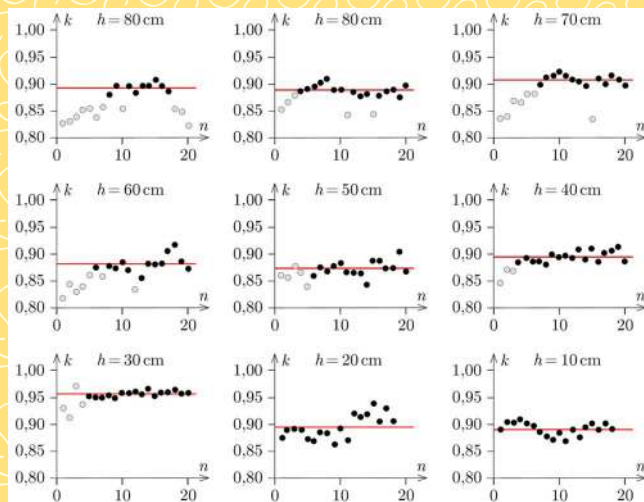


Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok

Informatika rovattal

Egy pingponglabda pattogásai (M. 436. mérés)



A Szoliter lehetséges befejezése



Sherlock Holmes esete a K. 819-es feladattal |
Bonyolult összegek és szorzatok | Matematika és fizika
feladatok megoldásai | Angol szoliter |
Az Ericsson-díj 2025 felhívása

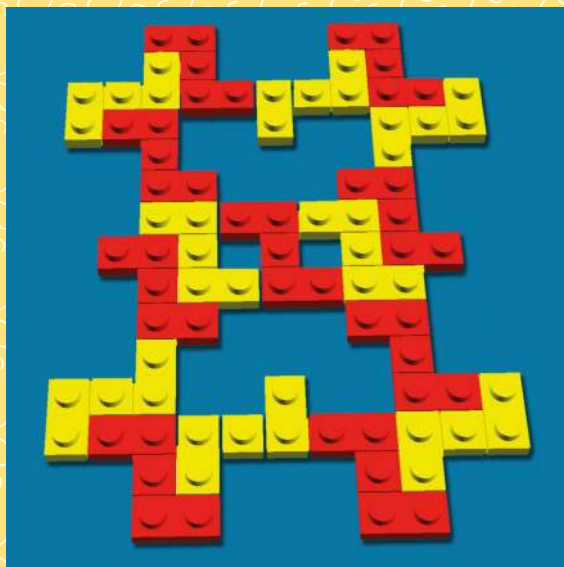


KÖMAL

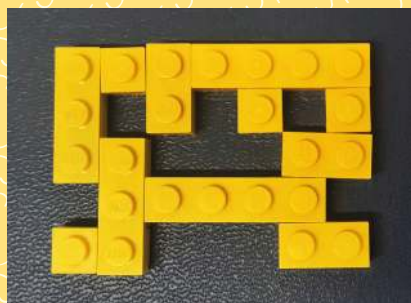
75. évfolyam
3. szám
2025.
március



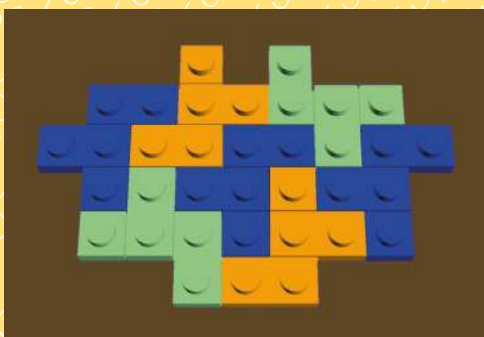
Néhány februári ördöglakat feladvány megoldása



Szimmetrikus alakzat tizenhét darab Z pentominóból



A YES feladvány megoldása



Szimmetrikus alakzat hét darab F pentominóból



Az F, N, Y feladat négy megoldása

KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK

INFORMATIKA ROVATTAL BŐVÍTVE

ALAPÍTOTTA: **ARANY DÁNIEL** 1894-ben

75. évfolyam 3. szám

Budapest, 2025. március

Megjelenik évente 9 számban, januártól májusig és szeptembertől decemberig havonta. ÁRA: 1450 Ft

TARTALOMJEGYZÉK

<i>Freud Róbert</i> : Újabb bonyolult összegek és szorzatok, 1. rész.....	130
<i>Vígh Viktor</i> : Rejtvények, ördöglakatok – Angol szoliter	131
<i>Paulovics Zoltán</i> : Sherlock Holmes: A K. 819. esete	133
<i>Horváth Eszter</i> : Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire	137
<i>Trembeczki Csaba</i> : Megoldásvázlatok a 2025./2. szám matematika gyakorló feladatsorához...	141
Matematika C gyakorlatok megoldása (1837.) .	150
Matematika feladatok megoldása (5413.)	152
A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok (849–853.)	157
A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (852–853., 1848–1852.)	158
A B pontversenyben kitűzött feladatok (5446–5453.)	159
Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (902–905.)	161
Informatikából kitűzött feladatok (655–658.) ..	161
Mérési feladatok megoldása (436.)	169
Fizika feladatok megoldása (5604, 5615.)	175
Fizikából kitűzött feladatok (439., 881–884., 5634–5642.)	186
Problems in Mathematics	189
Problems in Physics	191

Főszerkesztő: KORÁNDI JÓZSEF

Fizikus szerkesztő: VANKÓ PÉTER

Műszaki szerkesztő: FRIED KATALIN

Borító: BURGHARDT ZSUZSA

Kiadja: MATFUND ALAPÍTVÁNY

Alapítványi képviselő: KÓS RITA

Felelős kiadó: KATONA GYULA

Nyomda: OOK-PRESS Kft.

Felelős vezető: SZATHMÁRY ATTILA

INDEX: 25 450 ISSN 1215-9247

A matematika bizottság vezetője:

HERMANN PÉTER

Tagjai: BÁN-SZABÓ ÁRON, BÍRÓ BÁLINT, CZETT MÁTYÁS, GYENES ZOLTÁN, HUJTER BÁLINT, IMOLAY ANDRÁS, KISS GÉZA, KÓS GÉZA, KOZMA KATALIN ABIGÉL, LOVAS MÁRTON, ÖKÖRDI PÉTERNÉ, PACH PÉTER PÁL, PAULOVICS ZOLTÁN, RATKÓ ÉVA, SZTRANYÁK ATTILA, VÍGH VIKTOR

A fizika bizottság tiszteletbeli elnöke:

HOLICS LÁSZLÓ

Vezetője: SZÉCHENYI GÁBOR

Tagjai: BARANYAI KLÁRA, GNÄDIG PÉTER, HONYEK GYULA, OLOSZ BALÁZS, SZÁSZ KRISZTIÁN, VÍGH MÁTÉ, VLADÁR KÁROLY, WOYNAROVICH FERENC

Az informatika bizottság vezetője:

SCHMIEDER LÁSZLÓ

Tagjai: LÓCZI LAJOS, SIEGLER GÁBOR, TÓTH TAMÁS

Fordítók: GYENES ZOLTÁN, TASNÁDI ANIKÓ

Nyelvi korrektor: ANDICS ÁGNES

Szerkesztőségi titkár: ONDINÉ SZABÓ SÁRA

A szerkesztőség címe: 1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/C III. emelet 3.405.

Telefon: +36 20 320-1143

A lap megrendelhető a

<https://komalujsg.myshoprenter.hu>

oldalon keresztül.

Előfizetési díj egy évre: 12 000 Ft

Kéziratokat nem őrzünk meg és nem küldünk vissza.

Minden jog a KöMaL tulajdonosaié.

E-mail: szerk@komal.hu

Internet: <http://www.komal.hu>

This journal can be ordered from the Editorial office:

Pázmány Péter sétány 1/C III. emelet 3.405.

1117–Budapest, Hungary

telephone: +36 20 320-1143

or on the Internet:

<https://komalujsg.myshoprenter.hu>.

A Lapban megjelenő hirdetések tartalmáért felelősséget nem vállalunk.



Újabb bonyolult összegek és szorzatok, 1. rész

A KöMaL 1994. decemberi és 1995. januári számában jelent meg a „Mire jó (időnként) a dolgok elbonyolítása?” című cikk. Ebben bemutattunk néhány módszert bonyolult összegek meghatározására. A „trükk” a legtöbb esetben az volt, hogy egy feladatot megoldottunk egyszerűen is és komplikáltan is, és a második módszerrel éppen a szóban forgó összeget kaptuk, amely persze megegyezett az egyszerűen adódó eredménnyel.

Most néhány újabb összeg és szorzat kiszámítása a cél. A feladatok önmagukban is érdekesek, a megoldásukhoz alkalmazott módszerek pedig számos más feladat megoldása során is hatékony eszközök lehetnek. Van, ahol alkalmazható az imént jelzett „elbonyolítás”, többek megoldása viszont új eljárásokat igényel, amelyekhez adunk néhány általános tippet. A részletes megoldásokat a következő számban közöljük, ugyanitt néhány újabb feladatot is bemutatunk. Addig érdemes a feladatok megoldásával próbálkozni, de mivel meglehetősen nehéz problémákról van szó, senki se keseredjen el, ha nem sikerül megbirkózniia valamelyik feladattal. Próbálkozni mindenképpen érdemes, mert a sikertelen próbálkozásokból is rengeteget lehet tanulni, no meg akkor tudunk egy megoldást igazán értékelni, ha előtte mi magunk is sokat dolgoztunk érte.

$$1. \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} j^3.$$

$$2. \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j}^2.$$

$$3. \sum_{i=1}^{v-1} \left\lfloor \frac{iu}{v} \right\rfloor + \sum_{j=1}^{u-1} \left\lfloor \frac{jv}{u} \right\rfloor, \text{ ahol } u \text{ és } v \text{ relatív prím, 1-nél nagyobb egész számok,}$$

és $\lfloor \alpha \rfloor$ az α (alsó) egészrészét jelenti.

$$4. a) \prod_{j=1}^{n-1} \sin \left(\frac{j\pi}{n} \right); \quad b) \prod_{j=1}^{n-1} \cos \left(\frac{j\pi}{n} \right).$$

Néhány eszköz a feladatok megoldásához

(A) Generátorfüggvényes módszer

Egy polinomokra (vagy végtelen sorokra) vonatkozó azonosságban összehasonlítjuk x^j együtthatóját. Például $(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x)$ bal oldalán ez $\binom{n+1}{j}$, a jobb oldalon pedig $\binom{n}{j} + \binom{n}{j-1}$. Tehát $\binom{n+1}{j} = \binom{n}{j} + \binom{n}{j-1}$. Itt persze a közvetlen kombinatorikai megfontolás jóval egyszerűbb, de sokszor ez a „generátorfüggvényes” módszer működik hatékonyan.

(B) Geometria és/vagy komplex számok.

Érdekes lehet egy összeget vagy szorzatot egy geometriai problémához kapcsolni, vagy pedig – ha valaki már ismeri őket – komplex számokat igénybe venni, esetleg a kettőt kombinálni. Például $\sin \alpha$ a $z = \cos \alpha + i \sin \alpha$ komplex szám képzetes része; a k -adik egységgyökök, azaz az $x^k - 1$ polinom (komplex) gyökei egy, az egységkörbe írt origó középpontú szabályos k -szög csúcsai stb. A komplex számok alkalmazása akkor igazán hatékony, ha a szorzásukat is kihasználjuk, enélkül a megoldások elmondhatók vektorokkal is.

(C) Logikai szitaformula.

Egy N elemű H halmaz részhalmazai $H_1, H_2, \dots, H_t$. Jelölje N_i a H_i elemszámát, N_{ij} a $H_i \cap H_j$ metszet elemszámát, N_{ijk} a $H_i \cap H_j \cap H_k$ elemszámát stb. Ekkor az alábbi képlet megadja azon elemek számát, amelyeket egyetlen H_i sem tartalmaz:

$$N - N_1 - \dots - N_t + N_{12} + N_{13} + \dots + N_{t-1,t} - N_{123} - \dots + (-1)^t N_{12\dots t}.$$

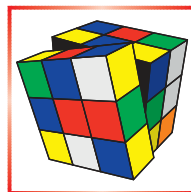
(D) Összegátrendezés.

Egy sok tagú összeget érdemes lehet többféleképpen csoportokra bontani és előbb az egyes csoportokon belüli tagokat összeadni, majd az így kapott eredményeket összegezni.

Freud Róbert

Rejtvények, ördöglakatok

Angol szoliter



Rovatunkban minden hónapban valamilyen szórakoztató matematikai fejtörőt mutatunk be. Ezek között fontos helyet foglalnak el a különböző kirakós játékok, topológiai feladványok, ördöglakatok és a matematikát felhasználó bűvészmutatványok.

Manapság szinte mindent meg lehet találni az interneten, de az igazi élményt az adja, ha a feladatokat magunk oldjuk meg, a bűvészmutatványok trükkjeit mi találjuk ki, és a szükséges kellékeket is mi tervezzük meg és készítjük el. Próbáljuk meg a feladatokat továbbgondolni, általánosítani, igyekezzünk új feladatokat kitalálni.

Az ún. szoliter az egyik legrégebbi logikai játék, eredete bizonytalan, az első írásos feljegyzés róla 1697-ből, XIV. Lajos, a Napkirály idejéből való, ekkoriban kétségkívül népszerű volt. 1710-ben Leibniz, a híres német matematikus cikkében leírja a szabályokat, és a feladvány első ismert elemzését is. A játéknak számos változata van, a legelterjedtebb a kereszt alakú, négyzetrácsos szerkezetű angol tábla, amin 32 bábu áll, középen egy üres helyet hagyva – ebben az írásunkban csak ezzel a változattal foglalkozunk.

Különböző – többnyire fából készült – szoliter játékok a mai napig kaphatók. A képen egy kb. 40 éves, „TAKTIKA” néven árusított változat látható. Egy lépésben egy bábuval átugorhatunk egy vele szomszédos bábut, feltéve hogy az átugrott



bábu mögötti hely üres. Az átugrott bábut ilyenkor le kell vegyük a tábláról. (Csak vízszintesen vagy függőlegesen ugorhatunk, átlósan nem.) A cél egyszerű: lépések sorozatával vegyük le egy kivételével az összes bábut. (A soliter szó jelentése is az, hogy magában álló, egyetlen darab.) Megkövetelhetjük azt is, hogy a megmaradó egyetlen bábu a tábla közepén álljon, de elemzések kimutatták, hogy ez nem érdemi megszorítás – minden megoldásnál az utolsó lépésnél eldönthetjük, hogy közepén, vagy valamelyik külső él közepén fejezzük-e be a játékot, más lehetőség nincs.

A képen látható verzió leginkább retro érdekesség, játékra szinte alkalmatlan a túlzottan sűrűn elhelyezett, rendre megszoruló, csúszós, nehezen megfogható bábuk miatt. Szerencsére nagyon könnyen készíthetünk magunknak kényelmesen használható játékot, akár babszemeket pakolgatva egy kézzel rajzolt négyzetrácsra. Sőt, egy sakk készletben is (legalább) 32 figura van, és a sakktábla megfelelő részén már próbára is tehetjük magunkat. Természetesen számítógépen vagy telefonon is jól játszható a szoliter, a keresőbe a „peg solitaire” kifejezést érdemes írni, de azért mindenkit biztatunk a fizikai kipróbálásra.

Az angol szoliter megoldása kimondottan nehéz, pusztán kitarító próbálgatással – legyen az bármilyen módszeres – csak nagyon nagy szerencsével fogunk a végére érni. Valamilyen előrelátást, intuíciót pedig csak igen hosszú gyakorlással lehet kialakítani. Néhány próbakör után ezért célszerű megpróbálni kisebb részfeladatokra bontani, és ismétlődő mintákat keresni. Le tudunk venni néhány bábut úgy, hogy egyébként a táblán semmi ne változzon?

Jó szórakozást!

Vígh Viktor

Sherlock Holmes: A K. 819. esete



– Dr. Watson, sikerült már megoldania a KöMaL **K. 819.**-es feladatát?

Emlékeztetőül:

K. 819. Kati a táblára felírt 10 darab $+1$ -et. Egyszerre megváltoztathatja tetszőleges 5 számnak az előjelét (nevezzük ezt egy „lépés”-nek). Ezt a változtatást az aktuálisan a táblán levő számok közül tetszőlegesen kiválasztott 5 számmal akár-hányszor megteheti. El tudja-e érni azt, hogy a táblán 9 darab $+1$ és 1 darab -1 szerepeljen? Ha igen, akkor mennyi az ehhez szükséges minimális lépésszám?

– Hogyne, Mr. Holmes, elég volt hozzá három szellős sor.

$+1$	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$	-1	-1	-1	-1	-1
$+1$	$+1$	-1	-1	-1	$+1$	$+1$	-1	-1	-1
$+1$	$+1$	-1	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$

– Áhá, már látom! Úgyesen válaszolt a feladat egy részére.

– Ezt hogy érti?

– Bizonyítani kellett volna, hogy három lépés szükséges is.

– De hát háromnál kevesebbel nyilván nem lehet.

– Nyilván... Persze, hiszen az első lépést követően 5 darab -1 -es van, és egy lépésben a -1 -ek száma ± 5 -tel, ± 3 -mal vagy ± 1 -gyel változhat – amelyek mindegyike páratlan szám –, így még legalább két lépésre szükség van az áhított végállapothoz.

– Már értem! Bizonyítanom kellett volna azt is, hogy háromnál kevesebb lépéssel nem lehet elérni.

– Hát, *bizony*, mert Ön éppenséggel csak annyit bizonyított, hogy a szükséges lépések száma *legfeljebb* három. Semmilyen értéket nem adott a szükséges lépések minimumára. Na, de hadd kérdezzek még a feladattal kapcsolatban! Kipróbálta már például 8 darab $+1$ -essel és feleannyi előjelváltással is?

– Természetesen! Ezt a problémamegoldási stratégiát Ön már belém nevelte az évek alatt. Sőt, 8, illetve 4 darab $+1$ esetén nem sikerült 4, illetve 2 előjel megváltoztatásával elérnem, hogy pontosan egy darab -1 legyen, de 6 esetén 3 lépésben igen.

– Remek, Watson! És több $+1$ -es esetére?

– Azokat az eseteket nem néztem, mert a 10 darabos feladatot sikerült megoldanom.

– Legalábbis részben. . . – dörmögte maga elé Holmes.

– Hogy mondta?

– Semmi, semmi, csak arra hívnám fel a figyelmét, hogy egy probléma megoldása után más is lehet csinálni, mint elégedetten hátradőlni és többet nem foglalkozni a kérdéssel. Érdemes elgondolkozni azon, hogy lehet-e általánosítani a feladatot!

– Teljesen igaza van, Mr. Holmes! – kiáltott Watson, és közben már firkálgatott is a füzetében. – De bárhogyan igyekszem, 12 darab $+1$ -esre és 6 előjelváltásra sem sikerül.

– Biztosan nem igyekszik eléggé – hunyorított rá Holmes.

– Ne mosolyogjon rajtam. . . Szerintem ezt nem lehet!

– Brávó, jó nyomon jár, dr. Watson! Csak ne felejtse el bizonyítani is!

– Bizonyítani? Hogyan lehetne azt bizonyítani, hogy nem lehetséges? Hacsak nem próbálom végig az összes lehetőséget. . .

– Ha maga ennyire ráér, csak bátran! Tanulságos lenne, az biztos. Talán inkább gondolja végig az előző bizonyítást!

– Az első lépést követően 6 darab -1 -es van – kezdte óvatosan Watson – és egy lépésben a -1 -ek száma . . . ± 6 -tal, ± 4 -gyel vagy ± 2 -vel változhat. . .

– Amelyek mindegyike . . .

– Páros szám! Megvan! Ha kezdetben nulla, azaz páros sok -1 -es volt, és egy lépésben csak páros számmal változhat a darabszámuk, akkor végül nem kaphatunk egy darabot belőlük!

– Sőt! Nemcsak egyet, hanem páratlan sokat sem kaphatunk.

– Jó, de a feladat azt kérdezte, hogy egy darab -1 -es lehet-e a végállapot.

– A feladat igen, de mi már jó pár lépéssel odébb vagyunk! Ne maradjon le, Watson! Nem csak azt bizonyította, hogy 12 darab $+1$ -es esetén nem kaphatunk egy darab -1 -est, hanem azt is, hogy hármat, ötöt, hetet, kilencet és tizenegyet sem kaphatunk!

– Ó, valóban! – csodálkozott rá saját teljesítményére Watson.

– Sőt!

– Sőt micsoda? Még más is bebizonyítottam? – kérdezte szinte elképedve Holmest.

– Inkább úgy mondanám, hogy a fentiek alapján megfogalmazhatna egy sejtést. Sikerral járt (azaz néhány lépésben elérte, hogy pontosan egy darab -1 -es legyen a sorban), amikor kezdetben 6, illetve 10 darab $+1$ -essel indult. Ugye, ilyenkor egy körben 3, illetve 5 darab szám előjelét változtatta meg. Ezzel szemben nem járt sikerrel, amikor 4, 8, illetve 12 darab $+1$ -es volt kiindulásképpen. Vagyis amikor 2, 4, illetve 6 darab szám előjelét kellett egy lépésben megváltoztatnia.

– Értem már! – kiáltott fel ujjongva Watson. – Akkor van egy tétel: *Kezdetben $2n$ darab $+1$ -es van, egy lépésben n darabnak változtatjuk meg az előjelét, a cél, hogy végül pontosan egy darab -1 -es legyen. Ha n páratlan, akkor megfelelő lépésekkel elérhetjük a célt, ha n páros, úgy nem.*

– Kissé szerényebben, dr. Watson! Ez egyelőre csak egy sejtés.

– Nem, nem, Holmes. Én már látom a bizonyítást! A 12 darabra elmondott gondolatmenete működik a páros n esetre: kezdetben nulla, azaz páros sok -1 -es volt, egy lépésben a -1 -esek darabszáma páros sokkal változhatott, így végül nem kaphattunk páratlan sokat, például egy darabot.

A páratlan n esetre pedig működik a kezdetben adott konstrukcióm általánosítása: 3 lépésben elérhető, hogy pontosan egy darab -1 -es legyen.

Elegendő csak a $+1$ -esek számát számontartani. Az első lépésben n darab $+1$ előjelét változtatjuk meg, így n darab $+1$ lesz.

A másodikban $\frac{n+1}{2}$ darab $+1$ -es és $\frac{n-1}{2}$ darab -1 -es előjelét, így $n - \frac{n+1}{2} + \frac{n-1}{2} = n - 1$ darab $+1$ -es lesz.

A harmadikban n darab -1 -es előjelét változtatjuk meg, ezzel a $+1$ -esek száma $n - 1 + n = 2n - 1$ darab lesz.

– Brávó, valóban bebizonyította... az egyik felét.

– Ugyan, Holmes! Az ott adott alsó becslés, miszerint legalább 3 lépésre szükség van, itt is áll.

– Egyetértek, ez valóban könnyen látható. Így már teljes a bizonyítás.

– Sőt! Még tovább is van! – folytatta átszellemülten Watson. – A páros n -re elmondottak nem csak akkor igazak, ha végül pontosan egy darab -1 -esnek kell lennie, hanem bármely páratlan darabszám esetén is.

– Igazán sziporkázik ma este, dr. Watson!

– Köszönöm, Mr. Holmes! – mondta Watson, miközben elégedetten dőlt hátra a fotelében.

– Nem emlékszik, mit mondtam pár perce a hátradőlésről?

– Kikérem magamnak, igazán sokat foglalkoztam a feladattal!

– Éppen, hogy csak elkezdtünk gondolkozni... – Kezdte volna Holmes a doktor okítását, amikor Mrs. Hudson nyitotta rájuk kissé hevesen a bejárati ajtót.

– Uraim! Az egész ház visszhangzik a $+1$ -esektől és -1 -esektől! Inkább hallgassák meg, mi történt velem ma délelőtt! Vonattal utaztam hazafelé a Cornwall-i barátnőmtől, amikor az ablakon kitekintve olyat láttam, amit még sosem.

– És, mi volt az? – kérdezte udvarias érdeklődést színelve Holmes.

– Megtudtam, hogy azon a vidéken feketék a birkák.

– Ezért kellett ránk törnie!? – méltatlankodott Holmes.

– Egy egész nyáj fekete birkát látott Cornwall-ban? – kérdezte meglepetten Watson.

– Bizony! Habár nem volt olyan nagy a nyáj...

– Mégis hány darab fekete juhot látott, Mrs. Hudson? – faggatta Holmes gyanút fogva.

– Jó, jó, csak egyet. De attól még igaz, hogy ott feketék a birkák!

– De legalábbis az egyik birka egyik fele... – pontosított Watson.

– ...inkább úgy fogalmaznék, hogy Mrs. Hudson az ablakon kitekintve valaminek látta egy részét, amit feketének tart – kezdte Holmes a szőrszálhasogatást, de látva háziasszonyának sötétülő arckifejezését, gyorsan másra terelte a szót. – Kedves Mrs. Hudson, képzelje csak, mi is éppen fekete birkákról beszélgettünk dr. Watsonnal.

Watson tágra nyílt szemekkel meredt Holmesra, de nem volt ideje közbevágni.

– Éppen azt meséltem a barátomnak, hogy egy kedves juhász ismerősömmel futottam össze a városban, aki hosszasan magyarázott nekem a fekete birkanyájáról és az okos kutájáról – folytatta Holmes. – Ez az okos kutya a pásztor egy fütytyentésére körbeszaladja a 20 fekete birkából álló nyáját, és olyan ügyesen ugat rá 10 birkára, hogy közülük amelyik állt, az lefekszik, és fordítva, amelyik feküdt, az bizony feláll. A birkák maguktól nem változtatják meg a testhelyzetüket, csak folyamatosan esznek. Arra próbáltunk rájönni a doktorral, hogy legkevesebb hány fütytyentéssel tudja elérni a juhász, hogy éppen 14 birka feküdjön, ha kezdetben mindegyik állt.

– Ó, valóban az én fekete birkáimról beszélgettek? – kérdezte kissé elérzékenyülve a háziasszony.

Dr. Watson még mindig döbbenet bámolt, de szeme mozgásából már sejteni lehetett, hogy megpróbál analógiát találni a –1-esek és az ugató kutya között.

– Bizony, lényegében erről. És arra jutottunk, hogy 3 fütytyentés mindig elegendő. Most viszont, miután vásárolt még két birkát... – kezdte Holmes.

– Már nem 10, hanem 11 birkára ugat rá a kutya egy körben, mindig a fele nyájra – szólt közbe Watson, próbálva visszakapcsolódni a beszélgetésbe.

– Igen, nyilván. De ami izgalmasabb: most 3 fütytyentés nem célravezető.

– Négyyszer kell fütytyentenie? – kérdezte bizonytalanul Mrs. Hudson, aki nem igazán értette, hogy pontosan mi történik körülötte.

– Nem jár messze az igazságtól, Mrs. Hudson! Biztos, hogy páros sok kell, ahogyan a mai matekozásunk elején rájöttem. De nincs szükség négy fütytyentésre, elég kettő is, és persze kell is.

– Maguk átmatematizálták az én birkáimat! Igazán szemtelenség volt így félrevezetni engem! – kiáltotta Mrs. Hudson, és indulatosan becsapta maga mögött az ajtót.

– Igaza van! Megyek, és bocsánatot kérek tőle! – tűnt el gyorsan Watson is az ajtó mögött.

– Kár, hogy elszaladtak. A hátralévő esetre, amikor n páratlan és végül pontosan k darab –1-est szeretnénk kapni, szintén lett volna egy jó történetem – jegyezte meg Holmes, és tovább lapozott a KöMaL-ban a B feladatokhoz.

Paulovics Zoltán

Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire



I. rész

1. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket:

a) $9\sin^2 x + 4\sin x - 13 = 0$, (5 pont)

b) $9^{\sqrt{x+3}+1} + 4 \cdot 3^{\sqrt{x+3}} = 13$. (7 pont)

2. A kishegyháti Toldy Ferenc Gimnázium 11.b osztályának heti 5 testnevelés óráját az alábbi elvek szerint kell elhelyezni az órarendben hétfőtől péntekig:

- egyik nap két óra, három további napon egy-egy óra legyen.
- a dupla óra a 6. és 7. órába kerüljön.
- valamelyik nap legyen egy első óra.
- a maradék két óra tetszőleges helyen lehet az elsőtől a hetedik óráig.

a) Hányféle különböző módon helyezhetők el az órák ilyen elvek szerint? (Nem vesszük figyelembe a többi tantárgyból adódó esetleges korlátozásokat.) (6 pont)

Nagy Barnabás tanár úr tanítja a történelmet. A következő hónapban az osztálynak összesen 8 történelem órája lesz, mindegyiken 1-1 tanuló fog felelni. Aki már felelt, biztonságban érezheti magát, ebben a hónapban ő már nem fog szóban felelni. Azok, akik még nem feleltek, a következő órán mind egyenlő valószínűséggel kerülnek sorra. A 30 fős osztályba 18 lány és 12 fiú jár.

b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy ebben az időszakban 3 lány és 5 fiú fog felelni? (6 pont)

3. Egy háromszög oldalainak a hossza egy számtani sorozat három szomszédos tagja. A háromszög egyik szöge 120° , a területe 50 cm^2 .

a) Határozzuk meg a háromszög oldalainak a hosszát. (9 pont)

Egy középiskola 32 fős 12.a osztályában a próbaérettségi dolgozat két geometriapéldája, a 3. és 7. feladat bizonyult a legnehezebbnek. Nyolcan nem tudták megoldani egyiket sem. A 3. feladatot 17-en, a 7. feladatot 12-en oldották meg.

b) Hányan oldották meg mindkét feladatot? (4 pont)

4. Egy négyszög csúcsainak a koordinátái: $A(-3; -1)$; $B(4; -3)$; $C(8; 4)$; $D(1; 6)$.

a) Igazoljuk, hogy az $ABCD$ négyszög paralelogramma. (4 pont)

b) Határozzuk meg annak a körnek az egyenletét, amely érinti mindkét koordinátatengelyt, középpontja az első síknegyedben van és átmegegy a $(8; 1)$ ponton. (7 pont)

c) Fogalmazzuk meg az alábbi állítás megfordítását:

Ha két kör középpontjának távolsága egyenlő a két kör sugarának összegével, akkor a két kör érinti egymást.

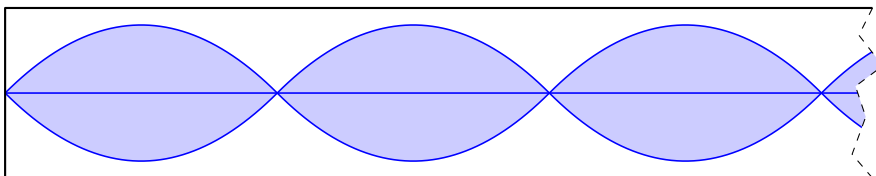
Döntsük el, hogy igaz vagy hamis az eredeti állítás, illetve a megfordítása. (3 pont)

II. rész

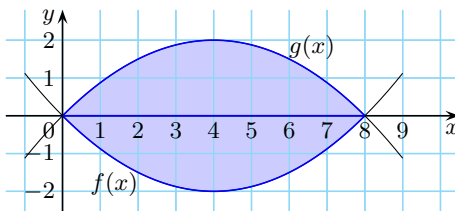
5. a) Oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán:

$$\frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 - 8x} < 0. \quad (7 \text{ pont})$$

Egy 40 centiméter hosszú, 5 centiméter széles fehér szalagot az ábrán látható, kék minta ismétlésével díszítenek.



Az alakzat határoló vonalai az $f(x)$ és $g(x)$ másodfokú függvények grafikonjai. A koordinátatengely egységei a valóságban 1 cm-nek felelnek meg.



b) Adjuk meg az $f(x)$ függvény hozzárendelési szabályát. (4 pont)

c) A szalag területének hány százaléka kék színű? (5 pont)

6. Egy hibás dobókocka a tapasztalatok szerint nem egyenlő eséllyel esik mind-egyik lapjára. Az 1-est 0,06 valószínűséggel, a 2, 3, 4, 5 számokat 0,18, a 6-ost 0,22 valószínűséggel dobjuk ezzel a kockával.

a) Mennyi a dobott szám várható értéke, ha ezzel a kockával dobunk? (2 pont)

Az asztalon van három dobókocka, két szabályos és a fenti tulajdonságú. A kockák külsőre nem különböztethetők meg egymástól. Találomra, vagyis bármelyiket egyenlő valószínűséggel választva kiveszünk egyet közülük, és egyszer dobunk a kiválasztott kockával.

b) Mennyi a valószínűsége, hogy hatost dobunk? (3 pont)

c) Ha hatost dobtunk, mennyi a valószínűsége annak, hogy ezt a nem szabályos kockával dobtuk? (5 pont)

Ügyes Gábor nyert a LOTTÓ-n 2 000 000 forintot. 2025. január 1-én betette a nyereményét a Bravó Bankba. Azzal számol, hogy az éves kamatláb a következő 3 évben 5% lesz.

d) Gábor a befizetett pénzt és kamatait három egyenlő részletben, 2025, 2026, 2027 év végén szeretné felvenni. Mekkora részletekben gondolkozhat, ha a banki kamatláb elképzelése szerint alakul ezekben az években? A választ 1000 forintra kerekítve adjuk meg. (6 pont)

7. a) Oldjuk meg a valós számpárok halmazán az alábbi egyenletrendszert:

$$xy = 16, \quad \log_x y + 6 \cdot \log_y x = 5. \quad (10 \text{ pont})$$

b) Határozzuk meg az alábbi szám utolsó számjegyét:

$$2021^{2022} + 2022^{2023} + 2023^{2024}. \quad (6 \text{ pont})$$

8. Adott a valós számok halmazán értelmezett f függvény:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^3 - 6x^2 + 9x.$$

a) Adjuk meg az f függvény zérushelyeit. (3 pont)

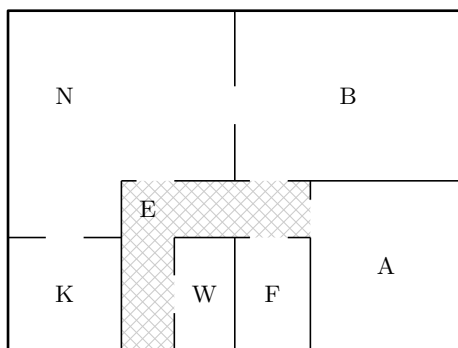
b) Írjuk fel az érintő egyenletét az $x = 2$ abszcisszájú pontban. (5 pont)

A $[0; 4]$ intervallumon értelmezett g valós értékű függvényt az alábbi hozzárendelési szabállyal adjuk meg:

$$x \mapsto 0,5^{x^3 - 6x^2 + 9x}.$$

c) Határozzuk meg a g függvény maximumának helyét és értékét. (8 pont)

9. Egy ingatlanközvetítő iroda egy 3 szobás lakást hirdet. A lakás alaprajzát mutatja az ábra:

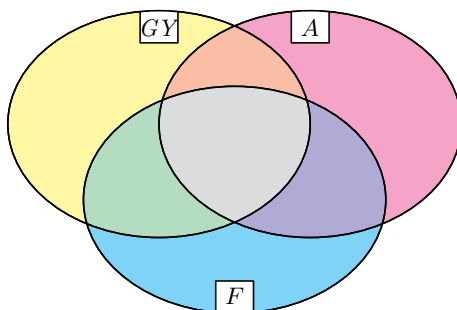


E – előszoba és közlekedő
K – konyha
N – nappali
A – szoba
B – szoba
F – fürdő
W – WC

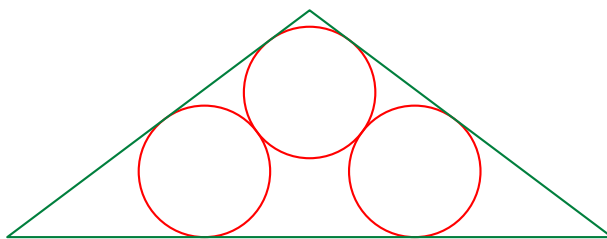
a) Rajzoljuk meg azt a gráfot, amelynek a pontjai a lakás helyiségeit ábrázolják: E, K, N, A, B, F, W, és két pont között akkor vezet él, ha a két helyiséget ajtó köti össze. (2 pont)

Az iroda egy új alkalmazottat szeretne felvenni. A jelentkezők esetében három szempontra különösen figyelnek: rendelkezik-e legalább 5 éves gyakorlattal hasonló munkakörben (GY), van-e angol nyelvvizsgája (A), van-e felsőfokú végzettsége (F). A jelentkezők közül a kívánt gyakorlattal 16-an rendelkeznek, angol nyelvvizsgája van 25 pályázónak, felsőfokú végzettsége 18 embernek van. A gyakorlattal rendelkezők közül nyolcan angol nyelvvizsgával is rendelkeznek. Hét jelentkezőnek van gyakorlata és felsőfokú végzettsége is. A felsőfokú végzettségűek közül tizenketőnek van angol nyelvvizsgája. Mindhárom szempontnak öten felelnek meg. Nem jelentkezett az állásra olyan ember, aki egyik feltételnek sem felel meg.

b) A fenti adatok alapján írjuk be az egyszínű részhalmazokba, hány elemük van. (5 pont)



c) A cég logója egy háromszög, benne 3 egyenlő sugarú kör, amelyek az ábra szerint érintik az oldalakat, illetve egymást.

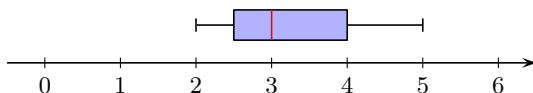


A háromszög oldalai 8 cm, 5 cm, 5 cm hosszúak. Határozzuk meg a körök sugarát. (9 pont)

Horváth Eszter

Megoldásvázlatok a 2025./2. szám matematika gyakorló feladatsorához

1. FókuszPók 28 főnek tartott előadást a cicákról. Mind a 28-an értékelték az előadást egy hagyományos 5-ös skálán. Az eredményeket TörtPapa az alábbi dobozdiagramon ábrázolta:



a) Mi az egyes értékek gyakoriságának legnagyobb, illetve legkisebb lehetséges értéke? (5 pont)

b) Mi az értékelések átlagának legnagyobb, illetve legkisebb lehetséges értéke? (5 pont)

c) TörtOkos fogadott TörtMázlival, hogy az $A = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ számok közül egyet véletlenszerűen sorsolva az prím lesz. Azt nem hallottuk, hogy TörtMázli mire fogadott, de TörtOkos megjegyezte, hogy fogadásai független események.

Adjunk meg egy olyan nem biztos és nem is lehetetlen eseményt, hogy ha TörtMázli arra fogadott, akkor igaz TörtOkos kijelentése. (3 pont)

Megoldás. a) A 28 elemet négy egyenlő részre osztják a kvartilisek, 1-es nincs. Jelölje a minta nemcsökkenően sorba rakott elemeit $m_1, \dots, m_{28}$. Mivel a minimum 2 és $Q_1 = 2,5$, ezért a minta első nyolc eleme: $m_1 = \dots = m_7 = 2, m_8 = 3$. Mivel a medián $Q_2 = 3$, így $m_9 = \dots = m_{15} = 3$. A maximum 5, így $m_{28} = 5$, a minta első 15 és utolsó eleme csak ez lehet. Akkor tartalmazza a legtöbb 3-ast a minta, ha $m_{16} = \dots = m_{21} = 3$ és mivel $Q_3 = 4$, ezért ekkor $m_{22} = \dots = m_{28} = 5$. Akkor lesz a legkevesebb 3-as és 5-ös, és a legtöbb 4-es a mintában, ha $m_{16} = \dots = m_{27} = 4, m_{28} = 5$. Összefoglalva, az egyes értékelések és lehetséges előfordulásai: 1-es 0, 2-es 7, 3-as 8 – 14, 4-es 0 – 12, 5-ös 1 – 7 darab.

b) A legnagyobb átlagot akkor kapjuk, ha a legtöbb 5-öst, majd a legtöbb 4-est tekintjük a lehető legkevesebb 3-assal. Visszafelé: $m_{28} = \dots = m_{23} = 5, m_{22} = \dots = m_{16} = 4, m_{15} = \dots = m_8 = 3$, a többi 2-es. Az átlag ekkor

$$\frac{6 \cdot 5 + 7 \cdot 4 + 8 \cdot 3 + 7 \cdot 2}{28} \approx 3,43.$$

A legkisebb átlaghoz a legtöbb 3-ast vegyük a mintába: $\frac{7 \cdot 5 + 14 \cdot 3 + 7 \cdot 2}{28} = 3,25$. (Ugyanezt a minimális átlagot kapjuk akkor is, ha valahány (legfeljebb 6) 5-ös és ugyanannyi 3-as helyett 4-esek vannak a mintában.)

c) TörtOkos az $O = \{2, 3, 5, 7\}$ eseményre fogadott, ennek az eseménynek a valószínűsége $p_O = \frac{4}{10}$. TörtMázli által fogadott eseményt jelölje M , $\emptyset \subset M \subset A$. Mivel O és M függetlenek, így $p_O \cdot p_M = \frac{4}{10} \cdot \frac{x}{10} = \frac{y}{10} = p(O \cap M)$ valamely $0 < y < x < 10$ egészekre. Átalakítva $2x = 5y$, ami $x = 5, y = 2$ esetén teljesül, ha x, y eleme a $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ halmaznak. Olyan esemény, amelyre $|M| = 5$ és $|O \cap M| = 2$ például $M = \{0, 1, 2, 3, 4\}$: TörtMázli fogadhat az 5-nél kisebb számokra.

2. a) Egy deltoidról tudjuk, hogy húrnégyszög, és a köré írt kör átmérője és az oldalai hosszának mérőszáma egész szám, a kerülete nem nagyobb 34 egységnél. Határozzuk meg, hogy hány nem hasonló, a feltételeknek megfelelő deltoid létezik. (4 pont)

b) Egy tompaszögű háromszög két oldala 20 cm, illetve 30 cm hosszú és a harmadik oldala is egész hosszúságú cm-ben mérve. Adjuk meg, hány darab nem egybevágó, a feltételeknek megfelelő háromszög létezik. (7 pont)

Megoldás. a) Ha egy deltoid húrnégyszög, akkor a szimmetriatengely átlója a körülírt kör átmérője. Thalész tétele miatt ez az átló két olyan egybevágó derékszögű háromszögre bontja a deltoidot, amely befogóinak összege a deltoid kerületének fele, tehát legfeljebb 17 egység. Ennyi lehet a pitagoraszai számhármasság két kisebb számának összege. Ilyen csak három van: 3, 4 (5); 6, 8 (10) és 5, 12 (13). Mivel az első kettőnek megfelelő deltoid hasonló, így két nem hasonló megoldás van.

b) Thalész és Pitagorasz tétele alapján egy $p \leq q \leq r$ oldalhosszúságú háromszög pontosan akkor tompaszögű, ha $p^2 + q^2 < r^2$. Két eset van: a 30 cm-es oldal vagy a leghosszabb a háromszög oldalai közül, vagy nem.

A) Ha a leghosszabb oldal hossza 30 és az ismeretlen oldal hossza x cm, akkor i) a háromszög-egyenlőtlenség alapján $10 < x$ és ii) $20^2 + x^2 < 30^2$, amiből $x < 10\sqrt{5} \approx 22,36$. Innen $11 \leq x \leq 22$, ami 12 darab megoldás.

B) Ha a háromszög leghosszabb oldalának hossza x cm, akkor i) a háromszög-egyenlőtlenségből $x < 20 + 30 = 50$ és ii) $20^2 + 30^2 < x^2$, amiből $36,05 \approx 10\sqrt{13} < x$. Innen $37 \leq x \leq 49$, ami 13 darab megoldás.

Mivel a megoldások között nincs két egybevágó, a válasz $12 + 13 = 25$ darab különböző háromszög.

3. a) Tekintsük az α hegyesszög szinuszának és koszinuszának H harmonikus, G mértani és A számtani közepét. Tudjuk, hogy

$$\frac{A \cdot H}{G} = \frac{1}{\sqrt[4]{8}}.$$

Hány fokal az α szög? (7 pont)

b) A koordináta-rendszerben T téglalap csúcsai $A(1;0)$, $B(4;0)$, $C(4;2)$, $D(1;2)$. A T téglalap mely $P(x;y)$ pontjaiban teljesül a

$$\frac{\log_2 x + \log_x 2}{y} \leq \log_2 x \cdot \log_x 2$$

egyenlőtlenség? (6 pont)

Megoldás. a) A feltételek alapján $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, így $0 < \sin \alpha, \cos \alpha < 1$. Írjuk fel velük a közepeket, majd alakítsuk át őket:

$$\frac{\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{2} \cdot \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}}{\sqrt{\sin \alpha \cos \alpha}} = \sqrt{\sin \alpha \cos \alpha} = \sqrt{\frac{\sin 2\alpha}{2}} = \frac{1}{\sqrt[4]{8}}.$$

Mindkét oldalt négyzetre emelve és 2-vel szorozva

$$\sin 2\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

A feltételek miatt $0^\circ < 2\alpha < 180^\circ$, így $2\alpha_1 = 135^\circ$ vagy $2\alpha_1 = 45^\circ$. Ebből

$$\alpha_1 = 67,5^\circ, \quad \alpha_2 = 22,5^\circ,$$

és ellenőrzéssel megmutatható, hogy ezek valóban megoldások.

b) A feltételek alapján $1 < x \leq 4$ és $0 < y \leq 2$. A logaritmus azonosságaiából tudjuk, hogy $\log_x 2 = \frac{1}{\log_2 x}$. Ezeket felhasználva alakítsuk át az egyenlőtlenséget:

$$\log_2 x + \frac{1}{\log_2 x} \leq y.$$

Mivel $1 < x$, a logaritmusok pozitívak. Pozitív szám és reciprokának összege legálább 2, de $y \leq 2$, így ezekből az összeg és $y = 2$. Az összegre ez csak akkor teljesülhet, ha $\log_2 x = 1$, azaz $x = 2$. Az egyenlőtlenség csak a $P(2;2)$ pontban teljesül, amely a téglalap pontja.

4. a) Egy fagráf négy csúcsának fokszáma 2, 3, 4 és 5, a többi pontja elsőfokú. Hány elsőfokú pontja van a fának? (Állításunkat igazoljuk.) Adjunk meg egy ilyen gráfot. (6 pont)

TörtErdész kedvenc szórakozásának hódolva az erdőt járja, de – mivel gondolatai a szépséges Törtilla körül keringtek – figyelmetlenségéből letért az ismert utakról, és a rengeteg egy sűrű és varázslatos részébe tévedt. Itt egymást nem keresztező utakon lehet továbbhaladni. Minden út olyan útszakaszokból áll, amelyek 1-1-km-rel távolabb visznek az erdő egyenes, északi határától, és vagy egy újabb útelágazáshoz jutunk, vagy FókuszPók egy csapdája várja az odatévedőt. TörtErdész az északi kapun (amelynek felirata nem sok jóval kecsegteti az ijedt vándort) belépve rögtön egy elágazásban találja magát, és bizony nagy szüksége van TörtPapa szerencsét hozó bájitalának felhőrpintésére, ugyanis FókuszPók éhes macskája, Szianyaú tűnik fel mögötte, így innentől nem fordulhat vissza: egyetlen reménye, hogy mihamarabb eléri az erdő déli határát, ahol megmentik a felkutatására induló barátai.

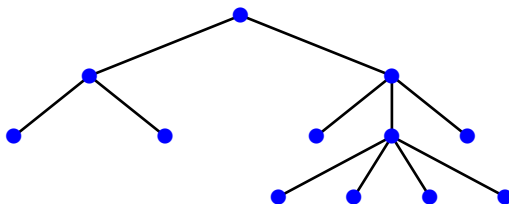
b) Ha 10 km-re jár az északi határtól, akkor legalább hány útelágazás van ebben az erdőben?

c) Ha ebben az erdőben 650 elágazás van, akkor legalább milyen távol van a déli határ az északitól?

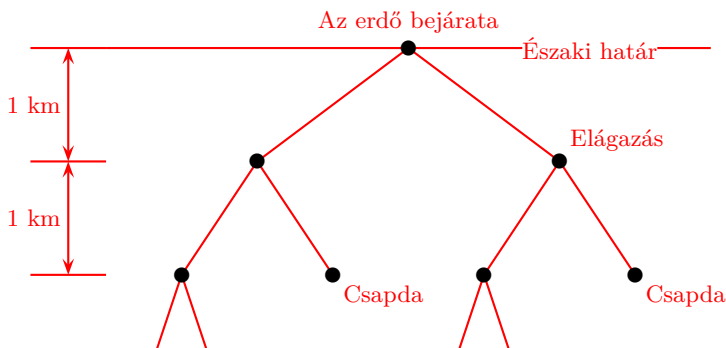
Megoldás. a) Jelölje a fa 1 fokú pontjainak számát az n egész szám. Tudjuk, hogy egy fának eggyel kevesebb éle van, mint pontja. Tudjuk, hogy bármely gráfban a foksámok összegének fele az élek számával egyenlő. A két ismeret alapján

$$\frac{2 + 3 + 4 + 5 + n}{2} = n + 4 - 1.$$

Átalakítva $14 + n = 2n + 6$, azaz $n = 8$. A fának 8 elsőfokú pontja van. Egy ilyen gráf:



b) Mivel minden útszakasz 1 km-rel esik távolabbra az erdő északi határától



és minden szakasz útelágazással kezdődik (de nem feltétlenül ér véget azzal), ha 10 km-re járunk az északi határról, akkor 10 útelágazáson mentünk keresztül. Tehát legalább 10 útelágazás van az erdőben.

c) Akkor jutunk a lehető legkevésbé délre vivő úthálózathoz, ha a lehető legtöbb elágazás van az erdő határától ugyanakkora távolságra, egy, az erdő északi határával párhuzamos egyenesen. Ezek száma minden szinten legfeljebb az előző szinten lévő elágazások számának kétszerese: $1, 2, 2^2, 2^3, \dots$. Ebben az esetben ha k egyenesen vannak csomópontok (vagyis legalább $k - 1$ km-re van a déli határ az északitól), akkor a csomópontok maximális száma:

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{k-1} = 1 + 2 + 4 + \dots + 2^{k-1} = 2^k - 1.$$

Mivel $2^9 < 650 < 2^{10} - 1$, így legfeljebb $k = 10$ egyenesen vannak csomópontok, tehát ha 650 elágazás van az erdőben, akkor az erdő déli határa legalább 9 km-re van az északi határtól.

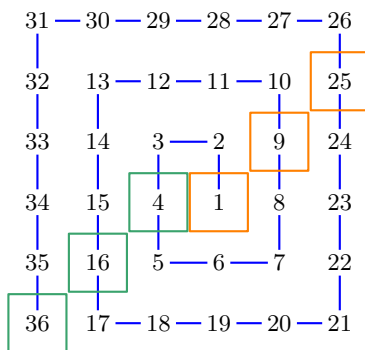
II. rész

5. Nevezzünk két különböző pozitív egész számot hasonlónak, ha ugyanannyi számú prím és ugyanazokon a kitevőkön szerepel a prímfelbontásukban. (Például 28 és 75 hasonló, mert a felbontásaikban két prímtényező van, az egyik az első, a másik a második hatványon: $28 = 7 \cdot 2^2$ és $75 = 3 \cdot 5^2$.) Tekintsük az alábbi igaz állítást: „Ha két egész szám hasonló, akkor az osztók száma megegyezik.”

a) Írjuk fel az állítás megfordítását, és adjuk meg az igazságtartalmát. (Utóbbit indokoljuk.) (3 pont)

b) Bizonyítsuk be, hogy pontosan öt olyan, egymással nem egybevágó, egész oldalhosszú derékszögű háromszög van, amelynek egyik befogója 64 egység. Adjuk is meg ezen háromszögek oldalhosszait. (6 pont)

c) Tekintsük az ábrán látható egymást követő, kék csigavonalban írt számokat:



Úgy tűnik, hogy a páratlan, illetve a páros négyzetszámok egy-egy ferde vonal mentén tűnnek fel a számok között. Bizonyítsuk be, hogy ez a megfigyelés helyes. (7 pont)

Megoldás. a) Az állítás megfordítása: „Ha két egész szám osztóinak száma megegyezik, akkor hasonlóak.” Az állítás hamis, például $12 = 2^2 \cdot 3$ és $32 = 2^5$ osztói száma egyaránt $(2 + 1)(1 + 1) = 5 + 1 = 6$, de nem hasonlóak.

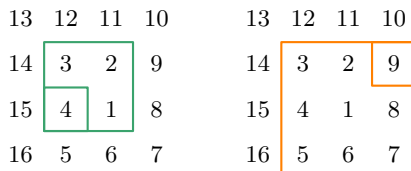
b) Jelölje a derékszögű háromszög másik befogóját, illetve átfogóját p , illetve r . Ekkor Pitagorasz tétele alapján $64^2 + p^2 = r^2$, amiből $2^{12} = r^2 - p^2 = (r - p)(r + p)$. Mivel $0 < p < r$ egészek, így $0 < r - p < r + p$ is egészek. A lehetséges szorzatra bontások miatt

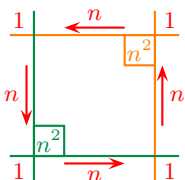
$r - p$	1	2	4	8	16	32
$r + p$	4096	2048	1024	512	256	128
r	2048,5	1025	514	260	136	80
p	2047,5	1023	510	252	120	48

Az első lehetőség nem egész oldalhosszakra vezet, a többi öt valódi megoldást ad. Mivel nincs közöttük két egybevágó, ezért valóban öt ilyen háromszög van. A megoldások: $(64, 1023, 1025)$, $(64, 510, 514)$, $(64, 252, 260)$, $(64, 120, 136)$ és $(48, 64, 80)$.

c) Alkalmazzunk teljes indukciót.

1. Van olyan (2×2) -es négyzet, amelynek a bal alsó sarkában a $2^2 = 4$, illetve olyan (3×3) -as, amelynek a jobb felső sarkában a $3^2 = 9$ szám áll.





2. Tegyük most fel, hogy valamely $(n \times n)$ -es négyzet bal alsó vagy jobb felső sarkában az n^2 négyzetszám áll.

3. Kérdés: ha egy teljes kerettel bővítjük a négyzetet, a szomszédos sarokba milyen szám kerül? A válaszhoz menjünk körbe és számoljuk meg, hányat lépünk a négy oldalon és a négy sarokban: összesen $4n + 4$ -et. A szomszéd sarokba $n^2 + 4n + 4 = (n + 2)^2$ kerül, ami paritástól függetlenül bizonyítja állításunkat (párosról páros, páratlanról páratlan négyzetszámmra lépünk).

6. TörtErős ősszel minden nap 60 darab tűzifát hasogat fel. Nagyjából minden tizedik hasábot csak másodjára sikerül felhasítani, a többit elsőre – ezt úgy értelmezzük, hogy 0,9 valószínűséggel tud egy hasábot elsőre hasítani. (Második próbálkozásra mindig sikerrel jár.) Egy próbálkozáshoz 1 percre van szüksége.

a) Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan egy és negyed óráig hasogatja a 60 darab tűzifát? (3 pont)

Másnap 14:58 perckor áll neki a hasogatásnak, azonban 16:00-kor kezdődik a kedvenc csapata, Törterhempton meccse, amelyet közvetít a TörTV.

b) Számítsuk ki, hogy mekkora valószínűséggel marad le TörtErős a kezdőrúgásról. (6 pont)

Következő nap TörtErős nem érzi jól magát, felkeresi TörtOrvost. TörtOrvos egy tesztet végez el rajta, hátha TörtErős is elkapta az erdei náthát. A teszt dobozán az áll, hogy „Beteg esetén 99%-ban pozitív eredményt ad, egészséges személy esetén 98%-ban negatívát.”

c) Hány beteg van a 100 fős faluban, ha a pozitív tesztet produkáló lakosok 0,9-nél nagyobb valószínűséggel valóban betegek? (7 pont)

Megoldás. a) Ha 75 percig hasogat 60 hasábot, akkor 15-nek kétszer fut neki (egyenként 0,1 valószínűséggel), 45-öt elsőre elhasít (egyenként 0,9 valószínűséggel). Binomiális eloszlást kell felírunk:

$$p = \binom{60}{45} \cdot 0,9^{45} \cdot 0,1^{15} \approx 0,00046.$$

b) 62 perc múlva kezdődik a meccs. TörtErős akkor marad le a kezdőrúgásról, ha 2-nél több hasábot nem tud elsőre széthasítani. Térjünk át a komplementer eseményre, azaz 0, 1 vagy 2 hasábbal nem bír elsőre. A keresett valószínűség:

$$p = 1 - \left[0,9^{60} + \binom{60}{1} \cdot 0,9^{59} \cdot 0,1^1 + \binom{60}{2} \cdot 0,9^{58} \cdot 0,1^2 \right] \approx 0,947.$$

c) Jelölje a népességben a beteg egyének számát x , ekkor az egészségesek száma $100 - x$. Vegyük úgy, hogy TörtOrvos mindenkit letesztelt: ekkor az x beteg esetén $x \cdot 0,99$ pozitív tesztet kapott és $x \cdot 0,01$ negatívát. Az egészségesek közül $(100 - x) \cdot 0,02$ fő pozitív eredményt mutatott és $(100 - x) \cdot 0,98$ negatívát. Tudjuk, hogy a pozitív tesztet mutatók, vagyis összesen $x \cdot 0,99 + (100 - x) \cdot 0,02$ fő

közül legalább 0,9 valószínűséggel valóban beteg valaki (számuk $x \cdot 0,99$). Felírva egy egyenletben:

$$\frac{x \cdot 0,99}{x \cdot 0,99 + (100 - x) \cdot 0,02} > 0,9.$$

Összevonva, rendezve $0,99x > 1,8 + 0,873x$. Innen $x > 15,38$, vagyis legalább 16-an betegek a 100 fős faluban.

7. A koordináta-rendszer rácspontjaira mindegyik csúcsával illeszkedő egyenlő szárú háromszög alapját az $F(-1;2)$ pont felezi, a körülírt körének a középpontja $O(\frac{1}{3}; \frac{10}{3})$.

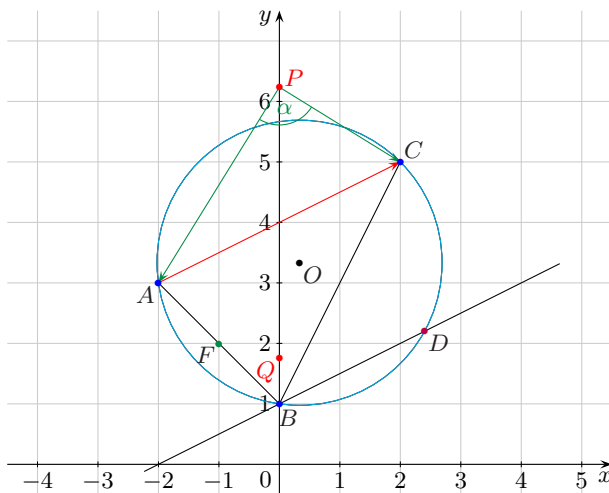
a) Mutassuk meg, hogy az $A(-2;3)$, $B(0;1)$, $C(2;5)$ pontok által alkotott háromszög megfelel a feltételeknek. (3 pont)

b) Vegyünk fel egy olyan D pontot, amely az előző A , B és C pontokkal együtt egy olyan húrtrapéz csúcsai, amelynek AC és BD az alapja. Mik lehetnek a D pont koordinátái? (6 pont)

c) Van-e az ABC háromszög körülírt körében olyan P pont, amely az y tengelyen van és derékszögben látszik belőle az AC szakasz? Ha igen, adjuk meg a koordinátáit. (7 pont)

Megoldás. a) ABC háromszögben F_c koordinátáira $x = \frac{-2+0}{2} = -1$, $y = \frac{3+1}{2} = 2$. Egyenlő szárú, mert az $\overrightarrow{F_cC}(3;3) \cdot \overrightarrow{AB}(2;-2)$ skalárszorzat 0, így $\overrightarrow{F_cC} \perp \overrightarrow{AB}$. Továbbá $d(OB) = d(OC) = \frac{5\sqrt{2}}{3}$.

b) A kapott húrtrapéz köré kör írható, amely megegyezik az ABC háromszög körülírt körével.



Először írjuk fel a B -n átmenő, $\overrightarrow{AC}(4;2)$ irányvektorú e egyenes egyenletét:

$$e: x - 2y = -2.$$

Majd írjuk fel az ABC háromszög körülírt k körének egyenletét:

$$\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{10}{3}\right)^2 = \frac{50}{9}.$$

Tekintsük e és k egyenleteit mint egyenletrendszert. Ekkor e -ből $x = 2y - 2$, amit behelyettesítve k -ba $(6y - 7)^2 + (3y - 10)^2 = 50$. Kifejtve, összevonva és egyszerűsítve $5y^2 - 16y + 11 = 0$ egyenletet kapjuk, megoldásai $y_1 = 1$ (B pont) és $y_2 = 2,2$ (D pont). Utóbbiból $x_2 = 2,4$, azaz $D(2,4; 2,2)$.

c) Jelöljön $P(0; y)$ egy feltételeknek megfelelő pontot. P rajta kell legyen az AC köré mint átmérő köré írt k_2 Thalész-körön. E kör egyenlete $x^2 + (y - 4)^2 = 5$. k_2 és az y tengely metszéspontjainak y koordinátái az $x = 0$ behelyettesítéssel kaphatóak meg, ezek $y_1 \approx 6,236$ és $y_2 \approx 1,764$. Ezek közül a $P(0; 6,235)$ nincs a k kör belsejében, de a $Q(0; 1,764)$ igen, mert a k kör az y tengelyt a $(0; 1)$ és a $(0; 17/3)$ pontban metszi.

8. FókuszPók előadása után meghívja a közönségét társasozni, de nem találja a dobókockát. „Semmi baj – mondja TörtÜgyi – feldobunk hat érmét: amennyi leesve írást mutat, annyit kell lépni.”

a) Valóban jól helyettesíti a kockadobást a megadott pénzfeldobásos módszer? A válasz indoklásához hasonlítsuk össze a kockadobás és a leírt pénzfeldobás által meghatározott lépésszám várható értékét. (6 pont)

Némi tanakodás után 5, 10, 20, 50, 100 és 200 Ft-os érméket használnak a dobókocka helyettesítésére. TörtPapa minden kör után felírja az adott dobás eredményeit valamilyen sorrendben (más játékosnál esetleg másképpen) és hogy mennyit lép (pl. „5F, 100I, 10F, 20F, 200F, 50I, lép 3-at”).

b) Hányféle különböző jelsorozat kerülhet egy dobás esetén a papírra? (3 pont)

A társasjáték nagyon egyszerű: 52 darab egymás után következő mezőből álló „kígyón” kell végiglépegetni, mindig annyit lépve, amennyi írást dobtak az érmékkel (0-tól 6-ig). Körönként mindenki csak egyszer dob és lép. A célba lépni csak pontos dobással lehet.

c) Legkorábban melyik körben érhet célba a nyertes? Mennyi a valószínűsége, hogy ebben a körben célba is ér? (7 pont)

Megoldás. a) Nyilván nem helyettesíti jól, hiszen lehet, hogy 0 darab írás lesz, 0-t viszont nem lehet dobni egy szabályos dobókockával. De a dobások várható értéke sem azonos a két módszer esetén. Hagyományos dobókocka esetén minden dobás valószínűsége $p = \frac{1}{6}$, a dobások – és így a lépésszám – várható értéke $M_k = 1 \cdot \frac{1}{6} + \dots + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3,5$. Ha érmét használunk, akkor $k \in \{0, 1, \dots, 6\}$ lépés valószínűsége függ k -tól: 6 érme $\binom{6}{k}$ -féleképpen eshet az írás oldalára (az érméket megkülönböztetjük).

Az összes lehetőség száma $2^6 = 64$, így $p_k = \frac{\binom{6}{k}}{64}$. Tehát pénzfeldobás esetén a lépésszám várható értéke (a binomiális együtthatók tulajdonsága miatt)

$$M_p = (0 + 6) \cdot \frac{\binom{6}{0}}{64} + (1 + 5) \cdot \frac{\binom{6}{1}}{64} + (2 + 4) \cdot \frac{\binom{6}{2}}{64} + 3 \cdot \frac{\binom{6}{3}}{64} = 3,$$

tehát a két várható érték sem egyenlő.

b) Nem foglalkozunk azzal, hogy két jelsorozat esetleg ugyanazon érmék ugyanazon állásait tartalmazza, csak magát a jelsorozatot figyeljük. A papírra kerülő jelsorozatban az érmék $6!$ -féleképpen szerepelhetnek. Minden érme lehet fej vagy írás, ezeket 2^6 -féleképpen írhatjuk mögéjük. A végén még szerepel, hogy mennyit kell lépni – azonban ez nem ad más jelsorozatot, hiszen az írások már rögzített száma kerül oda. Az eredmény $6! \cdot 2^6 = 46\,080$.

c) Egy körben maximum hatot lépnek, azaz 9 körnél kevesebbel nem lehet célba érni. 52 mező 9 kör alatt csak kétféleképpen teljesíthető: A) 8 hatos és 1 négyes, vagy B) 7 hatos és 2 ötös dobással. Binomiális eloszlással kell számolnunk, a valószínűségeket az a) részben felírtuk:

$$p_A = \binom{9}{8} \left(\frac{\binom{6}{6}}{2^6} \right)^8 \left(\frac{\binom{6}{4}}{2^6} \right)^1, \quad p_B = \binom{9}{7} \left(\frac{\binom{6}{6}}{2^6} \right)^7 \left(\frac{\binom{6}{5}}{2^6} \right)^2.$$

Az eredmény $p_A + p_B \approx 0,000\,000\,000\,000\,079$, ami több nagyságrenddel kevesebb a hagyományos lottón elért öt találat valószínűségénél.

9. Törtilla egyik kozmetikumának logója fél kagylóléhrá emlékeztet: alulról a $g(x) = \cos x$ függvény, felülről $f(x)$ lefelé nyíló, y -tengelyű parabolagörbe darabja határolja. Mindkét függvényt a $D = [-2,5\pi; 2,5\pi]$ intervallumon értelmezzük. A két görbe D végpontjaiban egymásba simul, mert f és g értékei és érintői ezekben a pontokban megegyeznek.

a) Bizonyítsuk be, hogy a parabola hozzárendelési szabálya

$$f(x) = -\frac{1}{5\pi}x^2 + \frac{5\pi}{4}. \quad (6 \text{ pont})$$

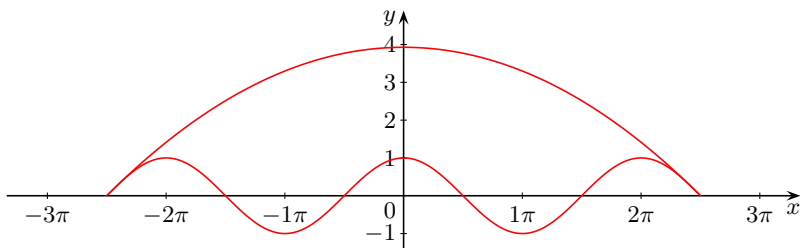
b) Határozzuk meg a sík felületre nyomtatott logó területét, ha egy egység 2 mm-nek felel meg a koordináta-rendszerben. (7 pont)

Tekintsük a következő kijelentést:

„Legyen f értelmezve x_0 valamely $I =]x_0 - \delta; x_0 + \delta[$ környezetében ($\delta > 0$). Ha f függvény I -n x_0 előtt negatív, utána pozitív értékeket vesz fel, akkor x_0 -ban zérushelye van.”

c) Igaz-e a kijelentés? (Válaszunkat indokoljuk is meg.) (3 pont)

Megoldás. a) A feltételek alapján mindkét függvény páros. Ebből adódik, hogy i) elég egy végpontban vizsgálni az érintőt, ii) az $f(x)$ függvény $y = ax^2 + b$ alakú,



ahol $a < 0 < b$. A feltételek szerint g érintője $x = 2,5\pi$ -ben f -ével megegyezik. Mivel ugyanazon pontban nézzük az érintőt mindkét függvény esetén, ezért ha a meredekségük megegyezik, akkor a két egyenes is azonos. Meredeksége

$$m = g'(2,5\pi) = -\sin 2,5\pi = -1 = f'(2,5\pi) = 2a(2,5\pi),$$

innen kifejezve $a = -\frac{1}{5\pi}$. Továbbá, mivel $g(2,5\pi) = 0$, így

$$f(2,5\pi) = 0 = -\frac{1}{5\pi} \cdot (2,5\pi)^2 + b,$$

amiből b -re $\frac{5\pi}{4}$ adódik. Valóban, $f(x) = -\frac{1}{5\pi}x^2 + \frac{5\pi}{4}$.

b) A terület minél egyszerűbb meghatározásához érdemes megfigyelni, hogy a $\cos x$ függvénynek három „huplija” (x tengely egyik oldalára eső zárt, összefüggő alakzata) esik D -n az x -tengely fölé – ezeket levonjuk – és két „hupli” esik az x -tengely alá – ezeket hozzáadjuk – a parabola x tengely feletti területéhez. A függvények párossága miatt elegendő a következő integrálokat felírni a parabola és egy „hupli” területéhez:

$$\begin{aligned} T_p &= 2 \cdot \int_0^{2,5\pi} \left(-\frac{1}{5\pi}x^2 + \frac{5\pi}{4} \right) dx = 2 \cdot \left[-\frac{x^3}{15\pi} + \frac{5\pi x}{4} \right]_0^{2,5\pi} = \\ &= 2 \cdot \left[-\frac{(2,5\pi)^3}{15\pi} + \frac{5\pi(2,5\pi)}{4} - 0 \right] = \frac{25\pi^2}{6} \approx 41,123; \end{aligned}$$

$$T_h = 2 \cdot \int_0^{\pi/2} (\cos x) dx = 2 \cdot [\sin x]_0^{\pi/2} = 2[1 - 0] = 2.$$

A korábban leírtak alapján a fél kagyló területe $T_k = T_p - T_h \approx 39,123$ egység a koordináta-rendszerben. Tudjuk, hogy 1 hosszegység $d_e = 2$ mm, ezért 1 terület-egység $t_e = 4$ mm². Innen a logó területe vízszintes felületen

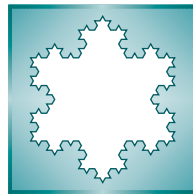
$$T \approx 39,123 \cdot 4 = 156,49 \text{ mm}^2.$$

c) A kijelentés hamis. Ugyanis nincs a feltételek között, hogy a függvény folytonos, akár $f(x_0) = 3$ is lehet. Sőt, még x_0 jobb és bal oldali határértéke sem biztos, hogy 0, vagy akár csak egyenlő, esetleg nem is létezik határérték. . . Például a feltételeknek megfelel az előjelfüggvény egy módosított változata az $I =]-1; 1[$ intervallumon:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } 0 < x; \\ 3, & \text{ha } x = 0; \\ -1, & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$

Trembeczki Csaba
Kaposvár

Matematika C gyakorlatok megoldása



C. 1837. Már az ókori görögök is tudták, hogy a $\pi \approx 3,1416$ egészen jól közelíthető $a \frac{22}{7} \approx 3,1429$ törttel. Hány olyan pozitív egész számokból álló $(a; b)$ számpár van, amelyekre $1 < b < 100$ és az $\frac{a}{b}$ tizedes tört alakja úgy kezdődik, hogy 3,14?

javasolta: Kozma Katalin Abigél (Győr)

1. megoldás. Azokat a $0 < a$ és $1 < b < 100$ egész számokat keressük, amelyekre

$$3,14 \leq \frac{a}{b} < 3,15, \quad \text{vagyis} \quad 3,14b \leq a < 3,15b.$$

A megoldás során megszámloljuk azokat az egész koordinátájú $(a; b)$ pontokat a derékszögű koordináta-rendszerben, amelyek kielégítik a fenti feltételeket. Ezek a pontok éppen a $P(314; 100)$, az $O(0; 0)$ és a $Q(315; 100)$ pontok által meghatározott háromszög belsejében vannak, vagy az OP oldalra illeszkednek (de a másik két oldalra nem). Mivel a P pont koordinátáinak legnagyobb közös osztója $(314; 100) = 2$, ezért az OP oldalon a végpontokon kívül csak egyetlen olyan belső pont van, amelynek koordinátái egész számok: $P_1(157; 50)$. Nyilván a PQ oldalon a végpontokon kívül nincs olyan pont, amelynek mindkét koordinátája egész, hiszen a végpontok első koordinátái egymást követő egész számok. A Q pont koordinátáinak legnagyobb közös osztója $(315; 100) = 5$, ezért az OQ oldalon 4 belső pont van, amelynek mindkét koordinátája egész szám. Most alkalmazzuk a Pick-tételt, amely egy rácssokszög területét adja meg a belsejében és az oldalain található rácspontok számából:

$$T = B + \frac{K}{2} - 1,$$

ahol B a rácssokszög belsejében, K pedig a határán található rácspontok számát jelöli. Esetünkben a POQ háromszög területe:

$$T = \frac{(315 - 314) \cdot 100}{2} = 50 \text{ területegység.}$$

A háromszög kerületén lévő rácspontok számának összege: $K = 3 + 1 + 0 + 4 = 8$, így a belső rácspontok száma:

$$B = T - \frac{K}{2} + 1 = 50 - 4 + 1 = 47.$$

Ezeket kívül még a P_1 pont is megfelelő, így összesen $47 + 1 = 48$ darab rácspontot találtunk, azaz 48 olyan számpár van, amely kielégíti a feladat feltételeit.

2. megoldás. A megoldás során azokat a $0 < a$ és $1 < b < 100$ egész számokat keressük, amelyekre

$$(1) \quad 314b \leq 100a < 315b.$$

$315b$ -nél kisebb, de $314b$ -nél nem kisebb szám pontosan b darab van. Mivel $b < 100$, ezért b darab egymást követő egész szám között legfeljebb egy osztható 100-zal,

vagyis lehet egyenlő $100a$ -val. Azaz bármely b -re legfeljebb egy megfelelő a létezik, amelyre minden egyenlőtlenségünk igaz. Látjuk, hogy a feladat szövegében is szereplő $b = 7$ a legkisebb olyan b , amelyhez van megfelelő a , ezért sejtethetjük, hogy a feladat megoldásában fontos szerepe lesz.

Ha valamely b -hez van olyan a , amelyre teljesül az (1) egyenlőtlenség, akkor $b' = b + 7$ -re is van ilyen a' , hiszen a

$$(2) \quad 314(b+7) \leq 100a' < 315(b+7)$$

egyenlőtlenségek akkor és csak teljesülnek, ha teljesülnek azok is, amelyeket úgy kapunk, hogy minden oldalból kivonunk $300(b+7)$ -et, majd még 100 -at, akkor azt kapjuk, hogy

$$14b - 2 \leq 100a'' < 15b + 5,$$

ami nyilván igaz, hiszen a (2)-nek eleget tevő $b + 7$ darab szám közül pontosan egy osztható 100 -zal. Az előzőek alapján elegendő megvizsgálni, hogy mely 7 -es maradékú b -knél hol kezdődik ez a periodikusság.

Legyen $b = 7k + n$. Ekkor $0 \leq k \leq 14$ és $0 \leq n \leq 6$ ($n, k \in \mathbb{Z}$).

I. eset, ha $n = 1$. Ekkor az egyenlőtlenség: $14(7k+1) \leq 100a'' < 15(7k+1)$. Ha kivonunk $100k$ -t (így a'' helyett a' -t írva), akkor $14 - 2k \leq 100a' < 15 + 5k$. Könnyen látható, hogy $100a' = 0$, így $14 - 2k \leq 0$, azaz $7 \leq k \leq 14$. Azaz ha b 7 -es osztási maradéka 1 , akkor $14 - 7 + 1 = 8$ jó b van.

II. eset, ha $n = 2$. Hasonlóan eljárva s rendezve az egyenlőtlenséget, akkor $28 - 2k \leq 100a' < 20 + 5k$. Itt is látható, hogy $100a' = 0$, kapva: $28 - 2k \leq 0$. Innen $14 \leq k \leq 14$ lenne, de $14 \cdot 7 + 2 = 100$, és b ennél kisebb, tehát nincs ilyen b .

III. eset, amikor $n = 3$. Innentől egészen a hatos esetig $k \leq 13$, hiszen $b < 100$. Az ismert módszert elvégezve azt kapjuk, hogy $-2k + 42 \leq 100a' < 45 + 5k$. Egyszerű belátni, hogy $100a' = 100$, így $100 < 5k + 45$. Innen kapjuk, hogy $12 \leq k \leq 13$, azaz 2 darab megfelelő b van itt.

IV. eset, ha $n = 4$. Ilyenkor $-2k + 56 \leq 100a' < 60 + 5k$, ahonnan $100a' = 100$, majd így kapjuk, hogy $100 < 60 + 5k$, amit rendezve $9 \leq k \leq 13$. Avagy itt 5 darab megfelelő b található.

V. eset, $n = 5$. Ez esetben $-2k + 70 \leq 100a' < 75 + 5k$, és $100a' = 100$, azaz $100 < 75 + 5k$, amelyből $6 \leq k \leq 13$, ezzel kapva, hogy ilyenkor 8 jó b van.

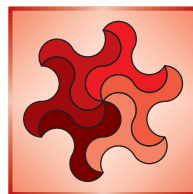
VI. eset, amikor $n = 6$. Megkapjuk, hogy $-2k + 84 \leq 100a' < 90 + 5k$, és megint $100a' = 100$. $100 < 90 + 5k$, amiből $3 \leq k \leq 13$, jelentve, hogy 11 jó b van.

VII. eset, ha $n = 0$. Triviális eset, ekkor csak a $\frac{22}{7}$ törtet bővítjük. 14 megfelelő b szerepel itt, hiszen ennyi 100 -nál kisebb, pozitív többszöröse van a 7 -nek.

Mindent egybevetve összesen $8 + 0 + 2 + 5 + 8 + 11 + 14 = 48$, ami azt jelenti, hogy ennyi $(a; b)$ számpár létezik.

Farkas András (Jászberény, Lehel Vezér Gimn., 11. o.)

Összesen 42 dolgozat érkezett. 5 pontos 4 , 4 pontos 2 , 3 pontos 11 , 2 pontos 6 dolgozat. 1 pontot 11 , 0 pontot 8 versenyző kapott.



B. 5413. Legyen az ABC nem szabályos háromszög magasságpontja M , súlypontja S , beírt körének középpontja I . Mutassuk meg, hogy $MIS\angle > 90^\circ$.

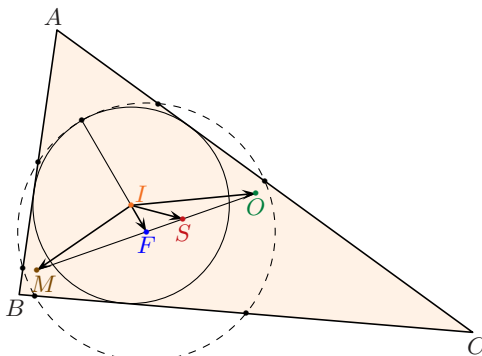
(6 pont)

Javasolta: Vigh Viktor (Sándorfalva)

1. megoldás. Legyen O a körülírt kör középpontja, R a körülírt kör sugara, r a beírt kör sugara és F az ABC háromszög Feuerbach-körének középpontja (1. ábra). Mivel ABC nem egyenlő oldalú háromszög, M , I , S , O és F mind különböző pontok.

Közismert, hogy M , F , S és O az Euler-egyenesen helyezkednek el, továbbá F az OM szakasz felezőpontja, és $\overrightarrow{MS} = 2\overrightarrow{SO}$. Ez alapján:

$$\overrightarrow{IM} = 2\overrightarrow{IF} - \overrightarrow{IO} \quad \text{és} \quad \overrightarrow{IS} = \frac{2}{3}\overrightarrow{IF} + \frac{1}{3}\overrightarrow{IO}.$$



1. ábra

Ebből adódóan

$$\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{IS} = \frac{1}{3}(2\overrightarrow{IF} - \overrightarrow{IO})(2\overrightarrow{IF} + \overrightarrow{IO}) = \frac{1}{3}(4IF^2 - IO^2).$$

Mivel a Feuerbach-kört a beírt kör belülről érinti a T Feuerbach-pontban, ezért $IF = TF - TI = R/2 - r$, hiszen a Feuerbach-kör sugara $R/2$. Továbbá az Euler-formula szerint $IO^2 = R^2 - 2Rr$, így:

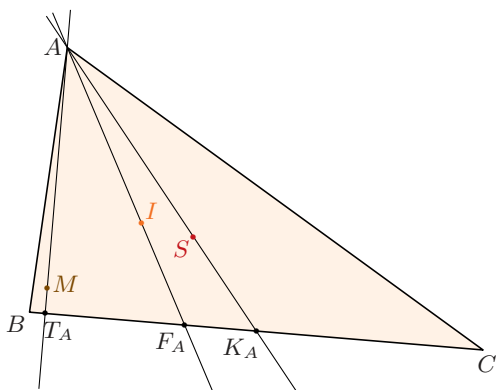
$$\begin{aligned} \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{IS} &= \frac{1}{3} \left(4 \cdot \frac{(R-2r)^2}{4} - (R^2 - 2Rr) \right) = \\ &= \frac{1}{3}(R^2 - 4Rr + 4r^2 - R^2 + 2Rr) = \frac{1}{3}r(-2R + 4r) = -\frac{2}{3}r(R - 2r) < 0, \end{aligned}$$

ahol az utolsó egyenlőtlenség következik a sugáregyenlőtlenségből, ami szerint $R > 2r$ nem egyenlő oldalú háromszögek esetén.

Ezért $IM \cdot IS \cdot \cos(MIS\angle) < 0$, tehát $\cos(MIS\angle) < 0$, ami azt jelenti, hogy $MIS\angle > 90^\circ$. Ezzel a feladatot megoldottuk.

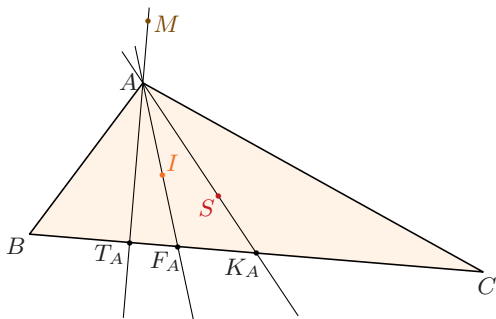
Diaconescu Tashi (Kolozsvár, Spark Generation, 11. évf.)

1. megjegyzés. Az O -t vonatkoztatási pontnak választva, az $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ és $\vec{OC}$ vektorokkal, valamint a háromszög oldalainak hosszával $\vec{OS}$, $\vec{OM}$ és $\vec{OI}$ vektorok mindegyike kifejezhető. Ezután a megoldáshoz hasonlóan felírható $\vec{IM} \cdot \vec{IS}$ skalárszorzat, amiről több különböző (általában hosszadalmas) számolással megmutatható, hogy negatív. Az állítás megjelent A. P. Guinand: *Triangles from centres out*, **JCMN 30**, pp. 3127–32 cikkében, ott a szerző ezt az utat követte, trigonometrikus összefüggéseket használva.



2. ábra

M az AT_A szakaszon van. Feltehető, hogy $b > c$ (és így $\beta > \gamma$), ekkor a szögfelezőtétel miatt $CK_A < CF_A$, valamint $CAT_A < CAF_A < \alpha/2$ miatt $CF_A < CT_A$, azaz a talppontok T_A , F_A , K_A sorrendben helyezkednek el a BC egyenesen. Ebből adódik, hogy a szögfelező az AT_A és AK_A nyílt szakaszokat elválasztja, következésképpen az S és M pontokat is, ahogyan állítottuk.



3. ábra

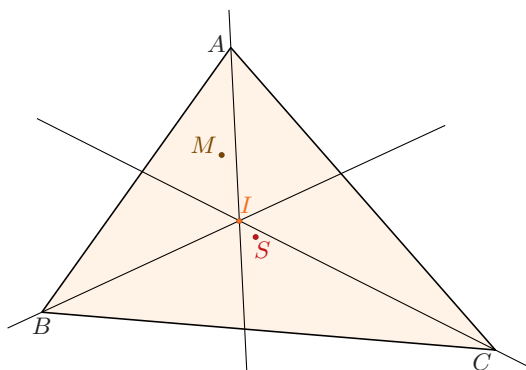
esettel, amikor ABC háromszög hegyesszögű (4. ábra). A három szögfelező I -ben metszi egymást, és a síkot hat szögtartományra osztják az ábra szerint. Egyszerű szögszámolásból kapjuk, hogy a szögtartományok méretei $(\alpha + \beta)/2$, $(\beta + \gamma)/2$, illetve $(\gamma + \alpha)/2$, következésképpen mindegyik hegyesszögű tartomány. A fentiek miatt S és M szükségképpen két átellenes (I -re szimmetrikus) szögtartomány belsejébe esik, és mivel ezek hegyesszögűek, így $SIM <$ tompaszög.

2. megoldás. Használjuk a háromszögre a szokásos jelöléseket, és először tegyük fel, hogy a háromszög nem egyenlő szárú. Belátjuk, hogy M és S pontokat a háromszögnek pontosan a hegyes szögekhez tartozó belső szögfelezői választják el (2. ábra). Tekintsük az A hegyesszögű csúcsból induló súlyvonalát, szögfelezőjét és magasságát, ezek talppontjai a szemközti oldalon legyenek rendre K_A , F_A és T_A . Tudjuk, hogy ekkor S az AK_A szakaszon, míg

Ha A -nál derékszög van, akkor $A = M$, és a magasságpont illeszkedik a szögfelezőre.

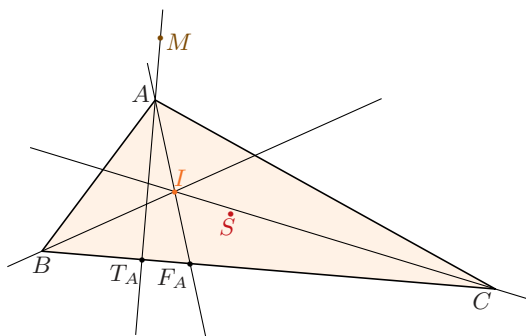
Végül ha A -nál tompaszög van (3. ábra), akkor minden érvényes marad, de M nem az AT_A szakaszra esik, hanem annak A -n túli meghosszabbítására, ezért M és S a szögfelező egyazon oldalán fekszik.

Foglalkozzunk először azzal az



4. ábra

Most tegyük fel, hogy A -nál derék- vagy tompaszög van, valamint az általánosság megszorítása nélkül, hogy $b > c$ (5. ábra). A kompaktabb indoklás kedvéért illesszünk egy koordináta-rendszert az ábránkra úgy, hogy az origó T_A pont legyen, C az x -tengely, M pedig az y -tengely pozitív felére essen. Jelöljük a koordinátákat a szokásos módon: $M(x_M, y_M)$, $I(x_I, y_I)$, és $S(x_S, y_S)$. Vegyük észre, hogy a fentiek miatt S benne van az $F_A C I$ háromszögben, M pedig legalább olyan távol van BC oldaltól, mint A , így $y_M > y_I > y_S$. Szintén az $S \in \overrightarrow{T_A C I \Delta}$ tartalmazásból és $b > c$ feltételből következik, hogy $x_M < x_I < x_S$. Eszerint $\overrightarrow{IM}$ vektor a második síknyegybe esik, míg $\overrightarrow{IS}$ vektor a negyedikbe. Kaptuk ismét, hogy $MIS \triangleleft$ tompaszög.



5. ábra

Végül hátravan az egyenlő szárú eset. Ilyenkor M , I és S pontok mind illeszkednek a szimmetriatengelyre, mégpedig a megoldás elején leírtak miatt M , I , S sorrendben, így ekkor $MIS \triangleleft = 180^\circ$.

Minden esetet megvizsgáltunk, ezzel a bizonyítás teljes.

Molnár István Ádám (Miskolc, Földes F. Gimn., 12. évf.) és

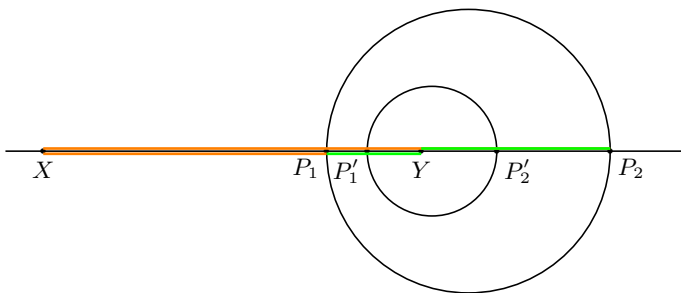
Ali Richárd (Gödöllő, Török Ignác Gimn., 11. évf.) dolgozata alapján

2. megjegyzés. A bizonyítás lényegében azon alapszik, hogy a súlyvonal, a szögfelező és a magasságvonal mindig ilyen sorrendben következnek. De a teljes megoldás

körültekintő diszkussziót követel, a legtöbb versenyző leírásában is kisebb-nagyobb hiányosság maradt.

3. megoldás. Ez az indoklás az első megoldás egy variánsa, de külön kiemelésre érdemes. Először felelevenítünk egy jól ismert állítást. Legyenek X és Y különböző pontok, valamint $\lambda > 1$ valós. Világos, hogy az XY egyenesen pontosan kettő olyan P pont van, amire $PX = \lambda \cdot PY$, jelölje ezeket P_1 és P_2 .

Tétel. Azon P pontok mértani helye a síkon, amelyekre $PX = \lambda \cdot PY$ teljesül, éppen a P_1P_2 szakasz Thalész-köre (6. ábra).



6. ábra

A fenti tétel jól ismert, a mértani helyet az XY szakasz λ arányú *Apollóniusz-körének* nevezzük. Ha $\lambda' > \lambda$, akkor a λ' -höz tartozó P'_1 és P'_2 pontok mindegyike a P_1P_2 szakasz belsejébe esik, ezért a λ' -höz tartozó Apollóniusz-kör a λ -hoz tartozó Apollóniusz-kör belsejében van. Ebből adódik a következő állítás.

Állítás. Azon P pontok mértani helye a síkon, amelyekre $PX > \lambda \cdot PY$ teljesül, éppen a P_1P_2 szakasz Thalész-körének belseje.

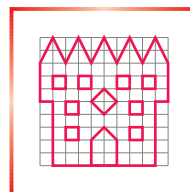
Rátérünk a feladat megoldására. A jelöléseket megtartva felhasználjuk az első megoldás néhány eredményét. A feladat állítása ekvivalens azzal, hogy I az MS szakasz Thalész-körének belsejébe esik. Vegyük észre, hogy az első megoldásban leírtak miatt MS Thalész-köre éppen az OF szakasz $\lambda = 2$ arányú Apollóniusz-köre. Így az előrebocsátott állításunk szerint elég lenne megmutatni, hogy $IO > 2IF$. Ezt négyzetre emelve és rendezve a vele ekvivalens $4IF^2 - IO^2 < 0$ egyenlőtlenséghez jutunk, amit leggyorsabban az első megoldásban leírt módon igazolhatunk a beírt és körülírt körök sugaraival számolva. Ezzel az állítást beláttuk.

Prohászka Bulcsú (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., 11. évf.)

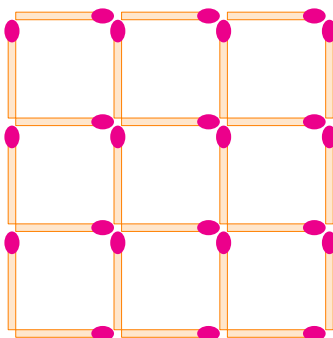
3. megjegyzés. Prohászka Bulcsú megjegyzi, hogy MIS szög akkor kerül közel 90° -hoz, ha ABC háromszögben van 180° -hoz közeli szög. Ha ABC háromszög majdnem szabályos, akkor MIS közel van az egyenesszöghöz.

A feladatra összesen 28 versenyző és 1 csapat küldött megoldást. 6 pontos Ali Richárd, Bencze Mátyás, Bui Thuy-Trang Nikolett, Diaconescu Tashi, Holló Martin, Kovács Benedek Noel, Prohászka Bulcsú, Sha Jingyuan és Virág Lénárd Dániel; 5 pontos Aravin Peter, Molnár Lili, Varga 511 Vivien és Zhai Yu Fan dolgozata. 4 pontos 5 megoldás, 3 pontot kapott 2 versenyző. 2 pontos 3, 1 pontos 1, 0 pontos 4 tanuló dolgozata, 1 dolgozat nem értékelhető.

A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok
ABACUS-szal közös pontverseny
9. osztályosoknak
(849–853.)

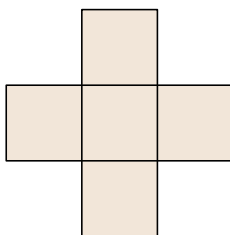


K. 849. Legalább hány gyufát kell elvenni ahhoz, hogy az ábrán semmilyen méretű négyzet ne maradjon?



K. 850. A tanár felírt a táblára egy kétjegyű pozitív prímszámot és egy 0-tól különböző számjegyet. Sanyi, Kati és Joli egy-egy háromjegyű számot hozott létre a felírt számokból. Sanyi a felírt kétjegyű prímszám végére írta a megadott számjegyet, Kati a kétjegyű prím két számjegye közé, Joli pedig a prímszám elejére. Így Sanyi háromjegyű száma 45-tel több lett, mint Katié, és 225-tel több, mint Jolié. Melyik prímszámot, és melyik számjegyet írta fel a tanár a táblára?

K. 851. Daraboljuk fel az ábrán látható öt egybevágó négyzetből álló alakzatot három részre két vágással úgy, hogy ha a darabokat megfelelően összeillesztjük, akkor egy olyan téglalapot kapjunk, amelynek az egyik oldala kétszer olyan hosszú, mint a másik.



K. 852. Három szomszédos pozitív prímszám négyzetösszege olyan szám, amelyben a számjegyek összege 11. Melyik lehet ez a három prímszám?

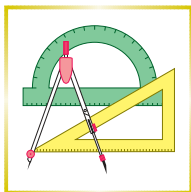
K. 853. Egy szabályos hatszög alapú egyenes hasáb alaplajjának élhossza a , magassága b . Tekintsük az összes alap- és oldallap minden átlója hosszainak összegét. Milyen $a : b$ arány esetén lesz ez az összeg $12(a\sqrt{3} + 3b)$?

Javasolta: *Róka Bálint*, Budapest



Beküldési határidő: 2025. április 10.

Elektronikus munkafüzet: <https://www.komal.hu/munkafuzet>



A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (852–853., 1848–1852.)

Feladatok 10. évfolyamig

K/C. 852. A szövegét lásd a **K** feladatoknál.

K/C. 853. A szövegét lásd a **K** feladatoknál.

Feladatok mindenkinek

C. 1848. Az a_n számsorozatot a következőképpen definiáljuk: $a_1 = 1$; $a_2 = 2$, és minden n pozitív egész számra

$$a_{n+2} = a_n^2 + a_{n+1}^2.$$

Mi az utolsó számjegye a sorozat 2025. tagjának?

ausztrál versenyfeladat

C. 1849. Az $ABCD$ konvex négyszög AB oldalának negyedelőpontjai az A ponttól a B felé haladva rendre N_1, N_2, N_3 , a DC oldal negyedelőpontjai a D ponttól a C felé haladva rendre M_1, M_2, M_3 .

Hosszabbítsuk meg az AB oldalt a B ponton túl az AB oldal hosszának negyed-részeivel, így kapjuk az N_4 pontot. Hasonlóképpen hosszabbítsuk meg a DC oldalt a C ponton túl a DC oldal hosszának negyed-részeivel, így az M_4 pontot kapjuk.

Határozzuk meg az $ABCD$ négyszög területét, ha tudjuk, hogy az AN_1M_1D , illetve BN_4M_4C négyszögek területe 8, illetve 10 területegység.

Bíró Bálint, Eger

C. 1850. Mutassuk meg, hogy ha az a, b, c pozitív számokra $abc^6 = \frac{b^2}{c^2} = 16$ teljesül, akkor $a + 4b > 16$.

Javasolta: *Czett Máttyás*, Budapest

Feladatok 11. évfolyamtól

C. 1851. Egy háromszög C csúcsából induló belső szögfelező az AB oldalt a D pontban metszi. Mekkora a háromszög oldalai, ha $AD = 15$, $DB = 20$ és $CD = = f_c = 12\sqrt{2}$?

Javasolta: *Németh László, Fonyód*

C. 1852. Oldjuk meg a valós számhármassok halmazán az

$$\log_5(22 + x) = \log_3(12 - y)$$

$$\log_5(22 + y) = \log_3(12 - z)$$

$$\log_5(22 + z) = \log_3(12 - x)$$

egyenletrendszer.

Javasolta: *Bencze Mihály, Brassó*

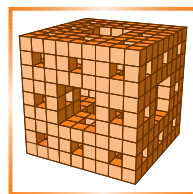


Beküldési határidő: 2025. április 10.

Elektronikus munkafüzet: <https://www.komal.hu/munkafuzet>



A B pontversenyben kitűzött feladatok (5446–5453.)



B. 5446. Mekkora lehet ℓ , ha egybevágóság erejéig pontosan háromféle háromszög létezik, amelynek egyik oldala egységnyi, egy másik oldala ℓ hosszú, és valamelyik szöge 60 fokos?

(3 pont)

Javasolta: *Hujter Bálint (Budapest)*

B. 5447. Az x , y , z pozitív valós számok összege 2025. Határozzuk meg

$$x^2 + y^2 + z^2 + 20x + 2y + 5z$$

lehetséges legkisebb értékét.

(3 pont)

Javasolta: *Lovas Márton (Budakalász)*

B. 5448. Van két egybevágó, szabályos n -szög alapú gúlánk. Mindkét gúla oldalapjaira felírjuk véletlenszerű sorrendben az $1, 2, \dots, n$ számokat. Milyen n -ek esetén lehetünk biztosak benne, hogy a két gúlát össze tudjuk úgy ragasztani az alaplapjuk mentén, hogy a kapott $2n$ -lapú kettős gúla legalább két élére teljesül, hogy mindkét oldalán ugyanaz a szám áll?

(4 pont)

Javasolta: *Lovas Márton (Budakalász)*

B. 5449. Adjuk meg azon (a, b) pozitív egész számpárokat, amelyekre teljesül, hogy $a^6 = 2b^2 - 1$.

(4 pont)

Javasolta: *Füredi Erik* (Budapest)

B. 5450. Nevezzük az n pozitív egész szám *blokk-osztójának* az olyan d pozitív egész számot, amelyre teljesül, hogy $d < n$, valamint d és $\frac{n}{d}$ relatív prím egészek. Jelölje $B(n)$ az n szám blokk-osztóinak összegét. Adjuk meg az összes olyan pozitív egész számot, amelynek nincs négy különböző prímosztója, és $B(n) = 2n$.

(5 pont)

Javasolta: *Csizmazia Norbert* (Harkány)

B. 5451. Az $ABCD$ konvex négyszögben $BAC \sphericalangle = 2CAD \sphericalangle$, $ADB \sphericalangle = 2DBA \sphericalangle$ és $CBD \sphericalangle = 30^\circ$. Mekkora lehet a $DCA \sphericalangle$?

(5 pont)

Javasolta: *Kovács Béla* (Szatmárnémeti) ötletéből

B. 5452. Az F fókuszpontú parabolán kijelöltük a $P_1, P_2, \dots, P_n$ pontokat ($n \geq 3$) úgy, hogy

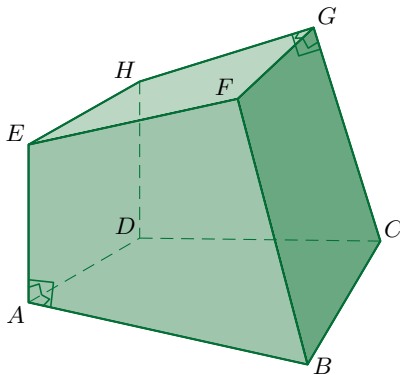
$$P_1FP_2 \sphericalangle = P_2FP_3 \sphericalangle = \dots = P_nFP_1 \sphericalangle = \frac{360^\circ}{n}.$$

Bizonyítsuk be, hogy az $FP_1, \dots, FP_n$ távolságok harmonikus közepe a parabola paraméterével egyenlő.

(6 pont)

Javasolta: *Holló Gábor* (Budapest)

B. 5453. Egy konvex polidéder lapjai az $ABCD$, $ABFE$, $BCGF$, $CDHG$, $ADHE$ és $EFGH$ négyszögek az *ábra* szerint. Az A , illetve a G csúcsból induló élek páronként merőlegesek egymásra. Igazoljuk, hogy



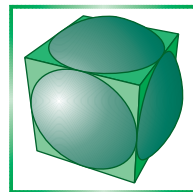
$$[ABCD]^2 + [ABFE]^2 + [ADHE]^2 = [BCGF]^2 + [CDHG]^2 + [EFGH]^2.$$

($[XYZW]$ az $XYZW$ négyszög területét jelöli.)

(6 pont)

Javasolta: *Kós Géza* (Budapest)

Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (902–904.)



A. 902. Az ABC háromszög belsejében lévő D pont olyan, hogy a BCD háromszög szabályos. Legyen E a D pont izogonális konjugáltja. Jelölje P azt a pontot az AB félegyenesen, amelyre $|AP| = |BE|$. Hasonlóan, jelölje Q azt a pontot az AC félegyenesen, amelyre $|AQ| = |CE|$. Mutassuk meg, hogy az AD egyenes felezi a PQ szakaszt.

Javasolta: *Bán-Szabó Áron* (Budapest)

A. 903. Legyen

$$\alpha = 1 - \frac{1}{2a_1 - \frac{1}{2a_2 - \frac{1}{2a_3 - \frac{1}{\ddots}}}}$$

irracionális szám, ahol az $a_1, a_2, \dots$ együtthatók pozitív egészek, és közülük végtelen sok nagyobb 1-nél. Bizonyítsuk be, hogy bármely pozitív egész N -re az $[\alpha], [2\alpha], \dots, [N\alpha]$ számok között legalább annyi páros van, mint páratlan.

$[x]$ az x szám alsó egész részét jelöli.

Javasolta: *Kós Géza* (Budapest)

A. 904. Legyen n pozitív egész szám. Egy $2n$ oldalú szabályos sokszög egyik csúcsában ül Luca, a lusta bolha. Luca minden ugrása során kiválasztja a sokszögnek valamelyik szimmetriatengelyét, majd annak átugrik a túloldalára úgy, hogy tükrözi magát arra a tengelyre. Jelölje $P(n)$ azt, hogy hány különböző módon tud Luca $2n$ egymás utáni ugrást végrehajtani úgy, hogy útja végén visszatérjen kezdeti helyzetébe és közben ne tükrözze magát ugyanarra a tengelyre kétszer. (Előfordulhat, hogy Luca helyben ugrik egyet, ez is ugrásnak minősül.)

a) Határozzuk meg $P(n)$ értékét, ha n páratlan.

b) Igazoljuk, hogy ha n páros, akkor

$$P(n) = (n-1)! \cdot n! \cdot \sum_{d|n, d \in \mathbb{N}} \left(\varphi\left(\frac{n}{d}\right) \cdot \binom{2d}{d} \right),$$

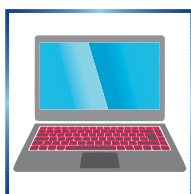
ahol $\varphi(k)$ a k -nál kisebb, k -hoz relatív prím pozitív egészek számát jelöli.

Javasolta: *Csikvári Péter és Nagy Kartal* (Budapest)



Beküldési határidő: 2025. április 10.

Elektronikus munkafüzet: <https://www.komal.hu/munkafuzet>



Informatikából kitűzött feladatok (655–658.)

I. 655. 1-től kezdve N -ig egyesével felírjuk az egész számokat egymás mellé, majd DB alkalommal végrehajtjuk a sorozaton az alábbi műveletet, amelyet az E , V , C számhármasság ad meg. A művelet három fázisa a következő:

- a sorozat E -től V sorszámgig terjedő számait (a határokat is beleértve) kivágjuk a sorozatból – a sorozat ezen részén üres helyek maradnak;
- a kivágott részt a sorozat C sorszámtól követő részétől beillesztjük, és a $(C + 1)$ -edik és utána jövő elemeket hátrább toljuk;
- az első fázisban üresen maradt helyeket feltöltjük úgy, hogy a sorozat további számait előre toljuk. A sorozat így ismét N helyet foglal.

Például: az 1 2 3 4 5 6 sorozat a 2 3 5 művelet hatására az 1 4 5 2 3 6 sorozattá alakul, majd ezt követően a 3 5 1 művelet hatására az 1 5 2 3 4 6 sorozat adódik.

Készítsünk programot *ib55* néven, amely megadja, hogy a sorozat első DB számú tagja hova került a műveletek elvégzése után, valamint az első DB helyre mely számok kerültek.

A program standard bemenetének első sorában a sorozat legnagyobb értéke, N ($1 \leq N \leq 1000$) és a műveletek DB ($1 \leq DB \leq 100$) száma található. A következő DB sorban a műveleteket megadó E , V és C ($1 \leq E \leq V \leq N$, $0 \leq C \leq E$ vagy $V \leq C \leq N$) számok szerepelnek egy-egy szóközzel elválasztva. Ha $C = 0$, akkor a mozgatható szakasz az első szám elé kerül.

A programmal a standard kimenetre írjuk ki két sort. Az első sorba azokat a sorszámozásokat, amelyek megadják, hogy a sorozat első DB tagja melyik pozícióba került a műveletek elvégzése után, majd a második sorba azokat a számokat, amelyek az első DB sorszámu helyre kerültek.

Példa:

Bemenet	Kimenet
50 4	4 14 15 4
2 8 11	23 24 1 4
7 10 1	
22 26 5	
1 6 8	

Magyarázat: a sorozat első 30 száma az egyes műveletek után

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
1	9	10	11	2	3	4	5	6	7	8	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
1	4	5	6	7	9	10	11	2	3	8	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
1	4	5	6	7	22	23	24	25	26	9	10	11	2	3	8	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	27	28	29
23	24	1	4	5	6	7	22	25	26	9	10	11	2	3	8	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	27	28	29

Beküldendő egy tömörített *i655.zip* állományban a program forráskódja és rövid dokumentációja, amely megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben fordítható.

(10 pont)

1. 656. Néhány speciális egész együtthatós polinom- vagy polinomszerű függvény (hagyományos polinom tagok és abszolút értékes kifejezések keveréke) képes arra, hogy meglehetősen sok x természetes szám helyen a függvény értéke prím legyen. Most egy speciális függvényhalmazt vizsgálunk. Ezek az $f(x) = x^2 - x + k$ alakúak, ahol legyen $k < 400$ természetes szám.

1. Nyissunk meg egy üres táblázatkezelő munkafüzetet. Készítsük el az alapadatok beviteli területét ($1 \leq k \leq 399$ és $0 \leq x \leq 399$) és az eredmény kijelzőjét a minta szerint.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	$x^2 - x + k$	k	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19
2	x	$f(x)$										
3	0		1	3	5	7	9	11	13	15	17	19
4	1		1	3	5	7	9	11	13	15	17	19
5	2		3	5	7	9	11	13	15	17	19	21
6	3		7	9	11	13	15	17	19	21	23	25
7	4		13	15	17	19	21	23	25	27	29	31
8	5		21	23	25	27	29	31	33	35	37	39
9	6		31	33	35	37	39	41	43	45	47	49

2. A munkalap neve legyen **adatok**.
3. A cellák igazítása, szegélyezése és kitöltőszíne kövesse a mintát.
4. Számítsuk ki a **C3:GT402** tartományban az adott függvény adott x -hez tartozó helyettesítési értékét.
5. Hozzunk létre **prímek** néven egy új munkalapot. Töltsük be erre a munkalapra az **A1** cellától kezdve az UTF8 kódolású **primek160000-ig.txt** tartalmát.
6. Hozzuk létre az **eredmények** munkalapot és ezen a minta szerinti táblázatot.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1													
2		A tíz legtöbb prímet generáló k érték											
3			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
4		k											
5													
6		Az általuk generált prímelek száma											
7			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
8		db											
9													
10		Ez az általuk generált függvényértékek százalékában											
11			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
12		$\%$											
13													
14		A 0-tól folyamatosan a legtöbb prímet adó dobogós k értékek és a prímelek száma									1	2	3
15											k		
16											a prímelek száma		
17													

7. A cellák igazítása, egyesítése, szegélyezése és kitöltőszíne itt is kövesse a mintát.
8. Töltsük ki a táblázatot a megfelelő adatokkal. A százaléktételek két tizedesjeggyel jelenjenek meg.
9. A dokumentációban írjunk választ arra, hogy miért csak páratlan k értékekkel próbálkozunk.
10. A munkafüzetet mentjük **primgener** néven.

Segédszámításokat csak az **adatok** munkalapon a **GU** oszloptól kezdve, illetve a **403.** sortól kezdve végezhetünk. A megoldásban saját függvény vagy makró nem használható.

Beküldendő egy tömörített *i656.zip* állományban a táblázatkezelő munkafüzet, illetve egy rövid dokumentáció, amelyben részletesen szerepel a 9. feladatra adott válasz és a megoldáskor alkalmazott táblázatkezelő neve, verziószáma.

Letölthető állomány: **primek160000-ig.txt**

(10 pont)

I. 657. Legyen a sík négy, különböző x -koordinátájú pontja $P(p_x; p_y)$, $Q(q_x; q_y)$, $R(r_x; r_y)$ és $S(s_x; s_y)$. Számítsuk ki a négy pont közül az első kettőn, az első három, illetve a négy ponton átmenő legfeljebb első-, másod-, illetve harmadfokú polinom együtthatóit.

1. Nyissunk meg egy üres táblázatkezelő munkafüzetet. Készítsük el az alapadatok beviteli területét és az eredmény kijelzőjét a minta szerint.

	A	B	C	D
1	Pontok:	x	y	
2	P			P(;
3	Q			Q(;
4	R			R(;
5	S			S(;
6				
7	Polinomok:			
8	az első két ponton átmenő:			
9				
10	az első három ponton átmenő:			
11				
12	a négy ponton átmenő:			
13				

2. A munkalap betűtípusa Arial legyen, a betűméret 11 pont.
3. A cellák igazítása, szegélyezése, kitöltőszíne kövesse a mintát.
4. A **D2:D5** tartományban a pontok koordinátáinak begépelése után jelenjenek meg a koordináták is, ahogy az a további mintákon látszik.

5. Ha mind a nyolc cella a feltételeknek megfelelő számadatot tartalmaz, kezdődhet a polinomok generálása.
- A **C8** cellában megjelenő polinomnak akkor kell helyesnek lennie, ha a **B2:C3** tartomány mind a négy cellája tartalmaz a feltételeknek megfelelő értéket.
 - A **C10** cellában megjelenő polinomnak akkor kell helyesnek lennie, ha a **B2:C4** tartomány mind a hat cellája tartalmaz a feltételeknek megfelelő értéket.
 - A **C12** cellában megjelenő polinomnak akkor kell helyesnek lennie, ha a **B2:C5** tartomány mind a nyolc cellája tartalmaz a feltételeknek megfelelő értéket.

	A	B	C	D	E
1	Pontok:	x	y		
2		P	0	4	P(0;4)
3		Q	1	2	Q(1;2)
4		R	2	6	R(2;6)
5		S	3	22	S(3;22)
6					
7	Polinomok:				
8	az első két ponton átmenő:		-2x+4		
9					
10	az első három ponton átmenő:		3x ² -5x+4		
11					
12	a négy ponton átmenő:		x ³ -3x+4		
13					

6. Persze a pontok speciális elhelyezkedése miatt kijöhet olyan eredmény, hogy nincs elsőfokú, másodfokú, esetleg harmadfokú polinom sem.

	A	B	C	D	
1	Pontok:	x	y		
2		P	-2	2	P(-2;2)
3		Q	0	2	Q(0;2)
4		R	3	2	R(3;2)
5		S	7	2	S(7;2)
6					
7	Polinomok:				
8	az első két ponton átmenő:			2	
9					
10	az első három ponton átmenő:			2	
11					
12	a négy ponton átmenő:			2	
13					

	A	B	C	D	E
1	Pontok:	x	y		
2	P	3	12	P(3;12)	
3	Q	1	8	Q(1;8)	
4	R	-2	2	R(-2;2)	
5	S	-5	-4	S(-5;-4)	
6					
7	Polinomok:				
8	az első két ponton átmenő:	2x+6			
9					
10	az első három ponton átmenő:	2x+6			
11					
12	a négy ponton átmenő:	2x+6			
13					

7. A polinomok kövessék a hagyományos matematikai leírás szabályait. Nem szabályos leírása a polinomoknak például: $-1x^2 + +7$, vagy $+0x^3 + 1x + 0$, vagy $0x^2 + -1$.
8. Segítségül még annyit, hogy
- egy n -edfokú polinomnak maximum n zérushelye van, továbbá
 - törzstényező felbontás nem csak a másodfokú polinomoknál létezik.

Segédszámításokat a 14. sortól kezdve végezhetünk. A megoldásban saját függvény vagy makró nem használható.

Beküldendő egy tömörített *i657.zip* állományban a táblázatkezelő munkafüzet, illetve egy rövid dokumentáció, amelyben részletesen szerepel a megoldási módszer, a megoldáskor alkalmazott táblázatkezelő neve, verziószáma.

(10 pont)

I. 658. A 2024/25-ös európai futball idény leghíresebb ligáinak eredményeit dolgozzuk fel a feladatban. Az adatbázis csak azokat a játékosokat tartalmazza, akik legalább 15 mérkőzést játszottak.

Táblák:

liga (kod, nev, orszag)

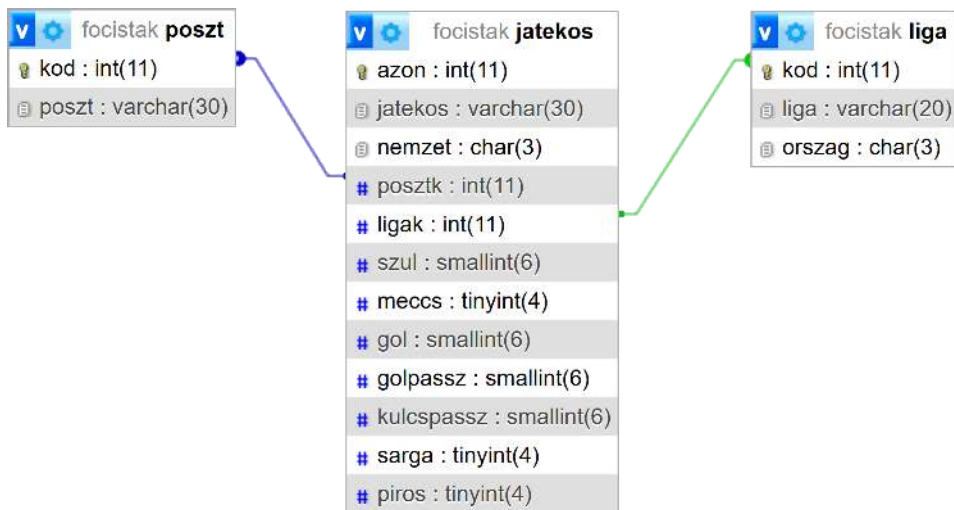
kod A liga azonosítója (szám), elsődleges kulcs
nev A liga neve (szöveg)
orszag A liga országa (szöveg)

poszt (kod, leiras)

kod A poszt azonosítója (szám), elsődleges kulcs
leiras A poszt vagy posztok leírása (szöveg), például középpályás – védő

jatekos (azon, nev, nemzet, posztkod, ligakod, szul, meccs, gol, golpassz, kulcspassz, sarga, piros)

<i>azon</i>	A játékos azonosítója (szám), elsődleges kulcs
<i>nev</i>	A játékos neve (szöveg)
<i>nemzet</i>	A játékos nemzetisége (szöveg)
<i>posztkod</i>	A játékos posztjának azonosítója (szám), idegen kulcs a poszt táblában
<i>ligakod</i>	A játékos ligájának azonosítója (szám), idegen kulcs a liga táblában
<i>szul</i>	A játékos születési éve (szám)
<i>meccs</i>	A játékos által játszott meccsek száma az idényben (szám)
<i>gol</i>	A játékos szerzett góljainak száma (szám)
<i>golpassz</i>	A játékos által adott gólpasszok száma (szám)
<i>kulcspassz</i>	A játékos által adott kulcsfontosságú átadások száma (szám)
<i>sarga</i>	A játékos által kapott sárga lapok száma (szám)
<i>piros</i>	A játékos által kapott piros lapok száma (szám)



Az adatbázist és a táblákat létrehozó, és az adatokat a táblába beszűrő SQL-parancsokat a **focistak_forras.sql** állomány tartalmazza. Futtassa le a parancsfájlt és a továbbiakban a létrehozott adatbázisban dolgozzon. Oldja meg az alábbi feladatokat, és a megoldásokat adó SQL parancsokat a **focistak.sql** nevű szöveges állományba mentse el.

1. Lekérdezés segítségével írassuk ki a magyar nemzetiségű focisták nevét, valamint a ligák megnevezését, ahol játszanak. (**1magyar**)
2. Adjuk meg, hogy hány kapus játszik az adatbázisban szereplő olasz ligában. (**2kapus**)
3. Adjuk meg az első 25 leggólerősebb játékost a Bundesligában. A lekérdezés listázza ki a nevüket, életkorukat 2025-ben, valamint azt, hogy hány gólt rúgtak. (**3golerosek**)
4. Írassuk ki azokat a francia ligában játszó, francia nemzetiségű focistákat, akik több gólpasszt adtak, mint ahány saját gólt lőttek. A lista tartalmazza a nevüket, a posztot vagy posztokat, valamint a saját lőtt gólok és az átadások számát. (**4franciapassz**)
5. Készítsünk lekérdezést, amely meghatározza, hogy melyik ligában mennyi az egy védőjátékosra jutó sárga lapok átlagos száma. Az eredményt az összes védő poszton is játszó focista adatai alapján adjuk meg. (**5vedosarga**)
6. Meglehetősen ritka, hogy egy csatárt piros lappal kiállítanak, mert súlyos szabálytalanságot vét. Adjuk meg, hogy hány ilyen eset történt, illetve hány csatár poszton is játszó játékost érintett ez az egyes ligákban. A lekérdezés tartalmazza a ligák nevét, a piros lapok és az azt kapó játékosok számát. (**6piros**)
7. Vannak játékosok, akik kulcsfontosságú átadásokkal, de még nem gólpasszal teszik eredményessé csapatukat. Adjuk meg azokat a „védő” vagy „középpályás – védő” poszton játszó focistákat az angol ligában, akiknek legalább 5 ilyen átadása volt. A lista tartalmazza a játékosok nevét ábécésorrendben. (**7kulcs5**)

Beküldendő egy tömörített *i657.zip* állományban a focistak.sql szöveges állomány, amely tartalmazza a feladatok megoldását adó SQL parancsokat.

Az adatok forrása: <https://www.kaggle.com/datasets/hubertsidorowicz/football-players-stats-2024-2025/data>

(10 pont)

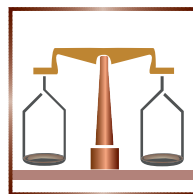


Beküldési határidő: 2025. április 15.

Elektronikus munkafüzet: <https://www.komal.hu/munkafuzet>



Mérési feladatok megoldása



M. 436. Vizsgáljuk egy pingponglabda pattogásait hangfeldolgozó program vagy telefonos alkalmazás segítségével legalább három különböző szilárd felületen (fa, üveg, járólap stb.). Mérjük meg a pattogásokra jellemző ütközési számot!

(6 pont)

Közli: Vigh Máté, Biatorbágy

I. megoldás. Az ejtés kezdőmagasságának meghatározása érdekében elkészítettem az 1. ábrán látható elrendezést: LEGO-ból építettem egy tartófalat, majd ahhoz csipeszekkel hozzáerősítettem a képen látható derékszögmérőt és a derékszögű vonalzó. Ezen felépítés segítségével egy meghatározott magasságból leejtettem a pingponglabdát és a pattanások hangját okostelefonnal rögzítettem. A hangfájlokat számítógépen Audacity alkalmazásban megnyitottam, amely ábrázolta a hangerőt az idő függvényében. Amint a 2. ábrán látható, lepattanás-kor a hangerő hirtelen megnő, így leolvasható az egyes lepattanások időpontja.



1. ábra

Két ilyen egymást követő időpont különbsége megadja a két lepattanás közötti függőleges hajítás t idejét. Két ütközés között a labda mozgása t hajítási idejű függőleges hajítással modellezhető, melynek kezdő- és becsapódási sebessége:

$$(1) \quad v = g \frac{t}{2},$$

ahol g a nehézségi gyorsulás. Egy lepattanáshoz tartozó k ütközési szám az ütközést követő hajítás kiindulási sebességének (v_2) és az ütközést megelőző becsapódási sebesség (v_1) hányadosa. Jelöljük az ütközést megelőző hajítás idejét t_1 -gyel, az ütközést követőt pedig t_2 -vel, így az (1) egyenlet behelyettesítésével az ütközési



2. ábra

számra a következő egyenletet kapjuk:

$$(2) \quad k = \frac{v_2}{v_1} = \frac{g \frac{t_2}{2}}{g \frac{t_1}{2}} = \frac{t_2}{t_1}.$$

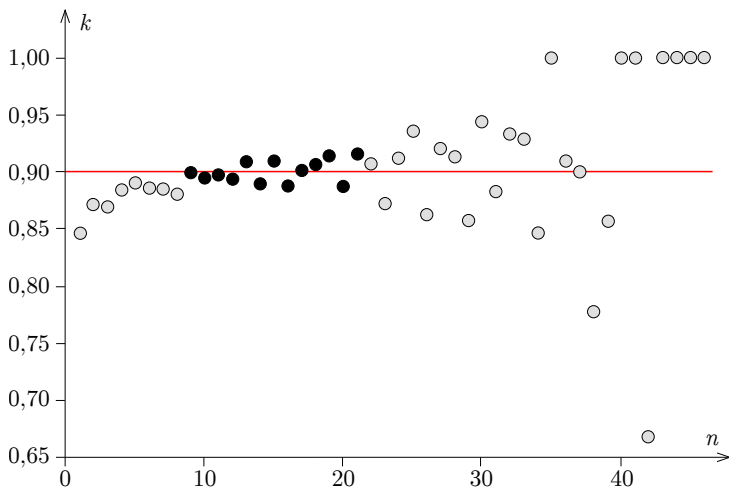
A mérés során három különböző környezetet vizsgáltam: fa járólap, kőcsempe és üveglap. Minden felület esetén több különböző meghatározott kezdőmagasságból ejtettem le a pingponglabdát. A hangfelvételeket elemezve meghatároztam az egymást követő ütközések közötti hajítási időket.

sor-szám	időpont (ms)	t (ms)	k
1	938		
2	1598	660	
3	2145	547	0,829
4	2610	465	0,850
5	3010	400	0,860
6	3359	349	0,873

1. táblázat

ütközési számok találhatóak meg. A hangfelvételt mindaddig elemeztem, amíg az ütközések még elkülöníthetőek voltak egymástól, a kapott k ütközési számokat a 3. ábrán az ütközés n sorszámanak függvényében ábrázoltam.

Először a fa járólap felületét vizsgáltam, a pingponglabdát $h = 80$ cm magasságból indítottam. Az 1. táblázat második oszlopa az első hat ütközés időpontját tartalmazza a hangfelvétellel kezdetéhez viszonyítva. A harmadik oszlopban a szomszédos időpontok különbségéből számított hajítási idők találhatóak. A negyedik oszlopban pedig a (2) egyenlet alapján a szomszédos hajítási idők hányadosaként meghatározott

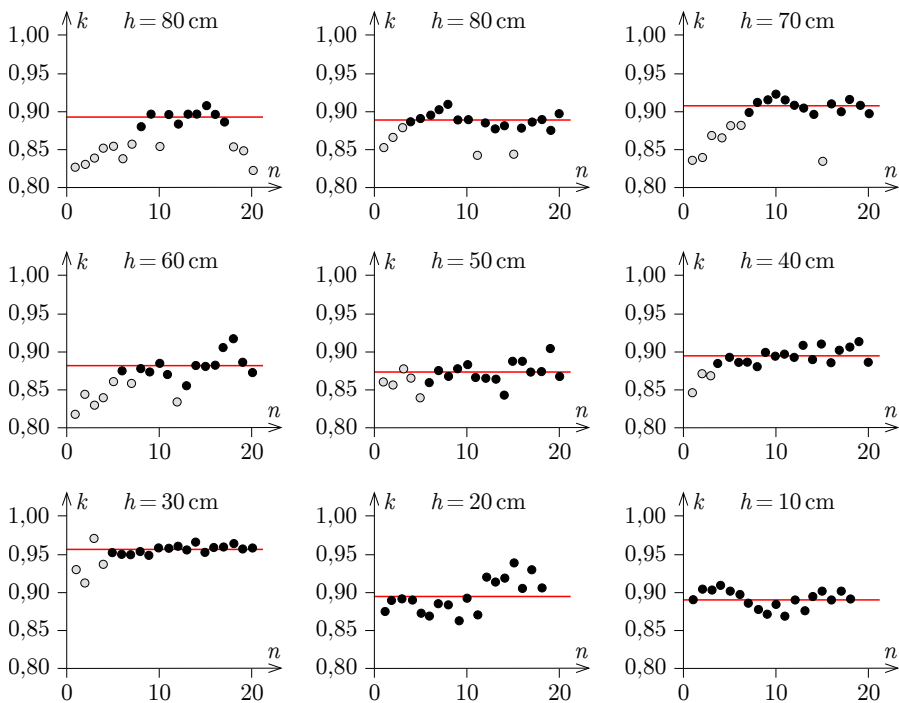


3. ábra

Az ábráról leolvasható, hogy kezdetben az ütközési szám növekszik, ezt követően állandósul, végül a szórása egyre nagyobb lesz. A kezdeti növekvés a légellenállás miatt alakul ki, mivel kezdetben hosszabb hajítási idők és nagyobb sebességek miatt ez jelentősen fékezi a labdát. A hajítási magasságok csökkenésével ez a hatás egyre csökken, és a mért ütközési szám egy érték körül állandósul. Az idő előrehaladtával

a hajítási idők egyre rövidülnek, így azok mérése egyre pontatlanabb, ezáltal az ütközési szám szórása egyre nagyobb. Ezek alapján a legpontosabb eredményt, akkor kapjuk, ha az állandósult érték körüli kis szórással rendelkező pontokat átlagoljuk. Az *ábrán* ezek a pontok fekete színűek, az átlagukat piros vonal jelöli, ennek értéke $k = 0,900$. Látható, hogy a huszadik ütközés után az ütközési számok szórása jelentős, ezért a következőkben csak az első húsz ütközést vettem figyelembe.

Ezen a felületen további kilenc mérést végeztem különböző h kezdőmagasságokkal, az így kapott ütközési számok az ütközés sorszámának függvényében a *4. ábrán* láthatók. Az átlag számításakor figyelembe vett pontok fekete színűek, az átlagot a diagramokon piros vonal jelöli.



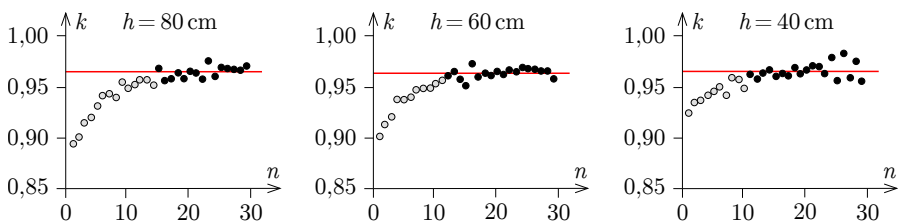
4. ábra

A mérést megismételtem kő- és üvegfelületen, mindkét esetben három különböző kezdőmagassággal. Ezeken a felületeken az első 30 ütközést értékeltem. Az eredményeket az előzőkhöz hasonlóan az *5. ábra* (kő) és a *6. ábra* (üveg) mutatja.

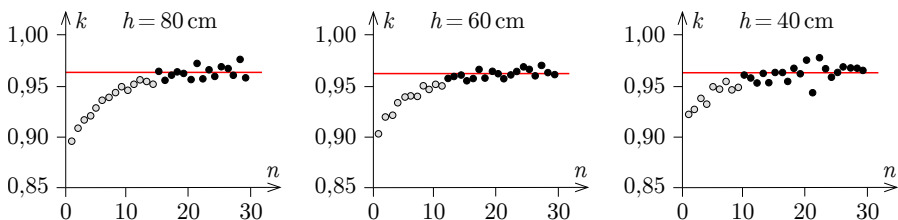
A különböző felületeken és különböző kezdőmagassággal mért eredményeket a *2. táblázat* foglalja össze. Az utolsó oszlopban az egyes felületeken mért értékek átlaga és szórása látható.

A kísérletben két különböző anyag közötti kölcsönhatást vizsgáltuk, viszont irodalmi értéket az ütközési számra csak egy-egy anyagra találtam. Pingponglabda esetében ez $k = 0,8^1$, de az nem derül ki, hogy ezt milyen körülmények közt mérték.

¹<https://www.netfizika.hu/tudas/node/9582>



5. ábra



6. ábra

felület	h (cm)	k	$k_{\text{átl}}$	felület	h (cm)	k	$k_{\text{átl}}$
fa	80	0,900	$0,899 \pm 0,023$	kő	80	0,965	$0,965 \pm 0,001$
	80	0,893			60	0,964	
	80	0,889			40	0,966	
	70	0,908		üveg	80	0,964	$0,963 \pm 0,001$
	60	0,882			60	0,962	
	50	0,873			40	0,963	
	40	0,895					
	30	0,958					
	20	0,896					
	10	0,892					

2. táblázat

Hibaforrások. A labda nem egy helyen pattogott, így adódhat hiba a felületek inhomogenitásából, annak ellenére, hogy mindhárom esetben ügyeltem a tiszta, vízszintes és sima felszínre. A szoftverrel milliszekundumos pontossággal tudtam leolvasni az ütközések időpontját, ami az ütközések sűrűsödésével egyre nagyobb szóráshoz vezetett az ütközési számban. A pingponglabda inhomogenitásaiból is adódnak eltérések, feltételezhető, hogy a forrasztás mentén rugalmas tulajdonságai eltérnek.

Fülöp Magdaléna (Pécsi Leówey Klára Gimn., 10. évf.)

II. megoldás. Az $(n - 1)$ -edik és n -edik ütközés között eltelt idő legyen Δt_n . Az I. megoldás (2) kifejezése alapján:

$$k = \frac{\Delta t_n}{\Delta t_{n-1}},$$

és így a Δt_1 -gyel kezdődő sorozat n -edik eleme:

$$(3) \quad \Delta t_n = k^{n-1} \Delta t_1.$$

Ha ábrázoljuk az $\ln \Delta t_n(n)$ függvényt, és a pontokra egyenest illesztünk, akkor (3) szerint:

$$\ln \Delta t_n = \ln (k^{n-1} \Delta t_1) = (n-1) \ln k + \ln \Delta t_1 = n \ln k + (\ln \Delta t_1 - \ln k),$$

tehát az illesztett egyenes meredeksége $\ln k$ lesz.

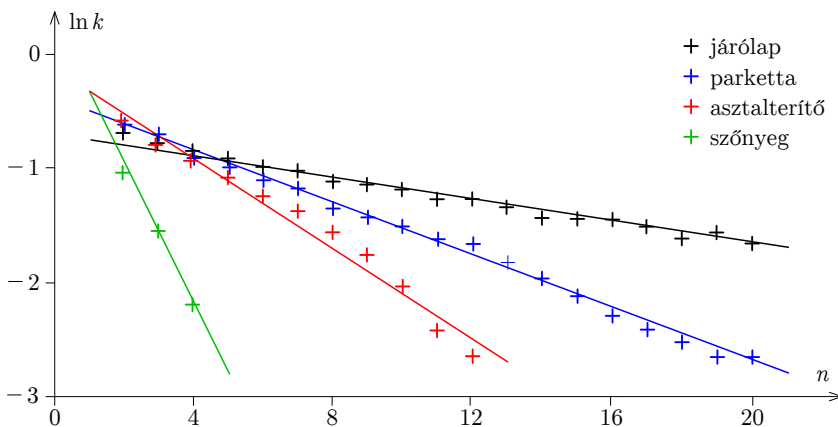
A Δt_n sorozat elemeit a következőképp határozom meg: a pingponglabdát 0,5 m magasról egy vízszintes felületre ejtem, és hangfelvételt készítek a labda pattogásáról. A hangfájlt *Audacity* szoftverrel elemezve 0,01 s pontossággal leolvastam az egyes ütközések t_n időpontját, majd ebből a $\Delta t_n = t_n - t_{n-1}$ időközöket.

Négy különböző felületen mértem: járólap, parketta, asztalterítő, szőnyeg. Az ütközések időpontját és az egyes időintervallumok logaritmusát a 3. táblázat tartalmazza. Minden időadat másodpercben van megadva. Az 1. ütközés időpontja az alkalmazás indításától mért idő, amely így csak a következő időintervallum meghatározásához szükséges. A t_n időket addig mértem, amíg $\Delta t_n \geq 0,07$ s, mert azután

	járólap		parketta		terítő		szőnyeg	
n	t_n	$\ln \Delta t_n$	t_n	$\ln \Delta t_n$	t_n	$\ln \Delta t_n$	t_n	$\ln \Delta t_n$
1	0,54		0,68		1,22		0,75	
2	1,04	-0,69	1,68	-0,60	1,78	-0,58	1,11	-1,02
3	1,49	-0,79	1,68	-0,71	2,24	-0,78	1,32	-1,56
4	1,92	-0,84	2,68	-0,87	2,64	-0,92	1,43	-2,20
5	2,32	-0,92	2,68	-0,97	2,98	-1,08		
6	2,62	-0,99	2,68	-1,11	3,27	-1,24		
7	3,05	-1,02	3,68	-1,17	3,52	-1,39		
8	3,38	-1,11	3,68	-1,35	3,73	-1,56		
9	3,70	-1,14	3,68	-1,43	3,90	-1,77		
10	4,00	-1,20	3,68	-1,51	4,03	-2,04		
11	4,28	-1,27	4,68	-1,61	4,12	-2,41		
12	4,56	-1,27	4,68	-1,66	4,19	-2,66		
13	4,82	-1,35	4,68	-1,83				
14	5,06	-1,43	4,68	-1,97				
15	5,30	-1,43	4,68	-2,12				
16	5,53	-1,47	4,68	-2,30				
17	5,75	-1,51	4,68	-2,41				
18	5,95	-1,61	4,68	-2,53				
19	6,16	-1,56	5,68	-2,66				
20	6,35	-1,66	5,68	-2,66				

3. táblázat

a mérési hiba túl nagygyá válik. Ezután ábrázoljuk az $\ln \Delta t_n(n)$ függvényt, és az egyes mérési sorozatokra egyenest illesztünk (7. ábra). Az illesztett egyenesek m



7. ábra

meredekségéből az ütközési állandó meghatározható:

$$k = e^m.$$

A leolvasott meredekségeket és ütközési állandókat, valamint a hibákat a 4. táblázat tartalmazza. A hibákat m esetében a „kézi” egyenesillesztésnél a „még elfogadható” illesztett egyenesek minimális és maximális meredeksége adja. A k ütközési állandó hibája pedig már ebből számolható. A szoftver lehetővé teszi az ezredmásodperces időmérést is, de egyéb hibaforrások (elsősorban a légellenállás, valamint a felületek egyenetlensége) ezt feleslegessé teszi.

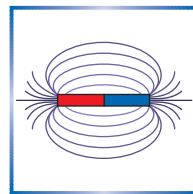
felület	m	k
járólap	$-0,0455 \pm 0,0068$	$0,956 \pm 0,006$
parketta	$-0,124 \pm 0,009$	$0,883 \pm 0,008$
asztalterítő	$-0,197 \pm 0,020$	$0,82 \pm 0,16$
szőnyeg	$-0,66 \pm 0,06$	$0,52 \pm 0,30$

4. táblázat

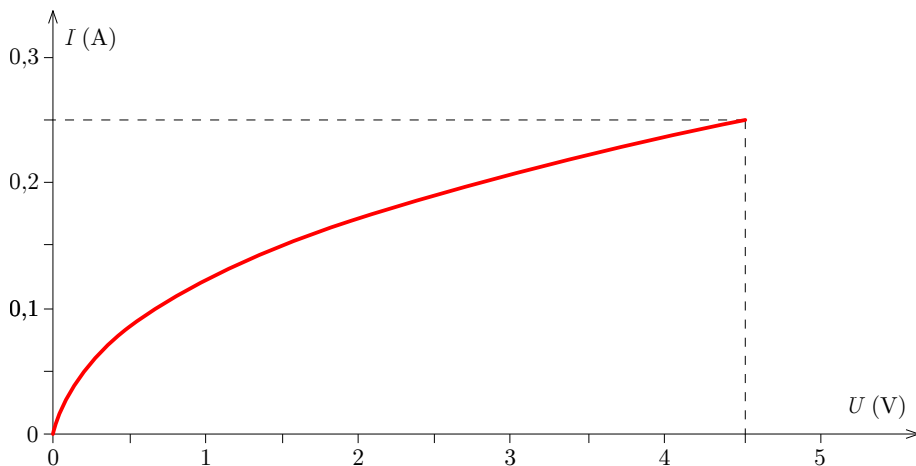
Hegedüs Márk (Budapest, ELTE Apáczai Csere J. Gyak. Gimn., 10. évf.)

16 dolgozat érkezett. Helyes 4 megoldás. Kicsit hiányos (4–5 pont) 5, hiányos (2–3 pont) 5, hibás 2 dolgozat.

Fizika feladatok megoldása



P. 5604. Egy laposelem üresjárási feszültsége $U_0 = 4,5$ V, belső ellenállása $R_b = 1,5$ Ω . Van két egyforma izzólámpánk, amelyek $I(U)$ karakterisztikája az ábrán látható.



a) Hogyan függ a telep kapocsfeszültsége a terhelő áramtól? Ábrázoljuk a telep $I(U)$ karakterisztikáját!

b) Egy izzót rákapcsolunk a telepre. Határozzuk meg az izzóra eső feszültséget és az izzón átfolyó áramot (az ún. munkapontot) az $I(U)$ grafikon segítségével!

c) A két izzót

i) párhuzamosan,

ii) sorba

kapcsoljuk, és így kötjük rá a telepre. Készítsük el a párhuzamosan, illetve a sorba kapcsolt izzók (együttes) $I(U)$ karakterisztikáját, majd határozzuk meg mindkét esetben az új munkapontot. Ezután határozzuk meg mindkét esetben az egy izzóra eső feszültséget és az izzón átfolyó áramot!

(5 pont)

Közli: Vankó Péter, Budapest

Megoldás. a) A belső ellenálláson $U_b = R_b I$ feszültség esik, így a kapocsfeszültség $U = U_0 - R_b I$. Ez alapján a telep árama a kapocsfeszültség függvényében

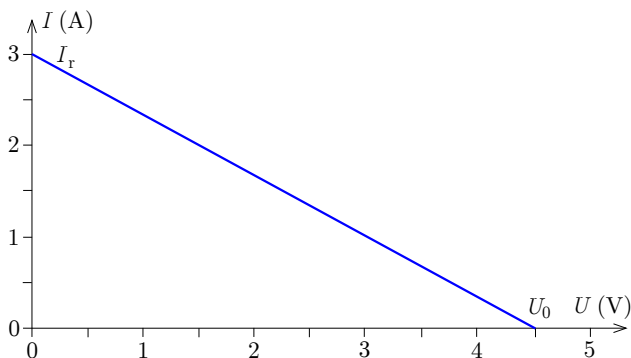
$$I = \frac{U_0 - U}{R_b}.$$

Ez egy lineáris függvénykapcsolat, amelyet legegyszerűbben a tengelymetszetei alapján lehet ábrázolni. Ha $I = 0$, a kapocsfeszültség megegyezik az $U_0 = 4,5$ V

üresjáratú feszültséggel, ha $U = 0$, akkor pedig a telepen

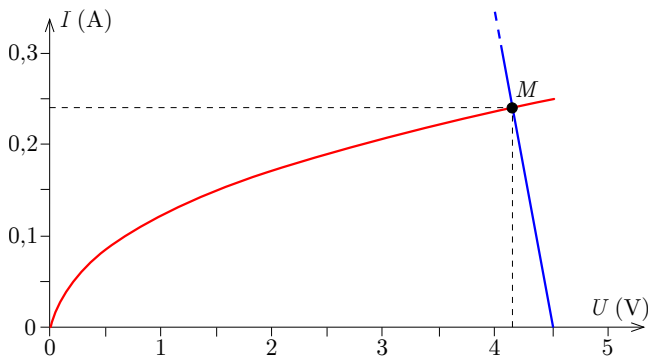
$$I_r = \frac{U_0}{R_b} = 3 \text{ A}$$

nagyságú, úgynevezett *rövidzárási* áram folyik. A grafikon az 1. ábrán látható. (A grafikont függőleges irányban összenyomtuk, hogy a teljes karakterisztika kiferjen.)



1. ábra

b) Rajzoljuk a telep és az izzó karakterisztikáját közös grafikonba (2. ábra). A *munkapont* (M) a két görbe metszéspontja, amelynek koordinátái a grafikonról leolvashatók: $U_1 \approx 4,14 \text{ V}$ és $I_1 \approx 0,240 \text{ A}$.

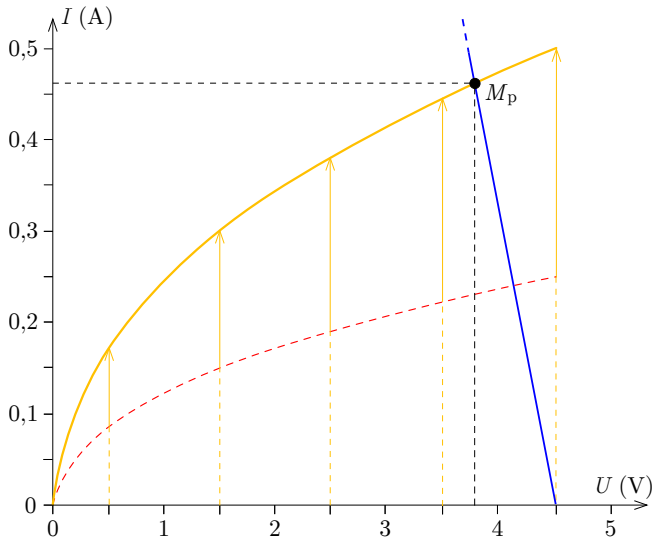


2. ábra

c) i) Párhuzamos kapcsolás esetén a két izzón ugyanakkora feszültség esik, és mivel az izzók egyformák, ugyanakkora áram is folyik. A párhuzamosan kapcsolt izzókon egy adott feszültségen *együttesen* kétszer akkora áram folyik, mint egy izzón. A párhuzamosan kapcsolt izzók eredő karakterisztikáját tehát az eredeti karakterisztika *függőleges* kétszeresére nyújtásával kaphatjuk meg. Ezt grafikusan is megszerkeszthetjük (3. ábra), majd a b) részhez hasonlóan megszerkeszthetjük

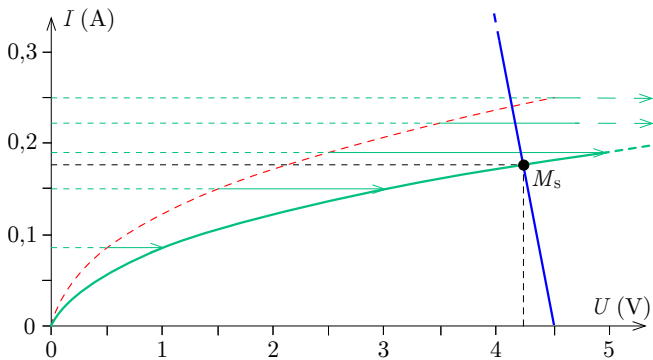
a munkapontot (M_p). Ennek koordinátái: $U_p \approx 3,80$ V és $I_p \approx 0,462$ A, amiből egyetlen izzó feszültsége és árama ebben az esetben:

$$U_{p1} = U_p \approx 3,80 \text{ V} \quad \text{és} \quad I_{p1} = \frac{I_p}{2} \approx 0,231 \text{ A}.$$



3. ábra

ii) Soros kapcsolás esetén a két izzón ugyanakkora áram folyik keresztül, és az izzók egyformasága miatt ugyanakkora feszültség is esik. Így *együttesen* a két izzón kétszer akkora feszültségnek kell esnie, mint egy izzón ahhoz, hogy ugyanakkora áram folyjon rajtuk. A sorosan kapcsolt izzók együttes karakterisztikáját az eredeti karakteristika *vízszintes* nyújtásával kaphatjuk meg (4. ábra). Az M_s munkapontot az előzőkhöz hasonlóan leolvassa $U_s \approx 4,24$ V és $I_s \approx 0,176$ A, amiből



4. ábra

egyetlen izzó feszültsége és árama ebben az esetben:

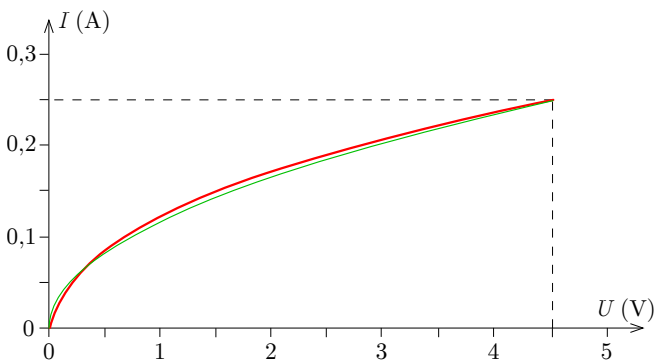
$$U_{s1} = \frac{U_s}{2} \approx 2,12 \text{ V} \quad \text{és} \quad I_{s1} = I_s \approx 0,176 \text{ A}.$$

Fekete Lúcia (Budapest V. Ker. Eötvös J. Gimn., 12. évf.) dolgozata alapján

Megjegyzés. Több megoldó egy gyökfüggvénnyel közelítette a feladatban megadott karakterisztikát. Az origón és a görbe végpontján átmenő gyökfüggvény egyenlete (SI egységekben):

$$I(U) = \frac{0,25}{\sqrt{4,5}} \sqrt{U} \approx 0,118 \sqrt{U}.$$

Az 5. ábrán látható, hogy a függvény (zöld görbe) aránylag jól közelíti a karakterisztikát (piros görbe), de nem egyezik meg vele. A legfontosabb elvi eltérés az, hogy a gyökfüggvény érintője az origóban függőleges, ami azt jelentené, hogy az izzó ellenállása szobahőmérsékleten nulla. A valóságban az izzó ellenállása szobahőmérsékleten körülbelül egy nagyságrenddel kisebb, mint az üzemi hőmérsékleten. Tehát valóban kicsi, de természetesen nem nulla. Ennek megfelelően a karakterisztika az origóból nagyon meredeken, de *nem* függőlegesen indul.



5. ábra

12 dolgozat érkezett. Helyes 4 megoldás. Kicsit hiányos (3–4 pont) 7, hibás 1 dolgozat.

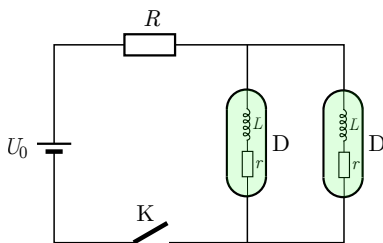
P. 5615. Egy $U_0 = 4 \text{ V}$ feszültségű ideális telep, egy $R = 0,5 \Omega$ ellenállású fogyasztó, egy kapcsoló és két dürisztor (D) felhasználásával az a) ábrán látható kapcsolást állítjuk össze. A dürisztor egy olyan áramköri elem, amely egy $L = 1 \text{ H}$ induktivitású ideális tekercs és egy nemlineáris r ellenállás soros kapcsolásából áll. Az ellenállás $U_r(I_D)$ karakterisztikáját a b) ábra mutatja.

a) Mekkora lehetnek stacionárius (azaz időben állandó) esetben a mellékágakban folyó áramok?

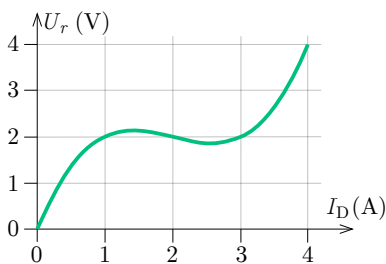
Segítség: Lásd a **P. 5604.** feladatot és annak megoldását a munkafüzetben.

b) A $t = 0$ pillanatban bekapcsoljuk a kapcsolót. Vázzuk fel a dürisztorokon átfolyó áramokat az idő függvényében. Mekkora lesznek ezek az áramok hosszabb idő után?

Segítség: Tegyük fel, hogy eközben a szimmetria miatt a két dürisztoron azonos áram folyik.



a)



b)

c) Az egyensúlyi állapotban egy kis zavar keletkezik: az egyik diórisztor árama egy nagyon kicsit lecsökken, a másiké pedig ugyanennyivel megnő. Vázoljuk fel a két diórisztor áramát ezután az idő függvényében. Mekkoraak lesznek az egyes diórisztorok áramai hosszabb idő után? Mit állíthatunk az a) kérdésben megadott stacionárius megoldások stabilitásáról?

Segítség: Felhasználhatjuk, hogy ha a kis zavar az első egyensúlyi állapothoz képest szimmetrikus, akkor a két diórisztor áramának összege állandó marad.

(6 pont)

Dürer Verseny feladata nyomán

I. megoldás. Legyen I_1 és I_2 az egyes diórisztorokon átfolyó áram. Ekkor a két huroktörvény alapján a rendszert leíró differenciálegyenlet-rendszer:

$$U_0 = U_r(I_1) + L\dot{I}_1 + R(I_1 + I_2),$$

$$U_0 = U_r(I_2) + L\dot{I}_2 + R(I_1 + I_2).$$

A mértékegységeket itt és a továbbiakban mindenhol elhagyva, SI-ben:

$$\dot{I}_1 = 4 - U_r(I_1) - \frac{1}{2}(I_1 + I_2),$$

$$\dot{I}_2 = 4 - U_r(I_2) - \frac{1}{2}(I_1 + I_2).$$

Közelítsük az U_r függvényt polinommal, hogy egyszerűbben kezelhessük az egyenleteinket. Látható, hogy ha a (2,2) pont lenne az origó, a függvény páratlan lenne, így x -nek csak páratlan hatványai szerepelnének benne, és a konstans is 0 lenne. Ebben a koordináta-rendszerben az $f(x) = ax^3 + bx$ függvénnyel próbálkozunk. Tudjuk, hogy $f(1) = 0$ és $f(2) = 2$, ezekből $a + b = 0$ és $8a + 2b = 2$, innen pedig $a = \frac{1}{3}$ és $b = -\frac{1}{3}$. Ebből

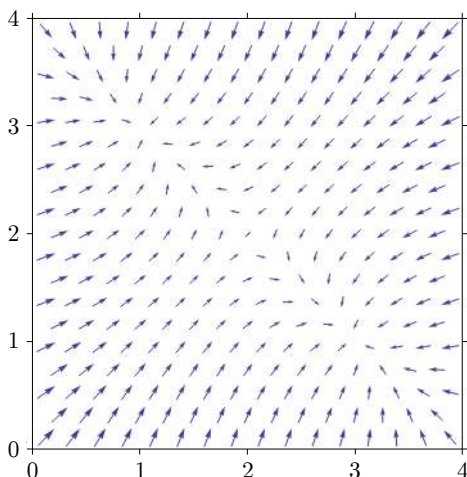
$$U_r(I) - 2 = \frac{1}{3}((I - 2)^3 - (I - 2)).$$

Ez a függvény vonalvastagságon belül megegyezik a feladatban megadott görbével. U_r -be való behelyettesítés után az egyenleteink:

$$\dot{I}_1 = 2 - \frac{1}{3}((I_1 - 2)^3 - (I_1 - 2)) - \frac{1}{2}(I_1 + I_2),$$

$$\dot{I}_2 = 2 - \frac{1}{3}((I_2 - 2)^3 - (I_2 - 2)) - \frac{1}{2}(I_1 + I_2).$$

Ábrázolhatjuk a rendszer meredekségmezejét (1. ábra), ez alapján láthatjuk, hogy csak a balról jobbra lejtő főátlón lesznek stacionárius pontok.



1. ábra

Az U_r függvény alakja célszerűvé teszi az $y_1 = I_1 - 2$ és $y_2 = I_2 - 2$ helyettesítéseket, így az egyenletek szebb alakúak lesznek:

$$\dot{y}_1 = -\frac{1}{3}(y_1^3 - y_1) - \frac{1}{2}(y_1 + y_2),$$

$$\dot{y}_2 = -\frac{1}{3}(y_2^3 - y_2) - \frac{1}{2}(y_1 + y_2).$$

Az a) részben a stacionárius megoldásokat keressünk. Ekkor $\dot{y}_1 = \dot{y}_2 = 0$. Összeadva a két egyenletet:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 + \dot{y}_2 &= 0 = \\ &= -\frac{1}{3}(y_1^3 - y_1) - \frac{1}{3}(y_2^3 - y_2) - (y_1 + y_2), \\ \frac{1}{3}(y_1^3 - y_1) + y_1 &= -\frac{1}{3}(y_2^3 - y_2) - y_2. \end{aligned}$$

Ez az egyenlet $f(y_1) = -f(y_2)$ alakú, ahol $f(y) = \frac{1}{3}y^3 + \frac{2}{3}y$. Ez a függvény szigorúan monoton növekvő ($f'(y) = y^2 + \frac{2}{3} > 0$), ezért bármilyen értékű is az egyenlet jobb oldala (nevezetesen $-f(y_2)$), pontosan egy helyen veszi fel azt az értéket. Mivel $f(y) = -f(-y)$, az egyetlen megoldás: $y_1 = -y_2$.

Ezt kihasználva írjuk fel $\dot{y}_2 - \dot{y}_1$ kifejezését:

$$\begin{aligned} \dot{y}_2 - \dot{y}_1 &= 0 = \frac{1}{3}(y_1^3 - y_1) + \frac{1}{2}(y_1 + y_2) - \frac{1}{3}(y_2^3 - y_2) - \frac{1}{2}(y_1 + y_2), \\ \frac{1}{3}(y_1^3 - y_1) - \frac{1}{3}(y_2^3 - y_2) &= 0. \end{aligned}$$

Felhasználva, hogy $y_2 = -y_1$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}(y_1^3 - y_1) + \frac{1}{3}(y_1^3 - y_1) &= 0, \\ y_1^3 - y_1 &= 0. \end{aligned}$$

Az egyenletnek $y_1 = 0$ megoldása, leosztva y_1 -gyel:

$$y_1^2 - 1 = 0,$$

amiből $y_1 = \pm 1$ a másik két megoldás. Visszatérve y -okról I -kre a három stacionárius megoldás: $\{I_1, I_2\} = \{1, 3\}, \{2, 2\}, \{3, 1\}$.

Oldjuk meg a differenciálegyenletet a szimmetrikus, $y_1 = y_2$ esetre. Látható, hogy ha $y_1(t) = y_2(t)$, akkor $\dot{y}_1(t) = \dot{y}_2(t)$, így ha kezdetben teljesül, akkor a továbbiakban is teljesülni fog a feltétel. Így az egyenletünk (az alsó indexet elhagyva):

$$\begin{aligned} \dot{y} &= -\frac{1}{3}(y^3 - y) - \frac{1}{2}(y + y) = -\frac{1}{3}y(y^2 + 2), \\ \frac{\dot{y}}{y(y^2 + 2)} &= -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

A bal oldal $\dot{y}(t) \cdot f(y(t))$ alakú, és a láncszabály alapján $\dot{F}(y(t)) = \dot{y}(t) \cdot F'(y)$, vagyis csak y szerint kell integrálni $f(y)$ -t, hogy megkapjuk az integrál értékét. Parciálisan

törtékre bontva:

$$\dot{y} \left(\frac{1}{2} \frac{1}{y} - \frac{1}{4} \frac{2y}{y^2 + 2} \right) = -\frac{1}{3},$$

majd integrálva:

$$\frac{1}{2} \ln y - \frac{1}{4} \ln(y^2 + 2) = -\frac{1}{3}t + C,$$

$$\ln y^2 - \ln(y^2 + 2) = -\frac{4}{3}t + 4C,$$

$$\frac{y^2}{y^2 + 2} = ce^{-\frac{4}{3}t}.$$

Ebből:

$$y = \pm \sqrt{\frac{2}{ce^{\frac{4}{3}t} - 1}},$$

ahol a c integrálási állandó és az előjel a kezdeti feltételektől függ. Megmutatható, hogy bármilyen kezdeti állapotra találunk megfelelő c -t, kivéve $y(0) = 0$ -ra, arról viszont már tudjuk, hogy egy stacionárius pont. Könnyen látható továbbá, hogy $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$.

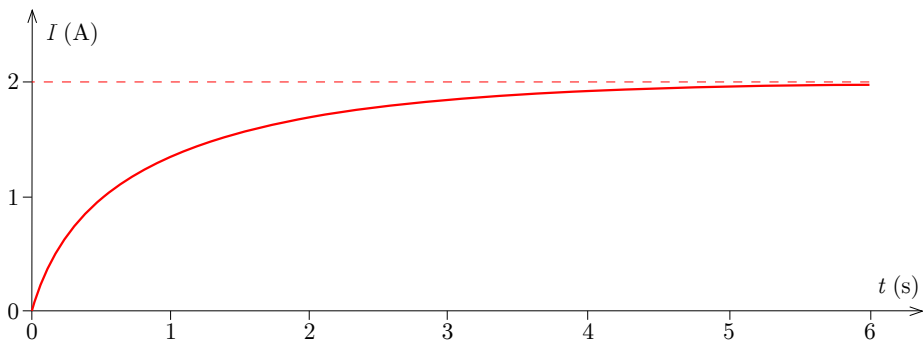
A feladat $b)$ része ennek a differenciálegyenletnek a megoldása az $I_1 = I_2 = 0$ kezdeti feltételekkel. Ekkor $y(0) = -2$, ahonnan a megfelelő konstans érték $c = \frac{3}{2}$, és az előjel negatív. A megoldásfüggvény:

$$y = -\sqrt{\frac{2}{\frac{3}{2}e^{\frac{4}{3}t} - 1}} = -\frac{2}{\sqrt{3e^{\frac{4}{3}t} - 2}},$$

ahonnan az áramok nagysága az idő függvényében (2. ábra):

$$I(t) = 2 - \frac{2}{\sqrt{3e^{\frac{4}{3}t} - 2}}.$$

Az áram értéke (mint az összes ebbe a függvénycsaládba tartozó függvényé) 2-be tart.



2. ábra

$c)$ Most oldjuk meg az egyenletet az antiszimmetrikus $y_1 = -y_2$ esetben. Az előző esethez hasonlóan belátható, hogy ez a tulajdonság is időben megmarad.

A differenciálegyenlet és a megoldása az előzőhöz hasonlóan:

$$\dot{y}_1 = -\frac{1}{3}(y_1^3 - y_1) - \frac{1}{2}(y_1 - y_1),$$

$$\frac{\dot{y}_1}{y_1^3 - y_1} = -\frac{1}{3},$$

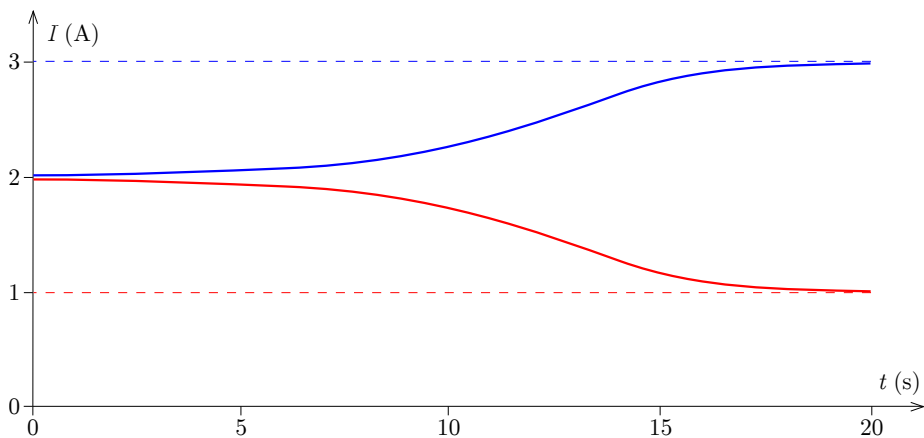
$$\dot{y}_1 \left(\frac{1}{2} \frac{2y_1}{y_1^2 - 1} - \frac{1}{y_1} \right) = -\frac{1}{3},$$

$$\ln(y_1^2 - 1) - \ln y_1^2 = -\frac{2}{3}t + C,$$

$$y_1 = \pm \sqrt{1 + \frac{1}{ce^{\frac{2}{3}t} - 1}} \quad \text{és} \quad y_2 = -y_1 = \mp \sqrt{1 + \frac{1}{ce^{\frac{2}{3}t} - 1}}.$$

Könnyen leolvasható, hogy y_1 és y_2 közül az egyik a $+1$, a másik a -1 értékhez fog tartani, amelyek a korábban megtalált két stacionárius megoldásnak felelnek meg. Meg kell jegyezni azonban, hogy az $y_1(0) = -1$, az $y_1(0) = 0$ és az $y_1(0) = 1$ kezdőfeltételekhez tartozó megoldást nem írja le ez az alak, de azokról már tudjuk, hogy konstans lesz az áramerősség. A megoldás azt is megmutatja, hogy a $\{0, 0\}$ stacionárius megoldás nem stabil, hiszen bármilyen közel is legyen hozzá a kezdőállapot, (amíg az rajta van az $y_1 = -y_2$ egyenesen) mégse oda jut el végül. Érdekes viszont, hogy az $y_1 = y_2$ egyenesen minden a $(0, 0)$ pontba jut (a szimmetrikus eset alapján), tehát ez az állapot ebben az irányban stabil.

Vázolhatjuk, hogy mi történik, ha az áramerősség $\pm 0,01$ A-rel változik a $\{2, 2\}$ egyensúlyi helyzethez képest (3. ábra). Az egyik görbe I_1 -et, a másik I_2 -t ábrázolja – azt, hogy melyik melyiket, az határozza meg, hogy a kezdeti pillanatban melyiket milyen irányban térítjük ki az egyensúlyi helyzetből.



3. ábra

A stacionárius pontok stabilitását úgy lehet vizsgálni, hogy vesszük az egyenletrendszer Jacobi-mátrixát az egyes pontokban, és megvizsgáljuk a sajátértékek valós részeinek előjelét. A Jacobi-mátrix:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{y}_1}{\partial y_1} & \frac{\partial \dot{y}_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial \dot{y}_2}{\partial y_1} & \frac{\partial \dot{y}_2}{\partial y_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y_1^2 - \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -y_2^2 - \frac{1}{6} \end{bmatrix},$$

amely a $(0,0)$ pontban:

$$J(0,0) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}.$$

A sajátérték meghatározása:

$$\begin{aligned} \det(J(0,0) - \lambda I) &= \begin{vmatrix} -\frac{1}{6} - \lambda & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \\ \left(-\lambda - \frac{1}{6}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 &= 0, \\ \lambda + \frac{1}{6} &= \pm \frac{1}{2}, \\ \lambda_1 &= \frac{1}{3}, \quad \lambda_2 = -\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Azt látjuk, hogy az egyik pozitív, a másik pedig negatív, és ez egybevág azzal, amit korábban már láttunk: az egyik irányban stabil ez az egyensúlyi pont, a másikban pedig instabil.

Hasonlóan megkeresve a $J(1,-1)$ mátrix sajátértékeit, azt kapjuk, hogy

$$\lambda_1 = -\frac{5}{3}, \quad \lambda_2 = -\frac{2}{3}.$$

Tehát mindkettő negatív, így ez az egyensúlyi állapot stabil. A $(-1,1)$ pontra a szimmetria miatt ugyanez teljesül. Tehát áramokra visszatérve a $\{2,2\}$ egyensúlyi állapot instabil (nyeregpont), a másik kettő pedig stabil.

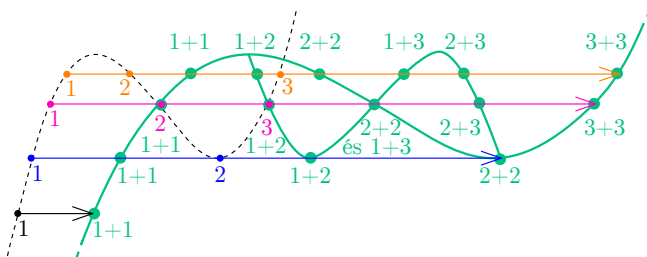
Egy program, amely kiírja az áramerősségek változását az idő függvényében tetszőleges kiindulópontból: https://ide.usaco.guide/OExCXx06ENws7_hXDR6

Fajsi Karsa (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 12. évf.)

II. megoldás. A feladat nem kérte az időfüggvények egzakt meghatározását és az $U_r(I)$ függvény analitikus megadását sem. A következőkben megmutatjuk a stacionárius állapotok grafikus szerkesztését, valamint az időfüggvények közelítő, numerikus meghatározását.

a) A két párhuzamosan kapcsolt dürisztor teljes $U(I)$ karakterisztikáját azokon a feszültségeken, amelyekhez csak egy lehetséges áramérték tartozik, a megadott karakterisztika vízszintesen kétszeresére nyújtásával kaphatjuk meg, a **P. 5604.** feladat megoldásához hasonlóan. Ahol több (két vagy három) lehetséges áramérték tartozik egy feszültséghez, ott ezek tetszőleges kombinációja (akár hat különböző érték) lehet az eredő áram, így ezen a tartományon a vízszintesen kétszeresére megnyújtott görbén kívül újabb ágak jelennek meg. Ezek jellegzetes pontjait grafikus összeadással szerkeszthetjük meg. A szerkesztés négy különböző esetben a *4. ábrán* látható (a jobb láthatóság miatt a rajz nagyított és függőleges irányban meg van nyújtva).

A legelső (fekete) pontnál a feszültséghez csak egy áramérték tartozik, így a párhuzamosan kapcsolt dürisztorok karakterisztikáján csak egy pont keletkezik, amelynek



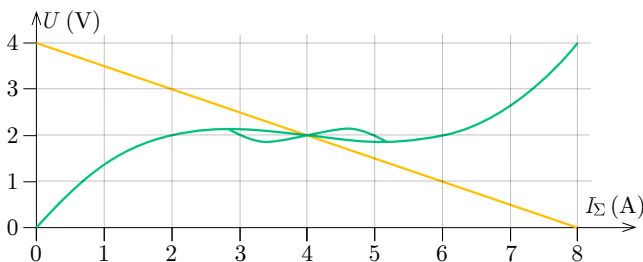
4. ábra

áramértéke az eredeti karakterisztikán lévő áramérték kétszerese. Ezt a pontot megkapjuk a karakterisztika nyújtásával is.

A következő esetben a feszültség éppen a karakterisztika lokális minimumához tartozó érték, ezt két különböző áramértéknél veszi fel (kék pöttyök). A párhuzamos kapcsolás árama lehet mindkettő duplája (ezeket adja meg a teljes grafikon vízszintes irányú nyújtása), de lehet a két áramérték összege is $(1+2)$. Ugyanígy járhatnánk el a karakterisztika lokális maximumánál is.

A harmadik eset a karakterisztika középpontjához tartozó feszültségérték: itt az eredeti karakterisztikán három lehetséges áramérték van (lila pöttyök). Ezekből bármely kettő összege lehet a párhuzamos kapcsolás árama. A nyújtással is megkapható $1+1$, $2+2$ és $3+3$ pontokon kívül megkapjuk az $1+2$, $1+3$ és $2+3$ pontokat is – de ezek közül az $1+3$ egybeesik a $2+2$ ponttal, így itt öt lehetséges érték van.

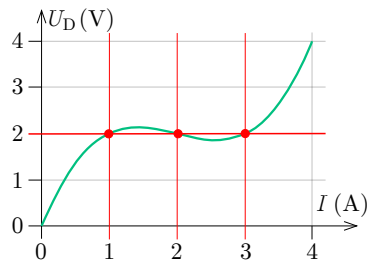
A negyedik (narancs) esetben nincs ilyen egybeesés, ott mind a hat áramérték különböző. De erre a szerkesztésre már a grafikon megrajzolásához nincs is szükség: ha a második eset szerkesztését megismételjük a lokális maximumnál is, akkor a harmadik eset pontjaival együtt már megkapjuk a „kis ág” minden fontos pontját (elágazás, keresztezés, szélsőértékek), amely alapján már a teljes karakterisztika felvázolható.



5. ábra

A végeredmény az 5. ábrán látható, amelybe már berajzoltuk a telep és az R ellenállás együttes $U(I)$ karakterisztikáját is. A két görbe – esetünkben egyetlen – metszéspontja adja meg a párhuzamos kapcsolás stacionárius munkapontját: a dürisztorokon $U_D = 2$ V feszültség esik, és *összesen* $I_\Sigma = 4$ A áram folyik. (Stacionárius állapotban a tekercsek feszültsége nulla, a dürisztor teljes feszültsége megegyezik a karakterisztikáról leolvashatóval.)

Visszatérve egyetlen dürisztor karakterisztikájára (6. ábra) látható, hogy ez két különböző módon valósulhat meg: vagy mindkét dürisztoron $I_1 = I_2 = 2$ A áram folyik, vagy pedig az egyikken $I_1 = 1$ A és a másikon $I_2 = 3$ A.



6. ábra

b) Bekapcsoláskor sehol sem folyik áram, a külső és a dürisztorokban lévő belső ellenálláson se esik feszültség, a teljes $U_0 = 4$ V telep feszültség a dürisztorokban lévő tekercsekre esik. Mivel $U_L = L\dot{I}$, a tekercsek (és így a dürisztor)

árama, valamint a külső ellenállás $2I$ árama is nőni fog. Ezzel változik a külső és belső ellenállásokon a feszültség is: a külső ellenálláson lineárisan ($U_R = 2RI$), a belső ellenállásokon a megadott nemlineáris karakterisztika szerint. A tekercsekre így kisebb feszültség jut, az áram növekedése lassul, de folytatódik mindaddig, amíg a tekercsre eső feszültség pozitív, azaz a külső és belső ellenállásokon eső feszültség nem éri el a telep feszültségét. Szimmetrikus esetben ez az $I = 2$ A és $U_D = 2$ V állapotban következik be, amikor $U_R = 2RI = 2$ V és $U_D + U_R = U_0 = 4$ V. Tehát hosszabb idő után a dürisztorok árama $I_1 = I_2 = 2$ A. Ez alapján *felvázolhatunk* egy, a 2. ábrához hasonló időfüggést.

c) Jelöljük a b) részben kialakult egyensúlyi áramot és feszültséget I_0 -al és U_{D0} -al. A hirtelen kis zavar hatására $I_1 < I_0 < I_2$, de eközben $I_1 + I_2 = 2I_0$, és így U_R és $U_D = U_0 - U_R$ állandó marad. Az 1. dürisztorban lévő ellenálláson a kicsit lecsökkent áram miatt $U_{r1} > U_{D0}$ feszültség esik, az ebben lévő tekercs feszültsége így negatív lesz, és ennek a dürisztornak az árama emiatt tovább fog csökkenni. A 2. dürisztorban épp fordítva, a kicsit megnőtt áram miatt $U_{r2} < U_{D0}$, a tekercs feszültsége pozitívvá válik, és így ennek a dürisztornak az árama tovább fog nőni. (A karakterisztika középpontos szimmetriája miatt a változások ellentétes előjelűek, de azonos nagyságúak lesznek, így az összáram valóban nem változik.) Az áramok így kezdetben egyre gyorsulva változnak.

Amikor az egyes dürisztorokban lévő ellenállásokon eső feszültség eléri a lokális szélsőértékeket ($I_1 \approx 1,4$ A, illetve $I_2 \approx 2,6$ A), akkor a feszültségek változási iránya megfordul, a tekercseken eső feszültségek előjele megmarad, de nagyságuk csökkenni kezd, és így az áramok egyre lassabban változnak. A folyamat akkor ér véget, amikor $I_1 = 1$ A és $I_2 = 3$ A lesz. Gondolatmenetünk alapján ismét *felvázolhatunk* egy, a 3. ábrához hasonló időfüggést.

Láthattuk, hogy az azonos áramú egyensúly instabil, hiszen egy kis zavar hatására egyre gyorsulva távolodtak attól az értéktől az áramok. A rendszer az árammentes állapotból először mégis oda tart, mert ez az állapot a szimmetrikus tengely mentén stabil, csak az aszimmetrikus irányban instabil (mint egy nyeregfelület). Ugyanakkor az antiszimmetrikus állapot stabil, amit a következőképp láthatunk be: ha pl. I_1 kicsit megnő, akkor az 1. dürisztor belső ellenállásán is megnő az áram, a tekercsen negatív feszültség lesz, ami az áramot csökkenti, visszaviszi az egyensúlyi értékre. Ellentétes irányú változásnál (és a másik dürisztoron is) hasonlóan negatív visszacsatolás alakul ki, ami stabilitást eredményez.

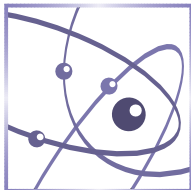
Megjegyzések. 1. A tényleges görbék numerikus módszerekkel is megrajzolhatók. (Erről lásd lapunk 2024. novemberi számában *Csóka Péter és Seprődi Barnabás: Fizika problémák megoldása numerikus módszerrel* című cikkét.) Ehhez a grafikusán megadott karakterisztikára az I. megoldásban megadott harmadfokú polinom illeszthető. A numerikus megoldáshoz a következő összefüggéseket írhatjuk fel:

$$\begin{aligned}\Delta I_1 &= \frac{1}{L} \left[U_0 - R(I_1 + I_2) - \left(\frac{1}{3} I_1^3 - 2I_1^2 + \frac{11}{3} I_1 \right) \right] \Delta t, \\ \Delta I_2 &= \frac{1}{L} \left[U_0 - R(I_1 + I_2) - \left(\frac{1}{3} I_2^3 - 2I_2^2 + \frac{11}{3} I_2 \right) \right] \Delta t, \\ I_1(0) &= 0, \\ I_2(0) &= 0.\end{aligned}$$

Ezt lefuttatva a folyamat a szimmetrikus (de instabil) egyensúlyi állapothoz tart, amelyből csak egy kis (antiszimmetrikus) zavar hatására billen ki a rendszer. Az ezután kezdődő második szakasz időbeli lefutása függ a kis zavar nagyságától (minél nagyobb a zavar, annál gyorsabban történik).

2. Ha a rendszerbe beépítünk egy kicsiny véletlen zajt (és az nem túl nagy), a folyamat első része meglepő módon ugyanúgy végbemegy, a rendszer először (jó közelítéssel) megállapodik az instabil egyensúlyban, majd (a véletlen zaj amplitúdójától – és a véletlentől – függő idő után) elkezd onnan távolodni, hogy aztán végleg (jó közelítéssel) megállapodjon a stabil állapotban. Természetesen ilyenkor véletlenszerűen egyik vagy másik dűrisztor árama csökken, illetve nő.

7 dolgozat érkezett. Helyes Fajsi Karsa megoldása. Kicsit hiányos (4–5 pont) 3, hiányos (2–3 pont) 3 dolgozat.



Fizikából kitűzött feladatok

M. 439. Mérjük meg egy AA-s ceruzaelem üresjárási feszültségét és belső ellenállását! Hogyan változnak ezek az értékek az elem merülése során?

(6 pont)

Közli: *Széchenyi Gábor*, Budapest

G. 881. Egy hosszú futószalag 2 m széles és 0,5 m/s nagyságú, állandó sebességgel mozog. Egy távirányításos játékautó úgy jut el a futószalag egyik szélétől a másikig, hogy a futószalaghoz képest nyugalmi helyzetből indul, a futószalaghoz képest mindig a szalagra merőleges irányban mozog, egyenletesen gyorsul a futószalag közepéig, ahol a szalaghoz képest 1 m/s sebességet ér el, majd ugyanolyan módon egyenletesen lassul, és végül a szalaghoz képest nullára csökken a sebessége.

a) A futószalag mennyivel viszi előbbre a kisautót az átkelése közben?

b) Rajzoljuk meg vázlatosan a kisautó pályáját a talajhoz képest!

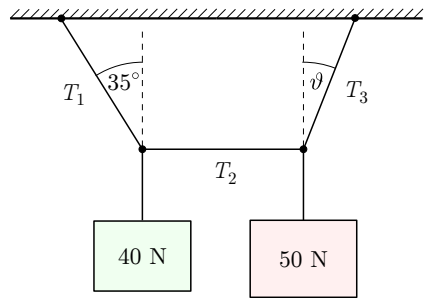
(4 pont)

G. 882. Az ábrán látható rendszer egyensúlyban van, a középső kötél vízszintes helyzetű.

a) Milliméterpapíron, vonalzóval és szög-mérővel történő szerkesztéssel határozzuk meg a kötélzárakban ható három erőt, valamint az ismeretlen ϑ szöget!

b) Becsüljük meg, hogy a szerkesztés segítségével a kérdéses adatokat hány százalékos hibával kaptuk meg!

(4 pont)



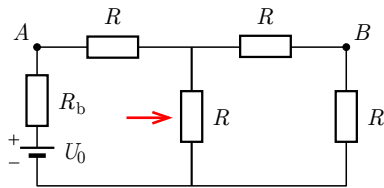
G. 883. Az ábrán látható áramkörben egy R_b belső ellenállású, U_0 elektromotoros erejű telep és négy R nagyságú ellenállás található. $U_0 = 4,5 \text{ V}$, $R_b = 3 \Omega$, $R = 10 \Omega$.

a) Mekkora a nyíllal jelölt ellenállás teljesítménye?

b) Mekkora az U_{AB} feszültség?

(3 pont)

Közli: Veres Dénes, Szolnok

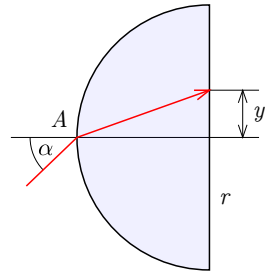


G. 884. Egy r sugarú, 1,5 törésmutatójú üvegből készült félgömbre az ábra szerinti A pontban fénysugarat ejtünk. A megtört fénysugár a félgömb síklapját a középponttól y távolságban éri el.

a) Mekkora beesési szög esetén lesz y a sugár felével egyenlő?

b) Milyen színű a fénysugár, ha a fény hullámhossza az üvegben 400 nm ?

(3 pont)



P. 5634. Egy rajztábla és egy rajta nyugvó könyv között a súrlódási együttható μ . A rajztábla egyik szélét lassan emeljük.

a) Mekkora α hajlásszög esetén csúszik meg a könyv?

b) Mekkora a tábla 2α hajlásszögű helyzetében a lecsúszó könyv gyorsulása?

c) Mekkora az a legkisebb vízszintes gyorsulás, amivel a 2α hajlásszögű táblát előre kellene tolni ahhoz, hogy a könyv ne csússzon meg?

A csúszási és a tapadási súrlódási együtthatót tekintsük egyenlőnek. Az eredményeket μ és g segítségével adjuk meg.

(5 pont)

Közli: Honyek Gyula, Veregyháza

P. 5635. A nyújtón az óriáskör bemutatásánál a tornász éppen átbillen a felső függőleges helyzetén. Amikor alulra ér, az acélrúd láthatóan meghajlik. Modellezzük a tornászt egy vékony, súlyos, homogén rúddal, ami vízszintes tengely körül forog. Ha a rúd a felső állásából az alsóba ér, akkor a súlyának hányszorosával húzza a tengelyt? (A súrlódást, közegellenállást, a tengely behajlását a rúd hosszához képest hanyagoljuk el.)

(4 pont)

Közli: *Gelencsér Jenő*, Kaposvár

P. 5636. Egy űrszonda a Föld $v \approx 30$ km/s-os keringési sebességével ellentétes irányban, a Földhöz képest nv sebességgel ($n < 1$) eltávolodott a Földtől. További mozgását – jó közelítéssel – csak a Nap gravitációs tere határozza meg.

a) Mekkora az űrszonda pályájának nagytengelye és a numerikus excentricitása?

b) Mekkora lehet n , hogy a szonda maradványai eljussanak a Nap felszínéig?

(Lásd még a *Mesterséges égitestek mozgásával kapcsolatos problémák és feladatok* c. cikket a honlapon.)

(5 pont)

Almár Iván feladata nyomán

P. 5637. Egy hűtőláda belső terének hőkapacitása $4 \cdot 10^5 \frac{\text{J}}{\text{K}}$, hőmérsékletét a 20°C -os szobában $(-18 \pm 1)^\circ\text{C}$ -on szeretnénk tartani. A hűtőgép motorja akkor kapcsol be, ha a belső tér hőmérséklete eléri a -17°C hőmérsékletet. A motor 15 perces üzemideje után a belső tér hőmérséklete ismét eléri a -19°C hőmérsékletet. Legalább mekkora a gép motorjának teljesítménye? (Tegyük fel, hogy a hűtőgép fordított körfolyamattal ideális Carnot-gépként működik.)

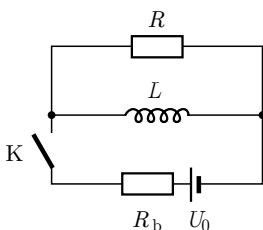
(4 pont)

Közli: *Szász Krisztián*, Budapest

P. 5638. Egy magában álló semleges fémgömb középpontjától d távolságra, kívül lévő Q pontszerű töltést $2d$ távolságra távolítjuk. Mennyit változik a fémgömb potenciálja eközben?

(5 pont)

Közli: *Simon Péter*, Pécs



P. 5639. A mellékelt kapcsolási rajznak megfelelően összeállított áramkörben a feszültségforrás elektromotoros ereje 6 V , belső ellenállásának nagysága $2\ \Omega$. Az ideális tekercs önindukciós együtthatója $1,5\text{ H}$, az R ellenállás pedig $1000\ \Omega$ nagyságú. Kezdetben a kapcsoló zárva van.

a) Mekkora töltés áramlik át az R ellenálláson a kapcsoló kinyitása után?

b) Mennyi hő fejlődik az R ellenálláson ezalatt?

(5 pont)

Tornyai Sándor fizikaverseny nyomán, Hódmezővásárhely

P. 5640. A Kanári-szigetek legnagyobb városában, Las Palmasban található egy Európában egyedülálló kiállítás, amely a Föld vizeinek élővilágát mutatja be. A kiállítás egyik attrakciója egy 400 köbméteres, függőleges, henger alakú

tengeri akvárium, melynek karbantartását bűvárok végzik. Vízszintesen körbenézve az akvárium falának hányad részén lát ki az a bűvár, aki az R sugarú henger szimmetriatengelyétől d távolságra van? A tengervíz törésmutatója n .

(5 pont)

Közli: Vigh Máté, Herceghalom

P. 5641. A pozitív töltésű pionok $M = 139,57 \frac{\text{MeV}}{c^2}$ (nyugalmi) tömegű instabil részecskék. A bomlásuk során leggyakrabban egy $m = 105,66 \frac{\text{MeV}}{c^2}$ tömegű müon és egy nulla (vagy elhanyagolhatóan kicsi) tömegű neutrínó keletkezik.

Az egyik bomlásnál egy elhanyagolhatóan kicsiny impulzusú, állónak tekinthető müon keletkezett. Mekkora volt a bomlás előtt a pion mozgási energiája és a sebessége?

(5 pont)

Közli: Gnädig Péter, Vácduka

P. 5642. Newton már 1679-ben felvetette, hogy a Föld forgását egy mechanikai kísérlettel is bizonyítani lehetne úgy, hogy megmérjük egy szabadon eső kicsiny golyónak a függőlegestől való, keleti irányú eltérülését. Hooke, aki Newton idejében a Royal Society titkára és kiváló kísérletező volt, 1680-ban végzett is ilyen méréseket.

Egy kellően gazdag és ambiciózus egyenlítői országban modern eszközökkel meg akarják ismételni a csaknem 350 évvel korábbi kísérletet. A tervek szerint egy 200 m magas, függőleges, légritkított csőben (vákuumtoronyban) fognak kicsiny acélgolyókat viaszlemezre ejteni.

Határozzuk meg az eltérülés nagyságát úgy, hogy a számolást

a) inerciarendszerben,

b) a Földdel együtt forgó (gyorsuló) koordináta-rendszerben

végezzük el!

(6 pont)

Közli: Kis Tamás, Heves

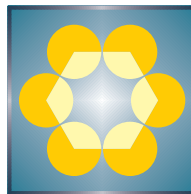


Beküldési határidő: 2025. április 15.

Elektronikus munkafüzet: <https://www.komal.hu/munkafuzet>



MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL FOR SECONDARY SCHOOLS (Volume 75. No. 3. March 2025)



Problems in Mathematics

New exercises for practice – competition K (see page 157): **K. 849.** Find the smallest number of matches that can be removed in the figure such that no square remains. (See figure on page 157) **K. 850.** The teacher has written a two-digit positive prime number and a non-zero digit on the blackboard. Each one of Sanyi, Kati, and Joli has created a three-digit number from the numbers on the blackboard. Sanyi has written the digit behind the prime number written on the blackboard, Kati has written the digit between the digits of the given prime number, and Joli has written the digit in front of the given

prime number. Sanyi's number was 45 more than Kati's number and 225 more than Joli's number. Find the prime number and the digit chosen by the teacher. **K. 851.** Divide the shape on the figure (consisting of five congruent squares, see figure on page 157) into three parts with two cuts such that the pieces can be combined together to form a rectangle in which one side is twice as long as the other. **K. 852.** The sum of the digits of the sum of the squares of three consecutive positive prime numbers is 11. What can be the three prime numbers? **K. 853.** The length of the sides of the bases of a regular hexagon based right prism is a , and the length of its height is b . Let's add together the lengths of all the diagonals of all the bases and all the joining faces of the prism. For what value of $\frac{a}{b}$ will the sum equal $12(a\sqrt{3} + 3b)$? (Proposed by: *Bálint Róka*, Budapest)

New exercises for practice – competition C (see page 158): **Exercises up to grade 10: K/C. 852.** See the text at Exercises **K. K/C. 853.** See the text at Exercises **K. Exercises for everyone: C. 1848.** The sequence a_n is defined in the following way: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, and for all positive integers n , $a_{n+2} = a_n^2 + a_{n+1}^2$. Find the last digit of the 2025th member of the sequence. (*Australian competition problem*) **C. 1849.** Let N_1 , N_2 and N_3 be the quadrisection points on side AB of convex quadrilateral $ABCD$ going from A to B . Let M_1 , M_2 and M_3 be the quadrisection points on side DC going from D to C . Point N_4 is obtained by extending side AB beyond point B with the quarter of the length of side AB . Similarly, point M_4 is obtained by extending side DC beyond point C with the quarter of the length of side DC . Determine the area of quadrilateral $ABCD$ if it's given that the area of quadrilateral AN_1M_1D is 8 units and the area of quadrilateral BN_4M_4C is 10 units. (Proposed by: *Bálint Bíró*, Eger) **C. 1850.** Prove that if positive numbers a , b , and c satisfy $abc^6 = \frac{b^2}{c^2} = 16$, then $a + 4b > 16$. (Proposed by: *Mátyás Czett*, Budapest) **Exercises upwards of grade 11: C. 1851.** The interior angle bisector at vertex C of triangle ABC intersects side AB at D . Find the lengths of the sides of the triangle if $AD = 15$, $DB = 20$, and $CD = f_c = 12\sqrt{2}$. (Proposed by: *László Németh*, Fonyód) **C. 1852.** Solve the following system of equations on the set of triples of real numbers: $\log_5(22 + x) = \log_3(12 - y)$, $\log_5(22 + y) = \log_3(12 - z)$, $\log_5(22 + z) = \log_3(12 - x)$. (Proposed by: *Mihály Bencze*, Braşov)

New exercises – competition B (see page 159): **B. 5446.** What can be the value of ℓ , if up to congruence there are exactly three triangles with a side of unit length, another side of length ℓ and an angle of 60 degrees? (3 points) (Proposed by: *Bálint Hujter*, Budapest) **B. 5447.** The sum of positive real numbers x , y and z is 2025. Find the smallest possible value of $x^2 + y^2 + z^2 + 20x + 2y + 5z$. (3 points) (Proposed by: *Márton Lovas*, Budakalász) **B. 5448.** We have two congruent regular n -gon based pyramids. On the lateral faces of both pyramids, the numbers $1, 2, \dots, n$ are written in a random order. For which values of n is it guaranteed that the bases of the pyramids can always be glued together in such a way that at least two edges of the resulting bipyramid satisfy the property that the two numbers on either side of the edges are equal to each other? (4 points) (Proposed by: *Márton Lovas*, Budakalász) **B. 5449.** Find all pairs of positive integers (a, b) satisfying $a^6 = 2b^2 - 1$. (4 points) (Proposed by: *Erik Füredi*, Budapest) **B. 5450.** Let positive integer d be called a *block-divisor* of positive integer n if $d \mid n$ and moreover, d and $\frac{n}{d}$ are coprimes. Let $B(n)$ denote the sum of the block-divisors of n . Find all positive integers n such that n has at most three distinct prime factors and $B(n) = 2n$. (5 points) (Proposed by: *Norbert Csizmazia*, Harkány) **B. 5451.** Convex quadrilateral $ABCD$ satisfies properties $\angle BAC = 2\angle CAD$, $\angle ADB = 2\angle DBA$, and $\angle CBD = 30^\circ$. What can be the measure of $\angle DCA$? (5 points) (Based on the idea of *Béla Kovács*, Szatmárnémeti) **B. 5452.** For positive integer $n \geq 3$ let points $P_1, P_2, \dots, P_n$ be chosen on a parabola with focus F such that $\angle P_1FP_2 = \angle P_2FP_3 = \dots = \angle P_nFP_1 = \frac{360^\circ}{n}$. Prove that the harmonic mean of the distances FP_1 ,

..., FP_n equals the parameter of the parabola. (6 points) (Proposed by: Gábor Holló, Budapest) **B. 5453.** The faces of a convex polyhedron are quadrilaterals $ABCD$, $ABFE$, $CDHG$, $ADHE$ and $EFGH$ according to the diagram. The edges from points A and G , respectively are pairwise perpendicular. Prove that $[ABCD]^2 + [ABFE]^2 + [ADHE]^2 = [BCGF]^2 + [CDHG]^2 + [EFGH]^2$, where $[XYZW]$ denotes the area of quadrilateral $XYZW$. (See figure on page 160) (6 points) (Proposed by: Géza Kós, Budapest)

New problems – competition A (see page 161): **A. 902.** In triangle ABC , interior point D is chosen such that triangle BCD is equilateral. Let E be the isogonal conjugate of point D with respect to triangle ABC . Define point P on the ray AB such that $AP = BE$. Similarly, define point Q on the ray AC such that $AQ = CE$. Prove that line AD bisects segment PQ . (Proposed by: Áron Bán-Szabó, Budapest) **A. 903.** Let the irrational number $\alpha = 1 - \frac{1}{2a_1 - \frac{1}{2a_2 - \frac{1}{2a_3 - \frac{1}{\ddots}}}}$, where coefficients $a_1, a_2, \dots$ are positive integers, infinitely many

of which are greater than 1. Prove that for every positive integer N at least half of the numbers $\lfloor \alpha \rfloor, \lfloor 2\alpha \rfloor, \dots, \lfloor N\alpha \rfloor$ are even. $\lfloor x \rfloor$ denotes the floor function of x , which is the greatest integer less than or equal to x . (Proposed by: Géza Kós, Budapest) **A. 904.** Let n be a given positive integer. Luca, the lazy flea sits on one of the vertices of a regular $2n$ -gon. For each jump, Luca picks an axis of symmetry of the polygon, and reflects herself on the chosen axis of symmetry. Let $P(n)$ denote the number of different ways Luca can make $2n$ jumps such that she returns to her original position in the end, and does not pick the same axis twice. (It is possible that Luca's jump does not change her position, however, it still counts as a jump.) a) Find the value of $P(n)$ if n is odd. b) Prove that if n is even, then $P(n) = (n-1)! \cdot n! \cdot \sum_{d|n, d \in \mathbb{N}} \left(\varphi\left(\frac{n}{d}\right) \cdot \binom{2d}{d} \right)$, where $\varphi(k)$ denotes the number of positive integers not greater than k that are coprime to k . (Proposed by: Péter Csikvári and Katalin Nagy, Budapest)

Problems in Physics

(see page 186)

M. 439. Measure the emf and the internal resistance of an AA battery. How do these values change during the discharge of the battery? **G. 881.** A long 2 m wide conveyor belt moves at a constant speed of 0.5 m/s. A remote-controlled toy car travels from one end of the conveyor to the other such that it starts from rest, relative to the conveyor belt, moves perpendicular to the conveyor belt. It accelerates uniformly until it reaches the middle of the conveyor belt, where it has a speed of 1 m/s relative to the belt, then decelerates uniformly in the same way, and finally its speed relative to the conveyor belt decreases to zero. a) How much does the conveyor belt carry the car forward as it crosses? b) Draw a sketch of the path of the toy car relative to the ground. **G. 882.** The system shown in the figure is in equilibrium, the rope in the middle is horizontal. a) On graph paper construct the forces with a ruler and a protractor to determine the tension exerted in the ropes and the value of the unknown angle ϑ . b) Estimate the percentage error of the constructed quantities. **G. 883.** The circuit shown in the figure contains a battery of internal resistance R_b and of electromotive force of U_0 , and four resistors each of resistance R . $U_0 = 4.5$ V, $R_b = 3\Omega$, $R = 10\Omega$. a) What is the power of the resistor marked with the arrow? b) What is the voltage U_{AB} ? **G. 884.** A glass hemisphere of radius r and of refractive index 1.5 is illuminated by a light ray at point A as shown in the figure. The refracted light ray reaches the plane part of the hemisphere at a distance y from the centre. a) For which angle of incidence will y be equal to half of the radius? b) What is the colour of the light ray if the wavelength of the light in the glass is 400 nm? **P. 5634.** The coefficient of friction between a drawing board and a book resting on it is μ . One edge of the drawing board is slowly

raised. *a)* At which angle of inclination α will the book begin to slip? *b)* What is the acceleration of the sliding book when the angle of inclination of the board is 2α ? *c)* What is the minimum horizontal acceleration at which the board with an angle of inclination of 2α should be pushed in order to prevent the book from sliding? Consider the coefficients of dynamic and static friction to be equal. Give the results in terms of μ and g . **P. 5635.** A gymnast, performing a giant on a high bar, is just tipping over the vertical position at the top. When he reaches the bottom, the steel bar is visibly bent. Let us model the gymnast with a thin, heavy, uniform beam rotating around a horizontal axis (the steel bar). When the beam reaches the bottom from its top position, by what factor of its weight does it pull the bar? (Neglect friction, air resistance, and bending of the bar with respect to the length of the beam.) **P. 5636.** A space probe has moved away from the Earth in the opposite direction to the Earth's orbital velocity $v \approx 30$ km/s, at a speed of nv relative to the Earth ($n < 1$). Its further motion is only governed – to a good approximation – by the gravitational field of the Sun. *a)* What is the major axis and the numerical eccentricity of the orbit of the space probe? *b)* What can be n in order for the remnants of the probe to reach the surface of the Sun? (See also the article entitled *Problems and exercises related to the motion of artificial celestial bodies* on the website.) **P. 5637.** The heat capacity of the interior of a freezer is $4 \cdot 10^5 \frac{\text{J}}{\text{K}}$, and we want to keep the temperature inside the freezer at $(-18 \pm 1)^\circ\text{C}$. The freezer is in a room of temperature 20°C . The refrigerator motor will start when the temperature inside reaches -17°C . After the motor has been running for 15 minutes, the temperature in the interior of the refrigerator reaches -19°C again. At least what is the power of the freezer's motor? (Assume that the refrigerator is operating as an ideal Carnot heat pump, which is a reversed Carnot cycle.) **P. 5638.** A point charge Q on the outside of a neutral metal sphere, at a distance of d from the centre of the sphere, is moved to a distance of $2d$. How much does the potential of the metal sphere change during this process? **P. 5639.** In the circuit assembled according to the attached circuit diagram, the voltage supply has an electromotive force of 6 V and an internal resistance of 2Ω . The inductance of the ideal coil is 1.5 H and the resistance of resistor R is 1000Ω . Initially, the switch is closed. *a)* How much charge flows through resistor R after the switch is opened? *b)* How much heat is dissipated in resistor R during this time? **P. 5640.** In Las Palmas, the largest city in the Canary Islands, there is a unique exhibition in Europe that shows the world's aquatic life. One of the attractions of the exhibition is a 400 cubic metre vertical cylindrical marine aquarium, which is serviced by divers. Looking horizontally around the aquarium, how much of the aquarium wall is visible to a diver at a distance d from the axis of symmetry of the cylinder of radius R ? The refractive index of the water is n . **P. 5641.** Positively charged pions are unstable particles with a (rest) mass of $M = 139.57 \frac{\text{MeV}}{c^2}$. Their decay most often results in a muon of mass $m = 105.66 \frac{\text{MeV}}{c^2}$ and a neutrino of mass zero (or negligibly small). One of the decays produced a muon with negligibly small momentum, which can be considered stationary. What was the kinetic energy and speed of the pion before the decay? **P. 5642.** As early as 1679, Newton suggested that the rotation of the Earth could be proved by a mechanical experiment such that the eastward deflection of a small ball in free fall is measured. Hooke, who was secretary of the Royal Society in Newton's time and also an excellent experimenter, made such measurements in 1680. In a sufficiently wealthy and ambitious equatorial country, the experiment, which was proposed almost 350 years ago, was to be repeated by modern equipment. The plan is to drop tiny steel balls onto a wax plate in a 200 m high vertical tube, from which air was sucked out (in a vacuum tower). Determine the magnitude of the deflection by calculating *a)* in an inertial frame of reference, *b)* in the coordinate system rotating (accelerating) with the Earth.

ERICSSON-DÍJ 2025

Felhívás díjazandó matematika, fizika, digitális kultúra tanárok ajánlására

Beérkezési határidő: 2025. április 8., kedd

Az Ericsson Magyarország 2025-ben 9 kiváló pedagógust díjaz

összesen 4 500 000 forinttal.

Az Ericsson Magyarország Kutatás-Fejlesztési Igazgatósága által 1999-ben alapított díjat általános-, vagy középiskolákban fizikát vagy matematikát vagy – 2024-től – digitális kultúrát oktató pedagógusok nyerhetik el. Az elismerés azért jött létre, hogy támogassa, méltassa és erősítse a magyarországi, világviszonylatban is kiemelkedő matematikai, természettudományos és informatikai alapképzést. Az Ericsson Magyarország elkötelezte magát a hazai oktatás fejlesztése mellett; vállalásának fontos része ez a díj. Több mint 2000 munkatársával nemcsak a telekommunikációs ipar egyik legnagyobb munkáltatója, hanem az 1600 fős Kutatás-Fejlesztési Központja révén az ország egyik vezető telekommunikációs és informatikai kutatási központja is.

Az ERICSSON-DÍJAKAT 2025-ben két kategóriában ítélik oda:

1. „Ericsson a matematika, a fizika és a digitális kultúra népszerűsítéséért” díj

Egy matematikát, egy fizikát és egy digitális kultúrát (informatikát) tanító pedagógus (általános vagy középiskolai) részére egyenként 500 000 forinttal járó díj.

Azok kaphatják, akik iskolájukban és azon kívül évek óta a legtöbbet tesznek tantárgyuk iránti érdeklődés felkeltéséért és megszerettetéséért. Élén járnak az innovatív módszerek kidolgozásában és népszerűsítésében. A díjazottak lendületes, kezdeményező egyéniségükkel vagy új technológiák bevezetésével vonzóvá teszik szaktárgyukat.

2. „Ericsson a matematika, fizika és digitális kultúra tehetségeinek gondozásáért” díj

Két matematikát, két fizikát és két digitális kultúrát (informatikát) tanító pedagógus (általános vagy középiskolai) részére egyenként 500 000 forinttal járó díj.

Azok kaphatják, akiknek tanítványai 2015 óta szaktárgyuk jelentősebb országos vagy nemzetközi versenyein eredményesen szerepeltek. Munkaközösségükben meghatározó a szerepük tanítványaik tehetséggondozásában.

A díjakat a MATFUND Középiskolai Matematikai és Fizikai Alapítvány ítéli oda a Bolyai János Matematikai Társulat, az Eötvös Loránd Fizikai Társulat és a Neumann János Számítógéptudományi Társaság Ericsson-díj bizottságainak ajánlása alapján.

Pályázatok csak a különböző kategóriák elektronikus Pályázati adatlapjain nyújthatók be.

A pályázati adatlapok **2025. április 8., kedd éjfélig (23:59)** lesznek elérhetőek a <https://www.komal.hu/ericssondij/> weboldalon.

Az ajánlásról és az odaítélés feltételeiről ugyanezen az oldalon lehet részletesebb információkat találni.

Kérdés esetén a következő e-mail címre írhatnak:
matfund@komal.hu.



Felhívás - Ericsson-díj 2025



Matematika, fizika és digitális kultúra tanárok számára,
tantárgyanként 3, összesen 9
pedagógus díjazása fejenként
500 000 Ft-tal.

Ajánlja kollégáját, tanárát az alábbi kategóriákban:

- Ericsson a matematika, fizika és digitális kultúra népszerűsítéséért
- Ericsson a matematika, fizika és digitális kultúra tehetség-gondozásáért

**Pályázatok beküldési határideje:
2025. április 8.**

A pályázati felhívás és az űrlapok
elérhetőek: www.komal.hu/ericssondij

