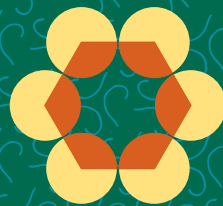
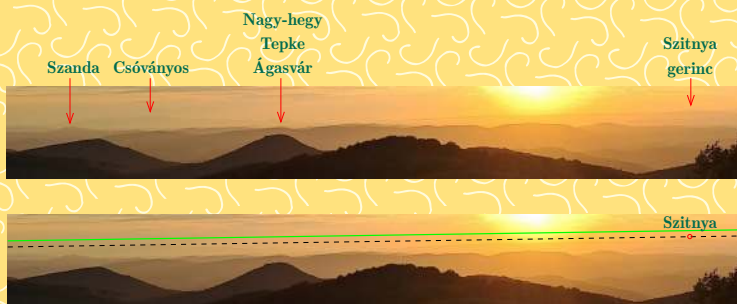


Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok

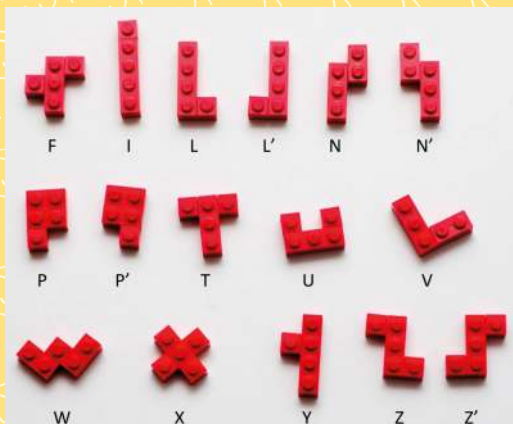
Informatika rovattal



Képek a Föld sugarának méréséről szóló cikkhez



LEGO-pentominók



Beszámoló a 2024. évi Kürschák József matematika
versenyről | 44 szimmetriakereső feladvány LEGO-ból |

Matematika és fizika feladatok megoldásai |

Mérés tájképről | Matek az utcán 2025

75. évfolyam
2. szám

2025.
február

KÖMAL



A januári ördöglakat feladványok megoldásai

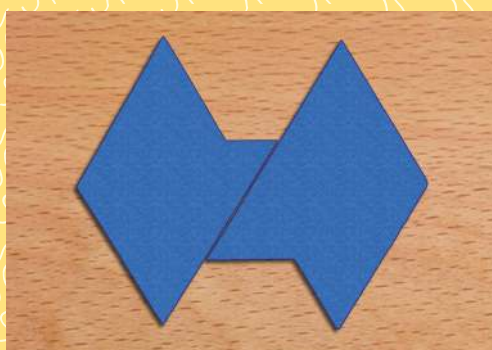
Unicum



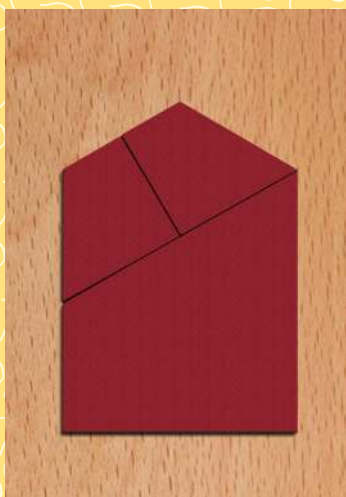
EX 3



Symmetrick



Traple



Matek az Utcán 2025-ben is!

2025. március 8-án szombaton 10–13 óráig ismét lesz Matek az Utcán a Bolyai János Matematikai Társulat szervezésében (itt olvasható a beszámoló a 2023-as és a 2024-es eseményekről). Idén a Matematika Nemzetközi Világnapja (π -nap, március 14.) témája a matematika, a művészetek és a kreativitás kapcsolata, illetve mivel idén a π -napot megelőző szombaton tartjuk a budapesti rendezvényt a Blaha Lujza téren, ami nőnapra esik, így a nők a matematikában témát is szeretettel ajánljuk!

A program célja, hogy az utca emberét bevonjuk érdekes matematikai tevékenységekbe szabadtéri helyszíneken szerte az országban. Hogy milyen helyszíneken és milyen programmal, az az önkénteseken múlik. Ha szívesen lennél önkéntes bármilyen településen akár csak egy órára, jelentkezz elköteleződés nélkül ezen az úrlapon. Az önkéntesek részt vehetnek programok előkészítésében, segíthetnek más által előkészített tevékenységben, vagy vezethetnek saját tevékenységet is.

Folyamatosan frissülő információkat a honlapunkon (www.bolyai.hu) és a Facebook oldalunkon (www.facebook.com/bolyaitarsulat) találhattok!

Köszönettel: Dr. Barbarics Márta

Bolyai János Matematikai Társulat | appx.bolyai@gmail.com



KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK

INFORMATIKA ROVATTAL BŐVÍTVE

ALAPÍTOTTA: **ARANY DÁNIEL** 1894-ben

75. évfolyam 2. szám

Budapest, 2025. február

Megjelenik évente 9 számban, januártól májusig és szeptembertől decemberig havonta. ÁRA: 1450 Ft

TARTALOMJEGYZÉK	
Jelentés a 2024. évi Kürschák József Matematikai Tanulóversenyéről.....	66
A 2024. évi Kürschák József Matematikai Tanulóverseny feladatainak megoldásai.....	68
<i>Bozóki Sándor, Gál Péter</i> : Rejtvények, ördöglovakok – 44 szimmetriakereső feladvány LEGO-ból.....	72
<i>Trembeczki Csaba</i> : Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire.....	74
<i>Orosz Gyula</i> : Megoldásvázlatok a 2025./1. szám matematika gyakorló feladatsorához.....	78
Matematika feladatok megoldása (5404.).....	89
A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok (844–848.).....	93
A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (847–848., 1843–1847.).....	94
A B pontversenyben kitűzött feladatok (5438–5445.).....	95
Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (899–901.).....	96
Informatikából kitűzött feladatok (651–654.)..	97
<i>Varga Vázsony, Veres Gábor, Vankó Péter</i> : A Föld sugarának mérése egy tájképről.....	105
Mérési feladatok megoldása (433.).....	111
Fizika gyakorlatok megoldása (866.).....	113
Fizika feladatok megoldása (5591., 5592., 5595., 5597.).....	115
Fizikából kitűzött feladatok (438., 877–880., 5625–5633.).....	123
Problems in Mathematics.....	125
Problems in Physics.....	127
Főszerkesztő: KORÁNDI JÓZSEF Fizikus szerkesztő: VANKÓ PÉTER Műszaki szerkesztő: FRIED KATALIN Borító: BURGHARDT ZSUZSA Kiadja: MATFUND ALAPÍTVÁNY Alapítványi képviselő: KÓS RITA Felelős kiadó: KATONA GYULA Nyomda: OOK-PRESS Kft. Felelős vezető: SZATHMÁRY ATTILA INDEX: 25 450 ISSN 1215-9247 A matematika bizottság vezetője: HERMANN PÉTER Tagjai: BÁN-SZABÓ ÁRON, BÍRÓ BÁLINT, CZETT MÁTYÁS, GYENES ZOLTÁN, HUJTER BÁLINT, IMOLAY ANDRÁS, KISS GÉZA, KÓS GÉZA, KOZMA KATALIN ABIGÉL, LOVAS MÁRTON, ÖKÖRDI PÉTERNÉ, PACH PÉTER PÁL, PAULOVIKCS ZOLTÁN, RATKÓ ÉVA, SZTRANYÁK ATTILA, VÍGH VIKTOR A fizika bizottság tiszteletbeli elnöke: HOLICS LÁSZLÓ Vezetője: SZÉCHENYI GÁBOR Tagjai: BARANYAI KLÁRA, GNÄDIG PÉTER, HONYEK GYULA, OLOSZ BALÁZS, SZÁSZ KRISZTIÁN, VIGH MÁTÉ, VLADÁR KÁROLY, WOYNAROVICH FERENC Az informatika bizottság vezetője: SCHMIEDER LÁSZLÓ Tagjai: LÓCZI LAJOS, SIEGLER GÁBOR, TÓTH TAMÁS Fordítók: GYENES ZOLTÁN, TASNÁDI ANIKÓ Nyelvi korrektork: ANDICS ÁGNES Szerkesztőségi titkár: ONDINÉ SZABÓ SÁRA A szerkesztőség címe: 1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/C III. emelet 3.405. Telefon: +36 20 320-1143 A lap megrendelhető a https://komalujzag.myshoprenter.hu oldalon keresztül. Előfizetési díj egy évre: 12 000 Ft Kéziratokat nem őrzünk meg és nem küldünk vissza. Minden jog a KöMaL tulajdonosaié. E-mail: szerk@komal.hu Internet: http://www.komal.hu This journal can be ordered from the Editorial office: Pázmány Péter sétány 1/C III. emelet 3.405. 1117-Budapest, Hungary telephone: +36 20 320-1143 or on the Internet: https://komalujzag.myshoprenter.hu A Lapban megjelenő hirdetések tartalmáért felelősséget nem vállalunk.	



Jelentés a 2024. évi Kürschák József Matematikai Tanulóversenyéről

A Bolyai János Matematikai Társulat a 2024. évi Kürschák József Matematikai Tanulóversenyt október 18-án, közép-európai idő szerint 14 órai kezdettel rendezte meg a következő tizenkét helyszínen: Békéscsaba, Budapest, Cambridge, Debrecen, Kaposvár, Kecskemét, Miskolc, Nyíregyháza, Pécs, Szeged, Székesfehérvár és Veszprém.

A Társulat elnöksége a verseny lebonyolítására az alábbi bizottságot kérte fel: Biró András, Fleiner Tamás (elnök), Frenkel Péter, Harangi Viktor, Kós Géza, Kovács Benedek (titkár), Maga Péter, Pach Péter Pál és Tóth Géza. A bizottság szeptember 13-i ülésén a következő feladatokat tűzte ki:

1. Az $ABCD$ négyszöget olyan húrnégyszögekre bontottuk fel, amelyeknek páronként nincs közös belső pontjuk. A felbontásban szereplő húrnégyszögek csúcsai közül egy sem esik egy másik, felbontásbeli húrnégyszög oldalának vagy az $ABCD$ négyszög oldalának belsejébe. Bizonyítsuk be, hogy $ABCD$ is húrnégyszög.

2. Az ókori Egydimenziós Birodalom egy egyenes mentén helyezkedett el. Kezdetben nem voltak városok. Egyenként alapítottak összesen n különböző pontszerű várost; a másodiktól kezdve mindegyik újonnan alapított város és a hozzá legközelebbi, már létező város (ha két ilyen volt, akkor a régebbi) testvérvárossá nyilvánították egymást.

A birodalom fennmaradt térképén látszanak a városok és a köztük lévő távolságok, de alapításuk sorrendje nem. A történészek a térképből próbálnak arra következtetni, hogy mindegyik városnak legfeljebb 41 testvérvárosa volt.

(a) $n = 10^6$ esetén adjunk meg olyan térképet, amelyből ez a következtetés levonható.

(b) Igazoljuk, hogy $n = 10^{13}$ esetén ez a következtetés semmilyen térképből sem vonható le.

3. Legyen p prímszám és $H \subseteq \{0, 1, \dots, p-1\}$ nemüres halmaz. Tegyük fel, hogy minden $a \in H$ elemhez található olyan, a -tól különböző $b \in H$ és $c \in H$ elemek, amelyekre $b + c - 2a$ osztható p -vel. Mutassuk meg, hogy $p < 4^k$, ahol k a H halmaz elemeinek számát jelöli.

A bizottság a beérkezett dolgozatok átnézése után, december 6-i ülésén a következő jelentést fogadta el:

„A verseny minden helyszínen rendben zajlott le, 106 regisztrált versenyzőtől összesen 79 dolgozat érkezett be.

Az idei versenyen 28-an oldották meg az első feladatot kisebb-nagyobb hiánysággal. A második feladat esetén 39-en értek el érdemi eredményt a feladatnak

legalább az egyik részében. A harmadik feladat azonban sajnos minden résztvevő számára megoldhatatlannak bizonyult, még csak értékelhető részeredmény sem érkezett egyetlen versenyzőtől sem. Ennek megfelelően a bizottságnak idén nem volt könnyű dolga a díjak odaítélésekor. A sok közel egyforma teljesítményt nyújtó versenyző közötti differenciáláskor a szokásosnál sokkal többet számított, hogy mennyire világos és teljes a megoldás leírása, és a megoldásokban előforduló kisebb hiányosságokat idén a szokottnál jóval szigorúbban vettük figyelembe. A bizottság számára idén is komoly nehézséget okozott néhány dolgozat elolvasása.

Mindezek alapján a versenybizottság idén I. díjat nem ad ki.

Öt versenyző helyesen oldotta meg az első és a második feladatot, ezért

II. díjat és 15 000 Ft pénzjutalmat nyer

Holló Martin, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 11. osztályos tanulója (tanárai Hujter Bálint és Gyenes Zoltán),

Molnár István Ádám, a miskolci Földes Ferenc Gimnázium 12. osztályos tanulója (tanárai Dobos Sándor, Fejér Szabolcs, Győry Ákos, Grallert Krisztina, Kovács Benedek, Tóth Tibor és Vass Iván),

Simon László Bence, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium érettségizett tanulója, jelenleg a University of Cambridge hallgatója (tanárai Gyenes Zoltán, Kiss Géza, Hujter Bálint, Nagy Zoltán Lóránt, Surányi László és Borbényi Márton),

Szakács Ábel, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 11. osztályos tanulója (tanárai Hujter Bálint, Gyenes Zoltán, Terpai Tamás és Dobos Sándor), végül

Varga Boldizsár, a Békásmegyeri Veres Péter Gimnázium 12. osztályos tanulója (tanárai Holló Gábor, Dobos Sándor, Gyenes Zoltán és Surányi László).

Hat versenyző apró hiányosságoktól eltekintve helyesen oldotta meg az első két feladatot. Ezért a teljesítményért

III. díjban és fejenként 15 000 Ft pénzjutalomban részesül

Bodor Mátyás, a csíkszeredai Márton Áron Főgimnázium 12. osztályos tanulója (tanára Páll Olga),

Hodossy Réka, a Balassagyarmati Balassi Bálint Gimnázium 12. osztályos tanulója (tanára Hegedűs Csaba),

Kocsis Péter, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 11. osztályos tanulója (tanárai Hujter Bálint, Gyenes Zoltán és Kiss Géza),

Prohászka Bulcsú, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 11. osztályos tanulója (tanárai Hujter Bálint, Gyenes Zoltán, Kiss Géza és Nagy Kartal),

Tarján Bernát, a Békásmegyeri Veres Péter Gimnázium érettségizett tanulója (tanárai Holló Gábor, Dobos Sándor, Nagy Zoltán Lóránt és Kovács Benedek), valamint

Vámosi Bendegúz Péter, a Debreceni Fazekas Mihály Gimnázium 11. osztályos tanulója (tanárai Remeténé Orvos Viola és Tóth Mariann).

Három versenyzőnek az első két feladatra adott megoldása kiegészítésre szorul. Ezért a teljesítményért

dicséretben részesítjük

Balla Ignácot, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 9. osztályos tanulóját (tanárai Gyenes Zoltán, Farkas Gitta, Pósa Lajos),

Pázmándi József Áront, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 9. osztályos tanulóját (tanárai Gyenes Zoltán, Farkas Gitta) és

Vigh Zalánt, a Szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium 11. osztályos tanulóját (tanárai Mike János, Schultz János).

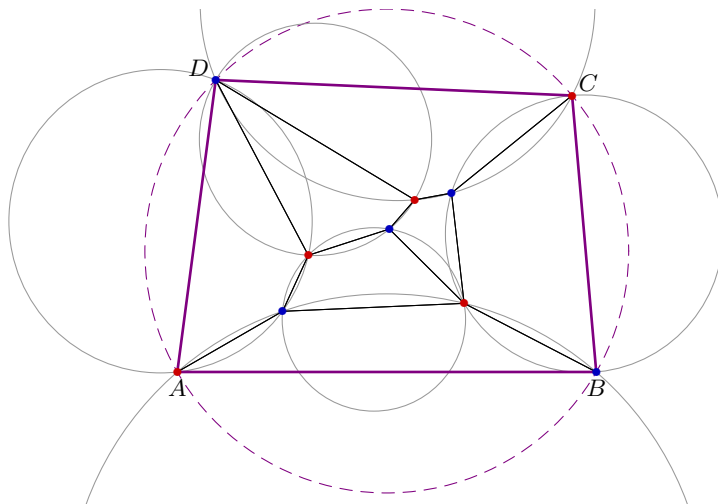
A versenybizottság ezúton köszöni meg minden versenyző, felkészítő tanár és a lebonyolításban közreműködő kolléga munkáját, a díjazottaknak pedig további sikereket kívánva gratulál.”



A 2024. évi Kürschák József Matematikai Tanulóverseny feladatainak megoldásai

1. feladat. Az $ABCD$ négyszöget olyan húrnégyszögekre bontottuk fel, amelyeknek páronként nincs közös belső pontjuk. A felbontásban szereplő húrnégyszögek csúcsai közül egy sem esik egy másik, felbontásbeli húrnégyszög oldalának vagy az $ABCD$ négyszög oldalának belsejébe. Bizonyítsuk be, hogy $ABCD$ is húrnégyszög.

Az 1. feladat megoldása. Először megmutatjuk, hogy az ábrában szereplő csúcsok és oldalak páros gráfot alkotnak. Ehhez elegendő azt igazolni, hogy a gráfban nincsen páratlan kör.



Tekintsünk egy tetszőleges K kört a gráfban, amelynek h éle van. A K belsejét is négyszögekre osztottuk; ezek száma legyen n , a K belsejében futó élek száma e . Az n négyszögnek összesen $4n$ éle van, ebben a K éleit egyszer, a belső éleket kétszer számoltuk, tehát $4n = h + 2e$; ebből láthatjuk, hogy $h = 2(2n - e)$ páros.

A gráfunk tehát páros gráf; a négyszögek csúcsait kiszínezhetjük pirosra és kékre úgy, hogy a szomszédos csúcsok ellentétes színűek legyenek; legyen mondjuk A , C piros és B , D kék.

A belső piros pontok száma legyen p , a belső kék pontok száma k . Mindegyik „csempében” a piros és kék szögek összege ugyanannyi, ezért az összes piros és az összes kék csúcsú szög összege ugyanannyi. A piros és kék csúcsú szögeket a csúcsok szerint is összeszámolva:

$$\begin{aligned} \angle BAD + \angle DCB + p \cdot 360^\circ &= \angle CBA + \angle ADC + k \cdot 360^\circ \\ \angle BAD + \angle DCB &\equiv \angle CBA + \angle ADC \pmod{360^\circ}. \end{aligned}$$

A kongruencia mindkét oldalán a két szög összege 0 és $2 \cdot 360^\circ$ közé esik, ezért

$$\angle BAD + \angle DCB = \angle CBA + \angle ADC,$$

ami mutatja, hogy $ABCD$ húrnégyszög. □

2. feladat. Az ókori Egydimenziós Birodalom egy egyenes mentén helyezkedett el. Kezdetben nem voltak városok. Egyenként alapítottak összesen n különböző pontszerű várost; a másodiktól kezdve mindegyik újonnan alapított város és a hozzá legközelebbi, már létező város (ha két ilyen volt, akkor a régebbi) testvérvárossá nyilvánították egymást.

A birodalom fennmaradt térképén látszanak a városok és a köztük lévő távolságok, de alapításuk sorrendje nem. A történészek a térképből próbálnak arra következtetni, hogy mindegyik városnak legfeljebb 41 testvérvárosa volt.

(a) $n = 10^6$ esetén adjunk meg olyan térképet, amelyből ez a következtetés levonható.

(b) Igazoljuk, hogy $n = 10^{13}$ esetén ez a következtetés semmilyen térképből sem vonható le.

A 2. feladat megoldása. A városokat a $p_1, \dots, p_m$ pontokkal jelöljük az egyenesen, alapításuk sorrendjében. A testvérvárosi kapcsolatokat a megfelelő pontok közti szakaszok behúzásával jelöljük.

(a) Első megoldás. Ez a gondolatmenet 10^6 helyett tetszőleges $m \leq 2^{20}$ pont esetén is működik. Legyen $m \leq 2^{20}$. Vegyünk m pontot az egyenesen, egymástól egységnyi távolságra. Tegyük fel, hogy valamilyen számozás esetén a p_i pont legalább 42 szakasz végpontja. A szakaszok másik végpontjai (p_i szomszédai) közül az egyik a p_i -hez legközelebbi, kisebb indexű pont. A többi, legalább 41 szomszédhoz meg p_i a legközelebbi, kisebb indexű pont. Ezek közül p_i egyik oldalán található legalább 21. Legyenek ezek $p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_m}$, $i_1 < i_2 < \dots < i_m$, $m \geq 21$.

Ekkor, mivel mindegyiknek p_i volt a kisebb indexű legközelebbi szomszédja, a pontok sorrendje az egyenesen éppen $p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_m}, p_i$, és minden $2 \leq j \leq m$ -re

$|p_i p_{i_j}| \leq |p_i p_{i_{j-1}}|/2$. Tehát $|p_i p_{i_2}| \leq |p_i p_{i_1}|/2^{20}$. De ez lehetetlen, mert $m \leq 2^{20}$ pontunk van egyenletesen a számegyenesen, ezért a legnagyobb és legkisebb távolság aránya kisebb, mint m .

(a) Második megoldás. Ez a gondolatmenet pedig 10^6 helyett tetszőleges $m \leq 2^{41}$ pont esetén is működik. Legyen $m \leq 2^{41}$. Legyen $0 \leq r \leq m$ tetszőleges. Írjuk fel r -et kettes számrendszerben, ez legfeljebb 41 jegyből áll. Ha szükséges, tegyünk elé 0-kat úgy, hogy pontosan 41 jegyű legyen. Az r szám s -edik számjegye ($1 \leq s \leq 41$) ennek a felírásnak az s -edik számjegye, előlről számolva. Most tekintsük ezt a 41 hosszú 0–1 sorozatot mint egy 10-es számrendszerbeli szám. Ez a szám lesz p_r , ennek (10-es számrendszer szerinti) számjegyei megegyeznek r (kettes számrendszer szerinti) számjegyeivel. Legyen $P = \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$. Tetszőleges $x, y \in P$, $x \neq y$ esetén legyen $d(x, y)$ értéke a legkisebb i , amelyre x és y i -edik számjegye eltér egymástól.

Most legyen $a \in P$, és rögzítsünk egy sorrendet. Tetszőleges $1 \leq i \leq 41$ esetén legyen

$$B_i = \{x \in P \mid d(x, a) = i\},$$

$$A_i = \{x \in P \mid d(x, a) > i\}.$$

Világos, hogy $P = \{a\} \cup \bigcup_{i=1}^{41} B_i$ és $a \in A_i$ minden i -re. Vegyük észre, hogy tetszőleges sorrend esetén A_i és B_i között legfeljebb egy él lehet, hiszen ha már van egy $a'b'$ él ($a' \in A_i$, $b' \in B_i$), akkor A_i minden pontjához a' közelebb van, mint B_i bármely pontja, és fordítva, B_i minden pontjához b' közelebb van, mint A_i bármely pontja. Ebből pedig következik az állítás, hiszen ekkor a -nak legfeljebb egy szomszédja lehet a $B_1, B_2, \dots, B_{41}$ halmazok mindegyikében.

(b) Legyen P egy tetszőleges, 10^{13} elemű számozatlan ponthalmaz. Először definiáljuk a $P \supset P_0 \supset \dots \supset P_{42}$ részhalmazokat és a $q_i \in P_i$ pontokat. Legyen P_0 P egy tetszőleges, $2^{42} + 1$ elemű részhalmaza, és legyen q_0 ennek az egyik szélső pontja. Defináljuk a többi pontot és részhalmazt rekurzívan. Tegyük fel, hogy $i < 42$, $|P_i| = 2^{42-i} + 1$ és q_i P_i egyik szélső pontja. Legyen q_{i+1} P_i középső pontja. Ekkor q_{i+1} P_i -t két $2^{43-i} + 1$ pontú részhalmazra bontja (q_{i+1} -et mindkét részbe beleszámítva). Legyen P_{i+1} az, amelyiknek kisebb az átmérője, vagyis a két szélső pontjának a távolsága. Egyenlőség esetén bármelyik lehet.

Ezután legyen a pontok sorrendje a következő: $q_{42}, q_0, q_1, \dots, q_{41}$, majd a többi pont tetszőleges sorrendben. Vagyis legyen $p_1 = q_{42}$, $2 \leq i \leq 43$ esetén legyen $p_i = q_{i-2}$, majd a többi pont tetszőleges sorrendben.

Azt állítjuk, hogy $q_{42} = p_1$ össze lesz kötve a $q_0 = p_2$, $q_1 = p_3$, $\dots$, $q_{41} = p_{43}$ pontokkal. Legyen $0 \leq j < i \leq 41$. Mivel $|q_i q_{42}| < |q_i q_{i-1}| \leq |q_i q_j|$, vagyis $|p_{i+2} p_1| < |p_{i+2} p_{j+2}|$, ezért minden $2 \leq i \leq 43$ esetén a p_i -hez legközelebbi pont a p_1 az i -nél kisebb indexű pontok közül. Vagyis p_1 legalább 42 szakasz végpontja. $\square$

3. feladat. Legyen p prímszám és $H \subseteq \{0, 1, \dots, p-1\}$ nemüres halmaz. Tegyük fel, hogy minden $a \in H$ elemhez található olyan, a -tól különböző $b \in H$ és $c \in H$ elemek, amelyekre $b + c - 2a$ osztható p -vel. Mutassuk meg, hogy $p < 4^k$, ahol k a H halmaz elemeinek számát jelöli.

A 3. feladat megoldása. A továbbiakban minden művelet modulo p értendő és a maradékokat mindig a $(-p/2, p/2)$ intervallumból választjuk.

Ha egy feladatbeli H halmazt eltolunk (azaz minden eleméhez hozzáadjuk ugyanazt a maradékot), akkor H továbbra is rendelkezik a megadott tulajdonsággal, így feltehető, hogy $0 \in H$. Továbbá meg is szorozhatjuk minden elemét egy nemnulla r maradékkal. Azt állítjuk, hogy ha $p > 4^{k-1}$, akkor ily módon elérhető, hogy H összes eleme a $(-p/4, p/4)$ intervallumba essen. Valóban, osszuk fel a $(-p/2, p/2)$ intervallumot négy egyenlő részre, és nézzük meg, hogy a $k-1$ nemnulla elem mely részekbe esik, ha különböző r maradékokkal szorozzuk meg őket. A skatulyaelv szerint lennie kell különböző $r_1, r_2 \in \{0, 1, \dots, 4^{k-1}\}$ számoknak úgy, hogy a velük való szorzásnál minden $0 \neq a \in H$ elemre fennáll, hogy $r_1 a$ és $r_2 a$ azonos részbe esik. Ekkor viszont könnyen látható, hogy az $r = r_2 - r_1 \neq 0$ számmal szorozva a halmaz minden eleme a $(-p/4, p/4)$ intervallumba esik. Ez pedig ellentmondás, mert akkor H legnagyobb eleméhez biztosan nem tudunk megfelelő b, c elemeket találni. $\square$

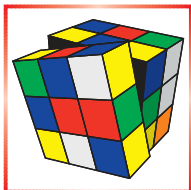
A 3. feladat második megoldása. Egy p prímszámra vegyünk a legkisebb k -t, amelyre létezik a feladatbeli $H = \{a_1, \dots, a_k\}$ halmaz. Belátjuk, hogy erre a k -ra $p \leq 4^{k-1}$. Tetszőleges ℓ indexhez léteznek $i \neq j$ indexek úgy, hogy $2a_\ell - a_i - a_j \equiv 0 \pmod{p}$. Ha minden $\ell \in \{1, \dots, k\}$ indexhez veszünk egy ilyen (i, j) indexpárt és tekintjük a megfelelő $2x_\ell - x_i - x_j = 0$ egyenleteket, akkor az így kapott k egyenletből álló rendszernek van páronként különböző maradékokból álló megoldása modulo p , nevezetesen $x_i \equiv a_i$. Ehhez a lineáris egyenletrendszerhez egy olyan $k \times k$ -as A mátrix tartozik, amelynek minden sorában három nemnulla elem van: egy 2-es és két (-1) -es.

Azt állítjuk, hogy ennek az egyenletrendszernek a valós számok körében csak olyan megoldásai vannak, ahol $x_1 = \dots = x_k$. Valóban, jelölje x az x_i -k maximumát, és legyen L azon ℓ indexek halmaza, amelyre $x_\ell = x$. Ha $\ell \in L$, akkor a $2x_\ell - x_i - x_j = 0$ egyenlet csak úgy teljesülhet, ha $x_i = x_j = x$, hiszen ekkor $x_i, x_j \leq x = x_\ell$. Következésképpen $i, j \in L$ is szükségképpen fennáll. Így az $a_\ell, \ell \in L$ elemekből álló halmaz is rendelkezik a feladatbeli tulajdonsággal, ami k minimalitása miatt azt jelenti, hogy $L = \{1, \dots, k\}$, vagyis $x_\ell = x$ minden ℓ -re, ahogy állítottuk.

Lineáris algebrából tudjuk, hogy ekkor az A mátrix rangja $k-1$, következésképp van nemnulla $(k-1) \times (k-1)$ -es aldeterminánsa. Ez az aldetermináns egy nemnulla egész szám, amelynek az abszolút értéke a triviális becslés szerint legfeljebb $(2+1+1)^{k-1} = 4^{k-1}$. Tudjuk viszont, hogy a modulo p maradékosztályok $\mathbb{F}_p$ teste felett van nemkonstans megoldás is, tehát ott a rang legfeljebb $k-2$. Következésképpen a fenti aldeterminánsnak oszthatónak kell lennie p -vel, ami csak úgy lehetséges, ha $p \leq 4^{k-1}$. $\square$

Megjegyzés a második megoldáshoz. Az *Hadamard-egyenlőtlenség* szerint egy mátrix determinánsának abszolút értéke felülről becsülhető a sorvektorok hosszainak szorzatával. Jelen esetben minden sorvektor hossza $\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{6}$, amiből az aldeterminánsra a $p \leq (\sqrt{6})^{k-1}$ becslés következik. Valójában egy kevésbé ismert, Schinzel-től származó egyenlőtlenséget használva erősebb becslés (konkrétan 2^{k-1}) adódik az aldeterminánsra. Teljesül tehát, hogy $p \leq 2^{k-1}$, és további eszközök fel-

használásával az is megmutatható, hogy a becslésben szereplő 2-es konstanson már nem lehet tovább javítani, azaz tetszőleges $a < 2$ esetén van olyan k pozitív egész és $p > a^k$ prím, amelyre megadható a feladatban leírt tulajdonsággal rendelkező, k -elemű H halmaz.

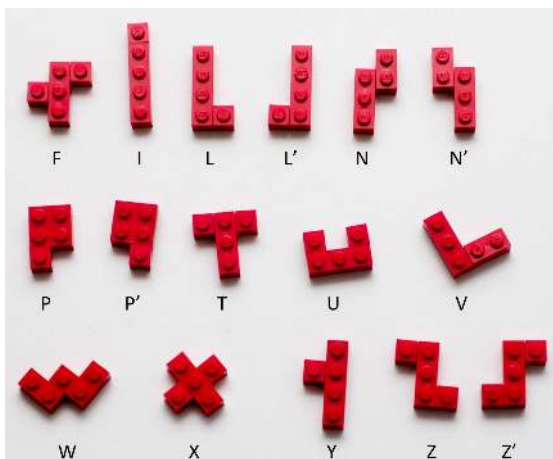


Rejtvények, ördöglakatok

44 szimmetriakereső feladvány LEGO-ból

Rovatunkban minden hónapban valamilyen szórakoztató matematikai fejtörőt mutatunk be. Ezek között fontos helyet foglalnak el a különböző kirakós játékok, topológiai feladványok, ördöglakatok és a matematikát felhasználó bűvészműtátrányok.

Manapság szinte mindent meg lehet találni az interneten, de az igazi élményt az adja, ha a feladatokat magunk oldjuk meg, a bűvészműtátrányok trükkjeit mi találjuk ki, és a szükséges kellékeket is mi tervezzük meg és készítjük el. Próbáljuk meg a feladatokat továbbgondolni, általánosítani, igyekezzünk új feladatokat kitalálni.



Az öt négyzet egymás mellé illesztésével kapott alakzatot pentominónak nevezzük. Időnként – ahogyan most is – megkülönböztetjük a tükröképeket, vesszővel jelölve a névben.

A LEGO-pentominók otthon is könnyen elkészíthetők lapos elemekből, két rétegben. Az 1-szer valahányas lapos elemeken kívül mindössze a 2×2 -es sarok elemre van szükség (a P , P' pentominóknál a 2×2 -es négyzet is felhasználható). Ha nincs elegendő számú elem ugyanabból a színből, az alsó réteg lehet más, akár vegyes színű is.



A feladat minden esetben ugyanaz: rakjunk ki az elemekből egy tengelyesen szimmetrikus síkbeli alakzatot (dekaminót, azaz 10 kis négyzetből álló poliomínót) úgy, hogy minden bűtyök felül legyen. Az $FL, FN, FT, FX, FY, IL, LP', LU, LW, NW, N'Z, PT, PV, PW, TV, TZ, UY, FZ, FZ', LY, L'Y, LZ, L'Z, NP, NP', N'Y, NY, P'Y$ feladványoknak egyetlen megoldása van. Ügyeljünk rá, hogy a TV feladványban ugyan mindkét elem maga is tengelyesen szimmetrikus, a tükrötengelyeik mentén egymás fölé helyezésével kapott alakzat viszont nem illeszkedik a négyzetrácsra. Az FP (2), FW (2), NV (3), PY (2), TY (2), $2P$ (a triviális téglalap + 1 érdekes) feladványoknak pedig több megoldása is van, amelyek számát zárójelben adtuk meg.

A fenti pentominókészlet minimális abban a tekintetben, hogy nem tartalmazza a feladványok szempontjából nem szükséges F', Y' elemeket.

Ezeket a feladványokat Gál Péter találta meg. A programja a négyzetrácscon elhelyezkedő pentominókat tudja forgatni, tükrözni, elhelyezni, egyesíteni, elemek átfedését vizsgálni, valamint szimmetriát vizsgál – ez utóbbiból most a tengelyesre lesz szükség.

Egy elem keletkezésekor létrejön egy jelsorozat, amely az elem állásától független. Egy ilyen jelsorozatot létre lehet hozni például úgy, hogy elvégezzük az elem összes forgatását (0, 90, 180 és 270 fokkal) és tükrözését (a vízszintes, a függőleges, a 45, valamint a -45 fokos egyenesre), ütköztetjük az x, y tengelyekhez, és felsoroljuk a négyzeteik koordinátáit. Az így előálló 8 jelsorozatból megkeressük a legkisebbet. Ha az előállított 8 jelsorozat között vannak azonosak, akkor az azt jelenti, hogy az elem valamilyen transzformáció hatására önmagába jut vissza, vagyis van valamilyen szimmetriája. Ezzel a jelsorozat előállító algoritmussal két legyet ütünk egy csapásra: kapunk egy forgatásra/tükrözésre invariáns azonosítót, valamint megállapítjuk, hogy az elemnek van-e szimmetriája.

A program másik funkciója elemek egymás mellé helyezése és ezáltal egy új elem kialakítása. Az egymás mellé helyezés nem is olyan egyszerű feladat, hisz nagyon bonyolult alakúak lehetnek az elemek. Egy egyszerű algoritmus a következő: Tegyük le az első elemet. Haladjunk végig ennek a kockáin. Ha egy négyzet mellett (valamilyen irányban) üres hely van, akkor toljuk el a második elemet úgy, hogy annak egy négyzete az üres helyre essen. Ha a két elemnek van átfedése, akkor a második elem második négyzetét toljuk az üres helyre. Egészen addig, amíg már nem lesz átfedés a két elem között. Ilyenkor kapunk egy új elemet, amely a két elem négyzeteinek egyesítéséből áll. A hozzárendelt jelsorozat keresésekor rögtön kiderül, hogy az így kapott alakzatnak van-e szimmetriája. A kapott új elemek jelsorozatát eltárolva ki tudjuk szűrni, hogy ténylegesen új elemről van-e szó, vagy már előfordult korábban. Ezt az eltolást elvégezzük a második elem minden elforgatottjával és azok minden négyzetén, valamint az első elem minden négyzetén, minden irányban. Ez viszonylag költséges művelet, de 2-3-4 síkbeli elemnél még bőven kivárható. Csak érdekességképpen: két különböző, nem tengelyesen szimmetrikus pentominó elem pl. az N és az Y 128-féle különböző alakzatot képez, köztük két szimmetrikusat. Három elem pl. az N, Y és F több mint 29 ezret, és ezek között van 24 szimmetrikus.



George Sicherman a kettőnél több elemű feladványokat vizsgálta, amelyek közül néhány, viszonylag egyszerűbbet ajánlunk: $3P$, $4Z$ (2), $4L + L'$, $5P$, $5Y$. Megjegyezzük, hogy ha a Z pentominóból páratlan számút felhasználva kell tengelyesen szimmetrikus alakzatot kirakni, akkor ehhez legalább 17 darabra van szükség, de ezt nem javasoljuk kézzel megkeresni.

Végül néhány további izgalmas feladványt javasolunk. A másodiknál (Brackets, Oleg Smolyakov játéka) vegyük észre, hogy mindhárom elem tengelyesen szimmetrikus, de ha csak egyszerűen egymás fölé helyeznénk őket a tükörtengelyeik mentén, akkor nem kapnánk poliomínót, azaz a négyzetrácsra illeszkedő elemet. Az LII és a YES játékokat Vladimir Krasnohov tervezte.

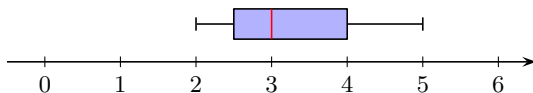
Jó szórakozást!

Bozóki Sándor, Gál Péter



Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire

1. FókuszPók 28 főnek tartott előadást a cicákról. Mind a 28-an értékelték az előadást egy hagyományos 5-ös skálán. Az eredményeket TörtPapa az alábbi dobozdiagramon ábrázolta:



a) Mi az egyes értékek gyakoriságának legnagyobb, illetve legkisebb lehetséges értéke? (5 pont)

b) Mi az értékelések átlagának legnagyobb, illetve legkisebb lehetséges értéke? (5 pont)

c) TörtOkos fogadott TörtMázlival, hogy az $A = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ számok közül egyet véletlenszerűen sorsolva az prím lesz. Azt nem hallottuk, hogy TörtMázli mire fogadott, de TörtOkos megjegyezte, hogy fogadásaik független események.

Adjunk meg egy olyan nem biztos és nem is lehetetlen eseményt, hogy ha TörtMázli arra fogadott, akkor igaz TörtOkos kijelentése. (3 pont)

2. a) Egy deltoidról tudjuk, hogy húrnégyszög, és a köré írt kör átmérője és az oldalai hosszának mérőszáma egész szám, a területe nem nagyobb 34 egységnél. Határozzuk meg, hogy hány nem hasonló, a feltételeknek megfelelő deltoid létezik. (4 pont)

b) Egy tompaszögű háromszög két oldala 20 cm, illetve 30 cm hosszú és a harmadik oldala is egész hosszúságú cm-ben mérve. Adjuk meg, hány darab nem egybevágó, a feltételeknek megfelelő háromszög létezik. (7 pont)

3. a) Tekintsük az α hegyesszög szinuszának és koszinuszának H harmonikus, G mértani és A számtani közepét. Tudjuk, hogy

$$\frac{A \cdot H}{G} = \frac{1}{\sqrt[4]{8}}.$$

Hány fokos az α szög? (7 pont)

b) A koordináta-rendszerben T téglalap csúcsai $A(1;0)$, $B(4;0)$, $C(4;2)$, $D(1;2)$. A T téglalap mely $P(x;y)$ pontjaiban teljesül a

$$\frac{\log_2 x + \log_x 2}{y} \leq \log_2 x \cdot \log_x 2$$

egyenlőtlenség? (6 pont)

4. a) Egy fagráf négy csúcsának fokszáma 2, 3, 4 és 5, a többi pontja elsőfokú. Hány elsőfokú pontja van a fának? (Állításunkat igazoljuk.) Adjunk meg egy ilyen fagráft. (6 pont)

TörtErdész kedvenc szórakozásának hódolva az erdőt járja, de – mivel gondolatai a szépséges Törtilla körül keringtek – figyelmetlenségből letért az ismert utakról, és a rengeteg egy sűrű és varázslatos részébe tévedt. Itt egymást nem keresztező utakon lehet továbbhaladni. Minden út olyan útszakaszokból áll, amelyek 1-1-km-rel távolabb visznek az erdő egyenes, északi határától, és vagy egy újabb útelágazáshoz jutunk, vagy FókuszPók egy csapdája várja az odatévedőt. TörtErdész az északi kapun (amelynek felirata nem sok jóval kecsegteti az ijedt vándort) belépve rögtön egy elágazásban találja magát, és bizony nagy szüksége van TörtPapa szerencsét hozó bájitalának felhőrpintésére, ugyanis FókuszPók éhes macskája, Szianyaú tűnik fel mögötte, így innentől nem fordulhat vissza: egyetlen reménye, hogy mihamarabb eléri az erdő déli határát, ahol megmentik a felkutatására induló barátai.

b) Ha 10 km-re jár az északi határtól, akkor legalább hány útelágazás van ebben az erdőben?

c) Ha ebben az erdőben 650 elágazás van, akkor legalább milyen távol van a déli határ az északitól?

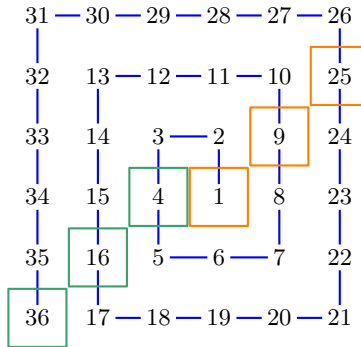
II. rész

5. Nevezzünk két különböző pozitív egész számot hasonlóknak, ha ugyanannyi számú prím és ugyanazokon a kitevőkön szerepel a prímfelbontásukban. (Például 28 és 75 hasonló, mert a felbontásaikban két prímtényező van, az egyik az első, a másik a második hatványon: $28 = 7 \cdot 2^2$ és $75 = 3 \cdot 5^2$.) Tekintsük az alábbi igaz állítást: „Ha két egész szám hasonló, akkor az osztóik száma megegyezik.”

a) Írjuk fel az állítás megfordítását, és adjuk meg az igazságtartalmát. (Utóbbit indokoljuk.) (3 pont)

b) Bizonyítsuk be, hogy pontosan öt olyan, egymással nem egybevágó, egész oldalhosszú derékszögű háromszög van, amelynek egyik befogója 64 egység. Adjuk is meg ezen háromszögek oldalhosszait. (6 pont)

c) Tekintsük az ábrán látható egymást követő, kék csigavonalban írt számokat:



Úgy tűnik, hogy a páratlan, illetve a páros négyzetszámok egy-egy ferde vonal mentén tűnnek fel a számok között. Bizonyítsuk be, hogy ez a megfigyelés helyes. (7 pont)

6. TörtErős össze minden nap 60 darab tűzifát hasogat fel. Nagyjából minden tizedik hasábot csak másodjára sikerül felhasítania, a többit elsőre – ezt úgy értelmezzük, hogy 0,9 valószínűséggel tud egy hasábot elsőre hasítani. (Második próbálkozásra mindig sikerrel jár.) Egy próbálkozáshoz 1 percre van szüksége.

a) Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan egy és negyed óráig hasogatja a 60 darab tűzifát? (3 pont)

Másnap 14:58 perckor áll neki a hasogatásnak, azonban 16:00-kor kezdődik a kedvenc csapata, Törterhempton meccse, amelyet közvetít a TörtTV.

b) Számítsuk ki, hogy mekkora valószínűséggel marad le TörtErős a kezdőrúgásról. (6 pont)

Következő nap TörtErős nem érzi jól magát, felkeresi TörtOrvost. TörtOrvos egy tesztet végez el rajta, hátha TörtErős is elkapta az erdei náthát. A teszt dobozán az áll, hogy „Beteg egyén esetén 99%-ban pozitív eredményt ad, egészséges személy esetén 98%-ban negatívát.”

c) Hány beteg van a 100 fős faluban, ha a pozitív tesztet produkáló lakosok 0,9-nél nagyobb valószínűséggel valóban betegek? (7 pont)

7. A koordináta-rendszer rácspontjaira mindegyik csúcsával illeszkedő egyenlő szárú háromszög alapját az $F(-1; 2)$ pont felezi, a körülírt körének a középpontja $O(\frac{1}{3}; \frac{10}{3})$.

a) Mutassuk meg, hogy az $A(-2; 3)$, $B(0; 1)$, $C(2; 5)$ pontok által alkotott háromszög megfelel a feltételeknek. (3 pont)

b) Vegyünk fel egy olyan D pontot, amely az előző A , B és C pontokkal együtt egy olyan húrtrapéz csúcsai, amelynek AC és BD az alapja. Mik lehetnek a D pont koordinátái? (6 pont)

c) Van-e az ABC háromszög körülírt körében olyan P pont, amely az y tengelyen van és derékszögben látszik belőle az AC szakasz? Ha igen, adjuk meg a koordinátáit. (7 pont)

8. FókuszPók előadása után meghívja a közönségét társasozni, de nem találja a dobókockát. „Semmi baj – mondja TörtÜgyi – feldobunk hat érmét: amennyi leesve írást mutat, annyit kell lépni.”

a) Valóban jól helyettesíti a kockadobást a megadott pénzfeldobásos módszer? A válasz indoklásához hasonlítsuk össze a kockadobás és a leírt pénzfeldobás által meghatározott lépésszám várható értékét. (6 pont)

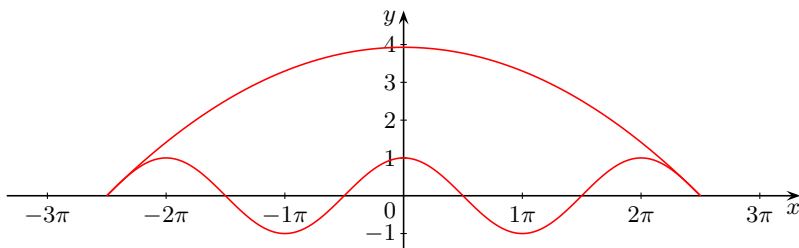
Némi tanakodás után 5, 10, 20, 50, 100 és 200 Ft-os érméket használnak a dobókocka helyettesítésére. TörtPapa minden kör után felírja az adott dobás eredményeit valamilyen sorrendben (más játékosnál esetleg másképpen) és hogy mennyit lép (pl. „5F, 100I, 10F, 20F, 200F, 50I, lép 3-at”).

b) Hányféle különböző jelsorozat kerülhet egy dobás esetén a papírra? (3 pont)

A társasjáték nagyon egyszerű: 52 darab egymás után következő mezőből álló „kígyón” kell végiglépegetni, mindig annyit lépve, amennyi írást dobtak az érmékkel (0-tól 6-ig). Körönként mindenki csak egyszer dob és lép. A célba lépni csak pontos dobással lehet.

c) Legkorábban melyik körben érhet célba a nyertes? Mennyi a valószínűsége, hogy ebben a körben célba is ér? (7 pont)

9. Törtilla egyik kozmetikumának logója fél kagylóhéjra emlékeztet: alulról a $g(x) = \cos x$ függvény, felülről $f(x)$ lefelé nyíló, y -tengelyű parabolagörbe darabja határolja. Mindkét függvényt a $D = [-2, 5\pi; 2, 5\pi]$ intervallumon értelmezzük. A két



görbe D végpontjaiban egymásba *simul*, mert f és g értékei és érintői ezekben a pontokban megegyeznek.

a) Bizonyítsuk be, hogy a parabola hozzárendelési szabálya

$$f(x) = -\frac{1}{5\pi}x^2 + \frac{5\pi}{4}. \quad (6 \text{ pont})$$

b) Határozzuk meg a sík felületre nyomtatott logó területét, ha egy egység 2 mm-nek felel meg a koordináta-rendszerben. (7 pont)

Tekintsük a következő kijelentést:

„Legyen f értelmezve x_0 valamely $I =]x_0 - \delta; x_0 + \delta[$ környezetében ($\delta > 0$). Ha f függvény I -n x_0 előtt negatív, utána pozitív értékeket vesz fel, akkor x_0 -ban zérushelye van.”

c) Igaz-e a kijelentés? (Válaszunkat indokoljuk is meg.) (3 pont)

Trembeczki Csaba
Kaposvár

Megoldásvázlatok a 2025./1. szám matematika gyakorló feladatsorához

I. rész

1. István gazda háromfajta őszibarackot árul a piacon, három különböző asztalon. Az A típusú barack ára 700 Ft, a B típusúé 820 Ft, a C típusúé 890 Ft kilogrammonként.

a) Délelőtt 10 óráig összesen 64 kg barackot adott el, az A típusúból éppen kétszer annyit, mint a C típusúból. Melyik fajta barackból mennyit adott el, ha a barack eladásából származó bevétele 50 100 Ft volt? (4 pont)

b) 10 és 12 óra között csak 16 kg barackot sikerült eladnia, összesen 13 370 forintért. Az eladási bizonylatok sajnos elvesztek, utólag csak arra emlékszik a gazda, hogy mindegyik fajtából egész kilogrammnyi árut vásároltak. Ki tudja számítani, hogy melyik barackból mennyit adott el? (5 pont)

c) István gazda kisfia véletlenszerűen kiválaszt 9 barackot, és kiteszi őket az eladópultra. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az A típusból 2, a B -ből 3 és a C -ből 4 darabot választ? (Minden húzás során a három típusból választ egyet, bármelyiket egyenlő valószínűséggel, és onnan vesz ki egy barackot.) (6 pont)

Megoldás. a) Jelölje x (kg) a C típusból eladott barack mennyiségét. Ekkor $700 \cdot 2x + 820 \cdot (64 - 3x) + 890 \cdot x = 50\,100$, $52\,480 - 170x = 50\,100$, $x = 14$ (kg).

Az eladott mennyiségek rendre 28 kg, $64 - 3 \cdot 14 = 22$ kg és 14 kg.

b) Jelölje az x, y, z természetes szám rendre az egyes típusokból eladott barack mennyiségét (kg-ban számolva). Ekkor

$$\left. \begin{aligned} 700 \cdot x + 820 \cdot y + 890 \cdot z &= 13370 \\ x + y + z &= 16 \end{aligned} \right\}$$

a megoldandó egyenletrendszer.

$$700 \cdot x + 820 \cdot y + 890 \cdot (16 - x - y) = 13370$$

$$14240 - 190x - 70y = 13370, 87 = 19x + 7y.$$

A természetes számok halmazán $x \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ lehet csak. Megoldást $x = 2$ ad, ekkor $y = 7$ és $z = 16 - 2 - 7 = 7$.

Vagyis az egyes fajtákból az eladott mennyiség rendre 2 kg, 7 kg, 7 kg.

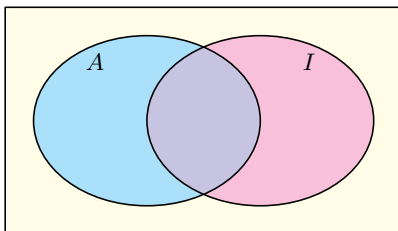
c) Bármely konkrét húzás valószínűsége – a sorrend figyelembevételével – $\left(\frac{1}{3}\right)^9$, hiszen minden esetben 3-ból választhatunk. A kívánt 2 A, 3 B, 4 C típusúakat tartalmazó húzás többször is megvalósul. Hányszor? Annyiszor, ahányféleképpen ezeket sorba rendezhetjük.

Az A típusú barackokat a 9 hely közül bármely 2 helyen húzhatjuk, ez $\binom{9}{2}$ lehetőség; és a maradék 7 helyből még ki kell választani 3-at a B típusú barackok számára, amit $\binom{7}{3}$ -féleképpen tehetünk meg.

A keresett valószínűség $\left(\frac{1}{3}\right)^9 \cdot \binom{9}{2} \cdot \binom{7}{3}$, ami körülbelül 0,0640.

Megjegyzés. Ugyanezt az eredményt kapjuk, ha például a $\binom{9}{3} \cdot \binom{6}{2}$ vagy $\binom{9}{4} \cdot \binom{5}{3}$ sorrendekkel számolunk.

2. a) A piacon egy másik kereskedőnek összesen 420 kg A és B típusú barackja van, ezek egy része I. osztályú (egy bizonyos méret felettiek), a többi II. osztályú. Az A típusú barackok 40%-a I. osztályú, a II. osztályú barackok $\frac{4}{7}$ része B típusú, és még azt is tudjuk, hogy B típusú, I. osztályú barackja 60 kg van. Számítsuk ki, hogy az egyes fajtákból hány kg barackja van a kereskedőnek, és ez alapján töltsük ki az alábbi Venn-diagram négy tartományát. (Az A halmaz az A típusú, az I az I. osztályú barackot jelöli; az egyes tartományokba a megfelelő fajta barack mennyisége kerül kg-ban számolva.) (5 pont)



b) A nem válogatott almák mérete természetesen különböző. Az egyik eladónál egy mintavétel során a következő adatokat kapták az almák maximális átmérőjére (fél cm-re kerekítve):

cm	4	5	5,5	6	6,5	7	7,5
db	1	6	8	13	6	5	2

Számítsuk ki az adatok szórását, és készítsünk az adatokból egy sodrófa-diagramot! (8 pont)

Megoldás. a) Jelölje x (kg) az A típusú barack mennyiségét! Ekkor az I. és II. osztályú része $0,4x$ és $0,6x$ (kg). (A táblázat első (A) sora.)

A II. osztályú, B típusú barack mennyisége $\frac{4}{3} \cdot 0,6x = 0,8x$.

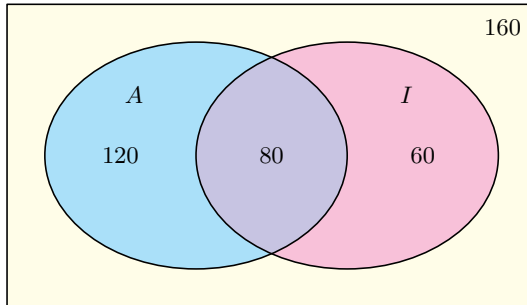
	I. osztályú	II. osztályú	összesen
A típusú	$0,4x$	$0,6x$	x
B típusú	60	$0,8x$	
összesen			420

Innen $x + 60 + 0,8x = 420$, azaz $x = 200$ (kg).

A táblázat:

	I. osztályú	II. osztályú	összesen
A típusú	80 kg	120 kg	200 kg
B típusú	60 kg	160 kg	220 kg
összesen	140 kg	280 kg	420 kg

A kitöltött Venn-diagram:



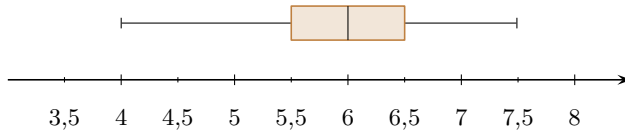
b) Az átmérők átlaga

$$\frac{1 \cdot 4 + 6 \cdot 5 + 8 \cdot 5,5 + 13 \cdot 6 + 6 \cdot 6,5 + 5 \cdot 7 + 2 \cdot 7,5}{41} = 5,98 \text{ cm.}$$

Az adatok szórása

$$\sqrt{\frac{1 \cdot 1,98^2 + 6 \cdot 0,98^2 + 8 \cdot 0,48^2 + 13 \cdot 0,02^2 + 6 \cdot 0,52^2 + 5 \cdot 1,02^2 + 2 \cdot 1,52^2}{41}} = \sqrt{\frac{22,98}{41}} \approx 0,749 \text{ cm.}$$

A sodrófadiagram adatai (cm-ben számolva): a minimum és a maximum 4, illetve 7,5; a medián 6; az alsó és felső kvartilis 5,5, illetve 6,5.



3. Egy $\{a_n\}$ számtani sorozat első tagja 100, különbsége 0,2. Egy $\{b_n\}$ számtani sorozat 8. tagja 4, a 20. tagja 10.

a) Mely n értékekre lesz $S(b_n) > S(a_n)$? (S az első n tag összegét jelöli.) (6 pont)

Egy $\{c_n\}$ mértani sorozat 3. tagja $\frac{27}{4}$, hányadosa 1,5. Egy $\{d_n\}$ mértani sorozat első tagja 1000, a hányadosa 1,2.

b) Mely n értékekre lesz $S(c_n) > 10^6$? (5 pont)

c) Mely n értékekre lesz $c_n > d_n$? (3 pont)

Megoldás. a) $a_n = 100 + 0,2(n-1) = 99,8 + 0,2n$. A $\{b_n\}$ sorozatban $d = \frac{10-4}{12} = 0,5$, így $b_1 = 4 - 7 \cdot 0,5 = 0,5$ és $b_n = 0,5 + (n-1)0,5 = 0,5n$.

$$S(a_n) = \frac{100 + 99,8 + 0,2n}{2}n = 0,1n^2 + 99,9n, \quad S(b_n) = \frac{0,5 + 0,5n}{2}n = 0,25n^2 + 0,25n.$$

Innen $0,1n^2 + 99,9n < 0,25n^2 + 0,25n$, azaz $0 < 0,15n^2 - 9,65n$.

Az egyenlőség $n = 0$ -ra és $n = 664,3$ -re teljesül, az egyenlőtlenség megoldása $n \geq 665$.

Az általános tagok: $c_1 = \frac{27}{4} : 1,5^2 = 3$, így $c_n = 3 \cdot 1,5^{n-1}$ és $d_n = 1000 \cdot 1,2^{n-1}$.

b) $S(c_n) = 3 \cdot \frac{1,5^n - 1}{1,5 - 1} = 6 \cdot 1,5^n - 6$, ebből $6 \cdot 1,5^n > 1000006 \Leftrightarrow 1,5^n > 166667,7$.

A 10-es alapú logaritmusfüggvény szigorúan monoton nő, ezért $n > \frac{\lg 166667,7}{\lg 1,5} \approx 29,65$. Eredmény: $n \geq 30$.

c) $3 \cdot 1,5^{n-1} > 1000 \cdot 1,2^{n-1}$, innen $\left(\frac{1,5}{1,2}\right)^{n-1} > \frac{1000}{3}$. Az 1-nél nagyobb alapú exponenciális függvény monoton nő, így $n-1 > \frac{\lg\left(\frac{1000}{3}\right)}{\lg\left(\frac{1,5}{1,2}\right)} \Leftrightarrow n-1 > 26,03$. Eredmény: $n \geq 28$.

(Érdemes ellenőrizni: $c_{28} - d_{28} = 3 \cdot 1,5^{27} - 1000 \cdot 1,2^{27} = 33074,8$, míg $c_{27} - d_{27} = 3 \cdot 1,5^{26} - 1000 \cdot 1,2^{26} = -845,2$.)

4. Felsorolunk három implikáció típusú igaz állítást.

Legyenek a, b, c pozitív számok.

1. Ha a, b, c egy háromszög oldalhosszai, akkor $(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c) > 0$.

Legyen a G egyszerű gráf 4 pontú, 4 élű.

2. Ha G -ben van 4 hosszú kör, akkor G összefüggő.

Legyenek f és g az $[a; b]$ intervallumon értelmezett integrálható függvények.

3. Ha $f(x) = g(x)$ minden $x \in [a; b]$ esetén, akkor $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx$.

Fogalmazzuk meg az állítások megfordítását. Melyik igaz, melyik hamis közülük? A válaszokat indokoljuk meg. (9 pont)

Megoldás. Az $A \Rightarrow B$ típusú állítás megfordítása $B \Rightarrow A$.

1. A megfordítás: Ha az a, b, c pozitív számokra teljesül, hogy $(a + b - c) \cdot (a - b + c) \cdot (-a + b + c) > 0$, akkor a, b, c lehetnek egy háromszög oldalhosszai.

Az állítás akkor lehetne hamis, ha a bal oldalon pontosan két negatív tényező lenne, s így kétszer nem teljesülne a háromszög-egyenlőtlenség. De ha például $a + b - c < 0$ és $a - b + c < 0$, akkor a két egyenlőtlenség összegéből $2a < 0$ következne, ami ellentmond az $a > 0$ alapfeltételnek. (Hasonlóan bármely másik két tényezőre.)

Az állítás igaz.

2. A megfordítás: Egy 4 pontú, 4 élű egyszerű G gráf esetén ha G összefüggő, akkor G -ben van 4 hosszú kör.

Az állítás hamis; egy ellenpélda látható az ábrán.



3. A megfordítás: Ha $f(x)$ és $g(x)$ az $[a; b]$ intervallumon értelmezett integrálható függvények és $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx$, akkor $f(x) = g(x)$ minden $x \in [a; b]$ esetén.

Hamis. A görbe alatti területek egyenlőségéből nem következik a függvények (pontonkénti) egyenlősége, hiszen például $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} 0 dx = 0$, de $\sin(x) \neq 0$ a megadott intervallum minden pontjában.

II. rész

5. Egy négyszög alakú földterület három csúcsát a derékszögű koordináta-rendszerben az $A(7;7)$, $B(11;9)$ és $C(15;1)$ koordinátájú pontokkal modellezhetjük, ahol 1 egység a valóságban 10 méternek felel meg.

A földterület gazdája nem ismeri pontosan a negyedik (D) csúcs helyét, de a korabeli feljegyzések alapján arra jutott, hogy az az x tengely által szemléltetett folyóparton kétféleképpen helyezkedhet el.

Az egyik lehetőség a D_1 pontot úgy kijelölni, hogy ekkor $\angle AD_1C = 90^\circ$ legyen.

Egy másik lehetőség szerint az $ABCD_2$ földdarab területe éppen 3900 m^2 .

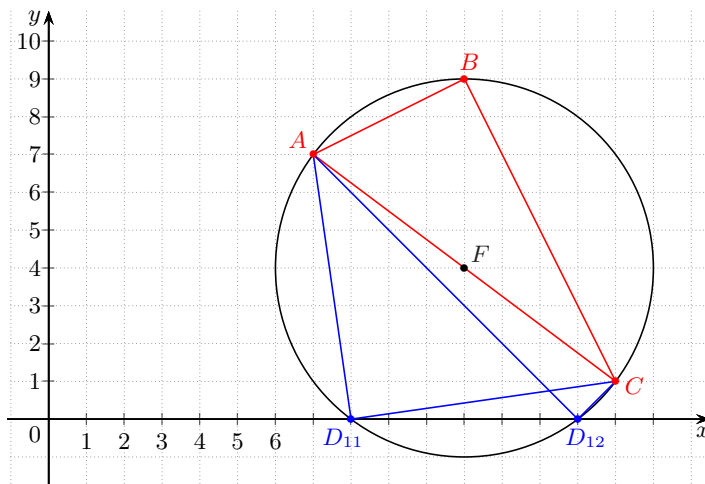
a) Számítsuk ki a D csúcs fenti esetekben lehetséges koordinátáit. (A, B, C, D körüljárási iránya az óramutató járásával megegyező.) (12 pont)

b) A koordináta-rendszer origóját jelölje O , és tekintsük a $Q(0;5)$ pontot. Az ABC háromszög kerületének tetszőleges P pontjára kiszámítjuk az $\overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OP}$ skaláris szorzatot. Mennyi a szorzat minimuma? (4 pont)

Megoldás. a) 1. Legyen $D_1(z;0)$, és jelölje az AC szakasz felezőpontját F . Az $FA = FC = FD_1$ összefüggést használjuk fel (Thalész tétele).

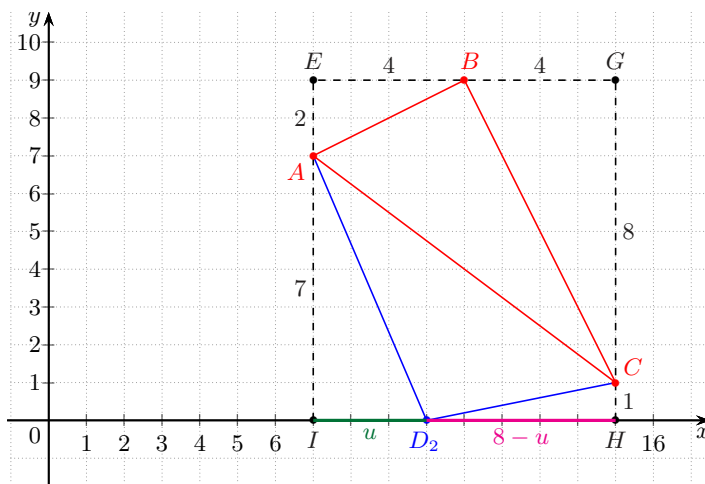
AC hossza $\sqrt{(15-7)^2 + (1-7)^2} = 10$, és $F = \left(\frac{7+15}{2}; \frac{7+1}{2}\right) = (11;4)$.

Thalész tétele miatt $FA = FC = FD_1 = 5$, így $\sqrt{(11-z)^2 + (4-0)^2} = 5$, innen $z^2 - 22z + 112 = 0$. Az egyenlet megoldásai $z_1 = 8$ vagy $z_2 = 14$, így $D_{11}(8;0)$ vagy $D_{12}(14;0)$.



Megjegyzés. Többféle megoldás adható, például Pitagorasz-tétel, Thalész-tétel, az AC átmérőjű kör és az x tengely metszéspontjának meghatározása, vektorok forgatása vagy skaláris szorzat segítségével.

2. Foglaljuk bele az $ABCD_2$ négyszöget az *ábra* szerinti $EGHI$ rács téglalapba! A négyszög területét a bennfoglalt téglalap, valamint a négyszög által belőle kimetszett derékszögű háromszögek területösszegének a különbsége adja meg.

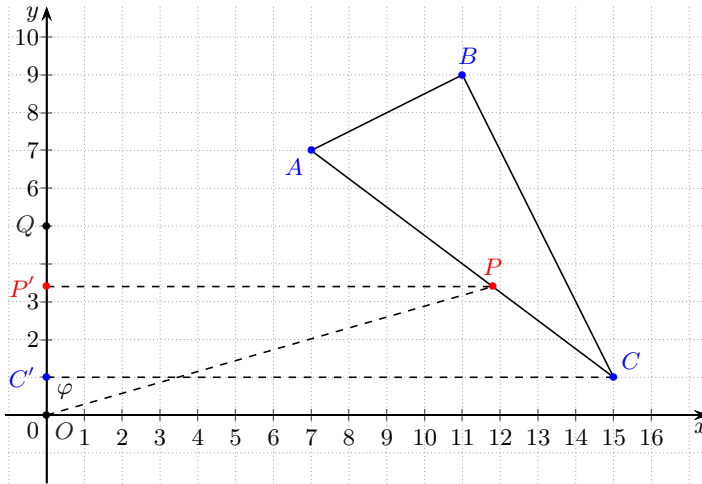


$T(EGHI) = 8 \cdot 9 = 72$, a koordináta-rendszerben pedig – az 1 : 10 méretarány miatt – $T(ABCD_2) = 39$. Legyen $ID_2 = u$, ekkor $D_2H = 8 - u$, és $T(ABCD_2) = 72 - \frac{u \cdot 7}{2} - \frac{2 \cdot 4}{2} - \frac{4 \cdot 8}{2} - \frac{1 \cdot (8 - u)}{2} = 39$.

Átalakítások után $u = 3$, és így $D_2(10; 0)$.

(Az x tengelyen a H ponton túl (az AC egyenes másik félsíkján) is van olyan D pont, amelyre az $ABDC$ négyszög területe 39 területegység, ekkor azonban A , B , C , D körüljárási iránya nem megfelelő.)

b) Jelölje a QOP szöget φ , a P pont merőleges vetületét az y tengelyre pedig P' . Ekkor $\vec{OQ} \cdot \vec{OP} = |\vec{OQ}| \cdot |\vec{OP}| \cdot \cos \varphi = |OQ| \cdot |OP'|$. Mivel $|OQ| = 5$ állandó, a szorzat minimális, ha $|OP'|$ a lehető legkisebb; ez az eset pedig akkor áll fenn, ha $P = C$.



A minimum értéke $5 \cdot 1 = 5$.

6. Egy üzemegységben nagy mennyiségű dísz tárgyat gyártanak, amelynek az eladási ára 20 euró. A korábbi évek tapasztalatai alapján egy adott értékesítési időszakban a termékeknek csak 40%-a fogy el, akciós árleszállítással viszont arányosan egyre több terméket lehet eladni. Például 20 eurós eladási ár esetén 60% marad meg, míg ha ingyen adják a termékeket, akkor mind elfogy. A két szélső helyzet közötti árazásnál pedig jó közelítéssel arányos a termék ára és a megmaradó mennyisége.

1000 termék eladását vizsgáljuk.

a) Mennyi a bevétel 18 euró eladási ár esetén? (3 pont)

b) Milyen eladási ár esetén lesz a bevétel a lehető legnagyobb? (A választ tized euró pontossággal adjuk meg.) (5 pont)

c) Az elkészült dísz tárgyakat kocka alakú konténerekben szállítják. Legyen egy konténer alsó lapja A , felső lapja B , a közöttük lévő négy lap pedig sorban C , D , E , F betűzésű. A konténer mindegyik lapját négy szín (piros, kék, zöld, sárga) valamelyikére festhetjük úgy, hogy a közös éllel csatlakozó lapok különböző színűek

legyenek. (Nem szükséges mindegyik színt felhasználni.) Hányféleképpen színezhető egy konténer? (8 pont)

a) 20 eurós eladási ár esetén 600 termék marad meg. 18 euró eladási ár esetén a megmaradó mennyiség $\frac{18}{20} \cdot 600 = 540$, az eladott termékek száma $1000 - 540 = 460$. A bevétel ekkor $460 \cdot 18 = 8280$ euró.

b) Ha az eladási ár x euró (ahol $0 \leq x \leq 20$), akkor a megmaradó mennyiség $\frac{x}{20} \cdot 600 = 30x$, az eladott termékek száma $1000 - 30x$, a bevétel pedig $B(x) = (1000 - 30x)x$.

A $B(x)$ függvény képe „lefelé nyitott” parabola, amelynek zérushelyei 0 és $\frac{100}{3}$, így a maximumhelye $x = \frac{100}{6} \approx 6,67$.

$B(16,6) = 8333,2$ (euró), $B(16,7) = 8333,3$ (euró), így 16,7 euró eladási ár esetén lesz a bevétel a lehető legnagyobb.

c) Két alapesetet különböztetünk meg aszerint, hogy az A és a B lap azonos színű vagy különböző.

I. eset: Az A és a B lap különböző színű. Ekkor az A lapot 4-, a B lapot (tőle különböző színnel) 3-féleképpen színezhetjük. A négy C, D, E, F lapot a maradék 2 színnel felváltva kell színezni, a lehetőségek száma 2. (Például C színezése 2-féle lehet, utána a befejezés egyértelmű.)

A lehetséges színezések száma $4 \cdot 3 \cdot 2$.

II. eset: Az A és a B lap azonos színű, 4-féleképpen színezhető. Ekkor a C, D, E, F lapokat a maradék 3 színnel kell kiszínezni, a szomszédsági feltételnek megfelelően.

A C lap 3-féle, a D 2-féle színű lehet.

Ha az E lap színe megegyezik a C színével, akkor az utolsó, F lap 2-féle lehet (A-tól és C (E)-től különböző). Ez $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2$ eset.

Míg ha az E lap színe különbözik C-től (és A-tól, D-től), akkor csak 1-féle lehet, a maradék 4. szín. Ekkor az F lap is csak 1-féle lehet (C-től és E-től különböző, megegyezik D színével). Ekkor $4 \cdot 3 \cdot 2$ esetet kaptunk.

Az összes megfelelő színezés száma $4 \cdot 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 + 4 \cdot 3 \cdot 2 = 96$.

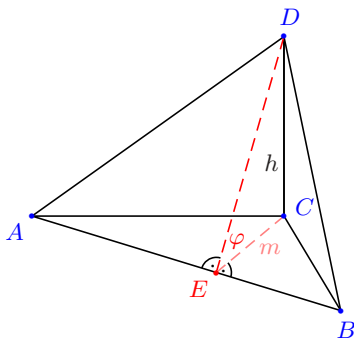
7. Egy épületrész alapja ABC derékszögű háromszög alakú, amelyben: $AC = 8$ méter, $BC = 6$ méter és $\angle ACB = 90^\circ$. A C pontban az ABC síkra merőlegest állítanak, s ezen veszik fel az épület tetejének D pontját, így az épület alakja az $ABCD$ háromszög alapú gúla. (A gúla CA , CB és CD élei páronként merőlegesek.)

a) Hogyan kell megválasztani a CD magasságot, hogy az épület ABD tetőszíkjá az ABC alappal 50° -os szöget zárjon be? (7 pont)

b) Az épület D csúcsába egy (pontoszerűnek tekinthető) lámpát helyeznek el, olyan lámpaernyővel, amely a talajon a B sarkot még éppen megvilágítja, de a lámpától távolabbi pontokat már nem. Az ABC háromszög területének hány százalékát világítja meg a lámpa? (9 pont)

Megoldás. a) $BA = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$. Az ABD és az ABC síkok φ hajlásszögét az AB szakasz olyan E pontjában kapjuk meg, amelyre DE és AB , valamint CE

és AB merőlegesek. (Ekkor AB és a DEC sík is merőlegesek.) Legyen $m (= CE)$ az ABC háromszög magassága. A terület kétféle felírásából $\frac{10m}{2} = \frac{6 \cdot 8}{2}$, innen $m = 4,8$.

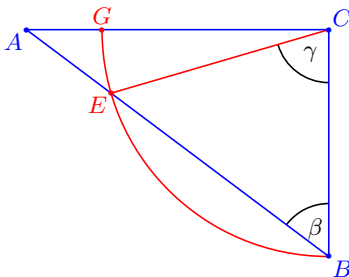


Jelölje $h = CD$ az épületrész keresett magasságát, ekkor az ECD derékszögű háromszögből $\operatorname{tg} \varphi = \frac{h}{m}$; innen $h = 4,8 \cdot \operatorname{tg} 50^\circ \approx 5,72$.

Tehát a keresett magasság körülbelül 5,72 méter.

b) A lámpa az ABC síkon egy C középpontú, $CB = 6$ méter sugarú körlemez világít meg. Ez a kör az AB és AC szakaszokat az E , illetve G pontokban metszi (lásd az ábrát).

A körlemez és az ABC háromszög közös része két részből áll: egyrészt a BCE háromszögből, másrészt az ECG körcikkből.



Legyen $EBC \sphericalangle = \beta$, ekkor $\operatorname{tg} \beta = \frac{8}{6}$, innen $\beta \approx 53,1^\circ$, és így $ECB \sphericalangle = \gamma = 180^\circ - 2\beta \approx 73,8^\circ$. Tehát $t_{ECB} = \frac{6 \cdot 6 \cdot \sin 73,8^\circ}{2} \approx 17,3 \text{ (m}^2\text{)}$.

Továbbá $GCE \sphericalangle = 90^\circ - \gamma \approx 16,2^\circ$, így a GCE körcikk területe $\frac{16,2}{360} \cdot 6^2 \cdot \pi \approx 5,1 \text{ (m}^2\text{)}$.

Valamint $t_{ABC} = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24 \text{ (m}^2\text{)}$. A körlemez és az ABC háromszög közös részének területe $17,3 + 5,1 = 22,4 \text{ m}^2$, ami a teljes területnek $\frac{22,4}{24} \approx 0,933$ része, azaz 93,3%-a.

8. a) Az $x^3 - 3x^2 + Ax + B = 0$ harmadfokú egyenletnek három különböző valós gyöke van. Tudjuk, hogy két gyök egymás ellentettje, valamint az egyik gyök kétszerese egy másik gyöknek. Határozzuk meg az A és B együtthatók, valamint a három gyök értékét. (7 pont)

b) Igazoljuk, hogy a valós számokon értelmezett $f(x) = x^3 - 6x^2 + 27$ függvény görbéje középpontosan szimmetrikus az inflexiós pontjára. (9 pont)

a) Ha a három gyök a , $-a$ és b , akkor az egyenlet gyöktényezős alakja $(x + a) \cdot (x - a) \cdot (x - b) = 0$, innen $x^3 - bx^2 - a^2x + a^2b = 0$. (Feltehetjük, hogy $a > 0$.)

Az együtthatók egyeztetéséből $b = 3$, továbbá $A = -a^2$ és $B = 3a^2$. Két eset van:

I. Ha $a = 2b = 6$, akkor a három gyök 6; -6 és 3; valamint $A = -36$ és $B = 108$.

II. Ha $a = \frac{b}{2} = 1,5$, akkor a három gyök 1,5; $-1,5$ és 3; valamint $A = -2,25$ és $B = 6,75$.

b) $f'(x) = 3x^2 - 12x$, $f''(x) = 6x - 12$.

$6x - 12 = 0$, ha $x = 2$, és ekkor $y = f(2) = 11$, vagyis $P(2; 11)$ az inflexiós pont. (Ez valóban inflexiós pont, mert a második derivált előjelet vált $x = 2$ -ben.)

A függvénygörbe középpontosan szimmetrikus P -re, ha minden valós z esetén a görbe $A(2 + z, f(2 + z))$ és $B(2 - z, f(2 - z))$ pontjai tükrösek P -re. Ehhez elegendő igazolni, hogy $\frac{f(2 + z) + f(2 - z)}{2} = 11$ teljesül minden z -re.

$$f(2 + z) = (2 + z)^3 - 6(2 + z)^2 + 27 = 2^3 + 12z + 6z^2 + z^3 - 24 - 24z - 6z^2 + 27,$$

$$f(2 - z) = (2 - z)^3 - 6(2 - z)^2 + 27 = 2^3 - 12z + 6z^2 - z^3 - 24 + 24z - 6z^2 + 27,$$

a kettő összege $16 + 12z^2 - 48 - 12z^2 + 54 = 22$.

Így $\frac{f(2 + z) + f(2 - z)}{2} = 11$ valóban teljesül, a függvénygörbe középpontosan szimmetrikus az inflexiós pontra.

9. Egy erősen összetett szám olyan pozitív egész szám, amelynek több (pozitív) osztója van, mint bármelyik nála kisebb pozitív egész számnak. A kifejezés már Platón görög filozófusnál is megjelenik, aki szerint 5040 a városlakók ideális száma, mivel 5040-nek több osztója van a nála kisebb pozitív egész számoknál.

Az alábbi táblázat első sorában a pozitív egész számokat 1-től 15-ig, a számok alatt a (pozitív) osztóik számát soroltuk fel, továbbá az erősen összetett számok **pirossal** szerepelnek.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	2	2	3	2	4	2	4	3	4	1	6	2	4	4

Tegyük fel, hogy a pozitív egész számok prímtényezős felbontásában a prímtényezőket monoton növekvő sorrendben soroljuk fel, például $12 = 2^2 \cdot 3$, $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ vagy $840 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$. (Ezek mind erősen összetett számok.)

a) Kezdődhet-e egy A erősen összetett szám prímtényezős felbontása például $2^2 \cdot 3 \cdot 7$ módon? (3 pont)

b) Mutassuk meg, hogy egy C erősen összetett szám prímtényezős felbontása nem kezdődhet $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$ módon. (3 pont)

c) Leavitt: Az indiai hivatalnok (Európa, 2010) c. könyvben megemlíti, hogy az indiai matematikus, Rámánudzsan 6 746 328 388 800-ig kiszámította az erősen összetett számokat. Viszont McMahon órnagy talált egyet, amelyet kihagyott a fel-

sorolásból, és megadta a 29331862500 számot. A történet szerint: végül „átadja Rámánudzsannak a cédulát, amire Rámánudzsan megsebzett arckifejezéssel néz.”

Lehet-e erősen összetett szám a könyvben szereplő 29331862500? (4 pont)

d) 1-től 50-ig 8 darab erősen összetett szám van (a táblázatban szereplőkön kívül ilyen szám még a 24, 36 és 48, rendre 8, 9, 10 osztóval.)

Az 1, 2, 3, ..., 50 számok közül véletlenszerűen kiválasztunk 3 számot először „visszatevéssel” (a kiválasztott számok között lehet ismétlődés), majd „visszatevés nélkül” (ekkor a kiválasztott számok között nincs ismétlődés). Számítsuk ki a két esetben, mennyi annak a valószínűsége, hogy a számok között lesz erősen összetett szám. (6 pont)

a) Nem. Legyen $A = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot N$, és tekintsük a $B = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot N$ számot. A két számnak ugyanannyi osztója van (ha A egy osztójában szerepel a 7-es tényező, azt B -ben 5-ösre cserélhetjük), de B kisebb, mint A .

Megjegyzés. Igazolható, hogy ha az erősen összetett szám prímtényezős felbontásában k darab különböző prím szerepel, akkor ezek megegyeznek az első (legkisebb) k darab prímszámmal.

b) Legyen $C = 2^2 \cdot 3^3 \cdot M$, és tekintsük a $D = 2^3 \cdot 3^2 \cdot M$ számot. A két számnak ugyanannyi osztója van (a 2 és a 3 szerepe szimmetrikus), de D kisebb, mint C .

Megjegyzés. Igazolható, hogy az erősen összetett szám prímtényezős felbontásában a kitevők sorozata nem növekvő (monoton csökkenő).

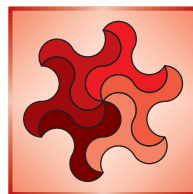
c) Nem lehet. A 00 végződés miatt a szám osztható 100-zal; 293318625 osztható 25-tel, sőt 125-tel is: $293318625 = 125 \cdot 2346549$; és az utóbbi tényező osztható még 3-mal is: $2346549 = 3 \cdot 782183$. Ezért 29331862500 prímtényezős felbontása $2^2 \cdot 3 \cdot 5^5 \cdot (782183)$ módon kezdődik, és ez az előző megjegyzés alapján nem erősen összetett.

Megjegyzés. Sajtóhibáról lehet szó, a wikipédián fellelhető a $293318625600 = 2^6 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$ szám, amely erősen összetett.

d) Ha a kiválasztott számok között lehet ismétlődés, akkor mindig 0,16 valószínűséggel választhatunk erősen összetett számot, és 0,84 valószínűséggel nem ilyet. $0,84^3$ annak a valószínűsége, hogy egyik szám sem erősen összetett, így – a komplementer módszert alkalmazva – a kért valószínűség: $1 - 0,84^3 \approx 0,4073$.

Ha a kiválasztott számok között nem lehet ismétlődés, akkor $\frac{\binom{42}{3}}{\binom{50}{3}}$ annak a valószínűsége, hogy egyik szám sem erősen összetett, és ekkor a kért valószínűség $1 - \frac{\binom{42}{3}}{\binom{50}{3}} \approx 0,4143$.

Orosz Gyula
Budapest



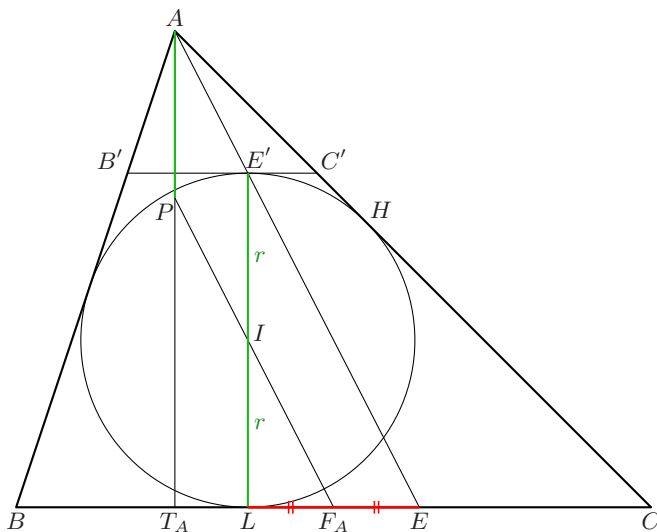
B. 5404. Az ABC hegyesszögű háromszög magasságainak talppontjai T_A , T_B , T_C , továbbá a BC , CA , AB oldalak felezőpontjai rendre F_A , F_B és F_C . Jelölje r a beírt kör sugarát. Legyen P_A az AT_A szakasz azon pontja, amelyre $AP_A = r$. Hasonló módon kapjuk a P_B és P_C pontokat. Mutassuk meg, hogy az F_AP_A , F_BP_B , F_CP_C szakaszok egy pontban metszik egymást.

(6 pont)

Javaoltta: Kiss Géza, Csömör

Megoldás. Három megoldást adunk a feladatra. Mindegyikben azt fogjuk bizonyítani, hogy az F_AP_A , F_BP_B , F_CP_C szakaszok az ABC háromszög beírt körének középpontjában metszik egymást.

1. megoldás. Hegyesszögű egyenlő szárú (vagy egyenlő oldalú) háromszög esetén az alaphoz tartozó megfelelő szakasz mindenképpen átmegy a beírt kör középpontján, így elegendő olyan esetet tárgyalnunk, amikor az oldal felezőpontja és a magasságvonal feladatban definiált pontja nem a belső szögfelezőre esnek. Legyenek ezek az F_A és P_A pontok.



Legyen I a háromszög beírt körének középpontja, B' , C' pontok rendre az AB , illetve az AC oldalakon úgy helyezkedjenek el, hogy $BC \parallel B'C'$ és $B'C'$ érintse a beírt kört. A beírt kör érintési pontjai BC , $B'C'$ egyeneseken rendre L és E' . A BC oldalt kívülről érintő hozzáírt kör érintési pontja BC -n legyen E , végül F_AI és AT_A egyenesek metszéspontja pedig legyen P pont.

Azt fogjuk megmutatni, hogy F_AI egyenes átmegy a P_A ponton (vagyis $P \equiv P_A$), így F_AP_A átmegy I ponton.

Azzal az A középpontú kicsinyítéssel, amely BC -t $B'C'$ -be viszi, E -ből megkapjuk E' -t. Tehát A, E', E egy egyenesen vannak.

Ismert, hogy a beírt kör és a hozzáírt körök érintési pontjai milyen hosszú szakaszokra bontják az oldalakat, nevezetesen $BL = EC = s - b$, ennek következményeként az F_A oldalfelező pont felezi az LE szakaszt, $LF_A = F_AE$.

Az L, I, E' egy egyenesen vannak (L, E' érintési pontok és $BC \parallel B'C'$), így $LI = IE'$.

Egyrészt $LF_A = F_AE$, $LI = IE'$, ezért $F_AI \parallel EE'$ (L -ből kétszeres nagyítás), ez egyben azt is jelenti, hogy $PI \parallel AE'$.

Másrészt $AP \parallel E'I$ (mindkét egyenes merőleges BC -re).

Ezek alapján $APIE'$ paralelogramma, tehát $AP = E'I = r = AP_A$.

Megmutattuk, hogy $P \equiv P_A$, másként fogalmazva F_AP_A átmegy a beírt kör középpontján.

Logikai szimmetria alapján F_BP_B és F_CP_C is illeszkedik a beírt kör középpontjára, tehát egy pontban metszik egymást.

Hodossy Réka (Balassagyarmati Balassi B. Gimn., 12. o.)

2. megoldás. Ismét azt fogjuk bizonyítani, hogy az F_A, I, P_A pontok egy egyenesre illeszkednek.

Az előző megoldás jelölései mellett legyenek az oldalak hosszai a szokásos jelölésekkel a, b, c , az ABC háromszög területe t . Ismert, hogy a beírt kör r sugara $r = \frac{2t}{a+b+c}$, továbbá az a oldalhoz tartozó magasság $AT_A = \frac{2t}{a}$. A feltétel alapján számolható

$$P_AT_A = AT_A - r = \frac{2t}{a} - \frac{2t}{a+b+c} = \frac{2t(b+c)}{a(a+b+c)}.$$

A beírt kör érintési pontjai az a oldalt $LB = \frac{a-b+c}{2}$ és $LC = \frac{a+b-c}{2}$ részekre osztják.

Ha $b = c$, akkor a P_A, F_A és I pontok a BC felezőmerőlegesére esnek.

A továbbiakban belátjuk, hogy $b \neq c$ esetén $F_ALI_\Delta \sim F_AT_AP_{A\Delta}$. Mindkét háromszög derékszögű, ezért a hasonlóságukhoz elegendő megmutatni, hogy a megfelelő befogók aránya megegyezik.

Ha $b > c$, akkor a T_A és a L pontok az F_AB szakaszon vannak, ha $b < c$, akkor a T_A és az L pontok az F_AC szakaszon vannak.

$$m_a^2 = b^2 - CT_A^2 = c^2 - BT_A^2 = c^2 - (a - CT_A)^2 = c^2 - a^2 + 2a \cdot CT_A - CT_A^2.$$

Rendezés után:

$$CT_A = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}.$$

Ha $b > c$, akkor

$$T_AF_A = CT_A - F_AC = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a} - \frac{a}{2} = \frac{b^2 - c^2}{2a} = \frac{(b+c)(b-c)}{2a}$$

és

$$LF_A = CL - CF_A = \frac{b-c}{2}.$$

A befogók aránya a két háromszögben

$$\frac{F_AL}{LI} = \frac{\frac{b-c}{2}}{\frac{2t}{a+b+c}} = \frac{(b-c)(b+c)}{2} = \frac{F_AT_A}{T_AP_A}$$

megegyezik, továbbá $F_ALI \sphericalangle = F_AT_AP_A \sphericalangle = 90^\circ$, ezért $F_ALI_\Delta \sim F_AT_AP_{A\Delta}$. A hasonlóság alapján $T_AF_AI \sphericalangle = T_AF_AP_A \sphericalangle$, vagyis F_A , I és P_A egy egyenesre esnek. Ha $b < c$, akkor az előzőhöz hasonlóan

$$T_AF_A = F_AC - CT_A = \frac{c^2 - b^2}{2a} = \frac{(b+c)(c-b)}{2a} \quad \text{és} \quad LF_A = CF_A - CL = \frac{c-b}{2}.$$

A befogók aránya

$$\frac{F_AL}{LI} = \frac{\frac{c-b}{2}}{\frac{2t}{a+b+c}} = \frac{(c-b)(b+c)}{2} = \frac{F_AT_A}{T_AP_A}.$$

A két háromszög derékszögű, $F_ALI \sphericalangle = F_AT_AP_A \sphericalangle = 90^\circ$, ezért $F_ALI_\Delta \sim F_AT_AP_{A\Delta}$. Az előző esetnek megfelelően $T_ALI \sphericalangle = T_AF_AP_A \sphericalangle$, így ekkor is igaz, hogy F_A , I és P_A egy egyenesre esnek. Mindegyik esetben teljesül, hogy az I pont az F_AP_A egyenesre esik. A P_B és P_C pontok esetében ugyanígy végezhető a bizonyítás, tehát a 3 egyenes egymást ebben a pontban metszi.

Gyenes Károly (Kecskeméti Bányai Júlia Gimn., 11. o.)

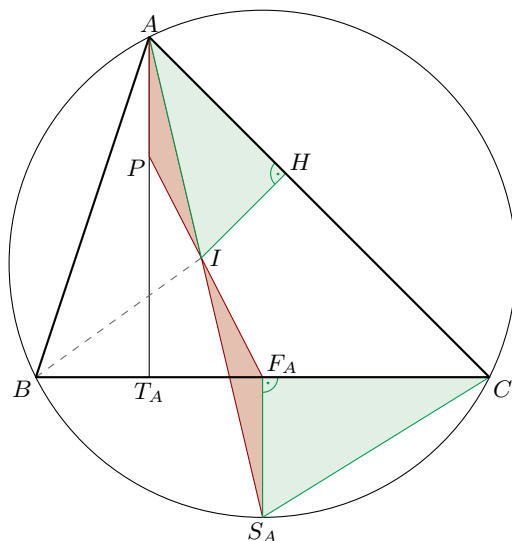
3. megoldás. Jelöljük ismét a beírt kör középpontját I -vel, a beírt kör érintési pontja az AC oldalon legyen H , továbbá messe az F_AI félegyenes az AT_A magasságvonalat az P pontban. Be fogjuk látni, hogy $P \equiv P_A$.

Ismertnek tételezzük fel egyrészt, hogy az A -hoz tartozó belső szögfelező és a BC oldal felezőmerőlegese a körülírt körön, mégpedig a BC körív S_A felezőpontjában metszik egymást. Másrészt szintén sokszor előforduló tény, hogy ez az S_A pont egyenlő távolságra van a beírt kör középpontjától és a B , C csúcsoktól. (Ld. pl. a **B5291.** feladat megoldásában szereplő lemmát: <https://www.komal.hu/feladat?a=feladat&f=B5291&l=hu>).

Az $API_\Delta \sim S_AF_AI_\Delta$, mert az I -nél lévő szögek csúcsszögek, míg $PAI \sphericalangle$ és F_AS_AI váltószögek. Az oldalak arányára teljesül, hogy

$$(1) \quad \frac{AP}{AI} = \frac{F_AS_A}{S_AI}.$$

Szintén hasonlóak az S_AF_AC és IHA háromszögek, mert H -nál és F_A -nál derékszögek vannak, továbbá a $HAI \sphericalangle$ és $F_ACS_A \sphericalangle$ szögek a BS_A , CS_A egyenlő körívekhez



tartozó kerületi szögek, tehát szintén egyenlők. Az oldalak arányának egyenlőségéből itt:

$$(2) \quad \frac{F_A S_A}{S_A C} = \frac{HI}{AI} = \frac{r}{AI}.$$

(1) és (2) összevetéséből, felhasználva, hogy $S_A I = S_A C$ kapjuk, hogy

$$\frac{AP}{AI} = \frac{F_A S_A}{S_A I} = \frac{F_A S_A}{S_A C} = \frac{HI}{AI} = \frac{r}{AI}.$$

Ezek szerint $AP = r$, tehát a P_A pont egybeesik az P ponttal.

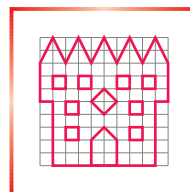
Ezzel megmutattuk, hogy az $F_A P_A$ szakasz valóban átmegy a beírt kör középpontján. Az $F_B P_B$ és $F_C P_C$ szakaszokra ugyanígy végezhető el a bizonyítás; a három szakasz a beírt kör középpontjában metszi egymást.

Ali Richárd (Gödöllői Török Ignác Gimn., 11. évf.) dolgozata alapján

Megjegyzés. A geometriai megoldások mellett technikai jellegű megoldások is szép számmal születtek. Ezek baricentrikus koordinátákat, komplex számokat, illetve koordinátageometriai eszközöket használtak fel.

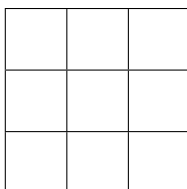
A feladatra összesen 40 versenyző és csapat küldött megoldást. 6 pontos 24, 5 pontos 9 versenyző dolgozata. 4, illetve 3 pontot kapott 1–1 versenyző. 2 pontos 3, 0 pontos 2 tanuló dolgozata.

A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok
ABACUS-szal közös pontverseny
9. osztályosoknak
(844–848.)

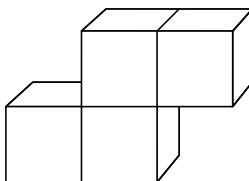


K. 844 Egy focibajnokságban öt csapat körmérkőzést játszik, mindenki mindenkiével egyszer mérkőzik meg. A győzelemért 3, a döntetlenért 1, a vereségért 0 pont jár. A bajnokság végén négy csapat pontszáma 1, 2, 5 és 7. Hány pontja lett az ötödik csapatnak?

K. 845 Az alábbi 3×3 -as táblázatba írjuk be az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10 számokat úgy, hogy bármelyik két oldalszomszédos mezőn lévő szám összege prímszám legyen. Hány megoldása van a feladatnak? (Két megoldás különböző, ha van olyan szám, amelynek mások a szomszédai az egyik, illetve a másik elrendezésben.)



K. 846 A LIGO cég új építőjátéka csupa azonos építőelemet tartalmaz. Az építőelem négy egyberagasztott 2 cm élű kiskockából áll. Legfeljebb hány építőelemet tartalmazhat az a készlet, amelyet egy $6\text{ cm} \times 6\text{ cm} \times 8\text{ cm}$ -es dobozba csomagoltak?



K/C. 847 Hány olyan nemüres részhalmaza van az $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ halmaznak, amelyben a számok szorzata páros és a számok összege is páros?

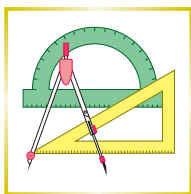
K/C. 848 Egy 10 egység sugarú körbe olyan $ABCD$ trapézt írtunk, amelyben az AB oldal a kör átmérője, és az $ABC \leq 75^\circ$. Számítsuk ki az $ABCD$ trapéz területét.



Beküldési határidő: 2025. március 10.

Elektronikus munkafüzet: <https://www.komal.hu/munkafuzet>





A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (847–848., 1843–1847.)

Feladatok 10. évfolyamig

K/C. 847. A szövegét lásd a **K** feladatoknál.

K/C. 848. A szövegét lásd a **K** feladatoknál.

Feladatok mindenkinek

C. 1843 Boglárka rajzolt egy téglalapot, amelynek az egyik oldala 75 cm, míg a másik 105 cm hosszú lett. Ezt felosztotta $75 \cdot 105 = 7875$ darab 1 cm oldalú négyzetre, majd megrajzolta a téglalap egyik átlóját. Hány kis négyzeten megy át ez az átló?

Javasolta: *Kozma Katalin Abigél*, Győr

C. 1844 Ági pirossal, Laci késsel színezteti egy $n \times n$ -es ($n > 1$) fehér táblázat mezőit, amely i -edik sorának j -edik mezőjét $(i; j)$ -vel jelöljük. Első lépésben Ági pirosra festi a főátló (bal felsőtől a jobb alsóig) mezőit. Ezután felváltva jönnek: ha Laci $(i; j)$ -t színezi, akkor Ági $(j; i)$ -t. Minden mezőt pontosan egyszer színeznek be. A k -adik sort különlegesnek hívjuk, ha bármely kék $(k; j)$ esetén létezik l , hogy $(k; l)$ és $(l; j)$ is piros. Bizonyítsuk be, hogy a színezgetés végeztével Ági talál különleges sort.

Javasolta: *Paulovics Zoltán*, Budapest

C. 1845 Ezékiel összeszorozott két egész számot. A két szám közül az egyik 74-gyel nagyobb volt, mint a másik. A szorzásnál hibázott, mert a szorzatban a tízesek helyére véletlenül 3-mal kisebb számjegyet írt, mint kellett volna. A szorzás ellenőrzésekor a kisebbik tényezővel való osztásnál hányadosul pontosan 61-et kapott. Mi lehetett a két szám?

Javasolta: *Sánta Gergely*, Budapest

Feladatok 11. évfolyamtól

C. 1846 A 11-gyel osztható ötjegyű palindromszámok hányadrésze nem osztható 121-gyel? (A palindromszám olyan pozitív egész szám, amely visszafelé olvasva megegyezik az eredetivel.)

Javasolta: *Németh László*, Fonyód

C. 1847 Az $ABCD$ négyzet AD oldalán válasszuk ki úgy a P pontot, hogy $\angle CPA < 105^\circ$ legyen. A CP egyenesre az A pontból bocsássunk merőlegest, amelynek talppontját jelölje Q . Határozzuk meg az ABQ és az ACP háromszögek területe arányának pontos értékét.

Javasolta: *Bíró Bálint*, Eger

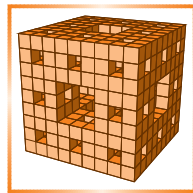


Beküldési határidő: 2025. március 10.

Elektronikus munkafüzet: <https://www.komal.hu/munkafuzet>



A B pontversenyben kitűzött feladatok (5438–5445.)



B. 5438 Hányféle eredményt kaphatunk, ha összeadunk két különböző, n -jegyű számot, amelyeknek minden jegye 4-es vagy 7-es?

(3 pont)

Javasolta: Sztranyák Attila (Budapest)

B. 5439 Az $ABCD$ téglalapra teljesül, hogy $AD < AB < 2AD$. Legyen O az AB oldal azon pontja, amelyre $OB = AD$. Az O középpontú OB sugarú kör az AD oldalt E pontban metszi. Mutassuk meg, hogy $ABCD$ területe $BE^2/2$.

(3 pont)

Javasolta: Vigh Viktor (Sándorfalva)

B. 5440 Egy háromszög oldalait az oldalegyenesek mentén mindkét irányban meghosszabbítottuk, és mindegyik csúcs után felmértük még a csúccsal szemközti oldal hosszát. Mutassuk meg, hogy az így kapott hat pont egy körre illeszkedik.

(4 pont)

Javasolta: Róka Sándor (Nyíregyháza)

B. 5441 Egy háromszög szögei α , β és γ . Mutassuk meg, hogy

$$\sin \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\gamma}{2} \geq \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma.$$

(4 pont)

Javasolta: Holló Gábor (Budapest)

B. 5442 Legyenek n , k és ℓ pozitív egész számok. Jelölje $g(n, k, \ell)$ azt, hogy hányféleképpen lehet egy $n \times k$ méretű táblázatot az $\{1, 2, \dots, \ell + 1\}$ halmaz elemeivel úgy kitölteni, hogy minden sorban és minden oszlopban balról jobbra, illetve fentről lefelé monoton nőjenek a számok. Bizonyítsuk be, hogy $g(n, k, \ell) = g(k, \ell, n)$.

(5 pont)

Javasolta: Gyenes Zoltán (Budapest)

B. 5443 Bármilyen pozitív egész n -re jelölje a_n az n -nél nem nagyobb pozitív egész teljes hatványok számát. (Például $a_9 = 4$.) Az n „izgalmas”, ha $a_n \mid n$. Igazoljuk, hogy végtelen sok izgalmas szám van.

(6 pont)

Javasolta: Sztranyák Attila (Budapest)

B. 5444 Az $ABCDEF$ húrhatszögben az AD és CF átlók metszéspontja P , az AE és a BF metszéspontja pedig Q . Mutassuk meg, hogy ha $BC = CP$ és $DP = DE$, akkor PQ felezi a BQE szöget.

(6 pont)

Javasolta: Kós Géza (Budapest)

B. 5445 Igaz-e, hogy ha egy pozitív egészekből álló végtelen számtani sorozat elemei között van négyzetszám és köbszám is, akkor a sorozatban hatodik hatvány is van?

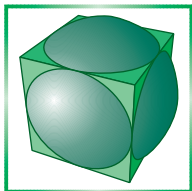
(6 pont)

Javasolta: *Róka Sándor* (Nyíregyháza)



Beküldési határidő: 2025. március 10.

Elektronikus munkafüzet: <https://www.komal.hu/munkafuzet>



Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (899–901.)

A. 899. A híres végtelen emeletes végtelen szállodának (amelyben az emeletek és minden emeleten a szobák is a pozitív egész számokkal vannak számozva) továbbra is nagyon jól megy a dolga, minden szobában pontosan egy vendég lakik. A szálloda minden emeletén le szeretné szőnyegezni a folyosót, amihez be is szerzett végtelen sok (természetesen a pozitív egész számokkal számozott), de sajnos csak véges hosszúságú szőnyeget. Minden vendéget megkérdeztek, hogy mely szőnyegek tetszenek neki, és mindenki le is adott egy végtelen listát azon szőnyegekről, amelyeket szívesen látna a saját emeletén. Tudjuk, hogy bármely két vendéghez, akik különböző emeleten laknak, csak véges sok olyan szőnyeg található, amely mindkettőjüknek tetszik. Mutassuk meg, hogy el lehet osztani a szőnyegeket az emeletek között úgy, hogy minden vendéghez csak véges sok olyan szőnyeg legyen, amely tetszik neki, de nem arra az emeletre került, ahol ő lakik.

Javasolta: *Imolay András* (Budapest)

A. 900. Egy teremben n lámpa az $1, 2, \dots, n$ számokkal van megszámozva. A játék elején ki lehet jelölni az $\{1, 2, \dots, n\}$ halmaz k darab $S_1, S_2, \dots, S_k$ részhalmazát. Minden $1 \leq i \leq k$ egész számhoz tartozik egy felkapcsoló és egy lekapcsoló gomb, amellyel az S_i halmaz elemeihez tartozó lámpákat lehet fel-, illetve lekapcsolni. Tetszőleges n pozitív egész szám esetén határozzuk meg a legkisebb k -t, amelyre meg lehet választani úgy az $S_1, S_2, \dots, S_k$ halmazokat, hogy a lámpák teljesen lekapcsolt állapotából tetszőleges állapotba el lehessen jutni a kapcsolók segítségével.

Javasolta: *Zólmay Kristóf* (Budapest)

A. 901. Tükrözzük a nem egyenlő szárú hegyesszögű ABC háromszöget az Euler-egyenesére, így kapjuk az $A'B'C'$ háromszöget. Az ABC háromszög Feuerbach-körének egy pontja legyen P . Minden X pont esetén jelölje $p(X)$ az X pont tükröképét P -re.

a) Legyen e_{AB} az az egyenes, amely átmegy az A pont BB' egyenesre vett merőleges vetületén és a B pont AA' egyenesre vett merőleges vetületén. Hasonlóan

definiáljuk az e_{BC} , e_{CA} egyeneseket. Igazoljuk, hogy ez a három egyenes egy K pontban találkozik.

b) Bizonyítsuk be, hogy két olyan választása is van P -nek, amelyre az $Ap(A')$, $Bp(B')$ és $Cp(C')$ egyenesek egy ponton mennek át, továbbá a $p(A)p(A') \cap BC$, $p(B)p(B') \cap CA$, $p(C)p(C') \cap AB$ és K pontok egy egyenesre esnek.

Javasolta: *Bán-Szabó Áron* (Budapest)



Beküldési határidő: 2025. március 10.

Elektronikus munkafüzet: <https://www.komal.hu/munkafuzet>

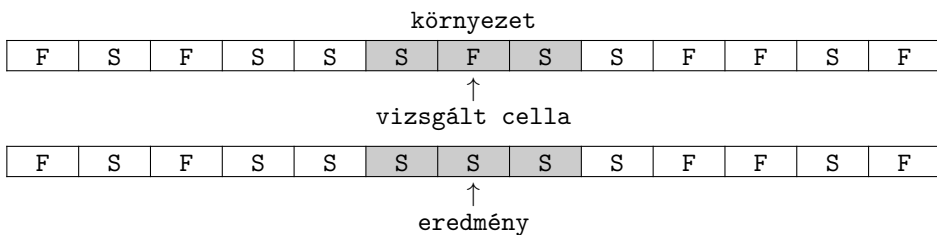


Informatikából kitűzött feladatok (651–654.)



I. 651. A sejtautomaták olyan informatikai modellek, amelyekkel egyszerű szabályok alapján folyamatokat, állapotok változásait tudjuk modellezni, leírni, szimulálni.

Modellünkben egy sejtautomata egymás melletti sejtekből áll és minden időegység alatt az összes sejt állapota megváltozhat. A sejtek két állapotot vehetnek fel a modellben, „F”-et és „S”-et. Az egyes sejtek állapotai változnak az idővel – azaz a lépésszámmal – attól függően, hogy maga a sejt és a közvetlen szomszédai milyen állapotban vannak. Mindkét szélén egy-egy sejt kezdetben biztos „F” állapotban van és később is az marad.



Készítsünk programot *i651* néven, amely M lépés után megadja, hogy „S” állapotú sejtől hány van.

A program standard bemenetének első sorában a sejtautomata sejtjeinek N száma ($1 \leq N \leq 1000$) és a lépések M száma ($1 \leq M \leq 1000$) található. A következő sorban N darab betű („F” vagy „S”) a sejtek kezdőállapota van. Az ezt követő 8 sorban a szabályok következnek. Minden szabály 3 betűből és szóközzel elválasztva egy egybetűs eredményből áll.

A programmal a standard kimenetre írjuk ki, hogy M lépés után hány „S” állapotú sejt van.

Példa (a / jel sortörést jelent)	Kimenet
13 3 FSFSSSFSSFFSF FFF F / FFS S / FSF S / FSS F / SFF F / SFS S / SSF F / SSS S	5

Magyarázat: a sejtek állapota a lépések után

FSSFSFSFFFSSSF, FFFSSSSFFSFFF, FFSFSSFFSSFFF.

Beküldendő egy tömörített *i651.zip* állományban a program forráskódja és rövid dokumentációja, amely megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben fordítható.

(10 pont)

I. 652. Dobókockával hatost dobni általában szerencsét jelent. Két kockát egyszerre feldobva mindkét kockával hatost dobni még nagyobb szerencse. Általában N kockát feldobva annak az esélye, hogy mindegyik hatos legyen, igen kevés. Persze, ha kitartóan, újra és újra megpróbáljuk, akkor egy idő után szerencsénk lehet, de csak nagyon sok próbálkozás után.

Inkább kísérreljük meg a csupa hatost elérni másként: először dobjunk fel minden kockát, majd csak azokkal a kockákkal dobunk, amelyekkel az előző dobás után nem hatost kaptunk. Ezt ismételjük egészen addig, amíg minden kockán hatost nem kapunk. Így már kevesebb számú dobásra van szükség.

Vizsgáljuk meg a jelenséget program segítségével. Állapítsuk meg, hogy N kocka esetén átlagosan hányszor kell dobni, hogy végül minden kocka hatost mutasson. Egy dobás alatt az első esetben az összes kocka, később az összes olyan kocka feldobását értjük, amellyel nem hatost dobtunk korábban. A program K alkalommal végezze el a kísérletet, és adja meg, hogy átlagosan hány dobásból áll a dobássorozat, amellyel végül minden kocka hatost mutat.

A program standard bemenetének első sorában a kockák N száma ($10 \leq N \leq 100$) és a kísérletek K száma ($50 \leq K \leq 50\,000$) található. A programmal a standard kimenetre írja ki a dobássorozatok átlagos hosszát egy tizedesjegyre kerekítve.

Példa:

Bemenet	Kimenet
10 1000	16.7

Beküldendő egy tömörített *i652.zip* állományban a program forráskódja és rövid dokumentációja, amely megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben fordítható.

(10 pont)

I. 653. Hajdanában az emberek sokat adtak a népi időjárési megfigyelésekre. Persze nem volt időjárásjelentés, és a mezőgazdasági munkákat komolyan befolyásolta az időjárás. A rengeteg népi rigmusból, bölcsességből most négyet választottunk, a többi elég nehezen mérhető, a *közel a tavasz*, a *zsákban hoznak meleget*, a *madárcsicsergés* nehezen számszerűsíthető, így azokra szorítkoztunk, amelyek a minimum hőmérséklethez, napi csapadékmennyiséghez kötődnek. Így esett a választásunk az alábbiakra:

- Január 18. Piroska napján, ha fagy, negyven napig el nem hagy.
 - Június 8. Ha Medárd napján esik, negyven napig esni fog.
 - November 11. Márton napján, ha a lúd jégen jár, akkor Karácsonykor vízben poroszkál.
 - November 25. Ha Katalin kopog, Karácsony tocsog, ellenben, ha Katalin tocsog, Karácsony kopog.
1. Nyissunk egy üres táblázatkezelő munkafüzetet. Töltsük be egy üres munkalapra az **A1**-es cellától kezdve az UTF-8 kódolású, tabulátorokkal tagolt **met_adatok.txt** fájl tartalmát. A munkalap kapja a **BP** nevet. Munkánkat mentjük **nepi_idojaras** néven a táblázatkezelő alapértelmezett formátumában.

	A	B	C	D
1	Dátum	Min. Hőm.	Csapadék	
2	1901.01.01	-9,2	1,9	
3	1901.01.02	-11,3	0	
4	1901.01.03	-10,8	0,8	
5	1901.01.04	-12,4	0,2	
6	1901.01.05	-15,5	0	
7	1901.01.06	-13,8	2,3	
8	1901.01.07	-6,9	1,4	

2. Hozzunk létre négy új munkalapot **Piroska jan. 18.**, **Medárd jún. 8.**, **Márton nov. 11.**, **Katalin nov. 25.** néven. A munkalapokra kerüljenek a mintának megfelelően az **A2**-es cellától kezdve függőlegesen lefelé az évszámok. Az **A1**-es cellába és a **B1**-es cellába az adott névnap hónapja és napja, a **D1**-es és **E1**-es cellák a vonatkozott dátumok névnaphoz képesti eltolását jelentik. A **B** oszlopban függvény segítségével adjuk meg az adott évi dátumot, majd az adott napokhoz tartozó sorszámot.

	A	B	C	D	E
1	1	18		1	40
2	1901	1901.01.18	19	20	59
3	1902	1902.01.18	384	385	424
4	1903	1903.01.18	749	750	789
5	1904	1904.01.18	1114	1115	1154
6	1905	1905.01.18	1480	1481	1520
7	1906	1906.01.18	1845	1846	1885
8	1907	1907.01.18	2210	2211	2250
9	1908	1908.01.18	2575	2576	2615
10	1909	1909.01.18	2941	2942	2981

3. Mind a négy munkalapon készítsük el a 125. sorban a mintán olvasható szövegeket.

124					
125		Piroska igaz		78 alkalommal	
126		Teljesül		0 alkalommal	
127					

- Ellenőrizzük az időjárási adatokat az adott napokra, periódusokra.
- Állapítsuk meg, hogy melyik névnapra hány alkalommal teljesül a feltétel. Katalinnál ez a szám 120.
- Határozzuk meg, hogy a fentiek közül hányszor teljesül a népi jóslat.
- Ezt a két értéket írjuk a négy munkalap **D125**-ös és **D126**-os cellájába.

Segédszámításokat a négy névnapos munkalapon az **E** oszloptól jobbra végezhetünk. A megoldásban saját függvény vagy makró nem használható.

Beküldendő egy tömörített *i653.zip* állományban a táblázatkezelő munkafüzet, illetve egy rövid dokumentáció, amelyben szerepel a megoldási módszer, a megoldáskor alkalmazott táblázatkezelő neve, verziószáma.

Az adatok forrásai:

https://www.met.hu/eghajlat/magyarorszag-eghajlata/eghajlati_adatsorok/Budapest/adatok/napi_adatok/

Letölthető fájl: **met_adatok.txt**

(10 pont)

I. 654. Ma már szinte mindennapos, hogy a híradóban súlyos, személyi sérüléses vagy halálos közúti balesetekről tudósítanak, néha többről is. Régebben kevesebb ilyenről lehetett hallani, ennek az okait próbáljuk feltárni néhány 2001 és 2023 közötti statisztikai adat alapján. Szerencsére elég egy megnyugtató pillantást vetni a számokra, és máris láthatjuk, hogy növekedésről szó sincs, a baleseti halálozás 2023-ban a 2001-es szint nagyjából egyharmada, a 2023-as sérülések száma is kb. a 75%-a a 2001-es adatnak. De sok érdekesség lapul az adatok összefüggéseiben, érdemes beleásnunk magunkat.

1. Nyissunk egy üres táblázatkezelő munkafüzetet. Töltsük be egy üres munkalapra az **A1**-es cellától kezdve az UTF-8 kódolású, tabulátorokkal tagolt **balesetek.txt** fájl tartalmát. A munkalap kapja a **balesetek** nevet. Munkánkat mentjük **balesetek** néven a táblázatkezelő alapértelmezett formátumában.
2. Formázzuk meg az adatokat a minták és a leírás szerint:
 - (a) Egyesítsük az első sor mintákon látható celláit;
 - (b) szegélyezzük a munkalap adatokat vagy képleteket tartalmazó celláit a minták szerint;
 - (c) a munkalap betűtípusa legyen Arial, az alap betűméret 11 pontos;
 - (d) állítsunk be olyan oszlopszélességet, hogy minden adat látható legyen;
 - (e) az első két sor szövegét vastagítsuk és igazítsuk a minták szerint (ha kell, sortöréssel, elválasztással);
 - (f) az első oszlop és az első két sor kapjon 15%-os sötétszürke árnyalatot;
 - (g) az egész számokat tartalmazó számoszlopokban legyen ezres tagolás.

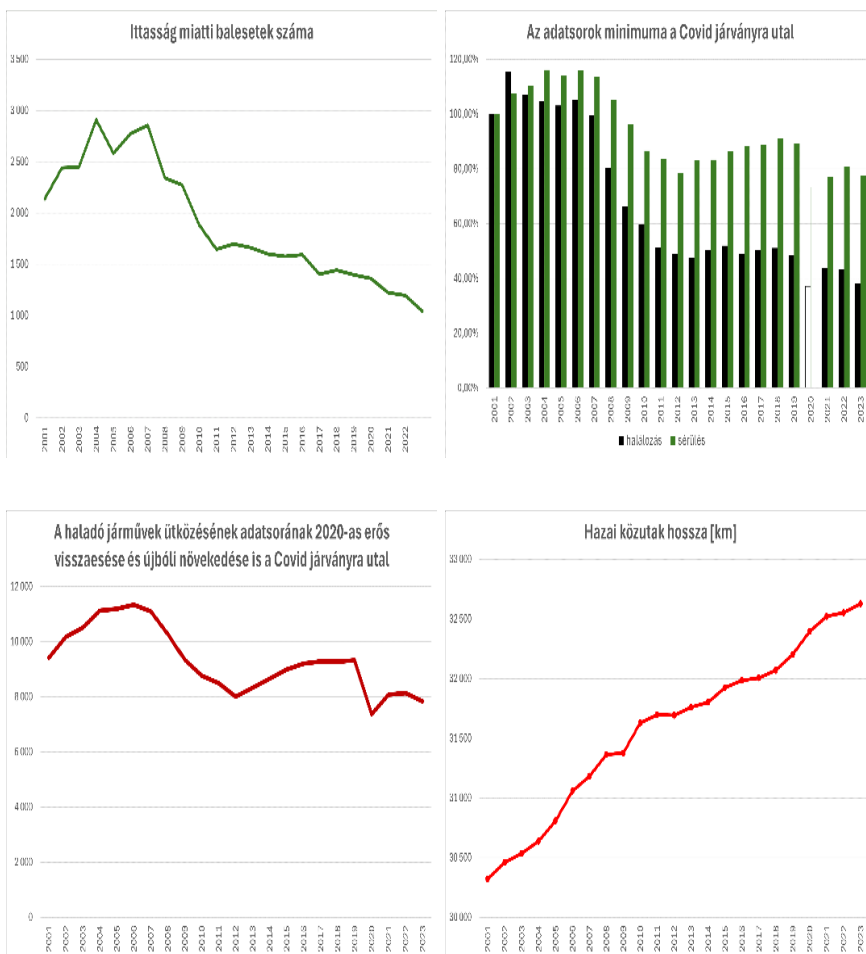
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
1	Év	Gépjármű összesen	Első alkalommal forgalomba helyezett jármű			Közút hossza [km]	Gépjármű állomány átlagos kora [év]	Személy- sérüléses közlekedési balesetek száma	Ittasan okozott közlekedési balesetek	Közlekedési balesetben érintett személyek		Személysérüléses közlekedési balesetek természete						Sze ba
2			új	használt	összes					meghalt személyek száma	megsérült személyek száma	haladó járművek űtközése	álló járművek űtközése	szilárd tárgyaknak űtközése	útviszonyok figyelman kívül hagyása	gyalogos elütése	egyéb baleset	szeme szállít járműv
3	2001	2 974 173	167 834	62 904	230 738	30 322	12,3	18 505	2 138	1 239	24 149	9 417	686	1 052	3 004	3 922	424	14
4	2002	3 141 073	197 293	91 484	288 777	30 460	11,7	19 686	2 440	1 429	25 978	10 180	739	2 323	1 834	3 933	677	15
5	2003	3 305 452	223 988	95 724	319 712	30 536	11,4	19 976	2 450	1 326	26 627	10 513	663	2 506	2 028	3 664	602	15
6	2004	3 370 395	225 983	91 496	307 479	30 638	10,9	20 957	2 909	1 296	28 054	11 126	583	2 831	2 251	3 748	418	16
7	2005	3 456 538	241 589	53 408	295 057	30 808	10,5	20 777	2 583	1 278	27 505	11 196	479	2 668	2 235	3 663	536	16
8	2006	3 546 094	222 741	32 362	255 103	31 058	10,3	20 977	2 773	1 303	27 977	11 344	445	2 719	2 409	3 491	569	17
9	2007	3 625 368	213 706	34 494	248 200	31 183	10,3	20 635	2 855	1 232	27 452	11 105	384	2 612	2 488	3 453	593	16
10	2008	3 685 717	194 732	32 584	227 316	31 363	10,4	19 174	2 342	996	25 369	10 283	368	2 407	2 200	3 267	649	15
11	2009	3 640 115	83 282	23 066	106 348	31 377	10,8	17 864	2 274	822	23 274	9 347	301	2 372	2 347	2 804	693	14
12	2010	3 608 834	61 415	27 052	88 467	31 628	11,3	16 308	1 883	740	20 917	8 772	315	1 958	1 986	2 678	598	13
13	2011	3 598 242	67 366	43 755	111 121	31 698	11,9	15 827	1 645	638	20 172	8 495	383	739	2 578	2 486	1 146	13
14	2012	3 621 735	76 293	63 651	139 944	31 692	12,5	15 174	1 698	605	18 979	8 005	377	682	2 534	2 365	1 211	12
15	2013	3 680 599	81 564	83 387	164 951	31 780	13,0	15 691	1 662	591	20 090	8 332	382	604	2 677	2 468	1 228	12
16	2014	3 778 002	98 812	114 005	212 817	31 802	13,4	15 847	1 601	626	20 124	8 663	435	649	2 488	2 499	1 113	13
17	2015	3 886 341	110 584	142 062	252 646	31 925	13,7	16 331	1 577	644	20 899	8 991	386	638	2 829	2 497	990	13
18	2016	4 022 796	133 702	162 888	296 590	31 986	13,9	16 627	1 592	607	21 329	9 212	412	676	2 729	2 552	1 046	13
19	2017	4 211 711	154 205	176 996	331 201	32 006	14,1	16 489	1 402	625	21 451	9 290	358	680	2 689	2 476	996	13
20	2018	4 417 848	178 058	182 828	360 886	32 070	14,2	16 951	1 442	633	21 999	9 284	420	647	2 896	2 599	1 105	14
21	2019	4 625 398	202 531	182 123	384 654	32 204	14,4	16 627	1 396	602	21 596	9 329	395	610	2 713	2 448	1 132	14
22	2020	4 756 537	165 115	151 503	316 618	32 396	14,7	13 778	1 361	460	17 716	7 367	319	606	2 653	1 773	1 060	11
23	2021	4 885 598	161 741	151 735	313 476	32 521	15,0	14 233	1 224	544	18 599	8 081	312	542	2 569	1 795	834	12
24	2022	4 980 933	149 864	143 301	293 165	32 552	15,4	14 748	1 195	537	19 546	8 142	312	593	2 600	2 036	1 065	12
25	2023	5 080 748	150 393	120 897	271 290	32 626	15,8	14 452	1 040	472	18 746	7 838	385	559	2 384	2 094	1 192	12
26																		
27																		

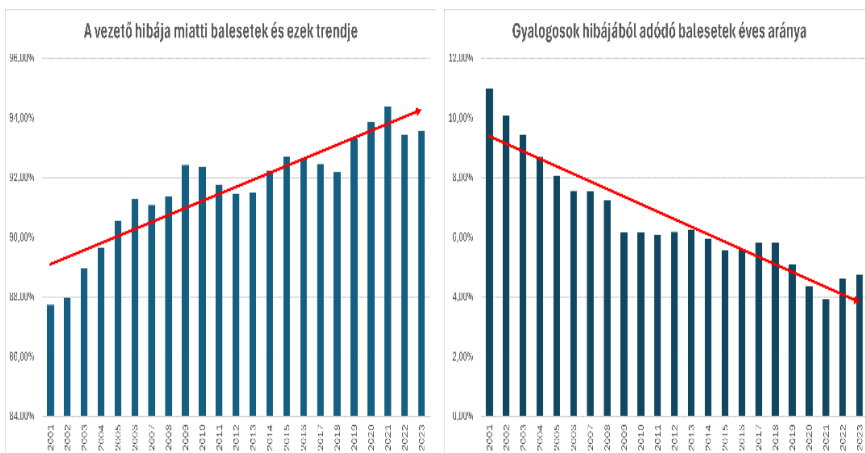
P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A
		Személy sérüléses közlekedési balesetek az okozók szerint [eset]				Személy sérüléses közlekedési balesetek oka					
logos zése	egyéb baleset	személy- szállító járművek	teher- szállító járművek	gyalo- gosok	egyéb balesetek	a jármű- vezető hiba	a gyalo- gosok hiba	az utasok hiba	a jármű műszaki hiba	pálya- hiba és egyéb okok	
3 922	424	14 279	2 027	2 031	168	16 235	2 031	35	82	122	
3 933	677	15 532	1 816	2 001	326	17 317	1 983	47	105	234	
3 664	602	15 985	1 787	1 885	299	17 769	1 885	49	105	168	
3 748	418	16 821	1 980	1 820	336	18 785	1 820	30	115	207	
3 663	536	16 860	1 920	1 677	320	18 818	1 677	25	104	153	
101											

- Az **A27**-es cellába írjuk be, hogy „Változás aránya”, majd a **27**-es sorban jelenítsük meg, hogy az adatoszlopok hány százalékkal változtak 2001 és 2023 között (százalék formátumban, két tizedes pontossággal).
- Vizsgáljuk meg, mennyit változott az ittas vezetés következtében előidézett sérüléses balesetek száma. Számítsuk ki az **AB3:AB25** tartomány celláiba az adott évi ittas vezetés és az összes baleset arányát. Figyeljük meg, hogy ez az arány jóval kevésbé csökken, mint az abszolút adatok.
 - Készítsünk új diagramlapra grafikont az ittas vezetés miatti balesetekről a minta szerint. A diagramlap neve **Ittas** legyen.
 - Készítsünk új diagramlapra grafikont az **AB** oszlop adatairól az előző mintája alapján. A diagramlap neve **Ittas2** legyen.
- Keressük meg a covidos időszak nyomait az adatokban!
 - Számítsuk ki az **AC3:AD25** tartomány celláiba, hogy az adott évben hány százaléka volt a halálozások, illetve a sérülések száma 2001-hez viszonyítva! Ábrázoljuk az eredményt oszlopdiaagramon új diagramlapon a minta szerint. A diagramlap neve **Covid1** legyen.
 - Ábrázoljuk oszlopdiaagramon a haladó járművek ütközése adatait a minta szerint. A diagramlap neve **Covid2** legyen.
- Hogyan lehet akaratlanul is félrevezető egy diagram?
 - Készítsünk új diagramlapra grafikont az úthálózat hosszának alakulásáról a minta szerint. A diagramlap neve **Közúthossz** legyen.
 - Készítsünk új diagramlapra reális adatváltozást mutató grafikont az úthálózat hosszának alakulásáról úgy, hogy a függőleges tengely minimuma 0 legyen. A diagramlap kapja a **Közúthossz2** nevet.
- Gépeljük be az **A30**-as cellába az „egy kilométerre jutó járműszám 2001-ben” szöveget, az **A31**-esbe pedig ezt: „egy kilométerre jutó járműszám 2023-ban”. Az **F30**-as és **F31**-es cellákba számítsuk ki ezek értékét. Számítsuk ki a telítettséget járművenként 10 m-es hosszal és útpályánként átlagosan 2,3 forgalmi sávval számolva.
- Határozzuk meg az **AE4:AE25** tartomány celláiba az évente a forgalomból kivont járművek számát.

9. A gépjárművezetők hibája növekszik, ami az adatokon ránézésre nem látszik. Túlságosan megbízunk a saját képességeinkben és a technika védelmében. Számítsuk ki az **AF** oszlop megfelelő celláiba, hogy az adott évi személyi sérüléssel járó balesetek hány százaléka származott a gépjárművezetők hibájából. Készítsünk ebből új diagramlapra oszlopdiagramot lineáris trenddel a minta szerint. A diagramlap neve **Vezetőhiba** legyen.
10. A gyalogosok hibája miatti balesetek aránya csökken, holott egyre többen a telefonjukat nyomkodva közlekednek, ráadásul sokan fülhallgatóval is kizárják a külvilág ingereinek jó részét. Ez a csökkenés valószínűleg a járművek egyre fejlettebb védelmi berendezéseinek köszönhető. Számítsuk ki az **AG3:AG25** cellákba, hogy az adott évi személyi sérüléssel járó balesetek hány százaléka származott a gyalogosok hibájából. Készítsünk ebből új diagramlapra oszlopdiagramot lineáris trenddel a minta szerint. A diagramlap neve **Gyalogshiba** legyen.

Diagram minták:





A megoldásban saját függvény vagy makró nem használható.

Beküldendő egy tömörített *i654.zip* állományban a táblázatkezelő munkafüzet, illetve egy rövid dokumentáció, amelyben szerepel a megoldáskor alkalmazott táblázatkezelő neve, verziószáma.

Az adatok forrásai:

https://www.ksh.hu/stadat_files/ege/hu/ege0061.html

https://www.ksh.hu/stadat_files/ege/hu/ege0063.html

https://www.ksh.hu/stadat_files/ege/hu/ege0064.html

https://www.ksh.hu/stadat_files/ege/hu/ege0065.html

https://www.ksh.hu/stadat_files/ege/hu/ege0066.html

https://www.ksh.hu/stadat_files/sza/hu/sza0022.html

https://www.ksh.hu/stadat_files/sza/hu/sza0023.html

https://www.ksh.hu/stadat_files/sza/hu/sza0026.html

https://www.ksh.hu/stadat_files/sza/hu/sza0039.html

Letölthető fájl: **balesetek.txt**

(10 pont)

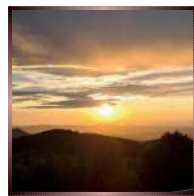


Beküldési határidő: 2025. március 17.

Elektronikus munkafüzet: <https://www.komal.hu/munkafuzet>



A Föld sugarának mérése egy tájképről



Számos elemi módszer létezik a Föld közelítőleg gömb alakjának bizonyítására. Nézzük meg a tengerpartról, ahogy a távolodó vitorlás törzse, majd vitorlája tűnik el, miközben a horizont alá süllyed. Vagy figyeljük meg holdfogyatkozásakor a Föld kör alakú árnyékát, ahogy Arisztotelész is tette. Vegyük észre, hogy északabbra utazva magasabban látjuk a Sarkcsillagot, és több csillag van, ami sosem megy a horizont alá; és azt is, hogy nyugatabbra utazva később nyugszik a nap – időzónákra is emiatt van szükségünk.

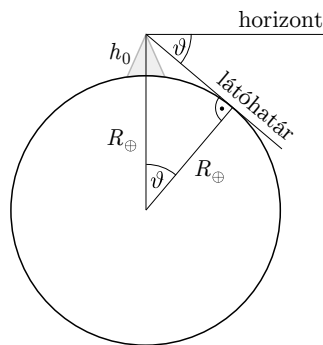
Ha a *gömbség* kérdésén túljutunk, azt a kérdést is feltehetjük magunknak, hogy *mekkora* ez a gömb. Erre elsőként Eratoszthenész adott választ a Nap delelési magasságának, pontosabban az árnyékok hosszának vizsgálatával, amelyek különböző földrajzi szélességeken különbözőnek bizonyultak.

Cikkünkben egy egyszerű alapokon nyugvó mérési módszert mutatunk a Föld sugarának meghatározására, amelyhez – földrajzi adatok mellett – csupán egy tájképre van szükségünk.

Horizontális depresszió

Mi is a horizont? A csillagászatban a vízszintes irányra, de köznapi értelemben talán leggyakrabban a látóhatárra vonatkozik: ahol egy nagy síkságon a felszín és az égbolt „összeér”. Bár ez a két megközelítés hasonló eredményre vezet, mégis van különbség közöttük, ezért tisztázzuk: a továbbiakban a horizont szóval a megfigyelőtől tekintett vízszintes irányra utalunk. De miért van különbség a horizont és a látóhatár között?

Egy gömbtől távolodva egyre kisebb és kisebb szög alatt látjuk azt; ebből a szögből és a távolságunkból pedig a gömb sugara meghatározható. Ez a Föld esetén is igaz: míg egy nagy síkságon állva a felszín a horizonton (tehát vízszintes irányban) látszik véget érni, egy magas hegyről már bizonyos szöggel beláthatunk a horizont alá is – ezt nevezzük depressziószögnek (ϑ). Ahogy az 1. ábráról is látszik, egy matematikailag egyszerű problémával állunk szemben. A ϑ depressziószög, a hegy h_0 magassága, valamint a Föld $R_\oplus$ sugara között könnyen kapcsolat teremthető¹:



1. ábra

$$\cos \vartheta = \frac{R_\oplus}{R_\oplus + h_0}.$$

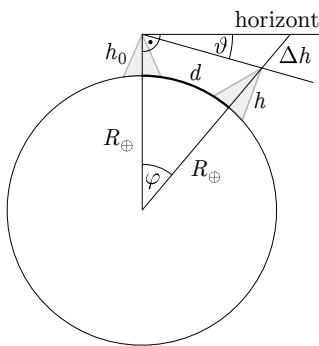
¹A légkör fénytörésének hatásaival – annak bonyolultsága, időjárástól való függése miatt – itt, és a továbbiakban se foglalkozunk.

Ebből – a Föld $R_{\oplus} = 6370$ km átlagos sugarának ismeretében – az következik, hogy például egy $h_0 = 1000$ m magasságú hegyen állva $\vartheta = \arccos\left(\frac{6370}{6370+1}\right) = 1,0^\circ$ depressziószöggel látunk be a horizont alá.

Mindez azt is mutatja, hogy a Föld sugarának megméréséhez nincs más teendőnk, mint felmennünk egy síkság fölé emelkedő magas hegyre jó látási viszonyok között, és megmérni, hogy a horizontnál mennyivel van alacsonyabban a látóhatár. 1 fok különbség már szabad szemmel is könnyen látható, kistávcsővel pedig jól mérhető. Azonban míg ez a módszer *matematikailag* egyszerű és szép, van egy jelentős gyakorlati nehézsége: azt sajnos nem látjuk közvetlenül, hogy *hol van a horizont*.

Mérés tájképről

A megoldáshoz a fentiekhez hasonló elven alapuló, de összetettebb módszert használunk: azt vizsgáljuk, hogy egyes hegycsúcsok a horizonthoz képest milyen ϑ depressziószöggel látszanak; több hegycsúcs segítségével pedig a horizont helyzete is meghatározható. A méréshez felhasználunk egy tájképet, valamint egyes hegycsúcsok, hegygerincek tengerszint feletti magasságát és a megfigyelőtől vett távolságát. Ezen mennyiségek elemi módszerek (pl. geodéziai mérőtornyok, barométer) segítségével meghatározhatóak.



2. ábra

Egymás alatt látszó hegyek. Kezdjünk az egyszerűbb, két dimenziós problémával, amikor néhány hegycsúcs éppen azonos irányban van, így azok egymás alatt látszanak, különböző depressziószögek-nél. Egyelőre figyelmen kívül hagyva, hogy a horizont helyét továbbra se ismerjük, teremtsünk kapcsolatot egy hegynek az észlelőtől a gömb mentén mért d távolsága, a h tengerszint feletti magassága és a ϑ depressziószöge között a Föld $R_{\oplus}$ sugara és az észlelő h_0 tengerszint feletti magassága segítségével! Ebben a 2. ábra segít.

A hegycsúcs Föld középpontjából tekintett φ szögtávolsága a d távolsággal egyszerűen kifejezhető:

$$\varphi = \frac{d}{R_{\oplus}}.$$

Látható hegyek esetében $d \ll R_{\oplus}$, így $\varphi \ll 1$. Az észlelő távolsága a Föld középpontjától $R_{\oplus} + h_0$, a hegycsúcsé $R_{\oplus} + h$. Vegyük a hegy fölötti azon pontot, amely épp a horizontunkon van, ennek a hegycsúcs feletti magassága legyen Δh . A ϑ depressziószög épp az ezen pont és a hegycsúcs közötti szög, amelyet lefelé mérve veszünk pozitívnak. A 2. ábra alapján:

$$R_{\oplus} + h + \Delta h = \frac{R_{\oplus} + h_0}{\cos \varphi} \approx R_{\oplus} \frac{1 + \frac{h_0}{R_{\oplus}}}{1 - \frac{1}{2}\varphi^2} \approx R_{\oplus} \left(1 + \frac{h_0}{R_{\oplus}} + \frac{1}{2}\varphi^2\right),$$

ahol a következő közelítéseket használtuk: $\cos \varphi \approx 1 - \frac{1}{2}\varphi^2$, ha $\varphi \ll 1$, valamint $\frac{1}{1+x} \approx 1 - x$ és $(1+x)(1+y) \approx 1 + x + y$, ha $|x| \ll 1$ és $|y| \ll 1$. Ebbe φ fenti kifejezését behelyettesítve és rendezve:

$$h = h_0 - \Delta h + \frac{d^2}{2R_{\oplus}}.$$

Mivel a hegyek magassága a Föld sugaránál sokkal kisebb, a hegycsúcsok légvonalbeli távolsága első közelítésben d . Emellett φ is kicsi, így a két hegyen a „fölfelé” irány csak kissé különbözik egymástól. Végül ϑ is kicsi, így a hegycsúcs és a felette kijelölt pont magasságkülönbsége első rendig közelítve:

$$\Delta h \approx \vartheta d.$$

Ezt felhasználva a csúcs h magassága:

$$h = h_0 - \vartheta d + \frac{d^2}{2R_{\oplus}}.$$

Mivel a horizont magasságát a tájképen nem ismerjük, vezessük be az α szögeket, amelyeket ϑ -val azonos irányban (lefelé), de egy tetszőleges kezdőponttól mérünk (ez lehet például a legmagasabban látszó hegycsúcs). A horizont helyzetét így a választott referenciaponthoz képest az $\alpha(\vartheta = 0) \equiv \alpha_0$ szög írja le, amely egyelőre ismeretlen. A fenti kifejezés $\vartheta \equiv \alpha - \alpha_0$ helyettesítéssel és kisebb átrendezéssel a következő összefüggésre hozható:

$$f(d, h, \alpha) \equiv h + \alpha d = h_0 + \alpha_0 d + \frac{d^2}{2R_{\oplus}}.$$

Vegyük észre: ha az $f(d, h, \alpha)$ értékeket d függvényében ábrázoljuk, egy parabolát kapunk, amelynek illesztési paramétereivel h_0 , α_0 és $R_{\oplus}$ kifejezhető.

A mérés elvégzéséhez szerencsére nincs szükségünk számos, éppen egymás mögött elhelyezkedő hegycsúcsra, hiszen más felszínformák, például egymás felett látszó gerincek is megfelelőek – bár ezek esetén jellemzően nehezebb és pontatlanabb a megfigyelt pont h magasságának meghatározása.

A módszert a gyakorlatban is kipróbáltuk a Nemzetközi Csillagászati és Asztrofizikai Diákolimpia 2024-es magyar keretével az egyik felkészítő hétvégéjükön. A mérést a diákok Piskés-tetőről, kamera nélkül, csupán egy kistávcsővel végezték, a Szitnya és az alatta látszó gerincek, vonulatok segítségével. Az észlelőhely h_0 tengerszint feletti magasságának ismeretében eggyel kevesebb szabad paraméterünk van, így a probléma visszavezethető egyenesillesztésre, az adatfeldolgozás így milliméterpapíron történt, az egyenest „kézzel” illesztve. A „szemre” való becslések miatt a sugárra nem tudtak reális becslést adni, de a Föld görbültségét így is sikeresen bizonyították.

Tájkép. Vizsgáljuk a módszert általánosabban, immár három dimenzióban: hogyan végezhetjük el a fenti mérést nem egymás mögött, hanem több különböző irányban elhelyezkedő hegycsúcsok, azaz egy *tájkép* (3. ábra) segítségével? Ennek

több fontos előnye is van: jóval több adatpont áll rendelkezésünkre, azok könnyebben beazonosíthatóak, magasságuk is pontosabban meghatározható, és nem kell speciális elrendezést keresni.



3. ábra

A fénykép a Piskés-tetői csillagvizsgáló teraszáról (kb. 920 m magasságból) készült nyugati irányba. A 4. ábrán bejelölt csúcsok távolságát és magasságát², valamint az eredeti, vágtatlan képen pixelben leolvasható koordinátáit (a kép bal felső sarkától mérve) az 1. táblázatban gyűjtöttük össze.

A fenti, kétdimenziós módszer számolásai természetesen továbbra is érvényesek lennének, amennyiben a horizont a képen vízszintes lenne: ekkor az α szögeket nem egy tetszőleges ponttól, hanem egy tetszőleges, vízszintes vonaltól mérhetnénk. Azonban a kép *nem pontosan vízszintes*, a horizontnak van valamekkora dőlésszöge! Tehát az α szögeket egy, a fénykép alapvonalához képest ismeretlen ε dőlésszögű, a valóságban vízszintes egyenestől kell mérni.

A horizontnak a vízszintestől való apró, egy fok alatti eltérései is hatalmas hibát okoznak, hiszen egymástól távol látszó hegyek közötti kicsiny látszólagos magasság-



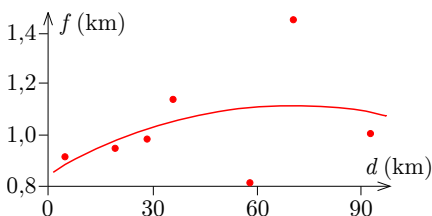
4. ábra

²A magasságadatok a hegyek talajszinten mért magasságai, a képen viszont a fák koronaszintjét látjuk – kivéve a Szandát, ahol a kőbánya miatt nincsenek a csúcson fák. A Föld sugarának meghatározása szempontjából csak a relatív magasságoknak van jelentősége, így az egyszerűség kedvéért a Szanda magasságát csökkentettük 15 méterrel.

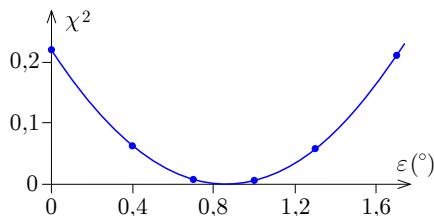
csúcs	távolság (km)	magasság (m)	x (pixel)	y (pixel)
Szanda	35,82	490	516	1728
Csóványos	70,34	938	767	1694
Nagy-hegy	28,46	467	1188	1728
Tepke	19,30	566	1188	1733
Ágasvár	4,88	788	1188	1754
Szitnya	92,55	1009	2530	1671
gerinc	58,0	610	2530	1682

1. táblázat

különbségekből számolunk. Az 5. ábrán látható, hogy ha ezzel nem foglalkoznánk, akkor az $f(d)$ grafikon pontjai egyáltalán nem illeszkednének egy parabolára (és ha mégis „rákényszeríténénk” egy illesztést, akkor abból a Föld sugarára negatív érték adódna). Az optimális dőlésszög megkereséséhez a parabolaillesztés különböző ε értékek esetén elvégezhető, és az illesztések χ^2 értékeinek segítségével megvizsgálható, hogy mikor a legjobb az illeszkedés³. Ez megadja a keresett ε dőlésszöget, ami a mérésnél használt fénykép esetében $\varepsilon = 0,015 = 0,86^\circ$ -nak adódott (6. ábra).



5. ábra



6. ábra

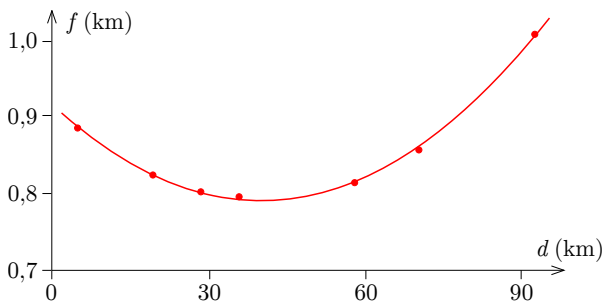
Ezután ki tudunk jelölni a képen egy tetszőleges, ilyen dőlésszögű egyenest a horizont közelében, amitől az α szögeket mérjük. Referenciaegyenestnek a képen legmagasabban látszó Szitnya csúcsán át húzott egyenest választottuk. Az α szögek kiszámolásához szükség van egy szög-pixel kalibrációra is, ezt két (a képen aránylag távol látszó) csúcs vízszintes szögtávolságának ismeretében lehet megkapni: az Ágasvár és Szitnya közötti látószög a kép készítésének helyéről $24,7^\circ$, amiből az arány $s = 0,000321/\text{pixel} = 0,0184^\circ/\text{pixel}$. Ezeknek a paramétereknek a segítségével a 4. ábrán bejelölt csúcsokra már kiszámolhatjuk az ábrázolandó értékeket: x_{rel} és y_{rel} a Szitnyához viszonyított relatív koordináták pixelben, $\alpha = s(y_{\text{rel}} + \varepsilon x_{\text{rel}})$ és $f = h + \alpha d$, amelyeket a 2. táblázatban foglaltunk össze.

³Az illesztés jóságát a χ^2 értéke mutatja: minél kisebb, annál jobban illeszkednek az egyes mérési pontok az illesztett görbére. A legegyszerűbb esetben, amikor az egyes mérési pontok hibája megegyezik, így számolható: $\chi^2 = \sum_i (y_i - f(x_i))^2$, ahol y_i az i -edik mérési pont értéke, $f(x_i)$ pedig az illesztett görbe által felvett érték ebben a pontban.

csúcs	d (km)	h (km)	x_{rel}	y_{rel}	α (°)	α (rad)	f (km)
Szanda	35,82	0,490	-2014	57	0,490	0,00855	0,796
Csóványos	70,34	0,938	-1763	23	-0,065	-0,00114	0,858
Nagy-hegy	28,46	0,467	-1342	57	0,676	0,01179	0,853
Tepke	19,30	0,566	-1342	62	0,768	0,01340	0,825
Ágasvár	4,88	0,788	-1342	83	1,153	0,02013	0,886
Szitnya	92,55	1,009	0	0	0	0	1,009
gerinc	58,0	0,610	0	11	0,202	0,00353	0,815

2. táblázat

Az $f = h + \alpha d$ értékeket a d távolság függvényében ábrázolva, majd a



7. ábra

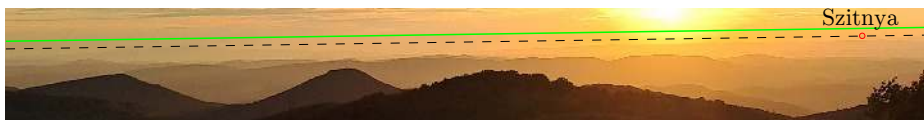
pontokra parabolát illesztve megkapjuk a Föld $R_{\oplus}$ sugarát, a horizont α_0 eltolását a referenciaegyenesükhöz képest, valamint az észlelő h_0 tengerszint feletti magasságát.

Az illesztés a 7. ábrán látható, az illesztési paraméterekre pedig a következő értékeket kapjuk:

$$\begin{aligned}
 h_0 &= 915 \text{ m} \pm 5 \text{ m}, \\
 \alpha_0 &= -0,0063 \pm 0,0002 = -0,36^\circ \pm 0,01^\circ, \\
 R_{\oplus} &= 6350 \text{ km} \pm 150 \text{ km}.
 \end{aligned}$$

Látható, hogy a Föld görbültségét bizonyítottuk, és 6370 km-es átlagos sugarát hibahatáron belül visszakaptuk. Az illesztés alapján a horizont az önkényesen kiválasztott (ε szöggel elforgatott) egyenes felett $0,36^\circ$ -kal van, amely szintén összhangban van a valóságos adatok alapján számolt értékkel. Végül h_0 értéke is reális, hiszen a fénykép néhány tíz méterrel Pizskés-tető 944 m magasságú csúcsa alatt készült.

A 8. ábrán α_0 ismeretében berajzoltuk a tájképre a horizontot is (zöld egyenes), amely az általunk választott, a Szitnya csúcsán áthaladó, ε szöggel elforgatott referenciaegyenessel (szaggatott vonal) párhuzamos, és a szög-pixel kalibrációnak megfelelően 20 pixellel felette halad.

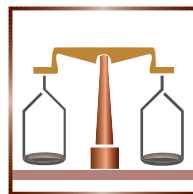


8. ábra

A tájkép használata a fent említetteken kívül egy további igen lényeges előnnyel is jár a kétdimenziós vizsgálattal szemben. Ugyanis egy irányban elhelyezkedő felszínformákat vizsgálva csak az *ezen irány menti* görbületet mérjük, azaz ez alapján bolygónk akár henger alakú is lehetne! A fenti, háromdimenziós vizsgálattal azonban az adatpontokat számos különböző, egymástól távoli irányban vesszük fel, így azok a fenti módon való illeszkedése bizonyítja: a görbületi sugár – ilyen pontosság mellett – minden irányban azonos, azaz a Föld, legalább közelítőleg, *gömb alakú*.

Varga Vázsony, Veres Gábor, Vankó Péter

Mérési feladatok megoldása



M. 433. *Próbáljunk különböző tömegű kavicsokat vagy köveket minél messzebb dobni. Ábrázoljuk a dobás átlagos távolságát a tömeg függvényében. Mekkora tömegű kavicsot lehet a legmesszebb hajítani?*

(6 pont)

IYPT feladat nyomán

Megoldás. A feladat annak megállapítása, hogy milyen tömegű kavicsot lehet a legmesszebbre eldobni. A mérést egy elhagyatott, közel vízszintes útszakaszon végeztem. A felhasznált eszközök: digitális konyhai mérleg ($\pm 0,5$ g hiba), lézeres távmérő (20 méteres méréstartomány), táblák, zsírkréták és kavicsok.

Az úton 10 méterenként kis táblát helyeztem el, hogy könnyebb legyen a távolságokat mérni. A megfelelő kavics kiválasztása után megmértem a tömegét, zsírkrétával megjelöltem, hogy könnyebb legyen megtalálni, majd megpróbáltam körülbelül 45° -os szögben elhajítani. A segítőm figyelte, hogy a kavics hol esett le. A lézeres távmérővel megmértem ennek a pontnak a távolságát a legközelebbi tábláig, és ebből meghatároztam a dobás távolságát. Minden kavicsal (lehetőség szerint) öt mérést végeztem.

Az eldobás erősségét nem lehet állandónak tartani. A mérés során érezhetően elfáradtam, és ez csökkentette a dobások távolságát. A nagyobb kövekből gyakran letört egy-egy kisebb darab, így ezek tömegét mindig újra kellett mérni. A kisebb kövek pedig könnyen elvesztek leesés után (ezért van ahol kevesebb mérés van). A mérleg pontossága miatt a legkisebb kavics tömeg, amivel mértem 2 g volt. A legnagyobb kő, amelyet még eldobtam, több mint 3 kg-os volt: itt már jelentősen csökkent a hajítás távolsága. A közvetlenül mért adatokat az *1. táblázatban* foglaltam össze. Az egyes tömegekhez tartozó hajítási távolságokat átlagoltam, és meghatároztam az értékek szórását. Ahol kis mértékben változott a tömeg, ott a tömeget is átlagoltam, valamint kiszámoltam a tömegek logaritmusát, hiszen a több mint három nagyságrend miatt célszerű a tömeget logaritmikusan ábrázolni. Ezeket a számított értékeket a *2. táblázatban* foglaltam össze.

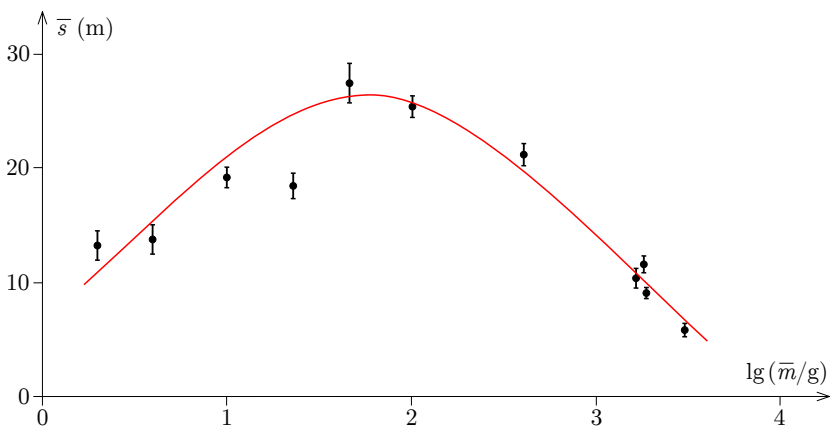
m (g)	s (m)	m (g)	s (m)	m (g)	s (m)	m (g)	s (m)
2	14,85	24	17,26	102	27,31	1689	10,59
2	15,09	23	16,29	102	24,58	1689	9,78
2	13,12	23	19,61	102	25,22	1739	12,05
2	11,98	23	18,07	102	24,92	1737	11,15
2	11,73	23	19,09	102	25,23	1787	9,54
4	15,46	45	29,73	393	21,70	1785	9,60
4	14,05	44	28,05	393	20,40	3064	6,15
4	12,39	42	27,31	393	20,00	3063	6,33
10	18,80	42	25,80	393	21,84	3063	5,83
10	20,01	42	24,15	393	22,65	3063	6,39
						3063	5,07

1. táblázat

$\overline{m}$ (g)	$\lg(\overline{m}/\text{g})$	$\overline{s}$ (m)	σ_s (m)	$\overline{m}$ (g)	$\lg(\overline{m}/\text{g})$	$\overline{s}$ (m)	σ_s (m)
2	0,30	13,35	1,57	393	2,59	21,32	1,09
4	0,60	13,97	1,54	1689	3,23	10,19	0,86
10	1,10	19,41	0,86	1738	3,24	11,60	0,63
23	1,36	18,06	1,35	1786	3,25	9,57	0,04
43	1,63	27,02	2,13	3062	3,49	5,95	0,30
102	2,01	25,45	1,07				

2. táblázat

A táblázat alapján elkészítettem a hajítási távolságot a kavics tömegének (pontosabban a tömeg logaritmusának) függvényében ábrázoló grafikont (lásd az *ábrát*). A mérési pontokra egy szabadkézi trendvonalat rajzolva leolvasható, hogy a görbének körülbelül 1,75 és 1,8 között van a maximuma, ami alapján a legmesszebb elhajítható kavics tömege: $m_{\text{opt}} \approx 60$ g. Az elérhető legnagyobb távolság pedig kicsit több, mint 25 m.



A kisebb kavicsok esetében a légellenállás hatása érvényesül fokozottan. A légellenállásból származó fékező erő a kavics sugarának négyzetével, míg a tömege a sugár köbével arányos, így a légellenállásból származó lassulás nagysága a sugárral fordítottan arányos. Három nagyságrenddel kisebb tömeg esetén ez egy nagyságrenddel nagyobb lassulást okoz, így a kis kavicsok sokkal hamarabb lefékeződnek. Az optimálisnál nagyobb kavicsok eldobásánál viszont az okozza a csökkenést, hogy azokat csak kisebb sebességgel sikerül eldobni.

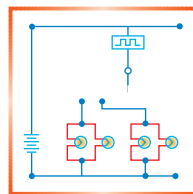
Hegedüs Márk (Budapest, ELTE Apáczai Csere J. Gyak. Gimn., 10. évf.)

Megjegyzések. 1. Az eldobás optimális szöge akkor 45° , ha a talaj szintjéről történik, és a légellenállás elhanyagolható. Itt egyik feltétel sem teljesül, különösen kisebb kavicsok esetén jelentős a légellenállás hatása. Azonban a konkrét adatok ismerete nélkül ezt előzetesen nagyon nehéz megbecsülni – az optimális szög megállapítása különböző tömegű kavicsok esetében egy másik mérési feladat lehetne –, így a körülbelül 45° -os eldobási szög jó választás lehet.

2. Az elérhető távolságok és így az optimális kavicstömeg természetesen nagyon függenek a kísérletet végző ember fizikai erejétől és dobótechnikájától is.

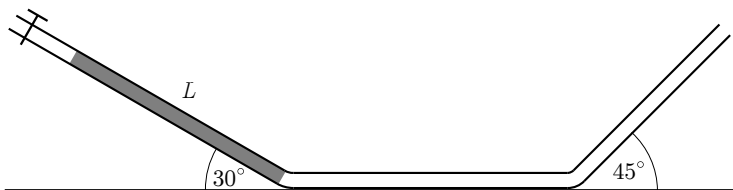
11 dolgozat érkezett. Helyes 4 megoldás. Kicsit hiányos (5 pont) 4, hiányos (3–4 pont) 3 dolgozat.

Fizika gyakorlatok megoldása



G. 866. Egy kétszeresen meghajlított vékony cső három, elegendően hosszú részből áll. A középső rész vízszintes, az első rész 30° -os szöget, a harmadik rész pedig 45° -os szöget zár be a vízszintessel. A szakaszok ugyanabban a függőleges síkban fekszenek, az egyes szakaszokat rövid, törésmentes hajlatok kötik össze. A cső bal oldali végén egy csap annyi levegőt zár el a külvilágtól, hogy a bal oldali csőszakasz alján L hosszúságú higanyszál legyen nyugalmi állapotban. A csapot hirtelen kinyitjuk, emiatt a higanyszál súrlódásmentesnek tekinthető mozgásba kezd. Induláskor a higanyszál eleje a cső első és második szakaszának találkozásánál van.

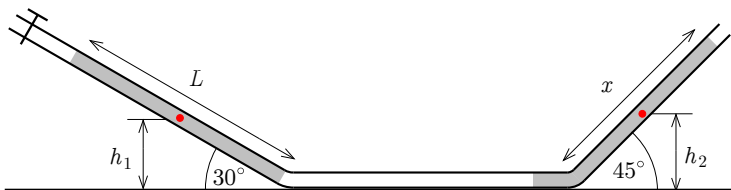
A higanyszálnak maximálisan mekkora része kerül be a cső harmadik szakaszába?



(4 pont)

Közli: Baranyai Klára, Veresegyház

Megoldás. A folyadéknek a 45° -os csőben is legfeljebb ugyanakkora lehet a helyzeti energiája, mint a kezdeti állapotban.



A kezdeti állapotban a folyadék tömegközéppontja

$$h_1 = \frac{L \sin 30^\circ}{2} = \frac{L}{4}$$

magasan lesz az asztal síkja felett. Helyzeti energiája

$$E_{h1} = mgh_1 = LA\rho gh_1 = A\rho g \frac{L^2}{4},$$

ahol m a higany tömege, A a cső belső keresztmetszete, ρ a higany sűrűsége, és g a nehézségi gyorsulás.

A túloldali cső meredekebb, ezért a folyadékszálnak csak egy x hosszúságú darabja fog a ferde részbe feljutni, a többi a vízszintes szakaszban marad. A vízszintes rész az asztal síkjában van, így annak helyzeti energiája nulla, nem kell vele számolnunk. Csak a ferde szárban lévő folyadékszállal foglalkozunk: ennek a résznek a tömegközéppontja

$$h_2 = \frac{x \sin 45^\circ}{2} = \frac{\sqrt{2}x}{4}$$

magasan lesz, helyzeti energiája pedig

$$E_{h2} = m'gh_2 = xA\rho gh_2 = A\rho g \frac{\sqrt{2}x^2}{4},$$

ahol $m' < m$ a ferde csőbe feljutó higany tömege.

A két helyzeti energiát egyenlővé téve:

$$A\rho g \frac{L^2}{4} = A\rho g \frac{\sqrt{2}x^2}{4},$$

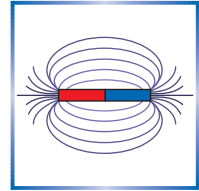
amiből

$$x = \frac{L}{\sqrt[4]{2}} \approx 0,84L.$$

Lakatos Levente (Szekszárdi Garay János Gimn., 9. évf.)

37 dolgozat érkezett. Helyes 17 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 5, hiányos (1–2 pont) 10, hibás 4, nem értékelt 1 dolgozat.

Fizika feladatok megoldása



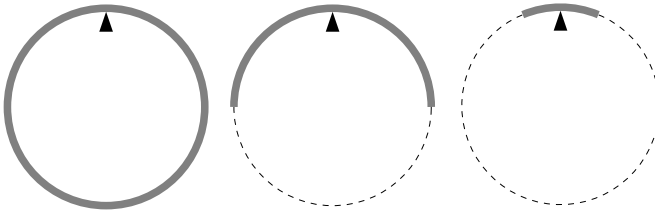
P. 5591. Három különböző fizikai ingát készítünk.

a) Egy R sugarú körre hajlított, homogén tömegeloszlású, vékony rudat az egyik pontjánál egy ékkel belülről alátámasztunk. A kör alakú rúd szabadon elfordulhat az ék körül a saját síkjában.

b) Egy ugyanilyen sugárban meghajlított rúdból félkört vágunk ki, és azt a hosszának felénél támasztjuk alá.

c) Az előző esethez hasonlóan járunk el, de csak egy viszonylag rövid, nyolcadkör alakú körívet helyezünk a közepénél az ékre.

Mindhárom ingát kicsit kitérítjük, és megmérjük a lengéseik periódusidejét. Vajon melyik lengésidő lesz a leghosszabb, és melyik a legrövidebb?



(5 pont)

Közl: Cserti József, Budapest

Megoldás. Vizsgáljuk általánosan a problémát: helyezzünk az ékre egy tetszőleges nyílásszögű, R sugarú körívvé hajlított, m tömegű, homogén rudat (1. ábra).

Az O pontra vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatéka:

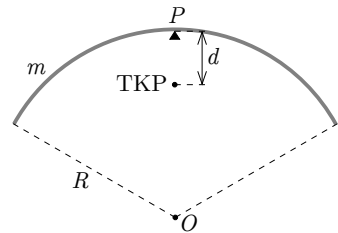
$$\Theta_O = mR^2,$$

hiszen a rúd minden pontja R távolságra van a körív középpontjától. Azonban ugyanezt a mennyiséget felírhatjuk a Steiner-tételt alkalmazva a tömegközéppontra vonatkoztatott tehetetlenségi nyomaték segítségével is:

$$\Theta_O = \Theta_{\text{TKP}} + m(R - d)^2,$$

ahol d a tömegközéppont távolsága az alátámasztási ponttól. A két kifejezés összevetéséből:

$$\Theta_{\text{TKP}} = mR^2 - m(R - d)^2.$$



1. ábra

A P pontra vonatkoztatott tehetetlenségi nyomaték szintén a Steiner-tétel alapján, majd Θ_{TKP} kifejezését behelyettesítve:

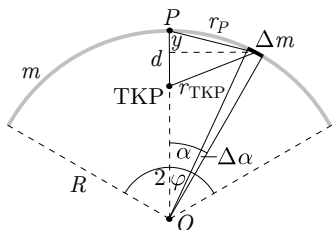
$$\Theta_P = \Theta_{\text{TKP}} + md^2 = m(R^2 - (R-d)^2 + d^2) = 2mRd.$$

Ezt beírva a kis kitérésű fizikai inga jól ismert lengésideő kifejezésébe:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\Theta_P}{mgd}} = 2\pi\sqrt{\frac{2mRd}{mgd}} = 2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}.$$

Láthatjuk, hogy a kifejezés független a körív nyílásszögétől. Tehát mindhárom inga lengésideje ugyanakkora.

Beke Márton Csaba (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.)



2. ábra

Megjegyzés. Több megoldó kifejezte a rúd tömegét a ϱ vonalmenti sűrűséggel a φ félnyílásszög függvényében: $m = 2\varphi R\varrho$, valamint táblázatból megkereste, vagy integrálszámítással meghatározta a körív tömegközéppontjának helyét. Az 2. ábra jelöléseit használva:

$$d = \frac{1}{m} \int y dm = \frac{1}{m} \int_{-\varphi}^{\varphi} R(1 - \cos\alpha) \frac{m}{2\varphi} d\alpha = R \left(1 - \frac{\sin\varphi}{\varphi} \right).$$

A tömegközéppontra vonatkozó tehetetlenségi nyomatékot ennek ismeretében az O pontra vonatkozó tehetetlenségi nyomatékból a Steiner-tétellel, vagy közvetlenül integrálszámítással lehet meghatározni:

$$\Theta_{\text{TKP}} = \int r_{\text{TKP}}^2 dm = \int_{-\varphi}^{\varphi} R^2 \left(1 + \frac{\sin^2\varphi}{\varphi^2} - 2\frac{\sin\varphi}{\varphi} \cos\alpha \right) \frac{m}{2\varphi} d\alpha = mR^2 \left(1 - \frac{\sin^2\varphi}{\varphi^2} \right).$$

Az alátámasztási pontra vonatkoztatott tehetetlenségi nyomaték a Steiner-tétel ismételt használatával, vagy az előző lépés kihagyásával, integrálszámítással is meghatározható:

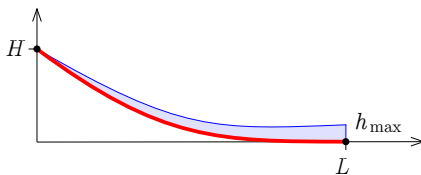
$$\Theta_P = \int r_P^2 dm = \int_{-\varphi}^{\varphi} \left(2R \sin \frac{\alpha}{2} \right)^2 \frac{m}{2\varphi} d\alpha = 2mR^2 \left(1 - \frac{\sin\varphi}{\varphi} \right) = 4\varphi R^3 \varrho \left(1 - \frac{\sin\varphi}{\varphi} \right).$$

Mindezen számításokra azonban a feladat megoldásához nincs szükség, mert a lengésideő képletében d és Θ_P kifejezéseinek behelyettesítése után φ és m (illetve ϱ) is kiesik:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\Theta_P}{mgd}} = 2\pi\sqrt{\frac{2mR^2 \left(1 - \frac{\sin\varphi}{\varphi} \right)}{mgR \left(1 - \frac{\sin\varphi}{\varphi} \right)}} = 2\pi\sqrt{\frac{4\varphi R^3 \varrho \left(1 - \frac{\sin\varphi}{\varphi} \right)}{2g\varphi R^2 \varrho \left(1 - \frac{\sin\varphi}{\varphi} \right)}} = 2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}.$$

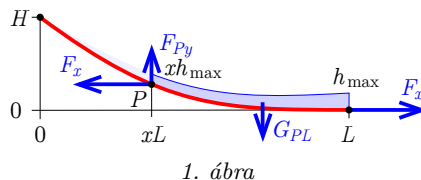
28 dolgozat érkezett. Helyes 6 megoldás. Kicsit hiányos (3–4 pont) 7, hiányos (1–2 pont) 12, hibás 3 dolgozat.

P. 5592. Egy elhanyagolható tömegű, nyújthatatlan kötél felfüggesztési pontjai az ábrán látható módon egymástól L vízszintes és H függőleges távolságra helyezkednek el. Egy hideg téli napon a ϱ sűrűségű hó d szélességben halmozódott fel a kötélen. A hóréteg magassága pedig zérus, illetve $h_{\max}$ értékek között lineárisan változik a vízszintes koordináta függvényében. A kialakult egyensúlyi helyzetben a kötél érintője jobb oldali végpontjánál éppen vízszintes. Határozzuk meg a kötélen ébredő legkisebb és legnagyobb húzóerőt! (5 pont)



Dürer Verseny feladata nyomán

Megoldás. A kötél minden pontjára igaz, hogy az adott pontban ébredő erő iránya megegyezik a kötél ebben a pontban húzott érintőjének irányával. Ebből következik, hogy az L pontban a kötéltre vízszintes irányú erő hat, amit jelöljünk F_x -szel. A kötéltre a végpontokon kívül csak függőleges irányú külső erők hatnak, így a kötélen ébredő erő vízszintes komponense mindenhol F_x .



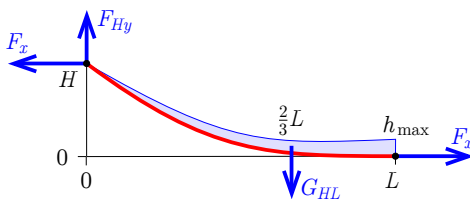
A kötél egy tetszőleges P pontjában, amely az origótól vízszintesen xL távolságra helyezkedik el (1. ábra), a kötélen ébredő erő függőleges komponense megegyezik a P és az L pontok közötti hó súlyával:

$$F_{Py} = G_{PL} = \varrho g d h_{\max} \frac{1+x}{2} L(1-x) = \frac{\varrho g d h_{\max} L(1-x^2)}{2}.$$

Ebből látható, hogy a függőleges erőkomponens az L ponttól a H pontig monoton növekszik, és a H pontban ($x = 0$) lesz maximális:

$$F_{Hy} = G_{HL} = \frac{\varrho g d h_{\max} L}{2}.$$

Az F_x erő meghatározásához írjuk fel a forgatónyomatékok egyensúlyát a H pontra. Az ebben a pontban ható erők forgatónyomatéka nulla, így csak az L pontban ható erő és a hóra ható nehézségi erő forgatónyomatékával kell számolnunk. A hó tömegközéppontjának vízszintes helyzetét nem befolyásolja, ha a havat függőleges irányban képzeletben elmozdítjuk, és az íves alakot egy L és $h_{\max}$ befogójú derékszögű háromszöggé alakítjuk. A háromszög tömegközéppontja az origótól vízszintes irányban $\frac{2}{3}L$ távolságra van, és így a hóra ható nehézségi erő hatásvonalát is ismerjük



2. ábra

már (2. ábra). Ez alapján a forgatónyomaték-egyenlet:

$$F_x H = G_{HL} \frac{2}{3} L,$$

amiből

$$F_x = G_{HL} \frac{2L}{3H} = \frac{\rho g d h_{\max} L^2}{3H}.$$

A feladat kérdéseire adott válasz: a kötélben az L pontban lép fel minimális húzóerő:

$$F_{\min} = F_x = \frac{\rho g d h_{\max} L^2}{3H},$$

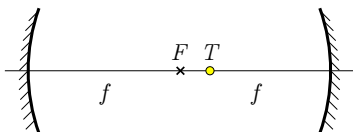
és a H pontban pedig maximális:

$$F_{\max} = \sqrt{F_x^2 + F_{Hy}^2} = \frac{\rho g d h_{\max} L}{6H} \sqrt{9H^2 + 4L^2}.$$

Újpal Bálint (Miskolci Herman O. Gimn., 12. évf.)

15 dolgozat érkezett. Helyes 6 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 4, hiányos (2–3 pont) 5 dolgozat.

P. 5595. Két, kis nyílásszögű, f fókusz távolságú homorú tükört tükröző felületeikkel szemben úgy helyezünk el, hogy optikai tengelyeik egybeessenek, és egymástól való távolságuk $2f$ legyen (lásd ábra).



A közös optikai tengelyre hová helyezzük a T , pontszerűnek tekinthető fényforrást, hogy a belőle induló fénysugarak a két tükörről való visszaverődés után a T ponton menjenek át?

(4 pont)

Közli: Zsigri Ferenc, Budapest

Megoldás. Megmutatjuk, hogy a leírás és az ábra szerinti elrendezésben a T pontszerű fényforrást bárhová tehetjük az optikai tengelyen, onnan a fénysugarak a két tükröződés után ugyanabba a T pontba jutnak. A leképezési törvényt felírjuk az első és a második tükröződésre:

$$(1) \quad \frac{1}{f} = \frac{1}{t_1} + \frac{1}{k_1},$$

$$(2) \quad \frac{1}{f} = \frac{1}{t_2} + \frac{1}{k_2},$$

ahol t_1 és t_2 a tárgytávolságok, k_1 és k_2 a képtávolságok az első, illetve a második tükörtől. Az első tükröződéssel keletkező kép lesz a második tükröződés tárgya, de annak tárgytávolságát már a $2f$ távolságra lévő második tükörtől kell mérni, így:

$$(3) \quad t_2 = 2f - k_1.$$

Ezután két esetet különböztetünk meg, attól függően, hogy hova helyezzük a T pontot.

1. eset. Ha a tárgyat a fókuszpontba helyezzük, akkor a fénysugarak az első tükröződés után párhuzamosan haladnak az optikai tengellyel. Utána a homorú tükréről visszaverődő párhuzamos fénysugarak a fókuszpontba érkeznek, itt lesz a kép helye. Ezt adja eredményül a leképezési törvény is: (1)-ből $t_1 = f$ helyettesítéssel $k_1 = \infty$, így (3) alapján $t_2 = -\infty$, és végül (2) alapján $k_2 = f$, azaz a kép a közös fókuszba esik, ahol a T fényforrás is van.

2. eset. Ha a tárgyat nem a fókuszpontba helyezzük, hanem elé vagy mögé, akkor az (1) egyenletből:

$$\frac{1}{k_1} = \frac{1}{f} - \frac{1}{t_1} \Rightarrow k_1 = \frac{ft_1}{t_1 - f},$$

ezt a (3) egyenletbe behelyettesítve:

$$t_2 = 2f - k_1 = \frac{2f(t_1 - f) - ft_1}{t_1 - f} = \frac{f(t_1 - 2f)}{t_1 - f},$$

majd (2) alapján:

$$\frac{1}{k_2} = \frac{1}{f} - \frac{t_1 - f}{f(t_1 - 2f)} = \frac{t_1 - 2f - (t_1 - f)}{f(t_1 - 2f)} = \frac{1}{2f - t_1} \Rightarrow k_2 = 2f - t_1.$$

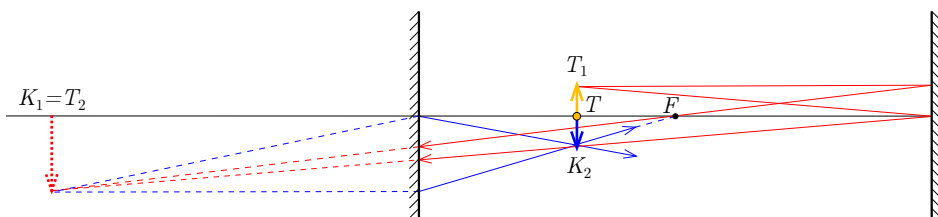
A k_2 képtávolságot a második tükrőtől számítjuk, így a kép valóban éppen a T pontba esik, függetlenül a tárgy helyének megválasztásától.

Tehát azt kaptuk, hogy ha a két tükrő közé bárhova is helyezzük a fényforrást az optikai tengelyen, a második tükröződés után a kép mindig ugyanoda esik, ahová a tárgyat helyeztük. Ennek az érdekes eredménynek az lehet az oka, hogy a két tükrő éppen $2f$ távolságra van egymástól.

Blaskovics Ádám, (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.)

Megjegyzések. 1. A feladat megoldásához nem szükséges, de érdekes megnéznünk a sugarmenteket, az első tükröződés után keletkező köztes képet, és – bár a feladat szövegében pontszerű fényforrás szerepel – kiszámítanunk a nagyítást is.

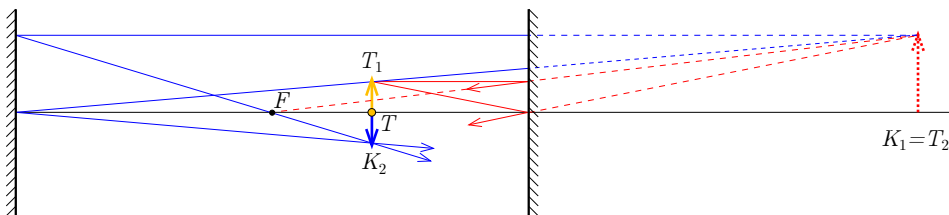
Ha $t_1 > f$, akkor az első kép valódi lenne, de a másik tükrő mögé esik, így a második leképezésnek egy virtuális tárgya van (1. ábra).



1. ábra

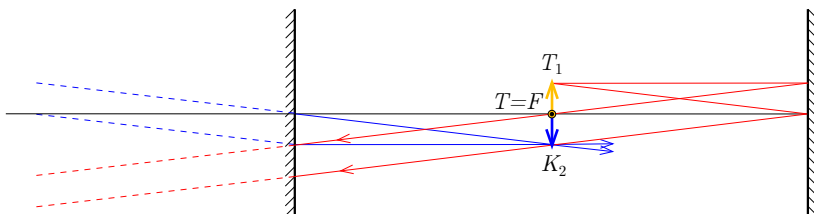
Ha $t_1 < f$, akkor az első leképezésnél látszólagos kép keletkezik, ezt képezi le a második visszaverődés (2. ábra). A második leképezés után viszont mindenképp valódi képet kapunk,

és a végső nagyítás minden esetben $N = N_1 N_2 = \frac{k_1}{t_1} \frac{k_2}{t_2} = -1$ lesz, tehát a kép mérete megegyezik a tárgyéval, de fordított állású lesz.



2. ábra

$t_1 = f$ esetében nem keletkezik az első tükröződés után kép, a fókuszszíkból induló fénysugarak a tükrörről párhuzamosan verődnek vissza, amelyeket a másik tükrör ismét a fókuszszíkba gyűjt, tehát ilyenkor is teljesül, hogy a fénysugarak kétszeres visszaverődés után a T ponton mennek át, és a 3. ábráról leolvasható, hogy a nagyítás ekkor is $N = -1$.



3. ábra

2. Még egyszerűbben megoldható a feladat, ha a leképzési törvény Newton-féle alakját használjuk (lásd a **G. 855.** gyakorlatot a 2024. évi májusi számában és a megoldását a munkafüzetben). Ekkor a „fókuszontúli” tárgy- és képtávolság $x_t = t - f$, illetve $x_k = k - f$, és ezekre teljesül az $x_t x_k = f^2$ összefüggés. Esetünkben ez azt jelenti, hogy az x_t és x_k távolságokat a közös fókuszponttól kell mérni, és így $x_{t2} = -x_{k1}$, amiből azonnal $x_{k2} = -x_{t1}$ következik bármely x_{t1} esetében.

29 dolgozat érkezett. Helyes Blaskovics Ádám megoldása. Kicsit hiányos (3 pont) 7, hiányos (1–2 pont) 15, hibás 3, nem versenyszerű 3 dolgozat.

P. 5597. Három egyforma, m tömegű csillag minden pillanatban egy szabályos háromszöget alkot. Egy adott időpillanatban a háromszög oldalhossza L_0 , ekkor mindhárom csillag sebességének nagysága v_0 , a sebességvektorok iránya pedig érinti a háromszög köré írható kört. Határozzuk meg a pulzáló „hármascsillag” periódus-idejét!

(6 pont)

Közli: Vigh Máté, Biatorbágy

Megoldás. A testek valamilyen ellipszispályán (esetleg körpályán) fognak mozogni. Kepler I. törvénye szerint mindhárom ellipszis egyik fókuszpontja a rendszer tömegközéppontja (a háromszög súlypontja) lesz. A feladat szerint a testek sebességvektora kezdetben érinti a háromszög köré írható kört, ez csak akkor lehetséges,

ha a testek kezdetben az apszispontjaik valamelyikén helyezkednek el – hogy melyiken, az a paramétereiktől függ.

Mindegyik testre a két másik gravitációs ereje hat. A szimmetria miatt a tangenciális komponensek kiejtik egymást, a radiális komponensek összeadódnak. Ez alapján mindegyik csillagra

$$F = 2 \cdot \frac{\gamma m^2}{L_0^2} \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3} \gamma m^2}{L_0^2}$$

erő hat a közös tömegközéppont irányába. Ezért a problémát leegyszerűsítjük: egyetlen m tömegű égitest mozgását kell leírunk, amely egy fiktív, M tömegű, rögzített égitest (mint fókuszpont) körül kering ellipszispályán. Kezdetben a csillagok távolsága a tömegközépponttól

$$R = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} L_0 = \frac{L_0}{\sqrt{3}},$$

és így a fiktív vonzócentrum által kifejtett erő:

$$F = \frac{\gamma m M}{R^2} = \frac{3 \gamma m M}{L_0^2}.$$

Ezt összevetve a csillagra a másik két csillag által kifejtett eredő erővel, a fiktív vonzócentrum tömegére

$$M = \frac{m}{\sqrt{3}}$$

adódik.

A *vis-viva egyenletet* felírva a kezdőállapotra:

$$v_0^2 = \gamma M \left(\frac{2}{R} - \frac{1}{a} \right),$$

majd ebbe M és R kifejezését behelyettesítve és rendezve megkapjuk az ellipszispálya a nagytengelyét:

$$a = \frac{\gamma m L_0}{\sqrt{3}(2\gamma m - L_0 v_0^2)}.$$

Ismert, hogy az M tömegű vonzócentrum körül ellipszispályán mozgó égitest keringési ideje:

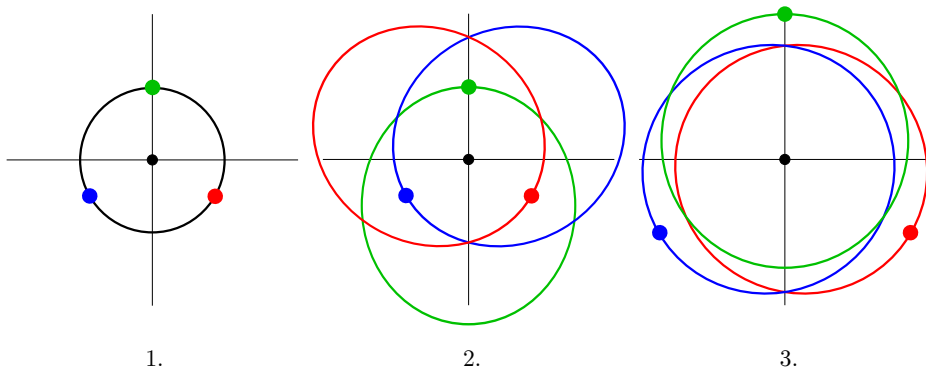
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\gamma M}}.$$

Ebbe a és M kifejezését behelyettesítve és rendezve a pulzáló „hármascillag” keresett periódusideje:

$$T = 2\pi \sqrt{\left(\frac{\gamma m}{2\gamma m - L_0 v_0^2} \right)^3 \frac{L_0^3}{3\gamma m}}.$$

Az eredmény helyességét számítógépes szimuláció elvégzésével is ellenőriztük, amelyet Euler-módszerrel, Python programozási környezetben valósítottunk meg.

A szimulációnak öt paramétere van, amin változtathatunk: a Δt lépésköz, a γ gravitációs állandó, m , L_0 és v_0 . A kiindulási helyzet a feladatban leírtaknak megfelelő. A szimulációt szemléltetésképpen három különböző paraméter-összeállítással elvégeztük, ezek eredménye az *ábrán* látható (a színes pontok a csillagok kezdeti helyzetei, a fekete pont a tömegközéppont). A *táblázatban* a paraméterek és a számított értékek SI egységben értendők. Mindegyik esetben megnéztük az elméleti és a szimulált periódusidő közötti eltérést, amely néhány század százalékának adódott – ezt a szimuláció kicsiny pontatlansága okozta.



szimuláció	m	L_0	v_0	γ	Δt	a	b	T	$\Delta T/T$
1.	1	1	1	1	10^{-5}	0,577	0	3,63	0,030%
2.	1	1	1	0,7	10^{-5}	1,010	0,913	10,0	0,013%
3.	4	2	1,3	1	10^{-5}	1,000	0,988	4,13	0,026%

*A Fizika Közgazra csapat: Illés Gergely Levente, Péter Péter
(Pécsi Janus Pannonius Gimn., 12. évf.)*

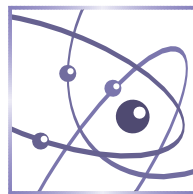
Megjegyzések. 1. A periódusidőre csak akkor kapunk eredményt, ha $L_0 v_0^2 < 2\gamma m$. Ez a feltétel avval ekvivalens, hogy $a > 0$, azaz a csillagok ellipszispályán mozognak, illetve $E_{\text{mech}} = 3 \left(\frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{\gamma m}{L_0} \right) < 0$, azaz a rendszer kötött.

2. A megoldás elején említésre került, hogy a paraméterek értéke szabja meg, hogy a kezdeti állapotban a csillagok a legközelebbi vagy a legtávolabbi helyzetben vannak-e. Könnyen belátható, hogy ha $L_0 v_0^2 = \gamma m$, akkor a csillagok körpályán fognak mozogni (első szimuláció). Ha a kezdeti sebességük ennél nagyobb, akkor a mozgás kezdetén távolodni fognak egymástól (második szimuláció), ha nagyobb, akkor pedig közeledni fognak egymáshoz (harmadik szimuláció).

3. A feladatban az elrendezés szimmetriája biztosítja, hogy a három azonos tömegű csillag a tömegközéppont körüli keringés során végig szabályos háromszöget alkot. Ez azonban, megfelelő kezdeti feltételek mellett, különböző tömegek esetén is teljesül. Erről lehet olvasni *A gravitációs többtestprobléma két speciális esete* című cikkben a KöMaL 2015. decemberi számában (<http://db.komal.hu/KomalHU/cikk.phtml?id=201736>).

28 dolgozat érkezett. Helyes 7 megoldás. Kicsit hiányos (4–5 pont) 8, hiányos (2–3 pont) 3, hibás 10 dolgozat.

Fizikából kitűzött feladatok



M. 438. Adott számú dominót állítsunk fel egy egyenes mentén, egymástól azonos távolságra, majd lökjük meg az első dominót. Mennyi idővel később dől el az utolsó dominó? Hogyan függ ez az idő a dominók közötti távolságtól?

(6 pont)

Közlő: Széchenyi Gábor, Budapest

G. 877. Egy gépkocsi gumibroncsának mérete 205/55 R16. Új korában a bordázott futófelületen a profilmélység 8 mm, néhány év használat után ez a felére kopik. A gumik kopása miatt a gépkocsi sebességmérője többet vagy kevesebbet mutat? Becsüljük meg, hány százalékos az eltérés!

(3 pont)

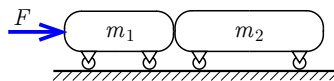
G. 878. Vízszintes sínen, szorosan egymás mellett áll két kiskocsi. Az egyik 100 g, a másik 150 g tömegű. A kocsik a sínen súrlódás nélkül mozoghatnak. A kisebb tömegű kocsival megtoljuk a nagyobbat úgy, hogy a kisebbikre 0,5 N erőt fejtünk ki vízszintes irányban, az *ábra* szerint.

a) Mekkora a kiskocsik közös gyorsulása?

b) Mekkora nyomóerő lép fel a kocsik között?

c) Módosul-e az előző két kérdésre adott válasz, ha a nagyobb kocsira fejtünk ki a másik felé irányuló, ugyancsak 0,5 N nagyságú, vízszintes irányú erőt?

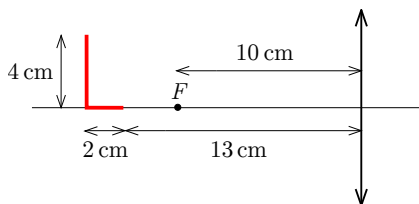
(4 pont)



G. 879. Ugyanaz a repülő, ugyanolyan magasan, ugyanakkora sebességgel, tiszta időben száll az égen. Vannak olyan napok, amikor nagyon hosszú csíkot húz maga után, máskor rövidebbet, és olyan is van, amikor egyáltalán nem látható csík a repülő után. Elsősorban mitől függ, hogy képződik-e csík, és hogy az milyen hosszú?

(3 pont)

G. 880. Vékony, 10 cm fókusztávolságú gyűjtőlencse optikai tengelyére egy L-alakú, világító LED-szalagot állítottunk. Az L-alak 4 cm-es hosszabbik szára merőleges az optikai tengelyre, rövidebb, 2 cm hosszúságú szára pedig az optikai tengelyre illeszkedik úgy, hogy végpontja a lencsétől – az *ábrának* megfelelően – 13 cm távolságban van.



a) Vázlatosan szerkesszük meg a lencse által a LED-szalagról alkotott képet!

b) Számítsuk ki, milyen hosszú a LED-szalag képén az optikai tengellyel párhuzamos, illetve az optikai tengelyre merőleges szakasz! Mekkora ezeknek a részeknek a nagyítása?

(4 pont)

Tornyai Sándor fizikaverseny, Hódmezővásárhely

P. 5625. Egy lovardában a lovas 20 m sugarú körön állandó, 5 m/s nagyságú sebességgel jár körbe-körbe. A körben áll a lovászmester, a kör közepétől 10 m távolságra. Mikor változik leglassabban, illetve leggyorsabban a lovas és a lovászmester közötti távolság? Mekkora sebességgel változik a közöttük lévő távolság ebben a két esetben?

(5 pont)

Közli: *Baranyai Klára*, Veresegyház

P. 5626. Egy motoros álló helyzetből indulva úgy halad egy körpályán, hogy sebességének nagysága egyenletesen növekszik. Az indulástól számítva mekkora szöggel fordul el a pálya mentén, mire gyorsulásának iránya a kezdeti gyorsulásának irányára először lesz merőleges?

(5 pont)

Közli: *Zsigri Ferenc*, Budapest

P. 5627. Könnyen gördülő, M tömegű kiskocsira egy ℓ hosszúságú, m tömegű fonálingát erősítettünk. A rendszert nyugalmi állapotban vízszintes síkra helyezzük, majd a kiskocsit kicsit meglökjük. Mennyi idő múlva lesz újra ugyanekkora a kiskocsi sebessége?

(5 pont)

Közli: *Gelencsér Jenő*, Kaposvár

P. 5628. Egy homogén rúdnak tekinthető ceruzát a radiós végével asztallapra támasztunk, és az eldőlését a hegyéhez erősített, a ceruzára merőleges cérnaszállal akadályozzuk meg.

a) Legalább mekkora a radír és az asztallap közötti tapadási súrlódási együttható, ha a ceruza nem csúszik meg, amikor 15° -os szöget zár be a függőlegessel?

b) Mekkora súrlódási együttható esetén „fektethető le” lassan a ceruza az asztalra anélkül, hogy az alsó vége megcsúszna, ha a cérnaszál mindvégig merőleges a ceruzára?

(5 pont)

Közli: *Szentivánszki Soma*, Budapest

P. 5629. Egy képzeletbeli naprendszer szinte pontos mása a mi Naprendszerünknek, csak minden lineáris méret feleakkora, mint a valódi rendszerben. A képzeletbeli égitestek sűrűsége megegyezik a valódiak sűrűségével. Mekkora a mini föld keringési ideje a képzeletbeli naprendszerben?

(4 pont)

Példatári feladat nyomán

P. 5630. Egy gázkeverék 7 g nitrogént és 20 g argont tartalmaz. Mekkora a gázkeverék állandó térfogaton, illetve állandó nyomáson vett fajhője?

(4 pont)

Példatári feladat nyomán

P. 5631. Közismert, hogy egy egyenletesen töltött, vékony, nagyon hosszú, egyenes száltól R távolságra mekkora az elektromos térerősség. Hasonlítsuk össze ezt a térerősséget egy R sugarú félkör középpontjában létrejövő térerősséggel, feltételezve, hogy a félkört egy ugyanolyan tulajdonságú, ugyanolyan vonalmenti töltéssűrűségű szálból készítettük!

(5 pont)

Amerikai feladat nyomán

P. 5632. Egy nagy méretű fémlemez egyik oldalán egy Q és egy $-Q$ töltésű, pontszerűnek tekinthető golyócska van, egymástól d , a lemeztől $d/2$ távolságra. Mekkora munkával tudjuk a töltéseket

a) a lemez síkjával párhuzamosan mozgatva egymástól nagyon messzire eltávolítani,

b) a lemezre merőlegesen mozgatva a lemeztől nagyon messzire (azonos távolságra) elmozdítani,

c) a lemeztől és egymástól is nagyon messzire vinni?

(5 pont)

Közl: Cserti József, Budapest

P. 5633. Széles, párhuzamos, homogén fénynyalábbal optikai kísérletet végzünk. Ennek során egy kicsiny kockát világítunk meg különböző irányokból, amelynek felülete

a) kormozott,

b) ezüstözött.

Milyen irány vagy irányok esetén lesz a fénysugarak által kifejtett erő a lehető legnagyobb?

(Az egyszerűség kedvéért tekintsük a kormozott felszínt tökéletes elnyelőnek, míg az ezüstözöttet tökéletes visszaverőnek.)

(6 pont)

Dürer Verseny feladata nyomán

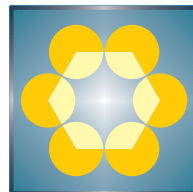


Beküldési határidő: 2025. március 17.

Elektronikus munkafüzet: <https://www.komal.hu/munkafuzet>



MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL FOR SECONDARY SCHOOLS (Volume 75. No. 2. February 2025)



Problems in Mathematics

New exercises for practice – competition K (see page 93): **K. 844.** In a football championship, 5 teams play a round-robin tournament, where everyone plays against everyone once. A win earns 3 points, a draw earns 1 point, and a loss earns 0 points. At the end of the tournament, the points of four teams are 1, 2, 5, and 7. How many points did the 5th team have? **K. 845.** Fill in a 3×3 table with the numbers 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, and 10 such that the sum of any two adjacent cells (horizontally or vertically) is a prime number. How many different solutions exist for this task? (Two solutions are considered different if there is a number that has different neighbors in one arrangement compared to the other one.) **K. 846.** The LIGO company's new building toy consists of identical building blocks (see figure on page 93). Each building block consists of four glued-together small cubes with 2 cm edges. What is the maximum number of building blocks that can fit into a box with dimensions 6 cm $\times$ 6 cm $\times$ 8 cm? **K/C. 847.** How many non-empty subsets of the set $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ have the property that the product of its elements is even and also the sum of its elements is even? **K/C. 848.** Trapezoid $ABCD$ is inscribed in a circle with

radius 10 such that AB is the diameter of the circle and $\angle ABC = 75^\circ$. Calculate the area of trapezoid $ABCD$.

New exercises for practice – competition C (see page 94): **Exercises up to grade 10: K/C. 847.** See the text at Exercises **K. K/C. 848.** See the text at Exercises **K.** **Exercises for everyone: C. 1843.** Boglárka has drawn a rectangle with sides of lengths 75 cm and 105 cm. She divided the rectangle into $75 \cdot 105 = 7875$ squares of area 1 cm^2 , and she also drew one of the diagonals of the rectangle. How many small squares does the diagonal cross? (Proposed by: Katalin Abigél Kozma, Győr) **C. 1844.** Ági uses red and Laci uses blue to color the squares in an $n \times n$ white board. Let (i, j) denote the square in the i^{th} row and j^{th} column. In the first round Ági colors the squares in the main diagonal (from the top left to the bottom right) red. Now they take turns: if Laci colors square (i, j) blue, then Ági colors (j, i) red. They color every square exactly once. The k^{th} row is special if for every blue (k, j) there exists l such that both (k, l) and (l, j) is red. Prove that after finishing the coloring Ági is guaranteed to find a special row. (Proposed by: Zoltán Paulovics, Budapest) **C. 1845.** Ezekiel multiplied two integers together. One of the factors was 74 greater than the other. He made a mistake during the multiplication, as he accidentally wrote a digit that was 3 less than it should have been in the tens place of the product. When checking the multiplication by dividing by the smaller factor, he got exactly 61 as the quotient. What could the two numbers have been? (Proposed by: Gergely Sánta, Budapest)

Exercises upwards of grade 11: C. 1846. What ratio of the five-digit palindromes that are divisible by 11 are not divisible by 121? (Palindromes are positive integers which have the same value when read backwards.) (Proposed by: László Németh, Fonyód) **C. 1847.** Let point P be chosen on side AD of square $ABCD$ such that $\angle CPA = 105^\circ$. Let Q be the foot of the perpendicular from A to CP . Find the exact value of the ratio of the areas of triangles ABQ and ACP . (Proposed by: Bálint Bíró, Eger)

New exercises – competition B (see page 95): **B. 5438.** How many different results can we get by adding together two different n -digit numbers, if each digit in both numbers can only be 4 or 7? (3 points) (Proposed by: Attila Sztranyák, Budapest) **B. 5439.** Rectangle $ABCD$ satisfies $AD < AB < 2AD$. Let point O be chosen on side AB satisfying $OB = AD$. The circle with center O and radius OB intersects side AD at point E . Prove that the area of rectangle $ABCD$ equals $BE^2/2$. (3 points) (Proposed by: Viktor Vigh, Sándorfalva) **B. 5440.** We extended the sides of a triangle in both directions along the lines of the sides, and at each vertex the length of the two extensions equals the length of the side opposite the vertex. Prove the resulting six points are concyclic. (4 points) (Proposed by: Sándor Róka, Nyíregyháza) **B. 5441.** Let α , β and γ denote the angles of a triangle. Prove that $\sin \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\gamma}{2} \geq \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma$. (4 points) (Proposed by: Gábor Holló, Budapest) **B. 5442.** Let n , k and ℓ denote positive integers, and let $g(n, k, \ell)$ denote the number of ways that an $n \times k$ table can be filled with the elements of $\{1, 2, \dots, \ell + 1\}$ such that in each row from left to right and in each column from top to bottom the numbers are monotonously increasing. Prove that $g(n, k, \ell) = g(k, \ell, n)$. (5 points) (Proposed by: Zoltán Gyenes, Budapest) **B. 5443.** For an arbitrary positive integer n let a_n denote the number of positive perfect powers that are at most n (for example, $a_9 = 4$). We call n ‘interesting’, if $a_n \mid n$. Prove that there exists infinitely many interesting positive integers. (6 points) (Proposed by: Attila Sztranyák, Budapest) **B. 5444.** In cyclic hexagon $ABCDEF$ let P denote the intersection of diagonals AD and CF , and let Q denote the intersection of diagonals AE and BF . Prove that if $BC = CP$ and $DP = DE$, then PQ bisects angle BQE . (6 points) (Proposed by: Géza Kós, Budapest) **B. 5445.** Decide whether the following statement is true: if an infinite arithmetic sequence of positive integers includes both a perfect square and a perfect cube, then it also includes a perfect 6^{th} power. (6 points) (Proposed by: Sándor Róka, Nyíregyháza)

New problems – competition A (see page 96): **A. 899.** The world famous infinite hotel with infinitely many floors (where the floors and the rooms on each floor are numbered with the positive integers) is full of guests: each room is occupied by exactly one guest. The manager of the hotel wants to carpet the corridor on each floor, and an infinite set of carpets of finite length (numbered with the positive integers) was obtained. Every guest marked an infinite number of carpets that they liked. Luckily, any two guests living on a different floor share only a finite number of carpets that they both like. Prove that the carpets can be distributed among the floors in a way that for every guest there are only finitely many carpets they like that are placed on floors different from the one where the guest is. (Proposed by: *András Imolay*, Budapest) **A. 900.** In a room, there are n lights numbered with positive integers $1, 2, \dots, n$. At the beginning of the game subsets $S_1, S_2, \dots, S_k$ of $\{1, 2, \dots, n\}$ can be chosen. For every integer $1 \leq i \leq k$, there is a button that turns on the lights corresponding to the elements of S_i and also a button that turns off all the lights corresponding to the elements of S_i . For any positive integer n , determine the smallest k for which it is possible to choose the sets $S_1, S_2, \dots, S_n$ in such a way that allows any combination of the n lights to be turned on, starting from the state where all the lights are off. (Proposed by: *Kristóf Zólmoy*, Budapest) **A. 901.** Let $A'B'C'$ denote the reflection of scalene and acute triangle ABC across its Euler-line. Let P be an arbitrary point of the nine-point circle of ABC . For every point X , let $p(X)$ denote the reflection of X across P . a) Let e_{AB} denote the line connecting the orthogonal projection of A to line BB' and the orthogonal projection of B to line AA' . Lines e_{BC} and e_{CA} are defined analogously. Prove that these three lines are concurrent (and denote their intersection by K). b) Prove that there are two choices of P such that lines $Ap(A')$, $Bp(B')$ and $Cp(C')$ are concurrent, and the four points $p(A)p(A') \cap BC$, $p(B)p(B') \cap CA$, $p(C)p(C') \cap AB$, and K are collinear. (Proposed by: *Aron Bán-Szabó*, Budapest)

Problems of the 2024 Kürschák competition

1. The quadrilateral $ABCD$ is divided into cyclic quadrilaterals with pairwise disjoint interiors. None of the vertices of the cyclic quadrilaterals in the decomposition is an interior point of a side of any cyclic quadrilateral in the decomposition or of a side of the quadrilateral $ABCD$. Prove that $ABCD$ is also a cyclic quadrilateral.

2. The ancient One-Dimensional Empire was located along a straight line. Initially, there were no cities. A total of n different point-like cities were founded one by one; from the second onwards, each newly founded city and the nearest existing city (the older one, if there were two) were declared sister cities. The surviving map of the empire shows the cities and the distances between them, but not the order in which they were founded. Historians have tried to deduce from the map that each city had at most 41 sister cities. (a) For $n = 10^6$, give a map from which this deduction can be made. (b) Prove that for $n = 10^{13}$, this conclusion cannot be drawn from any map.

3. Let p be a prime and $H \subseteq \{0, 1, \dots, p-1\}$ a nonempty set. Suppose that for each element $a \in H$ there exist elements $b, c \in H \setminus \{a\}$ such that $b + c - 2a$ is divisible by p . Prove that $p < 4^k$, where k denotes the cardinality of H .

Problems in Physics

(see page 123)

M. 438. Stand up a given number of dominoes along a straight line equidistant from each other and knock the first domino. How much time will it take for the last domino to fall? How does this time depend on the distance between the dominoes?

G. 877. The size of a car tyre is 205/55 R16. When new, the groove depth on the tread area is 8 mm, but after a few years of use it will be halved. Will the reading on the speedometer be higher or lower due to the wear of tyres? Estimate the percentage difference. **G. 878.** Two trolleys are standing close together on a horizontal track. One

weighs 100 g, the other 150 g. The trolleys can move on the track without friction. The larger trolley is pushed by the smaller trolley such that a horizontal force of magnitude 0.5 N is exerted on the smaller trolley, as shown *in the figure*. *a)* What is the common acceleration of the trolleys? *b)* What is the normal force exerted between the trolleys? *c)* Do the answers to the previous two questions change if the horizontal force of 0.5 N is exerted on the larger trolley towards the smaller trolley? **G. 879.** The same plane cruises in clear weather at the same altitude and at the same speed. Some days it produces a very long contrail, other days a shorter one, and some days there is no contrail at all. What determines primarily whether a trail will form and how long it will be? **G. 880.** An L-shaped luminous LED strip is mounted on the principal axis of a thin converging lens of focal length 10 cm. The longer, 4 cm long leg of the L-shape is perpendicular to the principal axis, and the shorter, 2 cm long leg is aligned with the principal axis such that its end point is 13 cm away from the lens, as shown *in the figure*. *a)* Construct the schematic image of the LED strip formed by the lens. *b)* Calculate the length of the two parts of the image of the LED strip, the one which is parallel and the other which is perpendicular to the principal axis of the lens. What is the magnification of these parts?

P. 5625. In a riding hall, the rider goes round in a circle of 20 m radius at a constant speed of 5 m/s. The groom stands 10 m from the centre of the circle. When does the distance between the rider and the groom change at the smallest and at the fastest rate? In these two cases what are the rates at which the distance between them changes?

P. 5626. A motorcyclist starts from rest and travels in a circular path such that the speed of the motorcyclist increases uniformly. What is the angle turned (with respect to the initial position) until the direction of the acceleration of the motorcycle first becomes perpendicular to the direction of the initial acceleration?

P. 5627. A simple pendulum of length ℓ and of mass m is attached to an easily rolling trolley of mass M . The system is placed on a horizontal plane, and it is at rest initially. Then the trolley is given a slight push. After how much time will the speed of the trolley be the same again?

P. 5628. A pencil, which can be regarded as a uniform rod, is placed on a table top and it rests on its end with an eraser. A thread is attached to the tip of the pencil, perpendicular to the pencil, to prevent it from falling. *a)* What is at least the coefficient of static friction between the eraser and the table top if the pencil does not slip when it makes an angle of 15° with the vertical? *b)* At what coefficient of friction can the pencil be “laid down” slowly on the table without the bottom end slipping, if the thread is perpendicular to the pencil during the whole movement?

P. 5629. An imaginary solar system is an almost exact replica of our solar system, except that all the linear dimensions are half the size of the real system. The density of the imaginary celestial bodies is the same as the density of the real ones. What is the orbital period of the mini-Earth in the imaginary solar system?

P. 5630. A gas mixture contains 7 g nitrogen and 20 g argon. What is the specific heat of the gas mixture at constant volume and constant pressure?

P. 5631. The electric field strength at a distance R from a uniformly charged, thin, very long, straight filament is well known. Compare this field strength with the electric field strength at the centre of a bent filament, having a shape of a semicircle of radius R . The filaments have the same properties and the same linear charge density.

P. 5632. On one side of a large metal plate, there is a point-like ball of charge Q and another of charge $-Q$, at a distance of d from each other and $d/2$ from the plate. How much work is needed *a)* to move the charges parallel to the plane of the plate, and separate them very far from each other, *b)* to move the charges perpendicular to the plate and carry them very far away from the plate (to the same distance), *c)* to move the charges very far away from the plate and from each other?

P. 5633. We carry out an optical experiment with a wide, parallel, homogeneous light beam. A small cube is illuminated from different directions, the surface of which *a)* is sooted, *b)* is silvered. In which direction or directions will the force exerted by the light beam be the greatest? (For the sake of simplicity, consider the sooted surface as a perfect absorber and the silvered one as perfect reflector.)

Az ELTE a legrégebbi, mindmáig
működő magyar egyetem



Természettudományi Kar

Az ELTE Természettudományi Kara (TTK) minden felmérés szerint az egyik legjobb egyetemi kar Magyarországon. A képzések a természettudományok teljes spektrumát felölelik: *matematika, biológia, fizika, földrajz, földtudományi, kémia, környezettan* alapszakok (BSc) – ezeken belül különböző szakirányok (biofizikus, csillagász, meteorológus...) – kerülnek meghirdetésre. <https://ttk.elte.hu/>



Matematikai Intézet



A matematika alapszak (BSc) egyaránt felkészít a kutatói életpályára és a matematika különböző területeken történő magas szintű alkalmazására is – kiváló karrierlehetőségeket nyújtva.

Az intézetben nagy hangsúlyt helyezünk a tehetséggondozásra és arra, hogy a választható szintek és blokkok révén mindenki megtalálja a neki megfelelő kurzusokat.

Az intézetben általános- és középiskolai tanárképzést is folytatunk osztatlan *matematikatanári* szakon. <http://www.math.elte.hu/>

Az ELTE TTK idén december 10-én tartja nyílt napját: https://ttk.elte.hu/nyiltnap_2024. Ha esetleg későn jutna el hozzád ez a hír, a program a fenti linken vissza is nézhető.



Bolyai János Matematikai Társulat

MATEK



BOLYAI

az UTCÁN

az UNESCO
Magyar Nemzeti
Bizottság
védnökségével



2025.03.08.

10.00 - 13.00

Budapest

Blaha Lujza tér



további részletek
bolyai.hu