor a víz elkezd kifolyni a csőből, akkor a nyomás, és így a lufi mérete is csökkenni kezd. Innentől a kompresszorból és a leeresztő lufiból kiáramló levegő is az egyre kisebb tömegű vízoszlopot nyomja ki, amely így egyre gyorsulva „kilövell” a csőből. Amikor minden víz kifolyt a csőből, a lufi visszakerül a teljesen felfújatlan állapotba (a kompresszor pedig ekkortól a szabadba fújja a levegőt).

A lufi maximális méretéhez tartozó  $\lambda$  értéket a  $p(\lambda) = 20$  vízcm egyenlet megoldása adja, amelyet iterálással vagy grafikusán (2. ábrán zöld vonal) kaphatunk meg:  $\lambda_{\max} \approx 1,145$ , azaz a lufi átmérője a folyamat során mindössze 14,5%-kal növekszik meg az eredeti méretéhez képest.

*Megjegyzések.* 1. A folyamatok időbeliségének kvantitatív vizsgálatához további numerikus adatok szükségesek. A 3. ábrán látható grafikonok a következő feltevésekkel készültek: a lufi kezdeti sugara 2,5 cm, a manométer csövének belső keresztmetszete  $0,1 \text{ cm}^2$ , az alsó ívének hossza 4 cm, a kompresszor térfogatárama  $0,54 \text{ cm}^3$ , amivel a feladatban szereplő  $\lambda = 1,05$  érték és  $s = 5 \text{ cm}$  folyadékszál-elmozdulás épp 20 s alatt történik meg. A grafikonokon a folyadékszál  $s$  elmozdulása, a bezárt levegő  $p$  túlnyomása és a lufi méretét leíró  $\lambda$  paraméter látható az idő függvényében.

2. Ha a folyadékszál hossza nagyobb lenne, mint a maximális nyomáshoz tartozó 25,65 cm, akkor a nyomás elérné a maximális értéket, majd csökkenni kezdene, de a lufi tovább fújódna, míg  $\lambda \approx 3$  értéknél kipukkadna.





3. ábra

**2.** A súlytalanság állapotában egy  $R$  sugarú,  $L \gg R$  hosszúságú és  $d \ll R$  falvastagságú alumíniumcső a szimmetriatengelyére merőleges, homogén,  $B$  indukciójú mágneses mezőben helyezkedik el. A csövet tengelye körül  $\omega_0$  szögsebességgel megforgatjuk, majd magára hagyjuk.

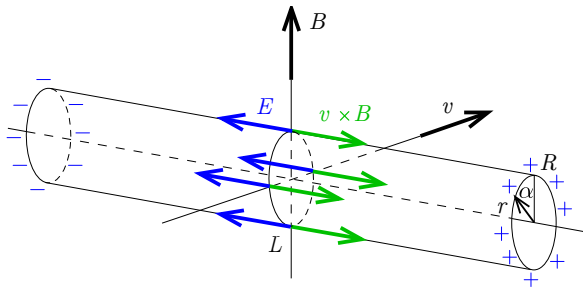
a) Vázoljuk fel a cső kiterített palástjáról készült rajzon a csőben kialakuló áramvonalakat!

b) Írjuk le a cső mozgását az idő függvényében!

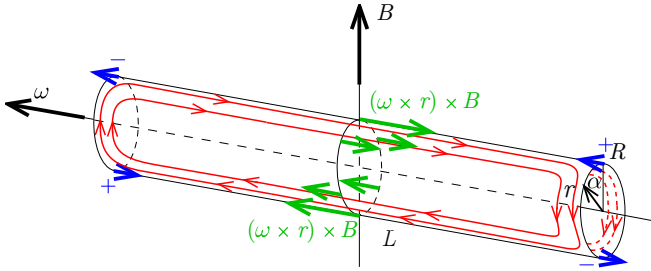
(Vigh Máté)

**Megoldás.** a) Ha a cső a mágneses térre merőleges irányban mozogna (de nem forogna), akkor a Lorentz-erő a töltéseket szétválasztaná, és az így kialakuló elektrosztatikus tér kiegyenlítené a Lorentz-erőt, egyensúlyi állapot alakulna ki, és áram nem folyna (4. ábra).

Esetünkben viszont a cső palástjának két átellenes része ellenkező irányban mozog, így a Lorentz-erő is ellentétes irányú lesz, aminek következtében a cső végeinél záródhatnak az áramvonalak, és így nem lesz jelentős töltésfelhalmozódás, hanem az 5. ábrán látható módon zárt áramkör jöhet létre.



4. ábra



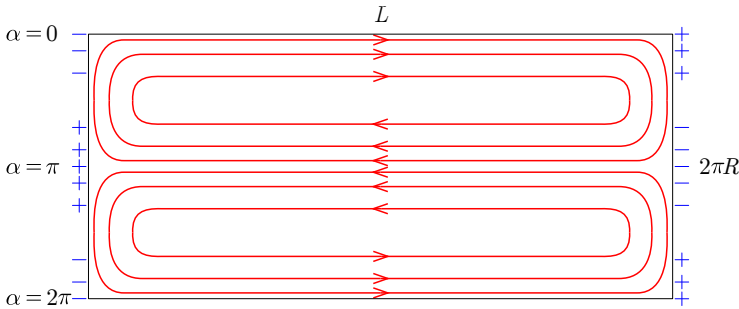
5. ábra

Az  $L \gg R$  feltétel miatt a cső végeitől eltekintve az elektrosztatikus tér elhanyagolható, és így a cső falában

$$\mathbf{j} = \sigma(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{B},$$

$$j(\alpha) = \sigma\omega BR \cos \alpha$$

áramsűrűség alakul ki, ahol  $\omega$  a cső pillanatnyi szögsebessége,  $\sigma$  az alumínium fajlagos vezetőképessége (a fajlagos ellenállás reciproka),  $0 \leq \alpha < 2\pi$  pedig a tengelytől a palást adott pontjához mutató  $\mathbf{r}$  sugár és a mágneses indukció  $\mathbf{B}$  vektora által bezárt szög. A cső végein felhalmozódik valamennyi töltés: ezek „térítik el” a cső végén az áramvonalakat. A kialakuló áramvonalakat a 6. ábra mutatja.



6. ábra

b) *I. módszer.* Az  $L \gg R$  feltétel miatt a cső végével, mint „széleffektussal” nem foglalkozunk, csak a csőben a cső tengelyével párhuzamosan folyó áramokkal.

Ezekre a mágneses tér erőt fejt ki, egy  $dV$  kicsiny térfogatra ható erő:

$$d\mathbf{F} = \mathbf{j} \times \mathbf{B} dV.$$

Az erők és a tengelyre merőleges forgatónyomaték-komponensek vektori eredője a szimmetria miatt nulla, így a cső tömegközéppontja nem mozdul el, és tengelye nem fordul el. Ugyanakkor a tengellyel párhuzamos forgatónyomaték-komponensek eredője nem nulla, a cső forgása így lassulni fog. (Az áramok miatt hő disszipálódik, így a cső energiája biztosan csökkenni fog. Ezt mondja ki a Lenz-törvény is.) A cső kicsiny  $dR d\alpha$  keresztmetszetű,  $L$  hosszúságú,  $dV = L dR d\alpha$  térfogatú keskeny csíkjára ható tengellyel párhuzamos forgatónyomaték-komponens:

$$\begin{aligned} d\mathbf{M} &= \mathbf{r} \times d\mathbf{F} = \mathbf{r} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) L dR d\alpha, \\ dM &= -R j B \cos \alpha \cdot L dR d\alpha = -\sigma \omega B^2 L dR^3 \cos^2 \alpha d\alpha. \end{aligned}$$

(A negatív előjel azt fejezi ki, hogy a forgatónyomaték-komponens a szögsebességvektorral ellentétes irányú.) Ennek összegzése a teljes csőre

$$M = -\sigma \omega B^2 L dR^3 \int_0^{2\pi} \cos^2 \alpha d\alpha = -\sigma \omega B^2 L dR^3 \pi.$$

(Ezt az eredményt a szinuszos jel effektív értéke alapján is ismerhetjük: az átlagos érték  $\frac{1}{2}$  és  $\frac{1}{2} \cdot 2\pi = \pi$ , vagy a  $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$  átalakítás után szemléletesen is láthatjuk.) A vékony falú cső tehetetlenségi nyomatéka

$$\Theta = mR^2 = 2\pi \varrho L dR^3,$$

ahol  $\varrho$  az alumínium sűrűsége. A cső tengely körüli forgását leíró mozgásegyenlet:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{M}{\Theta} = -\frac{\sigma \omega B^2 L dR^3 \pi}{2\pi \varrho L dR^3} = -\frac{\sigma B^2}{2\varrho} \omega.$$

A differenciálegyenlet ugyanolyan alakú, mint a jól ismert radioaktív bomlási törvény, így megoldása:

$$\omega(t) = \omega_0 e^{-\frac{t}{\tau}},$$

ahol a  $\tau$  időállandó:

$$\tau = \frac{2\varrho}{\sigma B^2}.$$

A cső tehát exponenciálisan lassulva fog forogni.

*Megjegyzés.* Az időállandó nem függ a cső méreteitől (mindössze annyit használtunk fel, hogy  $d \ll R \ll L$ ), csak a cső anyagának sűrűségétől és fajlagos vezetőképességétől, valamint a mágneses mező erősségétől. Alumínium esetében 1 mT mágneses indukció esetén az időállandóra két és fél percet kapunk.

## II. módszer. A cső egészében időegységenként

$$P = \frac{1}{\sigma} j_{\text{eff}}^2 V$$

energia disszipálódik, ahol (a koszinuszos helyfüggés miatt)

$$j_{\text{eff}} = \frac{1}{\sqrt{2}} j_{\text{max}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma \omega B R,$$

és  $V = 2\pi L d R$  a cső térfogata. Ezt a disszipálódó energiát a cső mozgási energiájának csökkenése fedezi:

$$P = -\frac{dE_m}{dt},$$

ahol

$$E_m = \frac{1}{2} \Theta \omega^2 = \frac{1}{2} \varrho V R^2 \omega^2.$$

Behelyettesítés és a deriválás elvégzése után:

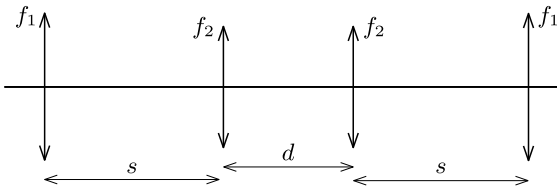
$$\frac{1}{2} \sigma \omega^2 B^2 R^2 V = -\frac{1}{2} \varrho V R^2 \cdot \frac{d(\omega^2)}{dt} = -\frac{1}{2} \varrho V R^2 \cdot 2\omega \frac{d\omega}{dt},$$

egyszerűsítve és rendezve:

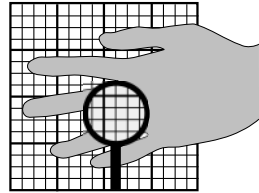
$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{\sigma B^2}{2\varrho} \omega,$$

az előző módszer eredményével összhangban.

**3.** Egy tubusban szimmetrikusan elhelyeztünk két  $f_1 = 50$  cm és két  $f_2 = 10$  cm fókusztávolságú gyűjtőlencsét a 7. ábrán látható módon. Sikerült a lencsákat úgy beállítani, hogy az optikai rendszeren átnézve a tárgyakat éppen olyannak látjuk, mintha egy üres tubuson át néznénk azokat.



7. ábra



8. ábra

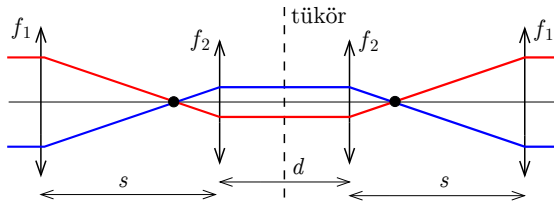
a) Mekkora a lencsék közötti  $d$  és  $s$  távolságok?

b) Ha az előző optikai rendszert tubus nélkül megépítjük, és a kezünket megfelelő helyen a lencsék közé helyezzük, akkor a 8. ábrán látható módon a kezünk egy részét el tudjuk „tüntetni”. Magyarázzuk meg a jelenséget!

(Széchenyi Gábor)

**Megoldás.** a) *I. módszer.* A tárgyakat éppen olyannak látjuk, mintha „semmi” nem lenne ott, vagyis egy jobb oldalról érkező fénysugár a lencserendszeren áthaladva éppen a beérkező fénysugár meghosszabbításán fog továbbhaladni. Első lépésként tekintsünk egy olyan fénysugarat, melynek belépő és így kilépő része is párhuzamos az optikai tengellyel. Ekkor – ahogy azt a 9. ábrán is látjuk – a lencserendszer, valamint a sugármenet is tükrörszimmetrikus. Ilyenkor a két belső lencse között haladó fénysugár is párhuzamos az optikai tengellyel. Egy, a végtelenből érkező párhuzamos nyalábot a két jobb oldali lencse párhuzamos nyalábbá képez, azaz ez a két lencse konfokális, fókuszpontjaik egybeesnek:

$$s = f_1 + f_2.$$



9. ábra

Ezután többféle módon megkaphatjuk a  $d$  távolság értékét, lássunk erre két különféle utat!

1. út. Vegyünk fel egy tetszőleges helyen egy tárgyat, és határozzuk meg sorban egymás után a négy lencse által alkotott képeit. A negyedik lencsén történő leképezés után egy azonos állású és nagyítású, virtuális képet kell kapnunk az eredeti tárgy helyén. A leképezési törvény *szokásos* alakját használva a képletekkel nehezebb a számolás, ezért inkább használjuk a *Newton-féle* alakot (amely az  $x$  tárgy és  $y$  képtávolságot a fókuszponttól méri, lásd a **G. 855.** gyakorlatot a KöMaL 2024. májusi számában). Eszerint  $xy = f^2$ .

Helyezzük a tárgyat az első lencse fókuszpontjától  $x_1$  távolságra. A következőkben jelölje  $x_i$  ( $y_i$ ) a jobb oldalról számított  $i$ . lencsén történő leképezéshez tartozó, jobb (bal) oldali fókuszponttól mért tárgytávolságot (képtávolságot). A 10. ábrán piros ponttal a képek helyeit, fekete ponttal a fókuszpontokat jelöltük.

Az első lencsén történő leképezés:

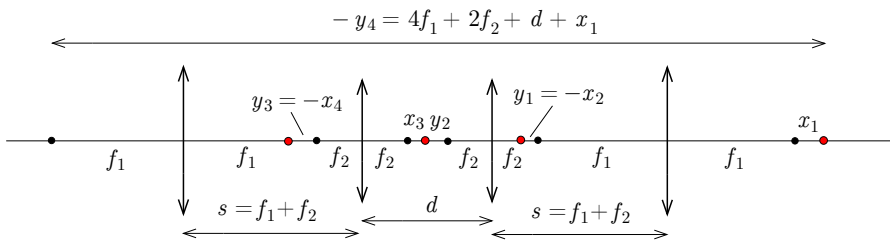
$$x_1 y_1 = f_1^2 \quad \Rightarrow \quad y_1 = \frac{f_1^2}{x_1}.$$

Mivel  $s = f_1 + f_2$ , a két lencse fókusza egybeesik, így

$$x_2 = -y_1,$$

A második lencsén történő leképezés:

$$x_2 y_2 = f_2^2 \quad \Rightarrow \quad y_2 = \frac{f_2^2}{x_2} = -\frac{f_2^2}{f_1^2} x_1.$$



10. ábra

A 10. ábra alapján:

$$x_3 = d - 2f_2 - y_2.$$

Tovább folytatva a harmadik lencsén történő leképezéssel:

$$x_3 y_3 = f_2^2 \quad \Rightarrow \quad y_3 = \frac{f_2^2}{d - 2f_2 - y_2},$$

$$x_4 = -y_3.$$

Végül a negyedik lencsén történő leképezés:

$$\begin{aligned} x_4 y_4 = f_1^2 \quad \Rightarrow \quad y_4 = \frac{f_1^2}{x_4} = -\frac{f_1^2}{y_3} &= -\frac{f_1^2}{f_2^2} (d - 2f_2 - y_2) = \\ &= -\frac{f_1^2}{f_2^2} \left( d - 2f_2 + \frac{f_2^2}{f_1^2} x_1 \right) = -\frac{f_1^2}{f_2^2} (d - 2f_2) - x_1. \end{aligned}$$

Ismét a 10. ábra alapján, ahhoz hogy a negyedik kép az első tárgy helyén legyen a következő geometriai feltételnek kell teljesülnie:

$$-y_4 = 4f_1 + 2f_2 + d + x_1.$$

Ebből

$$\frac{f_1^2}{f_2^2} (d - 2f_2) + x_1 = 4f_1 + 2f_2 + d + x_1.$$

Látható, hogy az egyenletből kiesik az  $x_1$  változó, azaz tetszőleges helyre helyezve a tárgyat, annak képe a négy lencsén történő leképezés után éppen a tárgy helyén lesz. Az egyenletet tovább alakítva:

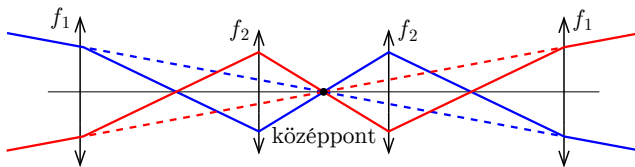
$$\begin{aligned} \left( \frac{f_1^2}{f_2^2} - 1 \right) d &= 2f_2 \frac{f_1^2}{f_2^2} + 4f_1 + 2f_2, \\ (f_1^2 - f_2^2) d &= 2f_2 (f_1^2 + 2f_1 f_2 + f_2^2). \end{aligned}$$

A két középső lencse közötti távolságra az alábbi kifejezés adódik:

$$d = 2f_2 \frac{(f_1 + f_2)^2}{f_1^2 - f_2^2} = 2f_2 \frac{f_1 + f_2}{f_1 - f_2}.$$

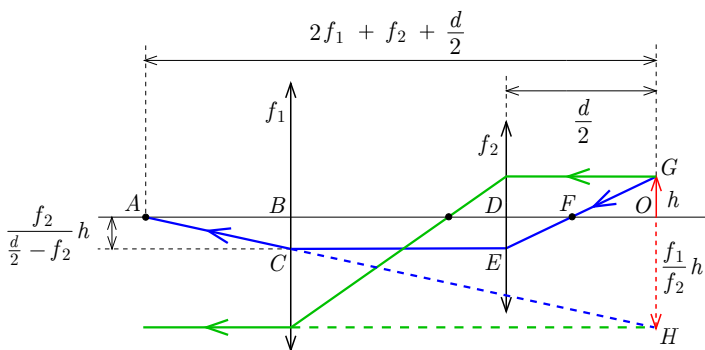
2. út. A lencserendszer középpontosan is szimmetrikus. Ha a beérkező fénysugár meghosszabbítása a középponton menne át, akkor a kimenő fénysugár meghosszabbítása is átmegy a középponton. Ilyenkor a fénysugárnak is középpontosan

szimmetrikusnak kell lennie, azaz annak fizikailag is át kell haladnia a rendszer középpontján (lásd a 11. ábrát). Ennek következményeként egy, a középpontban elhelyezett tárgyat a két bal oldali lencse a középpontba képez le mint virtuális képet.



11. ábra

Szerkesszük meg a középpontba helyezett  $h$  magasságú tárgy képét! Tekintsünk egy, az optikai tengellyel párhuzamos, illetve egy, az  $f_2$  fókusz távolságú lencse fókuszán áthaladó sugármenetet, ezeket zölddel, illetve kékkel rajzoltuk meg a 12. ábrán.



12. ábra

A két lencse konfokális, így a zöld sugármenetet követve a kép méretére

$$OH = \frac{f_1}{f_2} h$$

adódik. Az  $FGO$  és  $FED$  háromszögek hasonlóak, valamint

$$DF = f_2 \quad \text{és} \quad FO = \frac{d}{2} - f_2,$$

ahonnan

$$DE = BC = \frac{f_2}{\frac{d}{2} - f_2} h.$$

Az  $ABC$  és  $AOH$  háromszögek is hasonlóak, amiből következik, hogy

$$\frac{BC}{AB} = \frac{OH}{AO} \Rightarrow \frac{\frac{f_2}{\frac{d}{2} - f_2} h}{f_1} = \frac{\frac{f_1}{f_2} h}{2f_1 + f_2 + \frac{d}{2}}.$$

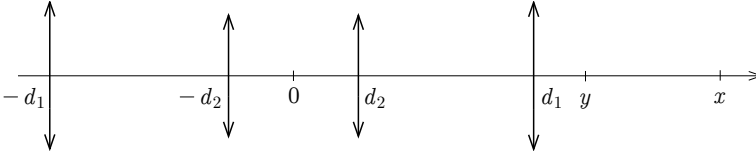
Az egyenletet  $d$ -re megoldva a korábban megkapott végeredményre jutunk.

A megadott fókusz távolságok behelyettesítése után:

$$s = f_1 + f_2 = 60 \text{ cm} \quad \text{és} \quad d = 2f_2 \frac{f_1 + f_2}{f_1 - f_2} = 30 \text{ cm}.$$

*II. módszer.* Vegyük fel a koordinátatengelyt az optikai tengelyen, középpontját helyezzük az elrendezés közepére! A tárgy legyen a tengely  $x$  pontjában, amit a jobb szélső lencse a  $z$  pontba képez le, ezt az első képet pedig a második lencse az  $y$  pontba. A lencsék helyére is bevezetünk két új paramétert: az origótól mért távolságukat (hogy rövidebbek legyenek a képletek, 13. ábra):

$$d_2 = \frac{1}{2}d, \quad d_1 = \frac{1}{2}d + s.$$



13. ábra

A harmadik és negyedik lencse az első kettőnek a tükörképe, ezért számukra az  $x$  és  $y$  pont a  $-x$ ,  $-y$  párnak felel meg. A fényút megfordíthatóságát is kihasználva arra jutunk, hogy a bal oldali két lencse a második képet akkor képezi pontosan vissza az  $x$  pontba, ha az  $y = L(x)$  páratlan függvény.

Írjuk fel az első két lencsére a leképezési törvényt a  $(k - f)(t - f) = f^2$  Newton-féle alakot használva:

$$\begin{aligned} (x - d_1 - f_1)(d_1 - z - f_1) &= f_1^2, \\ (z - d_2 - f_2)(d_2 - y - f_2) &= f_2^2. \end{aligned}$$

Ejtsük ki a  $z$  ismeretlent úgy, hogy mindkét egyenletet elosztjuk a bal oldal  $z$ -t nem tartalmazó tényezőjével, majd összeadjuk ezeket:

$$d_1 - d_2 - f_1 - f_2 = \frac{f_1^2}{x - d_1 - f_1} + \frac{f_2^2}{d_2 - y - f_2}.$$

A nevezőkkel beszorozva:

$$(d_1 - d_2 - f_1 - f_2)(x - d_1 - f_1)(d_2 - y - f_2) = f_1^2(d_2 - y - f_2) + f_2^2(x - d_1 - f_1).$$

Mielőtt elvégeznénk az összes szorzást, nézzük meg, melyik tagokra van szükségünk. A fenti egyenlet egy

$$Axy + Bx + Cy + D = 0$$

implicit alakra vezet, ahol

$$(1) \quad A = d_1 - d_2 - f_1 - f_2,$$



$$(2) \quad B = f_2^2 + A(f_2 - d_2),$$

$$(3) \quad C = -f_1^2 - A(d_1 + f_1),$$

$$(4) \quad D = f_1^2(d_2 - f_2) - f_2^2(d_1 + f_1) + A(d_1 + f_1)(d_2 - f_2) = \frac{BC + f_1^2 f_2^2}{A}.$$

A keresett  $L$  függvény:

$$y = -\frac{Bx + D}{Ax + C}.$$

Ez akkor páratlan, ha  $\alpha)$   $A = D = 0$ , vagy  $\beta)$   $B = C = 0$ .

Az  $\alpha)$  esetben az (1) egyenletből  $A = 0$  feltétellel:

$$(5) \quad s = d_1 - d_2 = f_1 + f_2.$$

Ez a távolság ugyanakkora, mint a Kepler-féle távcsőben, vagyis eszközünk nem más, mint két kifelé fordított Kepler-távcső. A  $d$  középső távolság meghatározásához nézzük a  $D$  együtthatóra vonatkozó egyenletet. A (4) egyenletből  $D = 0$  feltétellel:

$$(6) \quad f_1^2(d_2 - f_2) - f_2^2(d_1 + f_1) = 0.$$

Helyettesítsük be (5)-ből  $d_1 = d_2 + f_1 + f_2$ -t, és oldjuk meg  $d_2$ -re:

$$\begin{aligned} f_1^2(d_2 - f_2) - f_2^2(d_2 + 2f_1 + f_2) &= 0 \\ d_2 = f_2 \frac{f_1^2 + 2f_1 f_2 + f_2^2}{f_1^2 - f_2^2} = f_2 \frac{f_1 + f_2}{f_1 - f_2} &\Rightarrow \quad d = 2f_2 \frac{f_1 + f_2}{f_1 - f_2}. \end{aligned}$$

Az eredményen látszik, hogy a megoldhatósághoz teljesülnie kell az  $f_1 > f_2$  egyenlőtlenségnek. A második kép helye végül:

$$(7) \quad y = -\frac{B}{C}x = \left(\frac{f_2}{f_1}\right)^2 x.$$

A  $\beta)$  megoldásról megmutatjuk, hogy fordított képet ad, ezért nem felel meg a feladat leírásának. A kép annyiszor fordul meg az eszközben, ahány valódi, ernyőn felfogható kép létrejön. Az  $\alpha)$  megoldásban például a párhuzamos fénynyaláb (végtelen távoli tárgy) a középső tartományban szintén párhuzamos, a két szélsőben a lencsék közös fókuszpontjában valódi kép jön létre, így a kétszer megfordított kép egyenes állású lesz. A  $\beta)$  megoldásnál a második kép az

$$y = -\frac{D}{Ax}$$

helyre kerül, a végtelen távol levő tárgy második képe tehát az origóban lesz. Mivel a sugármenet szimmetrikus, ez mindenképpen páratlan számú képfordítást jelent, a végső kép így fordított állású lesz.

A feladat  $a)$  kérdésére tehát a válasz (a korábbi eredményekkel összhangban):

$$s = f_1 + f_2 = 60 \text{ cm} \quad \text{és} \quad d = 2f_2 \frac{f_1 + f_2}{f_1 - f_2} = 30 \text{ cm}.$$

*Megjegyzések.* 1. A kép és a tárgy összetett optikai eszközöknél is felcserélhető – ez a fénysugár megfordíthatóságából következik. Ha a kettő ugyanott van, akkor a felcserélhetőség az eszköz nagyítására az

$$N^* = \frac{K}{T} = \frac{T}{K} = \frac{1}{N^*}$$

feltételt adja, amiből

$$N^{*2} = 1 \quad \text{és} \quad N^* = \pm 1,$$

vagyis a kép ugyanakkora, de lehet egyenes vagy fordított állású.

Ellenőrizzük, hogy a nagyítás az  $\alpha$ ) megoldásban minden tárgytávolságra  $+1$ . Egy lencse nagyítása (amit fordított állású kép esetén negatívnak tekintünk):

$$N = \frac{K}{T} = -\frac{k}{t} = \frac{f}{f-t} = \frac{f-k}{f}.$$

A teljes nagyítás a négy lencse nagyításának szorzata. Az első és harmadik kép helyét nem számoltuk ki, de az egyes lencsék nagyításának felírásánál szerencsére két-két lehetőségünk van:

$$N^* = \frac{f_1}{f_1 + d_1 - x} \cdot \frac{f_2 - d_2 + y}{f_2} \cdot \frac{f_2}{f_2 - d_2 - y} \cdot \frac{f_1 + d_1 + x}{f_1}.$$

A szorzások elvégzésekor vegyük észre, hogy a számláló és a nevező egyforma tagokat tartalmaz, csak némelyiket eltérő előjellel:

$$(8) \quad N^* = \frac{[(f_1 + d_1)(f_2 - d_2) + xy] + [x(f_2 - d_2) + y(f_1 + d_1)]}{[(f_1 + d_1)(f_2 - d_2) + xy] - [x(f_2 - d_2) + y(f_1 + d_1)]}.$$

A számláló és nevező eltérő előjelű részéről megmutatjuk, hogy zérus:

$$x(f_2 - d_2) + y(f_1 + d_1) = \frac{x}{f_1^2} [f_1^2(f_2 - d_2) + f_2^2(f_1 + d_1)] = 0.$$

(Ehhez használtuk a (7) eredményt, a szögletes zárójelben levő rész pedig (6) alapján zérus.) Tehát  $N^* = 1$ , bárhol is van a tárgy.

2. A  $\beta$ ) megoldás a következő:

$$s = \sqrt{2f_1 f_2}, \quad d = 2f_2 \frac{f_1 - \sqrt{2f_1 f_2}}{f_1 + f_2 - \sqrt{2f_1 f_2}}, \quad f_1 > 2f_2.$$

A nagyítás (8) kifejezésében most az azonos előjelű rész, a számláló és nevező első tagja tűnik el:

$$(f_1 + d_1)(f_2 - d_2) - \frac{D}{A} = (f_1 + d_1)(f_2 - d_2) - \frac{f_1^2 f_2^2}{A^2} = 0,$$

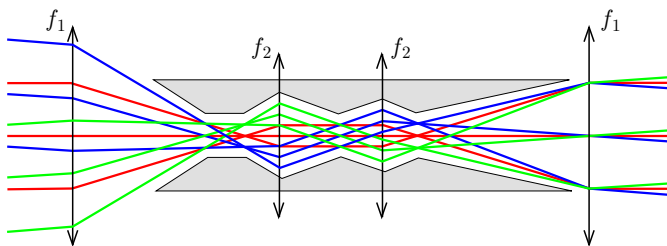
ahol előbb behelyettesítettük (4) egyenletből  $D$ -t, majd pedig az

$$\frac{f_1^2}{A} = -(d_1 + f_1), \quad \frac{f_2^2}{A} = d_2 - f_2$$

értékeket, amik a  $B = C = 0$  feltétellel a (2) és (3) egyenletből adódnak. A nagyítás tehát ebben az esetben  $N^* = -1$ , bárhol van a tárgy.

b) Ha megnézzük a 9. ábrán a párhuzamos nyalábot, láthatjuk, hogy a két belső lencse között  $\frac{f_2}{f_1}$  arányban, esetünkben  $\frac{1}{5}$ -öd részére szűkül össze. Ha a kezünket úgy rakjuk be a két belső lencse közé, hogy ez a szűk nyaláb a széttartott ujjaink

között át tud menni, akkor nem fog kitakarni semmit, és a teljes lencserendszeren át a hátteret látjuk. A 14. ábrán nemcsak a párhuzamos, hanem kis szögben érkező nyalábokat is tekintettünk, és szürkével rajzoltuk be azokat a tartományokat, ahová helyezett tárgyak nem fognak semmit kitakarni.



14. ábra



Az ünnepélyes eredményhirdetésre és díjkiosztásra 2024. november 22-én délután került sor az ELTE TTK Eötvös termében. Megemlékeztünk az 50 és 25 évvel ezelőtti Eötvös-versenyről, ismertettük az akkori feladatokat és a győztesek nevét. Az 50 évvel ezelőtt díjazottak közül *Vladár Károly* – aki az idei évtől a versenybizottság tagja – volt jelen, a 25 évvel ezelőttiek közül *Hegedűs Ákos*, *Gáspár Merse Előd* és *Terpai Tamás* – ők pár mondatban beszéltek a versennyel kapcsolatos emlékeikről és a pályafutásukról. A 75 évvel ezelőtti győztes *Holics László* és az 50 évvel ezelőtti II. díjas *Szép Jenő* néhány soros üdvözlötet küldött. Ezután következett a 2024. évi verseny feladatainak és megoldásainak bemutatása. Az 1. feladat megoldását *Vigh Máté*, a 2. feladatét *Vankó Péter*, a 3. feladatét *Széchenyi Gábor* ismertette.

Az esemény végén került sor az eredményhirdetésre. A díjakat *Ormos Pál*, az Eötvös Loránd Fizikai Társulat elnöke adta át.

I. díjat a versenybizottság nem adott ki.

Az első feladat helyes, a második feladat lényegében helyes megoldásáért és a harmadik feladatban elért részeredményért *második díjat* nyert **Bencz Benedek**, a Baár-Madas Református Gimnázium, Általános Iskola és Kollégium 12. osztályos tanulója, *Horváth Norbert* tanítványa.

A második feladat helyes megoldásáért és a másik két feladatban elért részeredményekért *harmadik díjat* nyert **Téti Miklós**, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 11. osztályos tanulója, *Schramek Anikó* tanítványa.

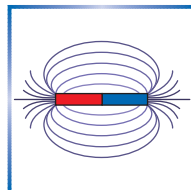
Egy feladat lényegében helyes megoldásáért és kisebb részeredményekért *dicséretet* kapott **Iliás Gergely**, az ELTE fizika BSc szakos hallgatója, aki a Jedlik Ányos Gimnáziumban érettségizett *Radnai Tamás* tanítványaként, **Masa Barnabás**, a Szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium 12. osztályos tanulója, *Csányi Sándor* tanítványa, valamint **Tóth Kolos Barnabás**, a Budapest V. Kerületi Eötvös József Gimnázium 11. osztályos tanulója, *Varga Balázs* tanítványa.

A második díjjal az *Andersen Adótanácsadó Zrt.* és a *Nanorobot Vagyonkezelő Kft.* adományából 90 ezer forint, a harmadik díjjal 60 ezer, a dicsérettel 40 ezer

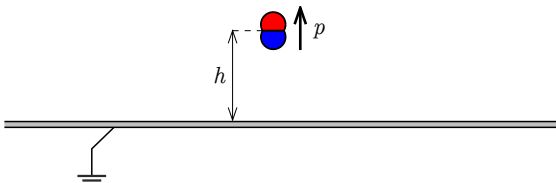
forint pénzjutalom járt. A díjazottak tanárai könyvutalványt kaptak. Gratulálunk a díjazottaknak, köszönjük az adományozók önzetlen támogatását!

Széchenyi Gábor, Vankó Péter, Vigh Máté, Vladár Károly

## Fizika feladatok megoldása



**P. 5575.** Nagy méretű, földelt fémlap felett  $h$  magasságban egy kicsiny elektromos dipólust helyezünk el. Mindezt úgy tesszük, hogy annak  $\mathbf{p}$  dipólmomentuma az ábrán



látott módon felfelé mutasson. Határozzuk meg a fémlapon azon pontok helyét, ahol a felületi töltéssűrűség zérus!

(5 pont)

Közli: Németh Róbert, Budapest

**Megoldás.** A dipólus felépíthető két töltésből, amelyek nagysága  $q$ , illetve  $-q$ , és  $\ell$  távolságra vannak egymástól. Ekkor  $p = q\ell$  (miközben  $q \rightarrow \infty$  és  $\ell \rightarrow 0$ ). Mivel a dipólmomentum az ábrán felfele mutat, így tudjuk, hogy a pozitív töltés  $h + \ell/2$ , a negatív töltés  $h - \ell/2$  távolságra van a fémlaptól. Mivel a fémlap le van földelve, az elektromos potenciál a teljes felületen 0. Így a fémlapot helyettesíthetjük tükröttöltésekkel, amelyek ebben az esetben szintén egy dipólust alkotnak. Ezt a valódi dipólus fémlapra való tükrözésével kapjuk meg, de a töltések előjelét is fel kell cserélni, így végül ugyanolyan állású lesz, mint az eredeti.

A Gauss-törvény alapján a fémlapon:

$$\sigma(r) dA = -\varepsilon_0 E(r) dA,$$

ahol  $r$  a fémlap dipólushoz legközelebbi pontjától mért távolság,  $dA$  pedig a fémlap egy kicsiny felületeleme. (Mivel csak a távolságtól függ a töltéssűrűség, így a keresett pontok mértani helye egy kör.) A szuperpozíció elve alapján:

$$E(r) = E_+(r) + E_-(r),$$

ahol

$$E_+(r) = 2 \frac{q \left( h + \frac{\ell}{2} \right)}{4\pi\varepsilon_0 \left( r^2 + \left( h + \frac{\ell}{2} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}}}$$

és

$$E_-(r) = 2 \frac{-q \left(h - \frac{\ell}{2}\right)}{4\pi\epsilon_0 \left(r^2 + \left(h - \frac{\ell}{2}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

az eredeti pozitív töltés és annak a tükörtöltése, illetve az eredeti negatív töltés és annak tükörtöltése által létrehozott télerősségek. Ebből

$$\sigma(r) = \frac{q}{2\pi} \left( \frac{h - \frac{\ell}{2}}{\left(r^2 + \left(h - \frac{\ell}{2}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{h + \frac{\ell}{2}}{\left(r^2 + \left(h + \frac{\ell}{2}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \right).$$

$\sigma(r) = 0$ , ha

$$\begin{aligned} \frac{h - \frac{\ell}{2}}{\left(r^2 + \left(h - \frac{\ell}{2}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} &= \frac{h + \frac{\ell}{2}}{\left(r^2 + \left(h + \frac{\ell}{2}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}, \\ \left(h - \frac{\ell}{2}\right)^2 \left(r^2 + \left(h + \frac{\ell}{2}\right)^2\right)^3 &= \left(h + \frac{\ell}{2}\right)^2 \left(r^2 + \left(h - \frac{\ell}{2}\right)^2\right)^3, \\ h^2 \left(1 - \frac{\ell}{2h}\right)^2 \left(r^2 + h^2 \left(1 + \frac{\ell}{2h}\right)^2\right)^3 &= h^2 \left(1 + \frac{\ell}{2h}\right)^2 \left(r^2 + h^2 \left(1 - \frac{\ell}{2h}\right)^2\right)^3. \end{aligned}$$

Egyszerűsítünk  $h$ -val, és felhasználjuk, hogy  $(1+x)^n \approx 1+nx$ , ha  $x \ll 1$ :

$$\begin{aligned} (h-\ell)(r^2+h^2+h\ell)^3 &= (h+\ell)(r^2+h^2-h\ell)^3, \\ (h-\ell)(r^2+h^2)^3 \left(1 + \frac{h\ell}{r^2+h^2}\right)^3 &= (h+\ell)(r^2+h^2)^3 \left(1 - \frac{h\ell}{r^2+h^2}\right)^3. \end{aligned}$$

Az  $(r^2+h^2)^3$  tényezővel egyszerűsítve, és a fenti közelítést ismét alkalmazva, majd rendezve:

$$\begin{aligned} (h-\ell) \left(1 + \frac{3h\ell}{r^2+h^2}\right) &= (h+\ell) \left(1 - \frac{3h\ell}{r^2+h^2}\right), \\ \frac{6h^2\ell}{r^2+h^2} &= 2\ell, \\ r &= \sqrt{2}h. \end{aligned}$$

A keresett pontok tehát egy  $\sqrt{2}h$  sugarú körön helyezkednek el, amelynek középpontja a dipólus fémlapra vett merőleges vetülete.

*Kiss Adorján Timon* (Kaposvári Táncsics M. Gimn., 11. évf.)

12 dolgozat érkezett. Helyes 7 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 2, hiányos (1 pont) 3 dolgozat.

**P. 5589.** Egyenes pályán állandó gyorsulással mozgó gépkocsi az  $s_1 = 25$  m hosszúságú pályaszakaszt  $t_1 = 2$  s idő alatt, az utána következő  $s_2 = 15$  m hosszú pályaszakaszt  $t_2 = 3$  s idő alatt teszi meg.

a) Mekkora a jármű gyorsulása?

b) Mekkora a jármű sebessége az első pályaszakasz elején és a második pályaszakasz végén?

(4 pont)

Közli: Holics László, Budapest

**I. megoldás.** a) A kocsi az első szakaszon  $t_1 = 2$  s alatt  $s_1 = 25$  m utat tesz meg, a másodikon  $t_2 = 3$  s alatt  $s_2 = 15$  m-t. Mivel az első szakasz hosszabb, mint a második, és az autó mégis rövidebb idő alatt teszi meg, a jármű lassul, állandó gyorsulása  $a < 0$ . A kezdeti sebessége legyen  $v_0$ , így az első szakaszra:

$$(1) \quad s_1 = v_0 t_1 - \frac{|a|}{2} t_1^2.$$

A szakasz végén a sebessége  $v_0 - |a|t_1$ , a második szakaszra tehát:

$$(2) \quad s_2 = (v_0 - |a|t_1)t_2 - \frac{|a|}{2} t_2^2 = v_0 t_2 - |a|t_1 t_2 - \frac{|a|}{2} t_2^2.$$

$v_0$ -t az (1) és (2) egyenletekből is kifejezve, és a kettőt egymással egyenlővé téve:

$$\frac{s_1 + \frac{|a|}{2} t_1^2}{t_1} = \frac{s_2 + |a|t_1 t_2 + \frac{|a|}{2} t_2^2}{t_2},$$

amiből az adatok behelyettesítése után:

$$|a| = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad \text{és} \quad a = -3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

b) A gyorsulás ismeretében az (1) egyenletből a jármű kezdeti sebessége:

$$v_0 = \frac{s_1 + \frac{|a|}{2} t_1^2}{t_1} = 15,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

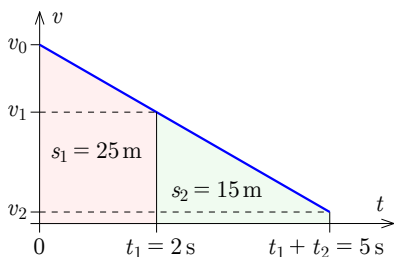
Az autó összesen  $t_1 + t_2$  ideig mozgott állandó lassulással, így a második szakasz végén a sebessége:

$$v_2 = v_0 - |a|(t_1 + t_2) = 0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

A 3 lóerő csapat: Vigh István Csaba, Török Tibor, Halmosi Dávid  
(Szegedi Radnóti M. Kísérleti Gimn., 10. évf.)

**II. megoldás.** Mivel az első szakaszon rövidebb idő alatt hosszabb utat tesz meg a gépkocsi, mint a másodikon, feltételezhetjük, hogy egyenletesen lassuló mozgást végez.

Legyen az első pályaszakasz kezdetén a sebessége  $v_0$ , az első pályaszakasz végén (így egyúttal a második pályaszakasz elején)  $v_1$ , a második pályaszakasz végén pedig  $v_2$ . Ábrázoljuk a gépkocsi mozgását sebesség-idő grafikonon.



A grafikon alatti terület a megtett utat adja, amit a trapéz területére ismert képlet segítségével számíthatunk ki:

$$\frac{v_0 + v_1}{2} t_1 = s_1,$$

$$\frac{v_1 + v_2}{2} t_2 = s_2.$$

A két egyenletből  $v_1$  kiküszöbölése és az adatok behelyettesítése után:

$$(3) \quad v_0 - v_2 = 15 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

A gyorsulás a vizsgált mozgás kezdő- és végpontja között:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_0}{t_1 + t_2} = -3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

b) Most nézzük a nagy trapéz területét, azaz a teljes vizsgált időtartam alatt megtett utat egyben:

$$\frac{v_0 + v_2}{2} (t_1 + t_2) = s_1 + s_2,$$

amiből (3) és a megadott adatok felhasználásával a kezdeti- és végsebesség:

$$v_0 = 15,5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \text{és} \quad v_2 = 0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Ellenőrzésként az első pályaszakasz végén a jármű sebessége:

$$v_1 = v_0 + at_1 = 9,5 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

amiből

$$s_1 = \frac{v_0 + v_1}{2} t_1 = 25 \text{ m} \quad \text{és} \quad s_2 = \frac{v_1 + v_2}{2} t_2 = 15 \text{ m}$$

adódik, tehát az adatok valóban egy egyenletesen lassuló mozgást írnak le.

*Klement Tamás* (Pécsi Leőwey Klára Gimn., 12. évf.)

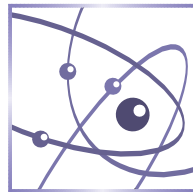
90 dolgozat érkezett. Helyes 54 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 20, hiányos (1–2 pont) 15, hibás 1 dolgozat.

### Helyreigazítás

A 2024. decemberi számban a **P. 5565.** feladat megoldásának végéről (az 591. oldalon) a nyomtatott változatban kimaradt a következő megjegyzés, amelyet most pótlólag közlünk. A hibáért elnézést kérünk.

*Megjegyzés.* Egy láncot kétféleképpen is modellezhetünk. Ha a felső végei kicsit távolabb vannak egymástól, és a lánc nagyon hajlékony, a láncban végig húzófeszültség lesz, és így a leeső rész gyorsulása  $g$ -nél nagyobb lehet. Ilyenkor a rendszer konzervatív. Ha a láncot közelítjük az egydimenziós esethez, elromlik a konzervativitás, a kanyarulatnál lévő láncszemek rugalmatlanul ütköznek, egy-egy láncszem impulzusa hirtelen nullává válik, és ez rántja meg a már nem mozgó részt. A feladat megoldása ezt a második értelmezést követi: az energia disszipálódik, a leeső láncdarab feszültségmentes, és így szabadon esik.

## Fizikából kitűzött feladatok



**M. 437.** Kérjük meg egy társunkat, hogy sétáljon lassan, mozogjon átlagos sebességgel, illetve haladjon gyorsjárással. Ezekről a mozgásokról készítsünk (például mobiltelefonnal) lassított felvételt, majd a felvételt elemezve állapítsuk meg, hogy a mozgás alatt az idő hány százalékában volt a sétáló társunk mindkét talpa a talajon!

(6 pont)

Közli: *Honyek Gyula*, Veresegyház

**G. 873.** Egy labdát feldobunk  $v_0$  sebességgel. Amikor a tetőpontra ér, egy újabb labdát dobunk fel szintén  $v_0$  sebességgel. Hogyan változik a két labda relatív sebessége az időben? Mikor és hol találkoznak a labdák?

(3 pont)

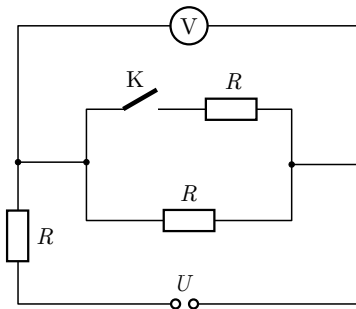
**G. 874.** Egy teherautóra  $M = 3$  tonna szenet kell felrakni. A szén az autótól  $L = 20$  m távolságra van. A rakodáshoz két  $L = 20$  m hosszú szállítószalag vehető igénybe. Az egyik szalag másodpercenként  $m_1 = 10$  kg szenet tud szállítani  $v_1 = 1$  m/s sebességgel, a másik  $m_2 = 15$  kg szenet  $v_2 = 0,5$  m/s sebességgel. Mennyi idő alatt lehet a szenet a leggyorsabban felrakni a teherautóra?

(4 pont)

**G. 875.** Amikor egy egyenes vonalzót a végétől 15 cm-re támasztunk alá, akkor a vonalzó a végétől 5 cm-re elhelyezett két egyforma pénzérmével egyensúlyozható ki. Amikor az alátámasztást a végétől 10 cm-re helyezzük el, akkor az előbbi helyen 6 pénzérmére van szükség a kiegyensúlyozáshoz. Milyen hosszú a vonalzó?

(4 pont)

**G. 876.** Az ábrán látható voltmérő a K kapcsoló zárása után 5 V-tal kisebb feszültséget jelez, mint nyitott állás esetén. Mekkora az  $U$  feszültség, ha  $R = 2,4 \Omega$ ?



(3 pont)



**P. 5616.** Egy róka állandó  $v_1$  sebességgel, egyenes vonal mentén fut. Üldözőbe veszi őt egy kutya, amelynek sebessége állandó  $v_2$  nagyságú, iránya pedig mindig a róka felé mutat. Egy adott pillanatban, amikor a róka és a kutya távolsága  $d$ , a két sebesség éppen egymásra merőleges. Mekkora a kutya gyorsulása ebben a pillanatban?

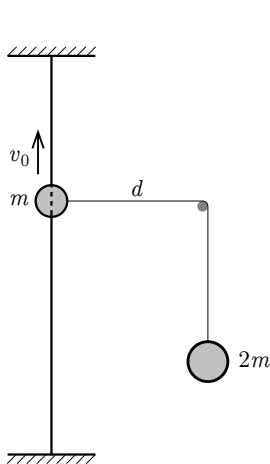
(5 pont)

Közli: Baranyai Klára, Veresegyház

**P. 5617.** Egy  $30^\circ$ -os hajlásszögű, 1 m magasságú, súrlódásmentes lejtő alján egy kis test nyugszik. A lejtőt vízszintesen  $7 \text{ m/s}^2$  gyorsulással mozgatni kezdjük. Mennyi idő múlva kerül a test a lejtő tetejére?

(4 pont)

Példatári feladat nyomán



**P. 5618.** Egy  $m$  tömegű gyöngyöt fűztünk egy elegendően hosszú, függőleges helyzetű, rögzített, feszes drótra, amelyhez egy fonalat erősítettünk. A fonalat, az *ábra* szerint egy vízszintes rúdon átvetettünk, és függőleges darabjának végéhez egy kicsiny,  $2m$  tömegű nehezéket rögzítettünk. A rúd a dróttól  $d$  távolságra van. A gyöngyhöz kapcsolódó fonalszál vízszintes helyzetében a gyöngynek felfelé mutató,  $v_0 = \sqrt{2gd}$  nagyságú kezdősebességet adunk.

a) A gyöngy legfelső helyzetének a kiindulási ponttól való távolsága legyen  $f$ , a legalsó helyzetének a kiindulási ponttól való távolsága pedig  $\ell$ . Mekkora az  $\ell/f$  hányados?

b) Mekkora a fonálban ébredő erő a gyöngy legfelső helyzetében és a kiindulási ponton való áthaladáskor?

(A súrlódás mindenhol elhanyagolható.)

(5 pont)

Közli: Zsigri Ferenc, Budapest

**P. 5619.** A Föld felszínéről függőlegesen felfelé az első kozmikus sebességgel elindítunk egy űrszondát.

a) Milyen magasra emelkedik a szonda?

b) Mennyi idő múlva esik vissza a földre?

A légellenállástól és a Föld forgásától tekintsünk el.

(Segítség: *Mesterséges égitestek mozgásával kapcsolatos problémák és feladatok* c. cikk a honlapon.)

(5 pont)

Közli: Gnädig Péter, Vácduka

**P. 5620.** Egy egyatomos gáz állandó térfogaton vett fajhője  $316 \frac{\text{J}}{\text{kgK}}$ , egy kétatomos gázé  $741 \frac{\text{J}}{\text{kgK}}$ . Mi lehet a két gáz?

(3 pont)

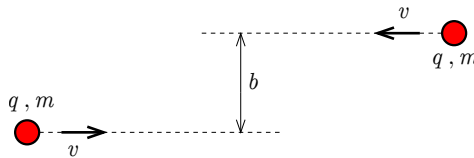
Közli: *Holics László*, Budapest

**P. 5621.** Egy homorú-domború lencse  $-1$  dioptriás. Mekkora a lencse homorú oldalának görbületi sugara, ha a lencsét domború felével lefelé vízszintesen tartva, továbbá a homorú felébe vizet öntve  $+1$  dioptriás leképező eszközt kapunk? Mekkora a domború oldal görbületi sugara, ha a lencse  $1,6$ -os törésmutatójú üvegből készült?

(4 pont)

Közli: *Honyek Gyula*, Veresegyház

**P. 5622.** Vízszintes, súrlódásmentes, szigetelő asztallapon egymástól távol két  $q$  töltésű,  $m$  tömegű, kis méretű, szigetelő korong található. Kezdetben ellentétes irányú,  $v$  nagyságú sebességgel mozogva közelednek. Ha nem lenne töltésük, az *ábra* szerinti, egymástól  $b$  távolságra lévő egyenesek mentén mozognának. Mekkora lesz a mozgás során a két korong minimális sebessége?



(5 pont)

Közli: *Németh Róbert*, Budapest

**P. 5623.** Mekkora állandó sebességgel kellene elutazni egy távoli csillaghoz, ha azt szeretnénk, hogy az űrhajósok az út során annyi évet öregedjenek, ahány fényév távolságra van a csillag?

(4 pont)

Közli: *Széchenyi Gábor*, Budapest

**P. 5624.** Két egyforma, vékony rúd egy-egy végét csukló kapcsolja össze, amely körül szabadon elfordulhatnak. Kezdetben a két rúd egy egyenes mentén helyezkedik el, az egyik rúd áll, a másik rúd szabad vége valamekkora sebességgel mozog. A rudak a súlytalanság állapotában szabadon mozoghatnak, nem hat rájuk semmilyen külső erő, és a súrlódás is elhanyagolható. Mekkora a mozgás során a két rúd által bezárt legkisebb szög?

(6 pont)

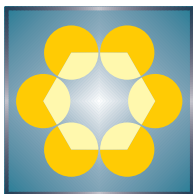
A 2018. évi EuPhO 1. feladata nyomán



**Beküldési határidő: 2025. február 15.**

**Elektronikus munkafüzet:** <https://www.komal.hu/munkafuzet>





# MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL FOR SECONDARY SCHOOLS (Volume 75. No. 1. January 2025)

## Problems in Mathematics

**New exercises for practice – competition K** (see page 32): **K. 839.** How many squares can be drawn in the diagram following the grid lines that contain at least one of the small black squares? (See figure on page 32.) **K. 840.** The digital digits are made of small hexagons. For 0 we need six hexagons, for 1 we need two, for 2 we need five etc. (see the *diagram* on page 32). How many pairs of consecutive positive integers are there the representation of which using digital digits contain the same number of hexagons? **K. 841.** We celebrate the 125<sup>th</sup> anniversary of writer István Fekete's birth on 2025.01.25 (YYYY.MM.DD). Number 20250125 is not divisible by 11, and gives a remainder of 2 when divided by 3. How many numbers can be obtained by rearranging the digits of this number that are divisible by 11 and give a remainder of 2 when divided by 3 just as well? **K/C. 842.** How many non-empty subsets of set  $H = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$  are there where the sum of the elements is even? **K/C. 843.** Let  $ABC$  be an isosceles right triangle. Let  $D$  be a point on the extension of leg  $AB$  beyond  $B$  satisfying  $BD = AB$ . Let  $E$  denote the midpoint of leg  $AC$ , and let line segment  $ED$  intersect hypotenuse  $BC$  in  $F$ . Find the ratio of the areas of triangles  $AED$  and  $FEC$ .

**New exercises for practice – competition C** (see page 33): **Exercises up to grade 10:** **K/C. 842.** See the text at Exercises **K.** **K/C. 843.** See the text at Exercises **K.** **Exercises for everyone:** **C. 1838.** We have written numbers 1, 2, 3, ..., 2024, 2025 on the blackboard. Farkas and Piroška take turns deleting the numbers from the blackboard until only two numbers remain on the blackboard. Piroška wins if the sum of the last two numbers is divisible by 11. How can Piroška win this game, if she starts the game? (Based on a German competition problem) **C. 1839.** Two parallel lines and two points,  $A$  and  $B$  on one of them are given. Construct the midpoint of line segment  $AB$  with only a straightedge. **C. 1840.** Let  $-20.25 < K < 0$ . Solve the following system of equations for real numbers:  $x + y + z = K$ ,  $x^3 + y^3 + z^3 = 1$ ,  $xyz = -2024$ . (Proposed by: *Erzsébet Berkó*, Szolnok)

**Exercises upwards of grade 11:** **C. 1841.** In the convex quadrilateral  $PQRS$ ,  $QR = 4$ ,  $RS = 6$ ,  $SP = 5$ , and the internal angles at vertices  $P$  and  $Q$  are  $60^\circ$ . Knowing that  $2PQ = a + \sqrt{b}$ , where  $a$  and  $b$  are positive integers, find the value of sum  $a + b$ . (Australian competition problem) **C. 1842.** Solve equation  $9^x + (6x - 23) \cdot 3^x + 5x^2 - 39x + 76 = 0$  for real numbers. (Proposed by: *Mihály Bencze*, Brasov)

**New exercises – competition B** (see page 34): **B. 5430.** At most how many positive integers can be written on the circumference of a circle such that the product of any two neighbouring numbers is less than 2025? (3 points) (Proposed by: *Attila Sztranyák*, Budapest) **B. 5431.** Let  $k$  denote the incircle of triangle  $ABC$ , and let  $I$  denote its center. Line  $AI$  intersects circle  $k$  in points  $D$  and  $E$  such that  $D$  is closer to  $A$  than  $E$ . Let  $k$  be tangent to  $AC$  at  $F$ . Let the tangent of  $K$  at point  $E$  intersect  $AC$  at  $G$ . Prove that  $GI$  is parallel to  $FD$ . (3 points) (Proposed by: *Márton Lovas*, Budakalász) **B. 5432.** Is it possible to find real numbers  $a$ ,  $b$  and  $c$  such that none of the functions below has a root?  $p_1(x) = ax^2 - (b^2 + 1)x + c$ ,  $p_2(x) = bx^2 - (c^2 + 1)x + a$ ,  $p_3(x) = cx^2 - (a^2 + 1)x + b$ . (4 points) (Based on an idea of *Ildikó Kámán*, Budapest) **B. 5433.** Prove that in any pyramid with a quadrilateral base the line segments connecting the centroids of the triangular faces to

the midpoints of the opposite edges of the base are concurrent. (4 points) (Proposed by: *Géza Kiss, Csömör*) **B. 5434.** For which positive integers  $m > 1$  does there exist polynomial  $f(x)$  with integer coefficients such that exactly one of  $k$  and  $f(k)$  is divisible by  $m$ ? (5 points) (Proposed by: *Bálint Hujter, Budapest* and *Géza Kós, Budapest*) **B. 5435.** The incircle of triangle  $ABC$  is tangent to the sides  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  at  $D$ ,  $E$ ,  $F$ , respectively. Let  $P$  be the point on the segment  $AD$  for which  $2 \cdot AP = PD$ , and define points  $Q$ ,  $R$  on the segments  $BE$  and  $CF$ , respectively in a similar manner. Show that at least one of the points  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  lies on or inside the incircle. (5 points) (Proposed by: *Márton Lovas, Budakalász*) **B. 5436.** Let  $p$  be an odd prime. Let  $d_k(n)$  denote the number of positive divisors of  $n$  with remainder  $k$  modulo  $p$  ( $0 \leq k < p$ ). Let  $A \subseteq \{0, 1, \dots, p-1\} = S$  satisfy  $\sum_{k \in A} d_k(n) \geq \sum_{j \in S \setminus A} d_j(n)$  for every positive integer  $n$ . Find the minimum number of elements of  $A$ . (6 points) (Proposed by: *Márton Lovas, Budakalász*) **B. 5437.** Let  $ABC$  be a triangle satisfying  $BC < AC$ , and let  $D$  be a point on side  $AC$  satisfying  $BC = DC$ . Let circle  $\Gamma$  be tangent to arc  $AC$  not containing  $B$  of the circumcircle of  $ABC$  at point  $X$ , and to line segment  $AC$  at  $D$ . Let the tangent line from  $B$  to  $\Gamma$  that is closer to  $C$  intersect  $AC$  at  $Y$ , and be tangent to  $\Gamma$  at  $Z$ . Prove that if  $A$ ,  $Y$ ,  $X$  and the circumcenter of triangle  $ABC$  are concyclic, then  $AZ = CZ$ . (6 points) (Proposed by: *Márton Lovas, Budakalász*)

**New problems – competition A** (see page 35): **A. 896.** Marine biologists are studying a new species of shellfish whose first generation consists of 100 shellfish, and their colony reproduces as follows: if a given generation consists of  $N$  shellfish (where  $5 \mid N$  always holds), they divide themselves into  $N/5$  groups of 5 shellfish each. Each group collectively produces 15 offspring, who form the next generation. Some of the shellfish contain a pearl, but a shellfish can only contain a pearl if none of its direct ancestors contained a pearl. The value of a pearl is determined by the generation of the shellfish containing it: in the  $n$ -th generation, its value is  $1/3^n$ . Find the maximum possible total value of the pearls in the colony. (Proposed by: *Csongor Beke, Cambridge*) **A. 897.** Let  $O$  denote the origin and let  $\gamma$  be the circle with center  $(1,0)$  and radius 1 in the Cartesian system of coordinates. Let  $\lambda$  be a real number from the interval  $(0,2)$ , and let the line  $x = \lambda$  intersect the circle  $\gamma$  at points  $P$  and  $Q$ . The lines  $OP$  and  $OQ$  intersect the line  $x = 2 - \lambda$  at the points  $P'$  and  $Q'$ , respectively. Let  $\mathcal{G}$  denote the locus of such points  $P'$  and  $Q'$  as  $\lambda$  varies over the interval  $(0,2)$ . Prove that there exist points  $R$  and  $S$  different from the origin in the plane such that for every  $A \in \mathcal{G}$  there exists a point  $A'$  on line  $OA$  satisfying  $A'R^2 = (A'S - OS)^2 = A'A \cdot A'O$ . (Proposed by: *Áron Bán-Szabó, Budapest*) **A. 898.** Let  $n$  be a given positive integer. Ana and Bob play the following game: Ana chooses a polynomial  $p$  of degree  $n$  with integer coefficients. In each round, Bob can choose a finite set  $S$  of positive integers, and Ana responds with a list containing the values of the polynomial  $p$  evaluated at the elements of  $S$  with multiplicity (sorted in increasing order). Determine, in terms of  $n$ , the smallest positive integer  $k$  such that Bob can always determine the polynomial  $p$  in at most  $k$  rounds. (Proposed by: *Andrei Chirita, Cambridge*)

## Problems in Physics

(see page 59)

**M. 437.** Ask one of your friends to walk slowly, walk at a normal speed or move at a fast pace. Take a slow-motion video of these movements (e.g., with a mobile phone) and analyse the video to see what percentage of the time both feet were on the ground during the motion.

**G. 873.** A ball is thrown up at speed  $v_0$ . When it reaches the top, another ball is thrown up, also at  $v_0$ . How does the relative speed of the two balls change over time? When and where do the balls meet? **G. 874.** A truck needs to be loaded with  $M = 3$  ton of coal. The coal is at a distance of  $L = 20$  m from the truck. Two conveyor belts of length  $L = 20$  m can be used for loading. One conveyor belt can transport  $m_1 = 10$  kg of coal in a second at a speed of  $v_1 = 1$  m/s, the other can transport  $m_2 = 15$  kg of coal in each second at a speed of  $v_2 = 0.5$  m/s. What is the minimum time to load the coal onto the truck? **G. 875.** When the straight ruler is supported 15 cm from one of its end, the ruler can be balanced by two alike coins placed 5 cm from that end. When the support is placed 10 cm from the end, 6 coins are needed to balance the ruler at the former location. How long is the ruler? **G. 876.** The voltmeter shown *in the figure* reads 5 V less after closing switch  $K$  than in the case when the switch is open. What is the voltage  $U$  if  $R = 2.4\ \Omega$ ?

**P. 5616.** The fox runs along a straight line at a constant speed  $v_1$ . He is chased by the dog, whose speed is constant  $v_2$  and whose direction is always towards the fox. At a given instant, when the distance between the fox and the dog is  $d$ , the two velocities are exactly perpendicular to each other. What is the acceleration of the dog at this instant?

**P. 5617.** A small body rests at the bottom of a frictionless slope. The slope has an angle of inclination of  $30^\circ$  and a height of 1 m. The slope is moved horizontally with an acceleration of  $7\text{ m/s}^2$ . How long does it take for the body to reach the top of the slope?

**P. 5618.** A bead with weight  $m$  was strung on a long enough fixed, taut, vertical wire to which a piece of yarn was attached. The yarn was laid over a horizontal rod as shown *in the figure*, and a small weight of mass  $2m$  was attached to its vertically hanging end. The rod is at a distance  $d$  from the wire. When the yarn attached to the bead is in the horizontal position, the bead is given an initial upward velocity of  $v_0 = \sqrt{2gd}$ . *a)* Let the distance of the top point of the path of the bead from its starting point be  $f$ , and the distance of the bottom point of the path from the starting point be  $\ell$ . What is the quotient  $\ell/f$ ? *b)* What is the tension in the yarn when the bead is at the topmost position and when the bead passes the initial position? (Friction is negligible everywhere.)

**P. 5619.** A space probe is launched vertically upwards from the Earth's surface at the orbital speed. *a)* How high does the probe go? *b)* How long will it take to fall back to Earth? Neglect air resistance and the rotation of the Earth. Hint: see the article titled *Mesterséges égitestek mozgásával kapcsolatos problémák és feladatok* on the website (only in Hungarian). **P. 5620.** The specific heat capacity at constant volume of a sample of monatomic gas is  $316\ \frac{\text{J}}{\text{kgK}}$ , that of a sample of a diatomic gas is  $741\ \frac{\text{J}}{\text{kgK}}$ . What can these two gases be?

**P. 5621.** A concave-convex lens has a power of  $-1$  dioptré. What is the radius of curvature of the concave side of the lens if, by holding the lens horizontally with the convex side downwards and pouring water into the concave side, we obtain an optical system with a power of  $+1$  dioptré? What is the radius of curvature of the convex side if the lens is made of glass which has a refractive index of 1.6?

**P. 5622.** Two small insulating disks of mass  $m$  and of charge  $q$  are placed far apart on a horizontal, frictionless, insulating table top. They move initially in opposite directions, travelling at a speed of  $v$ . If they had no charge, they would move along the lines at a distance of  $b$ , as shown *in the figure*. What will the minimum velocity of the two discs be during their motion?

**P. 5623.** At what constant speed should a spacecraft travel to a distant star if the astronauts are to age the same number of years as the distance to the star in light years? **P. 5624.** Two identical, thin rods are connected at one end by a hinge, around which they are free to turn. Initially the two rods are positioned along a straight line, one rod is stationary, and the free end of the other rod moves at some speed. The rods are free to move in a state of weightlessness, with no external forces acting on them and also friction is negligible. What is the minimum angle between the two rods during their further motions?

## Képek a 2024. évi Eötvös Loránd Fizikaversenyről (október 11-én) és az eredményhirdetésről (november 22.)



A versenyzők az ELTE Konferenciatermében



balról jobbra: Ormos Pál (az Eötvös Loránd Fizikai Társulat elnöke),  
Bencz Benedek (a verseny győztese),  
Horváth Norbert (Bencz Benedek tanára) és  
Vankó Péter (a versenybizottság elnöke)



A verseny díjazottjai (balról jobbra):  
Iliás Gergely, Masa Barnabás, Bencz Benedek,  
Téti Miklós, Tóth Kolos Barnabás



Feladatismertetés a díjkiosztón





Csatár Katalin  
matematika



Csordásné Szécsi Jolán  
matematika



Chikán Éva  
fizika



Pálovics Róbert  
fizika



Rátz Tanár Úr  
Életműdíj 2024



Baranyi Ilona  
kémia



Dr. Miklós Endréné  
kémia



Dr. Krizsánné  
Józsa Piroska  
biológia



Kerényi Zoltán  
biológia