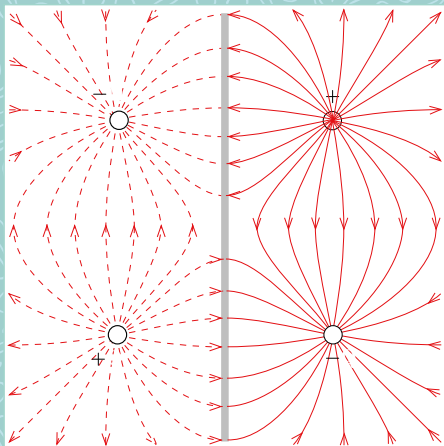


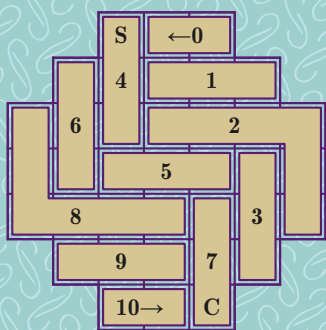
Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok

Informatika rovattal

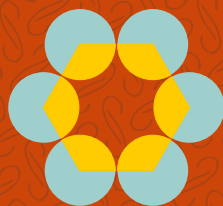
Ábra a P. 5632. feladat megoldásához.



Önmegsemmisítő alakzatok a francia szoliteren



Az idei Nemzetközi Matematikai Diákolimpia feladatainak
megoldásai I. | Beszámoló az 55. Nemzetközi Fizikai
Diákolimpiáról | Versenyfelhívás: Ifjú Fizikusok Nemzetközi
Versenye | Rejtvények, ördöglakatok: Angol és francia szoliterek



KöMaL

75. évfolyam

7. szám

2025.
október



55. Nemzetközi Fizikai Diákolimpia 2025, Párizs



A magyar csapat a Szajna hídján (Sarkadi Tamás csapatvezető; Erdélyi Dominik, Bencz Benedek, Téti Miklós, Széchenyi Gábor csapatvezető, Tóth Kolos Barnabás, Elekes Dorottya)



A párizsi Szabadság-szobor

A Pantheonban a Foucault-ingánál



Versailles, az Apolló-kút

KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK

INFORMATIKA ROVATTAL BŐVÍTVE

ALAPÍTOTTA: ARANY DÁNIEL 1894-ben

75. évfolyam 7. szám

Budapest, 2025. október

Megjelenik évente 9 számban, januártól májusig és szeptembertől decemberig havonta. ÁRA: 1600 Ft

TARTALOMJEGYZÉK

A 66. Nemzetközi Matematikai Diákolimpia feladatainak megoldása I.	402
<i>Gál Péter</i> : Rejtvények, ördöglakatok – Szolite-rek megoldása	408
<i>Németh László</i> : Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire	412
<i>Bíró Bálint</i> : Megoldásvázlatok a 2025./6. szám matematika gyakorló feladatsorához	414
Matematika C gyakorlatok megoldása (1833.) .	428
A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok (869–873.)	430
A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (872–873., 1868–1872.)	431
A B pontversenyben kitűzött feladatok (5478–5485.)	432
Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (914–916.)	434
Informatikából kitűzött feladatok (671–674.) ..	435
<i>Sarkadi Tamás, Széchenyi Gábor, Tasnádi Tamás</i> : Két ezüst- és két bronzérem az 55. Nemzetközi Fizikai Diákolimpián	441
Ifjú Fizikusok Nemzetközi Versenye. Versenyfelhívás és beszámoló	444
Méresi feladatok megoldása (439.)	445
Fizika gyakorlatok megoldása (881., 888.)	447
Fizika feladatok megoldása (5632., 5652., 5659.)	452
Fizikából kitűzött feladatok (443., 897–900., 5670–5678.)	458
Problems in Mathematics	461
Problems in Physics	463

Főszerkesztő: KORÁNDI JÓZSEF
Fizikus szerkesztő: VANKÓ PÉTER
Műszaki szerkesztő: FRIED KATALIN
Borító: BURGHARDT ZSUZSA
Kiadja: MATFUND ALAPÍTVÁNY
Alapítványi képviselő: KÓS RITA
Felelős kiadó: KATONA GYULA
Nyomda: OOK-PRESS Kft.
Felelős vezető: SZATHMÁRY ATTILA
INDEX: 25 450 ISSN 1215-9247

A matematika bizottság vezetője:
HERMANN PÉTER

Tagjai: BÁN-SZABÓ ÁRON, BÍRÓ BÁLINT, CZETT MÁTYÁS, GYENES ZOLTÁN, HUJTER BÁLINT, KISS GÉZA, KÓS GÉZA, KOZMA KATALIN ABIGÉL, MAGYAR ESZTER, NÉMETH MÁRTON, PACH PÉTER PÁL, PAULOVIK ZOLTÁN, RATKÓ ÉVA, SIMON LÁSZLÓ BENEC, SZTRANYÁK ATTILA, UJHÁZY MÁRTON, VÍGH VIKTOR

A fizika bizottság tiszteletbeli elnöke:
HOLICS LÁSZLÓ

Vezetője: SZÉCHENYI GÁBOR

Tagjai: BARANYAI KLÁRA, GNÁDIG PÉTER, HONYEK GYULA, OLOSZ BALÁZS, SZÁSZ KRISZTIÁN, VÍGH MÁTÉ, VLADÁR KÁROLY, WOYNAROVICH FERENC

Az informatika bizottság vezetője:
SCHMIEDER LÁSZLÓ

Tagjai: LÓCZI LAJOS, SIEGLER GÁBOR, TÓTH TAMÁS

Fordítók: GYENES ZOLTÁN, TASNÁDI ANIKÓ

Nyelvi korrektor: ANDICS ÁGNES

Javítás koordinálása: CSOBÁNKA PETRA

Szerkesztőségi titkár: ONDINÉ SZABÓ SÁRA

A szerkesztőség címe: 1117 Budapest,
Pázmány Péter sétány 1/C III. emelet 3.405.
Telefon: +36 20 320-1143
A lap megrendelhető a
<https://komalujsg.myshoprenter.hu>
oldalon keresztül.

Előfizetési díj egy évre: 12 500 Ft
Kéziratokat nem örzünk meg és nem küldünk vissza.
Minden jog a KöMaL tulajdonosaié.
E-mail: szerk@komal.hu
Internet: <http://www.komal.hu>

This journal can be ordered from the Editorial office:
Pázmány Péter sétány 1/C III. emelet 3.405.
1117-Budapest, Hungary
telephone: +36 20 320-1143
or on the Internet:
<https://komalujsg.myshoprenter.hu>.
A Lapban megjelenő hirdetések tartalmáért
felelősséget nem vállalunk.

A 66. Nemzetközi Matematikai Diákolimpia feladatainak megoldása I.

A hagyományoknak megfelelően közöljük a Nemzetközi Matematikai Diákolimpia feladatainak megoldásait. A megoldások leírására idén is a magyar csapat tagjait kértük meg. Közreműködésüket köszönjük, és ezúton is gratulálunk eredményeikhez.

A szerkesztőség

Első nap¹

1. feladat. Egy síkbeli egyenest napfényesnek nevezzük, ha **nem** párhuzamos sem az x tengellyel, sem az y tengellyel, sem pedig az $x + y = 0$ egyenessel.

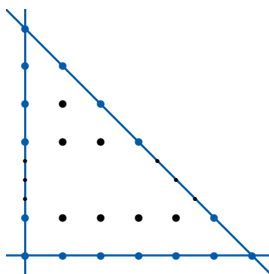
Adott egy $n \geq 3$ egész szám. Határozzuk meg az összes k nemnegatív egész számot, amelyre létezik n különböző egyenes a síkon az alábbi tulajdonságokkal:

- ha a és b pozitív egészekre $a + b \leq n + 1$ teljesül, akkor az (a, b) pont rajta van legalább egy egyenesen; valamint
- az n egyenes közül pontosan k napfényes.

Javasolta: USA

Megoldás. (Molnár István Ádám) Megmutatjuk hogy k lehetséges értékei 0, 1 és 3.

A feladatban megadott rácspontokat egy derékszögű egyenlő szárú háromszögben ábrázolhatjuk. A továbbiakban ezeket a pontokat fogjuk *rácspontnak* hívni. A definíció szerint egy egyenes akkor napfényes, ha nem párhuzamos a háromszög egyik oldalával sem.

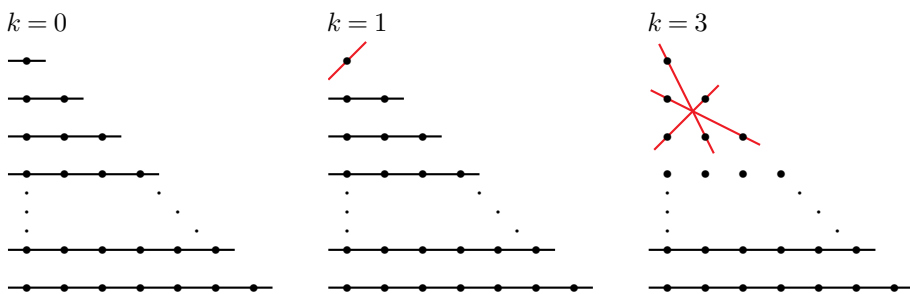


A háromszög területén levő rácspontokat *határpontnak*, a három oldalegyenest *határegyenesnek* fogjuk hívni. A fenti ábrán ezeket kék színnel rajzoltuk meg.

Először mutatunk egy-egy példát arra, hogy a rácspontokat le lehet fedni n olyan egyenessel, amelyek közül pontosan $k = 0$, $k = 1$, illetve $k = 3$ napfényes.

¹A második nap feladatainak megoldását a novemberi számban közöljük.

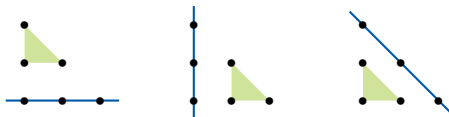
Az egyeneseknek egy-egy ilyen elrendezése látható az alábbi ábrákon; a napfényes egyeneseket piros színnel rajzoltuk.



A továbbiakban belátjuk, hogy k értéke csak a fenti 0, 1 és 3 lehet. Először nézzük az $n = 3$ eset; azt kell ellenőriznünk, hogy $k = 2$ nem lehetséges.

1. eset: Van olyan egyenes, amely három rácsponton is átmegy.

Ez az egyenes csak egy határegyenes lehet (amely tehát nem napfényes), és három lefedetlen rácspont marad, egy kisebb derékszögű háromszög alakban.



A megmaradt három rácspontot két egyenessel kell lefednünk, tehát legalább az egyiknek két rácsponton át kell mennie, ez az egyenes viszont nem lehet napfényes. Ebben az esetben tehát legfeljebb egy napfényes egyenest használhatunk fel, vagyis $k = 0$ vagy $k = 1$.

2. eset: Nincs olyan egyenes, amely három rácsponton menne keresztül.

Mivel hat rácspontot kell lefednünk három egyenessel, mindegyik egyenesnek pontosan két rácsponton kell keresztül mennie.



Vegyük észre, hogy összesen csak három olyan napfényes egyenes létezik, amely pontosan két rácsponton megy keresztül; ha ezek közül kettőt megrajzolunk, a megmaradt két rácspontot a harmadik napfényes egyenessel kell lefednünk. Ebben az esetben tehát vagy kettőnél kevesebb, vagy pedig mindhárom napfényes egyenest fel kell használnunk; $k = 2$ nem lehetséges. Ezzel az $n = 3$, $k = 2$ eset vizsgálatával kész vagyunk.

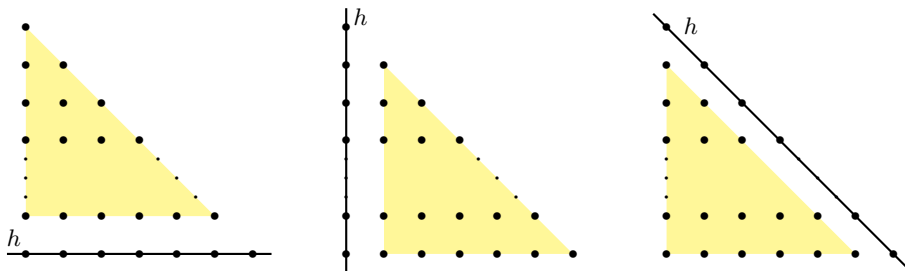
Az általános eset megoldása a következő észrevételen múlik.

Lemma. Ha $n \geq 4$, és a rácspontokat lefedjük n egyenessel, akkor ezek között biztosan van legalább egy határegyenes.

Bizonyítás. A háromszögnek összesen $3n - 3$ határpontja van. Mivel $n > 3$ miatt $3n - 3 > 2n$, a skatulyaelv miatt valamelyik egyenes legalább három határponton megy át; ez az egyenes viszont csak a háromszög valamelyik oldalegyenese, tehát az egyik határegyenes lehet.

Ezek után egyszerű teljes indukcióval igazolhatjuk, hogy $n \geq 3$ esetén k csak 0, 1 és 3 lehet. A kiinduló $n = 3$ esetet már megvizsgáltuk. Tegyük fel, hogy $n \geq 4$, és az állításunk igaz az n kisebb értékeire.

Tekintsünk a háromszög egy tetszőleges lefedését n egyenessel. A Lemma szerint a fedésben van legalább egy h határegyenes (ami nem napfényes).



Bármelyik oldalegyenes is legyen a h , a többi rácspont egy $n - 1$ méretű háromszöget alkot, és ennek a rácspontjait fedi le a többi $n - 1$ egyenes. Az indukciós feltevés szerint a többi $n - 1$ egyenes között pontosan 0, 1 vagy 3 napfényes lehet; mivel a h nem napfényes, ez igazolja az állítást.

2. feladat. Legyen az Ω , illetve Γ körök középpontja rendre M , illetve N . Tegyük fel, hogy Ω sugara kisebb, mint Γ sugara, valamint hogy Ω és Γ a (különböző) A és B pontokban metszik egymást. Az MN egyenes Ω -t a C pontban, Γ -t pedig a D pontban metszi olyan módon, hogy C, M, N és D ebben a sorrendben követik egymást az egyenesen. Jelölje P az ACD háromszög körülírt körének a középpontját. Messe az AP egyenes Ω -t az $E \neq A$ pontban. Messe az AP egyenes Γ -t az $F \neq A$ pontban. Legyen H a PMN háromszög magasságpontja.

Bizonyítsuk be, hogy a H -n átmenő, AP -vel párhuzamos egyenes érinti a BEF háromszög körülírt körét.

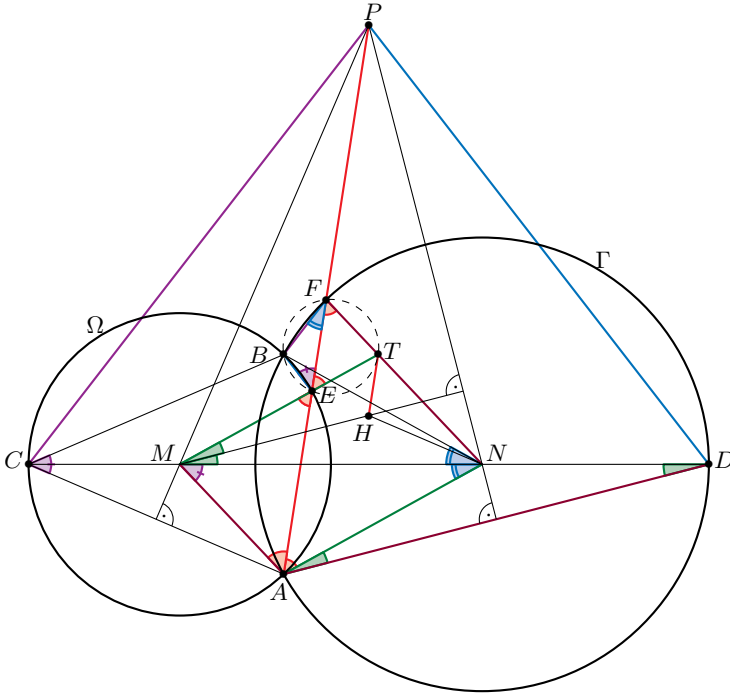
(Egy háromszög magasságpontja a magasságvonalainak metszéspontja.)

Javasolta: Vietnám

Megoldás. (Varga Boldizsár) A megoldáshoz előbb belátunk néhány segédállítást.

1. állítás. $MAP \sphericalangle = PAN \sphericalangle$.

Bizonyítás. Mivel M és P is egyenlő távol vannak A -tól és C -től, ezért az MP egyenes az AC szakasz felezőmerőlegese, vagyis az AMC szög belső szögfelezője, amely éppen az NMA szög külső szögfelezője. Hasonlóan NP az ANM szög külső szögfelezője, ezért a két egyenes metszéspontja, P az ANM háromszög A -val szemközti hozzáírt körének középpontja, amely rajta van az MAN szög belső szögfelezőjén is, tehát valóban, $MAP \sphericalangle = PAN \sphericalangle$. $\square$



2. állítás. $ME \parallel AN$ és $NF \parallel AM$, tehát az $ANTM$ négyszög paralelogramma.

Bizonyítás. Mivel $ME = MA$ az Ω kör sugarai, ezért $MAE \sphericalangle = AEM \sphericalangle$. Azonban az előző állítás szerint $MAE \sphericalangle = EAN \sphericalangle$, tehát $AEM \sphericalangle = EAN \sphericalangle$, vagyis $ME \parallel AN$. Az állítás második fele hasonlóan következik abból, hogy $NFA \sphericalangle = FAN \sphericalangle = MAF \sphericalangle$. $\square$

A feladat megoldásához legyen T az ME és NF egyenesek metszéspontja; azt fogjuk megmutatni, hogy a H -n átmenő, AP -vel párhuzamos egyenes T -ben érinti a BEF kört. Ehhez elég belátni, hogy T rajta van a körön, és a (B -t nem tartalmazó) EF ív felezőpontja, illetve $TH \parallel EF$, ekkor ugyanis TH a kör EF ívének felezőpontjában húzott érintő a szimmetria miatt.

Az előbbihez vegyük észre, hogy a kerületi és középponti szögek tétele miatt $BFE \sphericalangle = BFA \sphericalangle = \frac{1}{2}BNA \sphericalangle = MNA \sphericalangle$, és $BEF \sphericalangle = 180^\circ - AEB \sphericalangle = BCA \sphericalangle = \frac{1}{2}BMA \sphericalangle = NMA \sphericalangle$, ahonnan

$$\begin{aligned} FBE \sphericalangle &= 180^\circ - EFB \sphericalangle - BEF \sphericalangle = 180^\circ - ANM \sphericalangle - NMA \sphericalangle = \\ &= MAN \sphericalangle = NTM \sphericalangle = 180^\circ - ETF \sphericalangle, \end{aligned}$$

tehát $EBFT$ húrnégyszög. Ekkor $FET \sphericalangle = AEM \sphericalangle = MAE \sphericalangle = TFE \sphericalangle$ (a párhuzamosságok miatt), vagyis az EFT háromszög egyenlő szárú, és T tényleg a BEF kör valamelyik (némi diszkusszióval látható, hogy B -t nem tartalmazó, de erre nincs szükség) EF ívének felezőpontja.

Még azt kell belátnunk, hogy $HT \parallel AP$. Ehhez kell az alábbi állítás:

3. állítás. *A H pont az MNT háromszög beírt körének középpontja.*

Bizonyítás. Elég megmutatni, hogy MH , illetve NH felezi a TMN , illetve MNT szögeket, a szimmetria miatt elég csak az elsőt. Mivel MH és AD egyaránt merőlegesek PN -re, ezért $MH \parallel AD$, vagyis $HMN \sphericalangle = ADM \sphericalangle = NAD \sphericalangle = TMH \sphericalangle$ (itt kihasználtuk, hogy $MT \parallel AD$), vagyis MH felezi az NMT szöget, mégpedig belülről, hiszen $NDA \sphericalangle < 90^\circ$. $\square$

A 3. állításból következik, hogy TH is felezi az MTN szöget. De MTN paralelogramma, ezért az MAN és NTM szögek belső szögfelezői egymás tükörképei a paralelogramma középpontjára, tehát párhuzamosak, azaz $AP \parallel TH$, és éppen ezt akartuk bizonyítani.

3. feladat. *Jelölje $\mathbb{N}$ a pozitív egész számok halmazát. Egy $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ függvényt pöpecnek nevezünk, ha $b^a - f(b)^{f(a)}$ osztható $f(a)$ -val tetszőleges a és b pozitív egész számok esetén.*

Határozzuk meg a legkisebb c valós konstans, amelyre $f(n) \leq cn$ fennáll minden f pöpec függvényre és minden n pozitív egészre.

Javasolta: Kolumbia

Megoldás. (Bodor Mátyás) Megmutatjuk, hogy c legkisebb lehetséges értéke a 4.

Bármely p prímszámra és nemnulla x egészre jelöljük $v_p(x)$ -szel az x prímtényező felbontásában a p kitevőjét. A megoldás során többször is használni fogjuk a *Lifting The Exponent (LTE)* lemmát:

- Ha p páratlan prímszám és x, y egészek úgy, hogy $p \nmid x, y$ és $p \mid x - y$, akkor tetszőleges n pozitív egészre

$$v_p(x^n - y^n) = v_p(x - y) + v_p(n).$$

- $p = 2$ -re: ha x, y páratlanok és n páros, akkor

$$v_2(x^n - y^n) = v_2(x - y) + v_2(x + y) + v_2(n) - 1.$$

(Bővebben lásd például a https://en.wikipedia.org/wiki/Lifting-the-exponent_lemma oldalt.)

Nekünk csak a $p = 2$ az esetre lesz szükségünk.

Először megmutatjuk, hogy $c \geq 4$. Ehhez tekintsük a következő függvényt:

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \text{ páratlan,} \\ 2, & \text{ha } x = 2, \\ 2^{v_2(x)+2}, & \text{ha } x \text{ páros és } x > 2. \end{cases}$$

A g függvény pöpec, mert:

- Ha a páratlan, akkor $g(a) = 1 \mid b^a - g(b)$.
- Ha $a = 2$, akkor az kell, hogy $g(a) = 2 \mid b^2 - g(b)^2$, ami igaz, mert a konstrukcióból látható, hogy b és $g(b)$ paritása mindig megegyezik.
- Ha a páros, $a \geq 4$ és b páros, akkor az kell, hogy $g(a) = 2^{v_2(a)+2} \mid b^a - g(b)^{2^{v_2(a)+2}}$. Mivel $2 \mid g(b)$ páros, $v_2(g(b)^{2^{v_2(a)+2}}) \geq 2^{v_2(a)+2} > v_2(a) + 2$, ezért $2^{v_2(a)+2} \mid g(b)^{2^{v_2(a)+2}}$; másrészt $2 \mid b$ miatt $v_2(b^a) \geq a \geq v_2(a) + 2$ (például a 2, 3, ..., a számok között legfeljebb $a - 2$ darab 2-hatvány lehet, mert a 3 nem 2-hatvány, ezért $v_2(a) \leq a - 2$). Vagyis $2^{v_2(a)+2} \mid b^a$, ahonnan következik a kívánt oszthatóság.
- Végül, ha a páros, $a \geq 4$ és b páratlan, akkor a feltétel $g(a) = 2^{v_2(a)+2} \mid b^a - 1$, ez pedig következik az LTE lemmából: $v_2(b^a - 1) = v_2(b + 1) + v_2(b - 1) + v_2(a) - 1 \geq v_2(a) + 2$, hiszen $b + 1$ és $b - 1$ mindegyike páros, és pontosan az egyik osztható 4-gyel is, tehát 2-es kitevője legalább 2.

Összegezve, a g függvény valóban pöpec. Emellett $g(4) = 2^{2+2} = 16$, így $4c \geq g(4) = 16$, tehát biztosan $c \geq 4$.

Most pedig megmutatjuk, hogy $c = 4$ eleget tesz a feltételeknek.

Tekintsünk egy tetszőleges pöpec f függvényt. Belátjuk, hogy minden pozitív egész n -re $f(n) \leq 4n$, innen készen leszünk. Tetszőleges a, b pozitív egészre legyen $P(a, b)$ az oszthatósági feltétel, tehát $P(a, b)$ annak a rövidítése, hogy $f(a) \mid b^a - f(b)^{f(a)}$.

A $P(a, a)$ szerint $f(a) \mid a^a - f(a)^{f(a)}$, ezért $f(a) \mid a^a$. Ha most $a = p$ prímszám, akkor $f(p) \mid p^p$. Ezért $f(p)$ értéke vagy 1, vagy pedig p -hatvány minden p prímre. Legyen $f(p) = p^{i_p}$, ahol $i_p \geq 0$ egész.

Tegyük fel, hogy van végtelen sok olyan p prím, hogy $i_p > 0$. Legyen emellett b tetszőleges pozitív egész. Válasszunk egy olyan nagy p prímet, hogy $i_p > 0$ és $p > |b - f(b)|$; ilyen van a feltevésünk miatt. Így $P(p, b)$ -ből $p \mid p^{i_p} = f(p) \mid b^p - f(b)^{f(p)}$. De mind p , mind $f(p)$ egy p -hatvány, ezért a kis Fermat-tételből $b^p \equiv b \pmod{p}$ és $f(b)^{f(p)} \equiv f(b) \pmod{p}$. A fentiek alapján $p \mid b - f(b)$ és $p > |b - f(b)|$, ami csak úgy lehetséges, ha $b - f(b) = 0$, vagyis $f(b) = b$. De b tetszőlegesen volt megválasztva, tehát $f(b) = b \leq 4b$ minden b -re.

Marad az az eset, amikor nincs végtelen sok olyan p prím, hogy $i_p > 0$, vagyis véges sok van, legyenek ezek $p_1 < p_2 < \dots < p_k$, és ekkor minden $p > p_k$ prímszámmra $f(p) = 1$.

Ha egyáltalán nincsenek ilyen $p_1 < \dots < p_k$ prímek, akkor $f(p) = 1$, minden p prímre. Ha van olyan a , amelyre $f(a) > 1$, akkor legyen p az $f(a)$ egyik prímosztója. $P(a, p)$ -ből $p \mid f(a) \mid p^a - 1^{f(a)} = p^a - 1$ miatt $p \mid 1$, ellentmondás. Tehát ilyen a nem létezhet; $f(n) = 1 \leq 4n$ minden n -re.

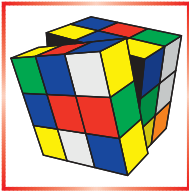
Ha $k \geq 1$, és $p_k > 2$, akkor válasszunk egy $p > p_k$ prímet a $p \equiv 2 \pmod{p_k}$ tulajdonsággal; ezt meg tudjuk tenni a Dirichlet-tétel miatt, hiszen p_k és a 2 relatív prímek. De $P(p_k, p)$ miatt $p_k \mid f(p_k) \mid p^{p_k} - f(p)^{p_k} = p^{p_k} - 1$, de $p^{p_k} - 1 \equiv p - 1 \equiv 1 \pmod{p_k}$ a kis Fermat-tételből, ami ellentmondás.

Az az eset marad, amikor $k = 1$, $f(2)$ páros, és $f(p) = 1$ minden $p > 2$ prímre.

Ha van olyan a , hogy $p \mid f(a)$ valamilyen páratlan p prímre, akkor $P(a, p)$ miatt $p \mid f(a) \mid p^a - 1^{f(a)} = p^a - 1$, ellentmondás. Ez azzal egyenértékű, hogy $f(a)$ minden a -ra vagy 1, vagy pedig 2-hatvány.

A $P(a, 3)$ -ból $f(a) \mid 3^a - f(3)^{f(a)} = 3^a - 1$, így páratlan a -ra $4 \nmid 3^a - 1$ miatt $f(a) \leq 2 < 4a$. Ha pedig a páros, akkor az LTE lemmából $v_2(3^a - 1) = v_2(3 - 1) + v_2(3 + 1) + v_2(a) - 1 = v_2(a) + 2$, ezért $v_2(a) + 2 \geq v_2(f(a)) = \log_2 f(a)$, ezért $f(a) \leq 2^{v_2(a)+2} = 4 \cdot 2^{v_2(a)} \leq 4a$.

Tehát az $f(n) \leq 4n$ egyenlőtlenség minden $n \in \mathbb{N}$ számra fennáll, és ez igazolja, hogy $c = 4$ megfelelő.



Rejtvények, ördöglakatok Szoliterek megoldása

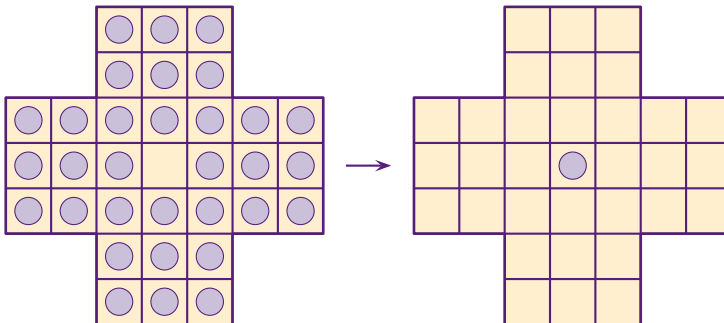
Rovatunkban minden hónapban valamilyen szórakoztató matematikai fejtörőt mutatunk be. Ezek között fontos helyet foglalnak el a különböző kirakós játékok, topológiai feladványok, ördöglakatok és a matematikát felhasználó bűvészmutatványok.

Manapság szinte mindent meg lehet találni az interneten, de az igazi élményt az adja, ha a feladatokat magunk oldjuk meg, a bűvészmutatványok trükkjeit mi találjuk ki, és a szükséges kellékeket is mi tervezzük meg és készítjük el. Próbáljuk meg a feladatokat továbbgondolni, általánosítani, igyekezzünk új feladatokat kitalálni.

Az egyik legrégebben ismert egyszemélyes logikai játék a szoliter. Már a Napkirály udvarában játszottak vele, kicsit később pedig korának egyik legnagyobb tudósa, Gottfried Wilhelm Leibniz is elismerően nyilatkozott róla.

A szoliter legismertebb változatát egy 33 mezős, kereszt alakú táblán játsszák. Ezt hívják angol táblának. Kezdetben a középsőt kivéve minden mezőn áll egy bábu. Cél az elrendezés megfordítása, vagyis, hogy csak a középső mezőn álljon egy bábu!

Ezt a feladatot tűztük ki rovatunkban a KöMaL 2025. márciusi számában. Ebben a cikkben a feladvány részletes elemzése olvasható.

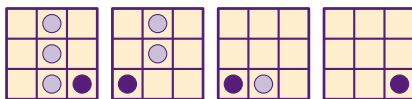


1. ábra.

Egy lépésben egy szomszédos bábut kell átugrani. Ezt csak akkor lehet megtenni, ha mögötte üres hely található. Ugrani vízszintesen vagy függőlegesen szabad, de átlósan nem. Az átugrott bábut azonnal le kell venni.

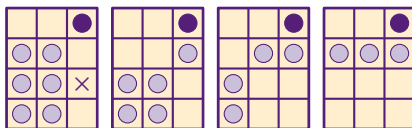
Ezek a játék szabályai, de pusztán a szabályok ismeretében a feladat szinte megoldhatatlanul nehéz. (Ebben talán hasonlít egy kicsit a bűvöskockára.) Már az is szép eredmény, ha sikerül elérni, hogy csak 3-4 bábu maradjon a táblán, tetszőleges elrendezésben. A következőkben olyan módszerekről lesz szó, amelyek segítségével nem csupán egyszerűen megoldhatóvá válik a feladat, de az eljárások más táblákon is sikerrel alkalmazhatóak.

Tekintsük a következő kezdőállást és lépéssorozatot:



2. ábra.

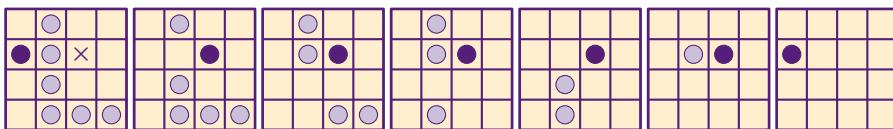
A világosabb bábuk eltűntek, míg a sötétebb a helyén maradt. A világosabb bábuk ilyen elrendezését nevezzük önmegsemmisítő alakzatnak, a sötétet pedig katalizátornak. A következő állás hasonló:



3. ábra.

Itt a lépéssorozat végén az előző (2.) ábra kezdőállását kaptuk (elforgatott helyzetben, de ez a megoldás szempontjából lényegtelen), vagyis ez is egy önmegsemmisítő alakzat. A katalizátor lehet az X-szel jelölt helyen is.

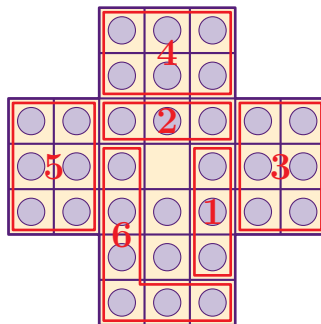
És még egy, talán a legszellemesebb:



4. ábra.

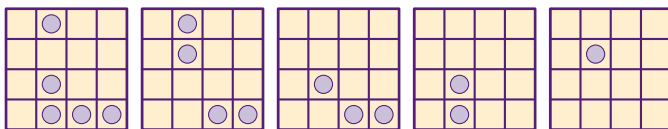
De hogyan használhatjuk ezeket az alakzatokat az eredeti játék megoldására? Osszuk fel a táblát ilyen önmegsemmisítő alakzatokra úgy, hogy a szükséges üres mezőkre és katalizátorokra is figyeljünk. Pl. egy lehetséges felosztást mutat az 5. ábra.

A számok sorrendjében el tudjuk távolítani az önmegsemmisítő alakzatokat. Ezek után a két körül nem kerített bábu marad a táblán. Az alsóval beugorhatunk a tábla közepére, így megoldottuk a feladványt.



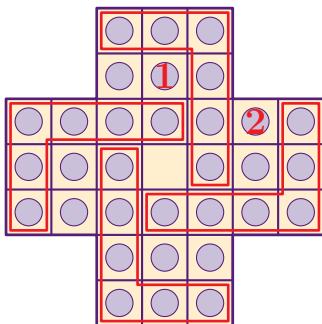
5. ábra.

Még könnyebben megjegyezhető módszert kapunk, ha a 6. ábra szerinti alakzatot és lépéseket jegyezzük meg.

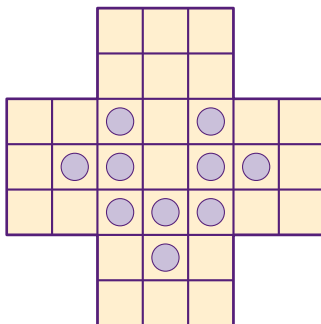


6. ábra.

A kiinduló lyukas L-ből eljutunk az „inverzéhez”, amikor csak ott van bábu, ahol eredetileg nem volt. Ennek felhasználásával feloszthatjuk a táblát a 7. ábrán látható módon.



7. ábra.



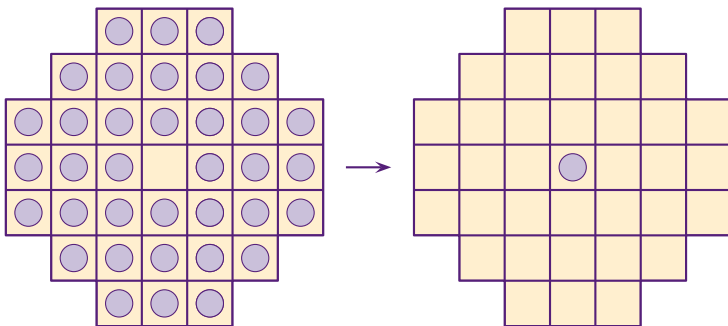
8. ábra.

Először az 1-es, majd a 2-es bábuval lépve megkapunk egy lyukas L-et. Ennek inverze után lesz hely a következő L-hez, majd a harmadikhoz, aztán a negyedikhez. Ezek után a 8. ábrán látható, már egyszerűen megoldható táblát kapjuk.

Ennek megoldását már az olvasóra bizzuk.



Eddig az angol tábla megoldási lehetőségeivel foglalkoztunk. Most térjünk át a francia táblára. A francia tábla a 9. ábrán látható, az angol táblához négy sarokmezőt illesztve kapjuk.

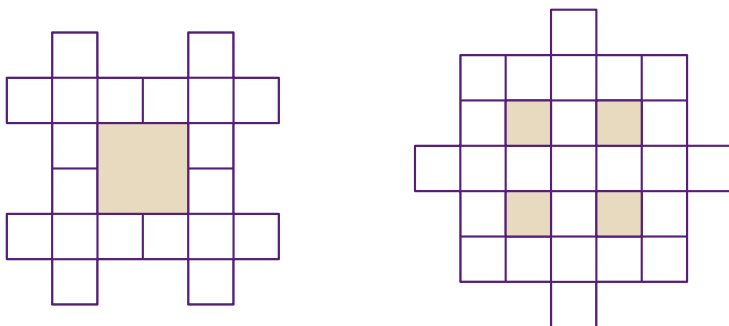


9. ábra

		A	B	C		
	A	B	C	A	B	
A	B	C	A	B	C	A
B	C	A	B	C	A	B
C	A	B	C	A	B	C
	B	C	A	B	C	
		A	B	C		

411

mezőre megoldható táblákat. Érdekes ezeken is kipróbálni az inverz feladványokat, komolyabb elméleti háttér nélkül is megoldhatóak.



12. ábra

Gál Péter
Budapest



Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire

I. rész

1. Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket.

a) $\frac{x}{x-1} + \frac{2x+1}{x+1} = \frac{3x+5}{x^2-1},$ (5 pont)

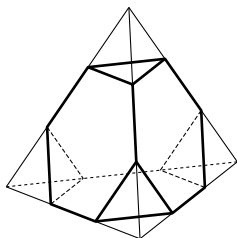
b) $\cos 2x + 2\sin x + 3 = 0.$ (5 pont)

2. Adott az $f(x) = |x+1|$, ($x \in \mathbb{R}$), és a $g(x) = \sqrt{x} - 2$, ($x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$) függvény.

a) Adja meg a $g(x)$ függvény inverzenek értelmezési tartományát és hozzárendelési utasítását. (4 pont)

b) Ábrázolja az $f \circ g$ függvény grafikonját a $[0, 16]$ intervallumon. (5 pont)
(Az $f \circ g$ korábbi jelölése: $f(g(x))$.)

c) Határozza meg a $g \circ f$ függvény összes zérushelyét. (4 pont)



3. Egy szabályos tetraéder adott csúcsából induló éleinek a csúcshoz közelebbi harmadolópontjain átmenő síkkal lemezítettük a test csúcshoz közelebbi részét. Mindegyik csúcsnál elvégeztük ezt a csonkolást, és az ábra szerinti, 10 cm élű poliéderhez jutottunk.

a) Mekkora a poliéder felszíne és térfogata? (9 pont)

b) Mekkora szöget zár be egymással egy hatszög és egy vele szomszédos háromszöglap? (5 pont)

4. Döntse el az alábbi A), B), C) állításokról, hogy igazak, vagy hamisak. Válaszeit indokolja!

A) Egy háromszög súlypontját a csúcsokkal összekötő szakaszok olyan kisebb háromszögekre bontják a háromszöget, amelyek területe egyenlő. (6 pont)

B) Nincs olyan racionális együtthatójú másodfokú egyenlet, amelynek egyik gyöke racionális, a másik irracionális szám. (4 pont)

C) Ha egy adott év napjaiból kiválasztunk 30-at, nem biztos, hogy lesz közöttük legalább öt olyan, amelyik a hét ugyanazon napjára esik. (4 pont)

II. rész

5. Az a_n számsorozat első tagja $a_1 = 1$, és a második tagtól kezdve minden tagja kiszámítható a következő rekurzív képlet segítségével: $a_{n+1} = a_n + 2n$.

a) Igazolja, hogy $a_n = n^2 - n + 1$. (3 pont)

b) Határozza meg az $\{a_n\}$ sorozat első 11 tagjának mediánját, alsó és felső kvartilisét. (2 pont)

c) Bizonyítsa be (teljes indukcióval vagy más módszerrel), hogy az $\{a_n\}$ sorozat első n tagjának összege:

$$S_n = \frac{n(n^2 + 2)}{3}. \quad (6 \text{ pont})$$

Választunk egy $n < 1000$ pozitív egész számot, majd képezzük az $\{a_n\}$ sorozat első n tagjának átlagát.

d) Mennyi a valószínűsége, hogy a kapott átlag egész szám, ha minden $n < 1000$ pozitív egész kiválasztásának ugyanakkora a valószínűsége? (5 pont)

6. A H halmazt azok az ötpontú egyszerű gráfok alkotják, amelyek pontjai egy adott konvex ötszög A , B , C , D , E csúcsai.

a) Hány eleme van H -nak? (3 pont)

b) Rajzolja le az összes H -beli három élű gráfot, amelyek páronként nem izomorfak egymással. (5 pont)

c) Hány olyan gráf van H -ban, amely összefüggő és van benne kör? (8 pont)

7. Az origó középpontú 5 egység sugarú körön az olyan pontok, amelyeknek mindkét koordinátája egész szám, egy körbeírt sokszöget határoznak meg.

a) Mekkora a sokszög szögei? (8 pont)

b) Számítsa ki az y tengely azon pontjainak második koordinátáját, amelyekből az $A(4;5)$ és $B(8;-3)$ pontok által meghatározott szakasz 45° -os szögben látszik. (8 pont)

8. a) Igazolja, hogy az $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$, $(x \in \mathbb{R})$ függvény grafikonjának nincs közös pontja az x tengellyel. (2 pont)

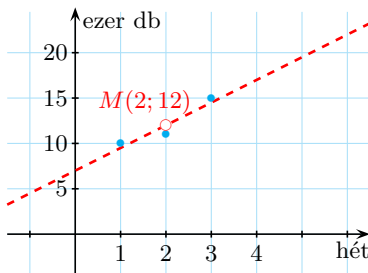
b) Határozza meg az $f(x)$ függvény globális és lokális szélsőérték helyeit és szélsőértékeit. (6 pont)

c) Mekkora annak a zárt, korlátos síkidomnak a területe, amelyet az $f(x)$ függvény grafikonja, ehhez a grafikonhoz az $x_0 = 2$ abszcisszájú pontba húzott érintő és a két koordinátatengely bezár? (8 pont)

9. a) Egy kereskedelmi vállalatnak a vásárlók palackvisszaváltási szokásairól készített felmérésén 500 olyan vásárlót kérdeztek meg, akik használták a visszaváltó automatát. A visszaváltó automatán a visszajáró összeget A) Bolti utalvány, B) Banki utalás, C) Jótékonysági felajánlás közül az egyiket kiválasztva lehet kérni. 398-an az A), 100-an a B) és 2-en a C) lehetőséget jelölték meg.

a) Mennyi a valószínűsége annak, hogy az 500 vásárlóból véletlenszerűen kiválasztva 20-at, közülük legfeljebb 16-an választották az A) lehetőséget? Az eredményt négy tizedesjegyre kerekítve adja meg. (5 pont)

Az egyik visszaváltó ponton az első héten 10 000, a következő héten 11 000, a harmadik héten pedig 15 000 terméket váltottak vissza. Ezek alapján készült a mellékelt ábra, amelyen a függőleges tengely egysége ezer darab terméket jelent.



b) Adjon meg egy olyan elsőfokú függvényt, amelynek grafikonja átmegy az $M(2; 12)$ ponton, és amely az $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$ helyen olyan értéket vesz fel, amelynek az $y_1 = 10$; $y_2 = 11$; $y_3 = 15$ értékektől való eltéréseinek négyzetösszege a lehető legkisebb. (9 pont)

A visszaváltott termékek anyagának típusát három csoportba sorolták: a (műanyag), b (fém), c (üveg). A fenti 500 vásárló közül arra a kérdésre, hogy milyen típusú palackokat szoktak visszaváltani, 380-an az a, b, c ; 50-en az a, b ; 24-en a b, c ; 10-en az a, c választ adták. Azok száma, akik csak egyfajta terméket váltottak vissza, 3 : 2 : 1 arányban oszlott meg az $a : b : c$ típusok között.

c) Hány vásárlónak volt „ a ” típusú palackja a visszaváltottak között? (2 pont)

Németh László

Fonyód

Megoldásvázlatok a 2025./6. szám matematika gyakorló feladatsorához

I. rész

1. a) Oldja meg a valós számok halmazán a $\cos\left(\frac{\pi}{6} \cos x\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ egyenletet. (5 pont)

b) Határozza meg a $px + ry = 28$ egyenletben szereplő p, r pozitív prímszámokat, ha az x, y valós számpár a $\sqrt{3x + y + 5} = 4x - 20$; $x^2 + y = 29$ egyenletrendszer megoldása. (7 pont)

Megoldás. a) Legyen $\alpha = \frac{\pi}{6} \cos x$. Ekkor a $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ egyenlet megoldásai:

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi; \quad \alpha_2 = \frac{11\pi}{6} + l \cdot 2\pi,$$

ahol k, l egész számok. Eszerint $\frac{\pi}{6} \cos x = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi$, illetve $\frac{\pi}{6} \cos x = \frac{11\pi}{6} + l \cdot 2\pi$.

A két egyenletből a $\frac{\pi}{6}$ tényezővel való osztás után

$$(1) \quad \cos x = 1 + 12k,$$

illetve

$$(2) \quad \cos x = 11 + 12l$$

következik. Mivel $-1 \leq \cos x \leq 1$, ezért az (1) egyenletben csak $k = 0$, a (2) egyenletben csak $l = -1$ lehetséges, ezért csak $\cos x = 1$ vagy $\cos x = -1$ állhat fenn. Az a) feladat megoldásai tehát $x = m \cdot \pi$ ($m \in \mathbb{Z}$), behelyettesítéssel ellenőrizzük, hogy ezek valóban megoldások.

b) Az egyenletrendszer második egyenletéből $y = 29 - x^2$, ezt az első egyenletbe írva:

$$(3) \quad \sqrt{-x^2 + 3x + 34} = 4x - 20.$$

A négyzetgyök értelmezése miatt a (3) egyenletnek csak olyan x valós szám lehet a megoldása, amelyre $-x^2 + 3x + 34 \geq 0$; $4x - 20 \geq 0$ egyszerre teljesül. A megoldóképlet alkalmazásával kapjuk, hogy a $-x^2 + 3x + 34 \geq 0$ egyenlőtlenség pontosan

akkor teljesül, ha $\frac{3 - \sqrt{145}}{2} \leq x \leq \frac{3 + \sqrt{145}}{2}$, két tizedesjegyre történő közelítéssel $-4,52 \leq x \leq 7,52$, a $4x - 20 \geq 0$ egyenlőtlenség pedig az $x \geq 5$ valós számokra igaz. Az x valós számot tehát az

$$(4) \quad 5 \leq x \leq \frac{3 + \sqrt{145}}{2} \approx 7,52$$

halmazon keressük. Négyzetre emelve a (3) egyenlet mindkét oldalát, rendezés után a $17x^2 - 163x + 366 = 0$ másodfokú egyenletet kapjuk, amelynek megoldásai $x_1 = \frac{61}{17} \approx 3,59$; $x_2 = 6$. Az x_1 valós szám nem felel meg a (4) feltételnek, ezért nem megoldás. Az $x_2 = 6$ viszont megfelel (4)-nek, ebből $y = 29 - x^2$ miatt $y = -7$ következik. Ellenőrizhető, hogy az $x = 6$; $y = -7$ számpár megoldása az egyenletrendszernek. Mivel $x = 6$; $y = -7$, ezért a $px + ry = 28$ egyenlet szerint

$$(5) \quad 6p - 7r = 28.$$

A p és r pozitív prímek, és az (5) egyenlet jobb oldalán páros szám áll, ezért a bal oldal is páros, ami csakis úgy lehet, ha $7r$ is páros. Eszerint r páros prím, tehát

$r = 2$, ebből (5) alapján $p = 7$ adódik. A feladat b) részének megoldása tehát a $p = 7$; $r = 2$ prímszámokból álló számpár.

2. Az alábbi táblázatban felsoroljuk a férfi kézilabda Bajnokok Ligája 2024–2025-ös idényének legeredményesebb góllövői közül 11 játékos nevét, klubját és a szezonban 2024. november 17-ig dobott gólok számát.

<i>név</i>	<i>klub</i>	<i>gólszám</i>
<i>Kamil Syprzak</i>	<i>Paris Saint-Germain</i>	<i>112</i>
<i>Dika Mem</i>	<i>Barcelona</i>	<i>106</i>
<i>Nedim Remili</i>	<i>Veszprém</i>	<i>99</i>
<i>Emil Madsen</i>	<i>GOG</i>	<i>98</i>
<i>Ómar Ingi Magnusson</i>	<i>Magdeburg</i>	<i>98</i>
<i>Mats Højer</i>	<i>Aalborg</i>	<i>96</i>
<i>Aaron Mensing</i>	<i>GOG</i>	<i>93</i>
<i>Niclas Ekberg</i>	<i>THW Kiel</i>	<i>92</i>
<i>Mario Sostaric</i>	<i>OTP-Bank Pick Szeged</i>	<i>88</i>
<i>Mitja Janc</i>	<i>Celje</i>	<i>87</i>
<i>Elohim Prandi</i>	<i>Paris Saint-Germain</i>	<i>87</i>

a) Számítsa ki a táblázatban szereplő minta (gólszámok) terjedelmét, átlagát és szórását. (3 pont)

b) Határozza meg a gólok számának móduszát (móduszait), mediánját, az alsó és felső kvartilis értékét, továbbá készítse el a box-plot diagramot. (4 pont)

A felsorolt adatokhoz hozzá vesszük a Veszprém csapatában játszó Ludovic Fabregas eredményét. Az ő góljainak száma a p kétjegyű prímszám, amely a 12 számból álló adatsor legkisebb eleme. Ha az új adatsor alsó kvartilise Q'_1 , felső kvartilise Q'_3 , akkor azt is tudjuk, hogy $6,5 \cdot (Q'_3 - Q'_1) < p < 8,5 \cdot (Q'_3 - Q'_1)$.

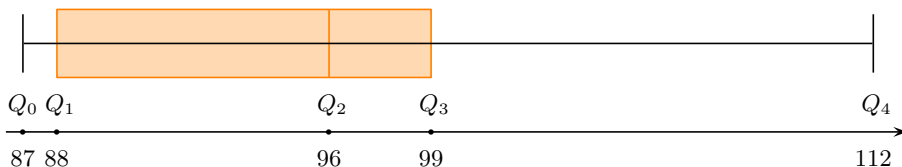
c) Hány gólt dobhatott a szezon megadott időpontjáig a Bajnokok Ligájában Ludovic Fabregas? (5 pont)

Megoldás. a) Az adatsor terjedelme: $R = 112 - 87 = 25$. Az adatsor átlaga pedig

$$\bar{x} = \frac{112 + 106 + 99 + 98 + 98 + 96 + 93 + 92 + 88 + 87 + 87}{11} = 96.$$

$$\text{A szórás értéke: } \sigma = \sqrt{\frac{(112 - 96)^2 + (106 - 96)^2 + \dots + (87 - 96)^2}{11}} = \sqrt{\frac{624}{11}} \approx 7,53.$$

b) Az adatsornak két módusza is van, mert a 98-as és a 87-es gólszám két-két esetben fordul elő, a többi gólszám gyakorisága 1, vagyis $M_1 = 98$ és $M_2 = 87$. A táblázatban a 11 gólszám nemnövekvő sorrendben van, a medián a középső elem: $Q_2 = 96$. Az alsó kvartilis $Q_1 = 88$, míg a felső kvartilis $Q_3 = 99$. A legkisebb számot Q_0 -lal, a legnagyobbat Q_4 -gyel jelölve az eddigiek alapján elkészíthetjük a box-plot, más neven sodrófa vagy dobozdiagramot:



Megjegyzés. A $Q_4 = 112$ adat nem kiugró adat, mert az $IQR = Q_3 - Q_1 = 11$ féltérjellel számolva $112 < Q_3 + 1,5 \cdot IQR = 99 + 1,5 \cdot 11 = 115,5$.

c) Mivel p a legkisebb a 12 adat közül, ezért $p \leq 87$. Az új adatsor mediánja a két középső adat, vagyis 96 és 93 számtani közepe, azaz $Q'_2 = \frac{96 + 93}{2} = 94,5$. Az új alsó kvartilis a Q'_2 -nél kisebb elemek mediánja, tehát $Q'_1 = \frac{88 + 87}{2} = 87,5$, az új felső kvartilis pedig a Q'_2 -nél nagyobb elemek mediánja: $Q'_3 = \frac{99 + 98}{2} = 98,5$.

A feltétel szerint $6,5 \cdot (Q'_3 - Q'_1) < p < 8,5 \cdot (Q'_3 - Q'_1)$, ezért $Q'_3 - Q'_1 = 11$ miatt $6,5 \cdot 11 < p < 8,5 \cdot 11$, vagyis $71,5 < p < 93,5$. Eszerint p a 72 és a 94 közé eső valamelyik prímszám lehet. A 72 és 94 közé eső prímszámok: 73, 79, 83, 89. Közülük a 89 nem lehet, mert akkor nem teljesülne, hogy p a 12 tagú adatsor legkisebb eleme. Ludovic Fabregas góljainak száma tehát a feltételek figyelembe vételével 73, 79 vagy 83 lehetett.

Megjegyzés. Fabregas góljainak száma a megadott időszakban ténylegesen 79 volt.

3. a) *Mely egész számok nem tesznek eleget az*

$$\log_2 \frac{(12x + 4)(4x - 3)}{15x - 4} - \log_{0,5} \frac{15x - 4}{4x - 3} \leq \log_2(30x - 50)$$

egyenlőtlenségnek?

(5 pont)

Legyenek egy háromszög oldalai $4n - 3$; $15n - 4$; $12n + 4$, ahol n pozitív egész szám.

b) *Milyen n esetén lesz a háromszög derékszögű, hegyesszögű, illetve tompaszögű?*

(8 pont)

Megoldás. a) A logaritmus értelmezése miatt $30x - 50 > 0$, ezért $x > \frac{5}{3}$. Ha ez teljesül, akkor nyilvánvaló, hogy $12x + 4 > 0$ és $15x - 4 > 0$, illetve $4x - 3 > 0$ is igaz, tehát az egyenlőtlenség bal oldalán szereplő tényezők mindegyike értelmezett. A különböző alapú logaritmusos kifejezések átváltási formulája alapján az egyenlőtlenség így is írható:

$$\log_2 \frac{(12x + 4)(4x - 3)}{15x - 4} + \log_2 \frac{15x - 4}{4x - 3} \leq \log_2(30x - 50).$$

Az azonos alapú logaritmusos kifejezések összegére vonatkozó azonosság szerint

$$\log_2 \left[\frac{(12x+4)(4x-3)}{15x-4} \cdot \frac{15x-4}{4x-3} \right] \leq \log_2(30x-50),$$

egyszerűsítve

$$\log_2(12x+4) \leq \log_2(30x-50).$$

Mivel az $f(x) = \log_2 x$ függvény szigorúan monoton növekvő, ezért a fenti egyenlőtlenség pontosan akkor teljesül, ha

$$12x+4 \leq 30x-50,$$

innen pedig $x \geq 3$, vagyis pontosan az $x \leq 2$ egészekre nem teljesül az egyenlőtlenség.

b) Legyen $a = 4n - 3$; $b = 15n - 4$; $c = 12n + 4$. Nyilvánvaló, hogy minden pozitív egész n -re $a < b$. Megvizsgáljuk, hogy $b < c$ milyen n -re teljesül. A $15n - 4 < 12n + 4$ egyenlőtlenségből azt kapjuk, hogy $n < \frac{8}{3}$, eszerint $n = 1$ vagy $n = 2$. Ha $n = 1$, akkor $a = 1$, $b = 11$, $c = 16$, ezek a számok nem lehetnek egy háromszög oldalai, mert nem teljesül rájuk a háromszög-egyenlőtlenség.

Ha $n = 2$, akkor $a = 5$, $b = 26$, $c = 28$, ezekre a számokra fennáll a háromszög-egyenlőtlenség, ilyen háromszög tehát létezik. Tudjuk, hogy egy (nem egyenlő szárú) háromszög pontosan akkor hegyesszögű, derékszögű, illetve tompaszögű, ha a két kisebb oldalának négyzetösszege nagyobb, egyenlő, illetve kisebb a legnagyobb oldal négyzeténél. Mivel $5^2 + 26^2 < 28^2$, ezért az $a = 5$, $b = 26$, $c = 28$ oldalakkal rendelkező háromszög tompaszögű. A továbbiakban nyilvánvaló, hogy $n \geq 3$ miatt $4n - 3 < 12n + 4 < 15n - 4$, továbbá minden ilyen n -re létezik háromszög, hiszen a $4n - 3 + 12n + 4 > 15n - 4$ egyenlőtlenségből $n + 5 > 0$ adódik. Eszerint $n \geq 3$ esetén a háromszög oldalai

$$(1) \quad a = 4n - 3 < c = 12n + 4 < b = 15n - 4.$$

Vizsgáljuk a $(4n - 3)^2 + (12n + 4)^2 \geq (15n - 4)^2$ egyenlőtlenség megoldásait. A műveletek elvégzésével és rendezéssel a $-65n^2 + 192n + 9 \geq 0$ másodfokú egyenlőtlenséget kapjuk. A $65n^2 - 192n - 9 = 0$ egyenlet megoldásai $n_1 = -\frac{3}{65}$; $n_2 = 3$. A kapott értékek közül $n \leq n_1$ nyilván nem lehetséges, az $n_2 = 3$ viszont megfelel az $n \geq 3$ feltételnek és ekkor $a = 9$, $b = 41$, $c = 40$. Ez a háromszög olyan derékszögű háromszöget jelent, amelynek befogói $a = 9$, $c = 40$, átfogója pedig $b = 41$. Az $n = 3$ -nál nagyobb pozitív egészekre $-65n^2 + 192n + 9 < 0$, ezért az is igaz, hogy

$$(4n - 3)^2 + (12n + 4)^2 < (15n - 4)^2,$$

azaz a háromszög két rövidebb oldalának négyzetösszege kisebb a legnagyobb oldal négyzeténél, vagyis minden $n > 3$ értékre egyrészt létezik az (1)-nek is megfelelő háromszög, másrészt minden ilyen háromszög tompaszögű. Összefoglalva: $n = 2$ és $n > 3$ esetén létezik a feltételeknek megfelelő háromszög, ezek mindegyike tompaszögű, $n = 3$ esetén a feltételeknek megfelelő háromszög szintén létezik és ez derékszögű, a lehetséges háromszögek között tehát nincs egyetlen hegyesszögű sem.

4. Egy dobozban 10 piros, 13 zöld és valamennyi kék golyó van. A dobozból véletlenszerűen kihúznak egy golyót.

a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy nem piros golyót húznak, ha tudjuk, hogy a kék golyók száma úgy aránylik a nem kék golyók számához, mint a zöld golyók száma a nem zöld golyók számához? (3 pont)

Egy matematikaverseny döntőjébe 50 diák jutott. A verseny értékelésekor 1 aranyérmes, 2 ezüstérmes és 3 bronzérmes osztanak ki, egy versenyző legfeljebb egy érmet kaphat.

b) Hányféleképpen lehetne kiosztani a 6 érmet? (3 pont)

A versenyen az éremmel nem jutalmazott 44 diák közül a zsűri által azonosnak értékelt jó eredmény alapján kiválasztanak 20 főt, közülük sorsolással döntenek el, hogy ki legyen az a 6 fő, aki különdíjat kap. A 20 fő nevét egy-egy cédulára írják, és a cédulákat egy dobozba teszik. A dobozból véletlenszerűen és visszatevés nélkül húznak 6 cédulát.

c) Ha tudjuk, hogy a sorsolásra kijelölt diákok közül 8-an az A, 7-en a B, 5-en a C iskolából érkeztek, akkor mennyi a valószínűsége, hogy a kihúzott 6 névből legalább 2 az A iskola diákja? (8 pont)

Megoldás. a) Legyen a kék golyók száma k , a feladat szövege alapján k pozitív egész. A feltétel szerint

$$\frac{k}{23} = \frac{13}{10+k},$$

ahonnan a műveletek elvégzése és rendezés után a $k^2 + 10k - 299 = 0$ másodfokú egyenletet kapjuk, amelynek megoldásai $k_1 = 13$; $k_2 = -23$. A $k_2 = -23$ nem megoldása a feladatnak, ezért csak $k = 13$ lehetséges, így a kék golyók száma 13. Annak a valószínűsége tehát, hogy nem piros golyót húznak:

$$P(\text{nem piros}) = \frac{26}{36} = \frac{13}{18}.$$

b) Az egy aranyérmes kiosztása nyilván $\binom{50}{1} = 50$ -féleképpen történhet. Az aranyérmes kiválasztása után a két ezüstérmes kiválasztása $\binom{49}{2} = 1176$ -féle módon, ezután a bronzérmesek kiválasztása $\binom{47}{3} = 16215$ -féle módon valósítható meg. A 6 érme kiosztására tehát összesen $50 \cdot 1176 \cdot 16215 = 953\,442\,000$ lehetőség van.

Megjegyzés. Természetesen a gyakorlatban a 6 legjobb diák fogja kapni az érmeket, ez pedig nyilván nem a kombinatorikai kiválasztási lehetőségek számától függ.

c) Alkalmazzuk a hipergeometriai eloszlás $P(k) = \frac{\binom{K}{k} \cdot \binom{N-k}{n-k}}{\binom{N}{n}}$ képletét, ahol $N = 20$, $K = 8$, $n = 6$. Számítsuk ki a komplementer esemény valószínűségét, tehát

azt, hogy az $n = 6$ kihúzott cédula közül pontosan $k = 0$, illetve $k = 1$ esetben szerepel a cédulán az A iskola diákjának neve.

$$P(k=0) = \frac{\binom{8}{0} \cdot \binom{12}{6}}{\binom{20}{6}} = \frac{924}{38760} \approx 0,024; \quad P(k=1) = \frac{\binom{8}{1} \cdot \binom{12}{5}}{\binom{20}{6}} = \frac{6336}{38760} \approx 0,163.$$

A komplementer esemény valószínűsége tehát $P(k=0) + P(k=1)$, ezért annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott versenyzők közül legalább 2 diák az A iskola tanulója $P(k \geq 2) = 1 - (P(k=0) + P(k=1))$, azaz

$$P(k \geq 2) = 1 - \left(\frac{924}{38760} + \frac{6336}{38760} \right) = \frac{525}{646} \approx 0,813.$$

II. rész

5. a) Egy pozitív háromjegyű szám négyzetéből kivonva a szám p -szeresét (ahol p pozitív prímszám), éppen 20^2 -et kapunk. Adja meg a legkisebb és a legnagyobb ilyen háromjegyű számot. (7 pont)

A G_1 és G_2 gráfok közös pont nélküli (diszjunkt) fagráfok, a G_1 gráfnak $7q$, a G_2 -nek $3r$ csúcsa van, ahol q és r pozitív prímszámok. A G_1 és G_2 egy-egy csúcsának összekötésével kapott G_3 fagráfnak $q \cdot r$ éle van.

b) Határozza meg a G_1 és G_2 gráfok csúcsainak és éleinek számát, illetve mindkét gráfban a foksámok összegét. (9 pont)

Megoldás. a) Legyen a háromjegyű szám x , ekkor a feltétel szerint $x^2 - px = 20p^2$, ezért $x^2 - px - 20p^2 = 0$. A p paramétert tartalmazó x -ben másodfokú egyenlet diszkriminánssá $D = 81p^2 > 0$, ezért az egyenletnek van valós megoldása, ezek:

$$x_1 = \frac{p-9p}{2} = -4p; \quad x_2 = \frac{p+9p}{2} = 5p.$$

Az x_1 nyilván nem megoldás, hiszen $p > 0$ és $x > 0$. Mivel x háromjegyű, ezért azt is tudjuk, hogy $99 < 5p \leq 999$, ez azt jelenti, hogy

$$(3) \quad 19,8 < p \leq 199,8.$$

A (3)-nak megfelelő legkisebb prímszám $p = 23$, a legnagyobb pedig $p = 199$. A feltételeknek megfelelő legkisebb szám tehát $x = 5 \cdot 23 = 115$, a legnagyobb pedig $x = 5 \cdot 199 = 995$. A kapott értékek a feladat minden feltételének megfelelnek.

b) A G_1 és G_2 gráfnak nincsen közös csúcsa, tehát nincs közös élük sem. A G_1 fagráfnak $7q - 1$, a G_2 fagráfnak $3r - 1$ számú éle van. Ha a két gráf egy-egy csúcsát összekötjük, akkor az így keletkező G_3 is fagráf, tehát $7q - 1 + 3r - 1 + 1$ számú éle van, ez a feltétel szerint $q \cdot r$ -rel egyenlő: $7q - 1 + 3r - 1 + 1 = q \cdot r$. Rendezés után átalakítható $3r - 1 = q \cdot (r - 7)$ alakba, ahol $r \neq 7$, mert akkor az egyenlet jobb

oldalának értéke 0, a bal oldal értéke 20 lenne. Ezért oszthatunk $r - 7$ -tel, így $\frac{3r - 1}{r - 7} = q$, illetve további átalakítással $\frac{3(r - 7) + 20}{r - 7} = q$, végül

$$(4) \quad 3 + \frac{20}{r - 7} = q.$$

A (4) egyenlet jobb oldala pozitív egész, tehát $r - 7$ csakis a 20 osztója lehet. A negatív osztókat is figyelembe véve a (4) egyenlet alapján r és q értékeit kiszámítva, az eredményeket a következő táblázatban foglaltuk össze:

$r - 7$	1	-1	2	-2	4	-4	5	-5	10	-10	20	-20
r	8	6	9	5	11	3	12	2	17	-3	27	-13
q	23	-17	13	-7	8	-2	7	-1	5	1	4	2

A táblázat alapján láthatjuk, hogy a feladat minden feltételének csak az $r = 17$; $q = 5$ számpár felel meg. Eszerint a G_1 fának tehát $7q = 35$ csúcsa és $7q - 1 = 34$ éle, míg a G_2 fának $3r = 51$ csúcsa és $3r - 1 = 50$ éle van, így a G_1 fa foksámösszege 68, a G_2 fáé pedig 100. Ekkor az összekötéssel kapott fagrafnak $35 + 51 = 86$ csúcsa és 85 éle van, így valóban teljesül, hogy $85 = 5 \cdot 17$.

6. Egy sík egy egyenesén felvettünk 28 pontot. Ezen kívül felvettünk még a síkban 7-nél több, az egyenesre nem illeszkedő pontot úgy, hogy a síkban az egyenesen levő 28 pont kivételével semelyik három pont nincs egy egyenesen.

a) *Hány pontot vettünk fel az egyenesen kívül, ha az összes felvett pont segítségével megrajzolható egyenesek száma 403?* (7 pont)

Felvesszünk egy körvonalon n darab különböző pontot, ahol $n \geq 4$. Jelölje A , B , illetve C azt, hogy rendre hány egyenest, háromszöget, illetve négyszöget határoz meg az n pont.

b) *Lehetséges-e, hogy $A + B = C$? (Állításunkat indokoljuk.)* (9 pont)

Megoldás. a) Legyen az egyenesen kívül felvett pontok száma k , a feltétel szerint $k > 7$. Számoljuk össze az összes felvett pont segítségével megrajzolható egyeneseket: a k darab pontot az egyenesen levő 28 ponttal összekötve $28k$ egyenest kapunk, ehhez hozzá kell adni a 28 pontot tartalmazó egyetlen egyenest és azokat az egyeneseket, amelyek a k darab pont közül kettőt kiválasztva jönnek létre, ezek száma $\binom{k}{2} = \frac{k \cdot (k - 1)}{2}$. Felírhatjuk tehát, hogy $28k + 1 + \frac{k \cdot (k - 1)}{2} = 403$, ebből a műveletek elvégzésével és rendezéssel a

$$k^2 + 55k - 804 = 0$$

másodfokú egyenletet kapjuk, amelynek megoldásai $k_1 = -67$ és $k_2 = 12$. A k_1 nyilván nem megoldás, a $k_2 = 12$ viszont megfelel a feltételeknek. Eszerint 12 pontot vettünk fel a 28 pontot tartalmazó egyenesen kívül. Számolással ellenőrizhetjük, hogy az így felvett pontok segítségével valóban 403 egyenest rajzolhatunk meg.

b) Mivel az n darab pont egy körön van, ezért semelyik három pont nem esik egy egyenesre, de akkor semelyik négy pont sem. Ugyanakkor bármelyik három pont által alkotott háromszöget tekintjük, annak egyetlen belső pontja sem eshet egybe a megmaradt $n - 3$ pont egyikével sem. Ugyanígy bármely kiválasztott (konvex) négyszög belső pontjai nem tartalmazzák a maradék $n - 4$ pont közül semelyiket. Ilyen feltételek mellett bármely két pontot kiválasztva egy olyan egyenest kapunk, amelyen nincs további pont a felvettek közül, illetve bármelyik hármat kiválasztva háromszöget, bármelyik négyet kiválasztva (konvex) négyszöget kapunk. A lehetséges egyenesek száma $\binom{n}{2} = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$, a lehetséges háromszögek száma $\binom{n}{3} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{6}$, végül a négyszögek száma $\binom{n}{4} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)}{24}$.

Az $A + B = C$ egyenlőséghez tehát az

$$(3) \quad \frac{n \cdot (n-1)}{2} + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{6} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)}{24}$$

egyenlet lehetséges megoldásait kell keresnünk. Mivel $n \geq 4$, ezért $n \neq 0$ és $n \neq 1$, tehát (3) mindkét oldalát oszthatjuk az $n \cdot (n-1)$ kifejezéssel. Így kapjuk az $\frac{1}{2} + \frac{n-2}{6} = \frac{(n-2) \cdot (n-3)}{24}$ egyenletet, ahonnan a műveletek elvégzésével és rendezéssel $n^2 - 9n + 2 = 0$. Az egyenlet valós megoldásai $n_1 = \frac{9 - \sqrt{73}}{2}$; $n_2 = \frac{9 + \sqrt{73}}{2}$.

A kapott két megoldás egyike sem egész szám, ezért a feladat feltételei mellett $A + B = C$ nem teljesülhet.

7. A derékszögű koordinátarendszerben felvettük az $A(3; -4)$, $B(8; 1)$, $C(6; 5)$, $D(-1; -2)$ és $P(-2; 1)$ pontokat.

a) *Bizonyítsa be, hogy az öt pont egy körön van.* (4 pont)

b) *Mutassa meg, hogy az $ABCD$ négyszög trapéz és számítsuk ki a trapéz területét.* (4 pont)

Tekintsük azt az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; $f(x) = ax^2 + bx + c$ függvényt, amelynek grafikonja áthalad az A , B , C pontokon, valamint azt a $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; $g(x) = dx^2 + ex + f$ függvényt, amelynek grafikonja áthalad az A , C , P pontokon.

c) *Határozza meg a két grafikon által bezárt terület nagyságát.* (8 pont)

Megoldás. a) Azt fogjuk igazolni, hogy a BCD háromszög körülírt körére illeszkedik az A és a P pont. A BC szakasz felezőpontja az $F_1(7; 3)$, a CD szakasz felezőpontja az $F_2(\frac{5}{2}; \frac{3}{2})$ pont. A $\overrightarrow{BC}$ koordinátái $\overrightarrow{BC}(-2; 4)$, ezért a BC egyenes egy irányvektora $\overrightarrow{v}_{BC}(-1; 2)$, ez a BC felezőmerőlegesének egy normálvektora. Hasonlóképpen a $\overrightarrow{CD}$ vektor koordinátái $\overrightarrow{CD}(-7; -7)$, így CD egyenes egy irányvektora $\overrightarrow{v}_{CD}(1; 1)$ és ez a CD felezőmerőlegesének egyik normálvektora. A BC szakasz felezőmerőlegesének egyenlete: $-x + 2y = -1$, a CD szakasz felezőmerőlegesének egyenlete pedig $x + y = 4$. Az egyenletrendszer megoldása $x = 3$; $y = 1$,

ezért a BCD háromszög körülírt körének középpontja az $O(3;1)$ pont, a körülírt kör sugara $R = OD = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$, vagyis a körülírt kör egyenlete

$$(1) \quad (x-3)^2 + (y-1)^2 = 25.$$

Behelyettesítéssel ellenőrizhető, hogy mind az $A(3;-4)$, mind a $P(-2;1)$ pontok koordinátái kielégítik az (1) egyenletet, ezért az öt pont valóban egy körön van.

b) Az AB egyenes irányvektora $\overrightarrow{AB}(5;5)$, a CD egyenesé $\overrightarrow{CD}(-7;-7)$, a két egyenes irányítányezője egyaránt 1, ezért az $ABCD$ négyszög trapéz, amelynek párhuzamos oldalai AB és CD . A trapéz csúcsai az (1) körön vannak, ezért $ABCD$ húrtrapéz. Kiszámítjuk a trapéz AB és CD alapjainak hosszát:

$$(2) \quad |AB| = \sqrt{5^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}; \quad |CD| = \sqrt{(-7)^2 + (-7)^2} = 7\sqrt{2}.$$

A CD egyenes egyenletét felírjuk a $\vec{n}_{CD}(-1;1)$ normálvektora segítségével: $-x + y + 1 = 0$, ennek az egyenesnek és az $A(3;-4)$ pontnak a távolsága a trapéz magassága:

$$(3) \quad m = \left| \frac{(-1) \cdot 3 + 1 \cdot (-4) + 1}{\sqrt{2}} \right| = 3\sqrt{2}.$$

A (2) és (3) összefüggések segítségével a trapéz területképletét használva $T_{ABCD} = 36$.

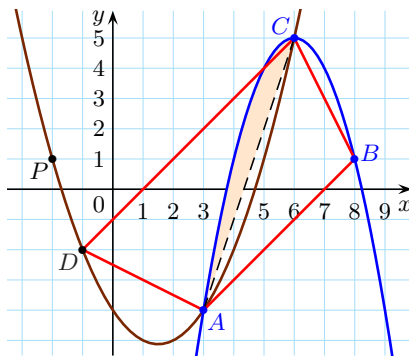
c) Az A, B, C pontok megfelelő koordinátáit behelyettesítve az $y = ax^2 + bx + c$ egyenletbe a

$$(4) \quad -4 = 9a + 3b + c; \quad 1 = 64a + 8b + c; \quad 5 = 36a + 6b + c,$$

egyenletrendszert, az A, C, P pontok koordinátáit beírva az $y = dx^2 + ex + f$ egyenletbe a

$$(5) \quad -4 = 9d + 3e + f; \quad 5 = 36d + 6e + f; \quad 1 = 4d - 2e + f,$$

egyenletrendszert kapjuk.



A (4) egyenletrendszer megoldása $a = -1$; $b = 12$; $c = -31$, az (5) egyenletrendszer megoldása pedig $d = \frac{1}{2}$; $e = -\frac{3}{2}$; $f = -4$. Az $y = -x^2 + 12x - 31$ és az $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 4$ parabola két közös pontja A és C , elhelyezkedésüket szemlélteti az *ábra*. Eszerint az $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 4$ parabolára a D pont is illeszkedik, ez számítással igazolható, de a feladat további részéhez nem kell felhasználnunk.

A két parabola közé zárt terület:

$$\begin{aligned} T &= \int_3^6 [f(x) - g(x)] dx = \int_3^6 \left(-\frac{3}{2}x^2 + \frac{27}{2}x - 27 \right) dx = \left[-\frac{1}{2}x^3 + \frac{27}{4}x^2 - 27x \right]_3^6 = \\ &= -\frac{1}{2} \cdot 6^3 + \frac{27}{4} \cdot 6^2 - 27 \cdot 6 - \left(-\frac{1}{2} \cdot 3^3 + \frac{27}{4} \cdot 3^2 - 27 \cdot 3 \right) = \frac{27}{4} = 6,75. \end{aligned}$$

8. a) *Határozza meg azokat az n természetes számokat, amelyekre teljesül az $n! > 3^n$ egyenlőtlenség, és azokat is, amelyekre az egyenlőtlenség nem áll fenn.*

(5 pont)

Legyen $n > 1$ pozitív egész szám és definiáljuk az a_n , illetve b_n sorozatokat a következő módon:

$$a_n = \binom{n}{2} + \binom{n}{3}; \quad b_n = \binom{2n}{3}.$$

b) *Bizonyítsa be, hogy az $c_n = \frac{a_n}{b_n}$ sorozat szigorúan monoton csökkenő.* (7 pont)

A d_n mértani sorozat első tagja $d_1 = 24$, kvóciense $q_d = \frac{6}{22}$, az e_n mértani sorozat első tagja $e_1 = 21$, kvóciense $q_e = \frac{15}{22}$.

Jelöljük a $d_1 + d_2 + d_3 + \dots + d_n + \dots$, illetve $e_1 + e_2 + e_3 + \dots + e_n + \dots$ végtelen összegeket S_d -vel, illetve S_e -vel.

c) *Számítsa ki az $S_d + S_e$ összeg pontos értékét.* (4 pont)

Megoldás. a) Számológép segítségével megállapíthatjuk, hogy az $n! > 3^n$ egyenlőtlenség nem teljesül az $n \leq 6$ természetes számokra. Az $n = 0$ esetén ugyanis $n! = 3^n$, a többi esetben pedig $n! < 3^n$. Ha $n = 7$, akkor $n! = 5040$ és $3^n = 2187$, erre igaz, hogy $n! > 3^n$. Teljes indukcióval igazoljuk, hogy az $n! > 3^n$ egyenlőtlenség minden $n \geq 7$ természetes számra fennáll. Az előző számításunk szerint $n = 7$ -re igaz az egyenlőtlenség. Tegyük fel, hogy az egyenlőtlenség valamely $k \geq 7$ -re teljesül, vagyis

$$(1) \quad k! > 3^k.$$

Szorozzuk be az (1) egyenlőtlenség mindkét oldalát a pozitív $(k+1)$ -gyel, ekkor $(k+1) \cdot k! > 3^k \cdot (k+1)$, és mivel nyilvánvaló, hogy $k > 7$ esetén $k+1 > 3$, ezért $(k+1)! > 3^k \cdot (k+1) > 3^{k+1}$. Eszerint, ha $k > 7$, akkor a $k! > 3^k$ indukciós feltevésből következik, hogy az egyenlőtlenség $k+1$ -re is teljesül. Összegezve: az $n! > 3^n$

egyenlőtlenség nem áll fenn a $H = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ halmazba tartozó n számokra, de minden $n \geq 7$ természetes számra teljesül.

b) A binomiális együtthatók tulajdonsága, hogy $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$, ezért

$$(2) \quad \binom{n}{2} + \binom{n}{3} = \binom{n+1}{3},$$

$$\binom{n+1}{3} = \frac{(n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!}{3! \cdot (n-2)!} = \frac{(n+1) \cdot n \cdot (n-1)}{6},$$

vagyis

$$(3) \quad a_n = \frac{(n+1) \cdot n \cdot (n-1)}{6}.$$

Ugyanakkor $\binom{2n}{3} = \frac{2n \cdot (2n-1) \cdot (2n-2) \cdot (2n-3)!}{3! \cdot (2n-3)!} = \frac{4n \cdot (2n-1) \cdot (n-1)}{6}$, így

$$(4) \quad b_n = \frac{4n \cdot (n-1) \cdot (2n-1)}{6}.$$

(3) és (4) alapján a c_n sorozatra az $n > 1$ feltétel figyelembevételével felírhatjuk, hogy

$$(5) \quad c_n = \frac{n+1}{8n-4}.$$

Ekkor

$$c_{n+1} - c_n = \frac{n+2}{8n+4} - \frac{n+1}{8n-4} = c_{n+1} - c_n = \frac{-12}{(8n+4)(8n-4)}.$$

Az $n > 1$ feltétel miatt (5) nevezője pozitív, tehát a jobb oldal értéke minden n természetes számra negatív, vagyis $c_{n+1} - c_n < 0$, azaz minden n -re $c_{n+1} < c_n$, ezért a $c_n = \frac{a_n}{b_n}$ sorozat valóban szigorúan monoton csökkenő.

c) Mivel a két mértani sorozatban $0 < q_d < 1$ és $0 < q_e < 1$, ezért a $d_1 + d_2 + d_3 + \dots + d_n + \dots$ és az $e_1 + e_2 + e_3 + \dots + e_n + \dots$ végtelen összegek léteznek. A végtelen mértani sor összegképlete szerint $S_d = \frac{24}{1 - \frac{6}{22}}$; $S_e = \frac{21}{1 - \frac{15}{22}}$, ahonnan egyszerű számítással kapjuk, hogy $S_d + S_e = 33 + 66 = 99$.

9. Az ABC derékszögű háromszög befogói $BC = a$, $CA = b$, átfogója $AB = c$ hosszúságú, továbbá $\angle BAC = 15^\circ$. A derékszögű háromszöget megforgatjuk a BC , illetve a CA befogó egyenesére körül.

a) Határozza meg a keletkezett két forgástest térfogata arányának pontos értékét. (6 pont)

Az ABC hegyesszögű háromszögben $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, az oldalakra teljesül, hogy $a < b < c$. A háromszöget megforgatjuk először az a , majd a b , végül a c oldalegyenes körül. A keletkezett forgástestek térfogata ebben a sorrendben egy számtani sorozat három szomszédos tagja.

b) Bizonyítsa be, hogy a b oldal hossza harmonikus közepe az a és c oldal hosszának. (10 pont)

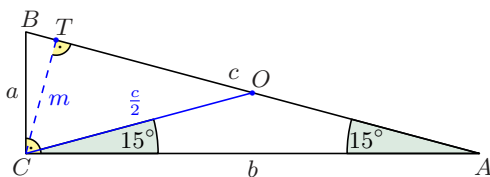
Megoldás. a) A BC körüli forgatáskor olyan egyenes kúpot kapunk, amelynek alapja egy b sugarú kör, magassága a , így térfogata

$$(1) \quad V_a = \frac{b^2 \cdot \pi \cdot a}{3},$$

a CA befogó egyenesese körül történő forgatáskor kapott egyenes körkúp alapkörének sugara a , magassága b , ezért térfogata

$$(2) \quad V_b = \frac{a^2 \cdot \pi \cdot b}{3}.$$

(1) és (2) alapján a két kúp térfogatának aránya $\frac{V_a}{V_b} = \frac{b}{a}$. A $\frac{b}{a}$ pontos értékének megállapításához használjuk fel az 1. ábrát, amelyen az ABC háromszög körülírt körének középpontját O -val, a C -ből húzott magasságát m -mel, a magasság talpontiát T -vel jelöltük.



1. ábra

A körülírt kör sugara nyilván $OA = OB = OC = \frac{c}{2}$, a feltétel miatt $\angle OCA = \angle CAO = 15^\circ$, ez pedig az OCA háromszög külső szögére vonatkozó tétel szerint azt jelenti, hogy $\angle COT = 30^\circ$. Ebből azonnal következik, hogy a COT derékszögű háromszög egy félszabályos háromszög, vagyis $\frac{c}{2} = 2m$, ahonnan

$$(3) \quad m = \frac{c}{4}.$$

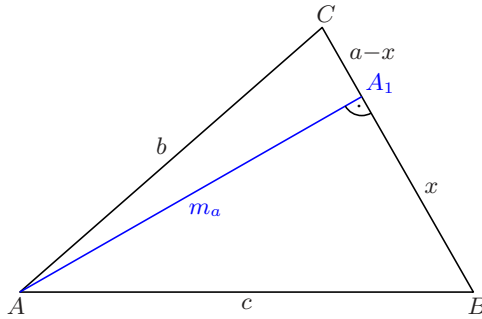
Az ABC háromszög kétszeres területére igaz, hogy $a \cdot b = c \cdot m$, tehát (3) alapján $a \cdot b = \frac{c^2}{4}$, vagyis ha alkalmazzuk a Pitagorasz-tételt, akkor

$$(4) \quad a^2 + b^2 = 4ab.$$

Osszuk el a nemnulla a^2 -tel (4) mindkét oldalát, és válasszuk az $x = \frac{b}{a}$ helyettesítést. Ekkor a (4) egyenletből rendezés után az $x^2 - 4x + 1 = 0$ egyenletet kapjuk,

amelynek megoldásai $x_1 = 2 - \sqrt{3}$; $x_2 = 2 + \sqrt{3}$. Az x_1 nem megoldása a feladatnak, mert az ABC háromszög szögeire megadott feltételek miatt $b > a$, azaz $x > 1$, ugyanakkor $x_1 < 1$. Eredményünk tehát az, hogy $\frac{b}{a} = 2 + \sqrt{3}$ és emiatt $\frac{V_a}{V_b} = \frac{b}{a} = 2 + \sqrt{3}$.

b) Mivel a háromszög hegyesszögű, ezért mindhárom oldalához tartozó magassága a háromszög belsejében halad, jelöljük az a, b, c oldalakhoz tartozó magasságokat rendre m_a -val, m_b -vel és m_c -vel. Tekintsük a 2. ábrát, amelyen az m_a magasságot ábrázoltuk.



2. ábra

Ha a háromszöget megforgatjuk a BC oldal körül, akkor a keletkezett forgástest két, közös alaplapú kúp lesz, ahol a két kúp közös alaplapja egy m_a sugarú kör, a kúpok magassága az ábra jelöléseivel $BA_1 = x$, illetve $A_1C = a - x$. A két kúp térfogatának összege ezért

$$(5) \quad V_a = \frac{m_a^2 \cdot \pi \cdot x}{3} + \frac{m_a^2 \cdot \pi \cdot (a - x)}{3} = \frac{m_a^2 \cdot \pi \cdot a}{3}.$$

Hasonlóan kapjuk, hogy a b , illetve c oldal körüli forgatáskor keletkező két-két forgáskúp térfogata:

$$(6) \quad V_b = \frac{m_b^2 \cdot \pi \cdot b}{3},$$

illetve

$$(7) \quad V_c = \frac{m_c^2 \cdot \pi \cdot c}{3}.$$

A feladat feltétele szerint a V_a, V_b, V_c számok ebben a sorrendben egy számtani sorozat szomszédos tagjai, ezért $2V_b = V_a + V_c$, így (5)–(6)–(7) alapján

$$2 \frac{m_b^2 \cdot \pi \cdot b}{3} = \frac{m_a^2 \cdot \pi \cdot a}{3} + \frac{m_c^2 \cdot \pi \cdot c}{3}.$$

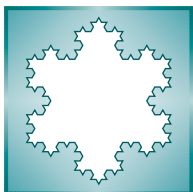
Ebből az egyszerűsítések után

$$(8) \quad 2m_b^2 \cdot b = m_a^2 \cdot a + m_c^2 \cdot c$$

következik. Az ABC háromszög T területének kétszeresére érvényes, hogy $2T = a \cdot m_a = b \cdot m_b = c \cdot m_c$, ezt figyelembe véve (8) átalakítható: $2 \cdot 2T \cdot m_b = 2T \cdot m_a + 2T \cdot m_c$, és az $m_a = \frac{2T}{a}$; $m_b = \frac{2T}{b}$; $m_c = \frac{2T}{c}$ egyenlőségeket alkalmazva $\frac{8T^2}{b} = \frac{4T^2}{a} + \frac{4T^2}{c}$, innen egyszerűsítéssel kapjuk, hogy $\frac{2}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c}$, ebből pedig átalakítás után $b = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{c}}$, tehát a b oldal hossza valóban harmonikus közepe az a és c oldalak hosszának. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Bíró Bálint

Eger



Matematika C gyakorlatok megoldása

C. 1833. Oldjuk meg az

$$\begin{aligned} a + c &= b, \\ a^3 - c &= b^2, \\ a + b &= c^3 \end{aligned}$$

egyenletekből álló egyenletrendszert, ha a, b, c természetes számok.

Javasolta: Bíró Bálint (Eger)

1. megoldás. Az egyenletrendszer első két egyenletének összeadásával $a + a^3 = b^2 + b$, a kapott egyenlet mindkét oldalához b -t adva

$$a + b + a^3 = b^2 + 2b.$$

A harmadik egyenlet szerint $a + b = c^3$, ezért

$$a^3 + c^3 = b^2 + 2b.$$

Alkalmazzuk az $a^3 + c^3 = (a + c)(a^2 - ac + c^2)$ azonosságot, ezzel az előző egyenletből $(a + c)(a^2 - ac + c^2) = b^2 + 2b$ adódik, ebből pedig

$$b(a^2 - ac + c^2) = b^2 + 2b. \quad (1)$$

Ha az (1) egyenletben $b = 0$, akkor a feltételek és $a + c = b$ miatt $a = 0$ és $c = 0$. Számolással ellenőrizhető, hogy az

$$a = 0, \quad b = 0, \quad c = 0$$

számhármass megoldása az egyenletrendszernek.

Ha $b \neq 0$, akkor oszthatunk vele, így (1)-ből az $a^2 - ac + c^2 = b + 2 = a + c + 2$, ebből pedig az $a^2 - a + c^2 - c - ac = 2$ egyenletet kapjuk.

Ekvivalens átalakítással $(a-1)^2 + (c-1)^2 + a + c - ac - 2 = 2$, illetve

$$(a-1)^2 + (c-1)^2 + a + c - ac = 4. \quad (2)$$

Az $a^2 - a + c^2 - c - ac = 2$ egyenletből az is következik, hogy $(a-c)^2 + ac = a + c + 2$, azaz $(a-c)^2 - 2 = a + c - ac$.

Ezt beírva a (2) egyenletbe

$$(a-1)^2 + (c-1)^2 + (a-c)^2 = 6. \quad (3)$$

Három négyzetszám összege csak úgy lehet 6, ha az egyik négyzetszám 4, a másik kettő 1, ezért három esetet kell megvizsgálnunk:

(i) $(a-1)^2 = 1, \quad (c-1)^2 = 1, \quad (a-c)^2 = 4,$

(ii) $(a-1)^2 = 1, \quad (c-1)^2 = 4, \quad (a-c)^2 = 1,$

(iii) $(a-1)^2 = 4, \quad (c-1)^2 = 1, \quad (a-c)^2 = 1.$

Az (i) esetben csak $a=0, c=2$ vagy $a=2, c=0$ lenne lehetséges, ellenkező esetben nem teljesül az $(a-c)^2 = 4$ egyenlőség.

Azonban sem $a=0, c=2$, sem pedig $a=2, c=0$ nem ad megoldást, mert az előbbi ellentmond az eredeti egyenletrendszer második, utóbbi a harmadik egyenletének.

Az (ii) csak úgy volna lehetséges, ha $a=0$ vagy $a=2$, illetve $c=3$ vagy $c=-1$. Az ezekből képezhető négy számpár közül nyilván nem felel meg az a kettő, amelyben $c=-1$, a másik kettő közül csak az $a=2, c=3$ felel meg az $(a-c)^2 = 1$ feltételnek. Ebből azonban $b=5$ következne, de az $a=2, b=5, c=3$ számhármassal nem felel meg az egyenletrendszer második és harmadik egyenletének.

Végül az (iii) eset első két egyenlete szerint $a=3$ vagy $a=-1$, illetve $c=0$ vagy $c=2$.

Az innen kapható négy számpár közül az $a=-1$ -et tartalmazó két pár a feltétel miatt nem ad megoldást. Az $a=3, c=0$ számpár sem megoldás, mert ellentmond az eredeti egyenletrendszer harmadik egyenletének.

Az $a=3, c=2$ számpárból $b=5$ adódik, és az $a=3, b=5, c=2$ számhármassal kielégíti mindhárom kiinduló egyenletet.

Minden esetet megvizsgáltunk és azt kaptuk, hogy az egyenletrendszer mindhárom egyenletét csak az

$$a=0, \quad b=0, \quad c=0; \quad a=3, \quad b=5, \quad c=2$$

számhármassal elégítik ki.

(A honlapon látható 1. megoldás)

2. megoldás. Kifejezzük a és b értékét c segítségével. Az első egyenletből $a=b-c$, ahonnan a harmadik egyenlet segítségével $b-c+b=c^3$, azaz $2b=c^3+c$, és ezért

$$b = \frac{c^3+c}{2}; \quad a = \frac{c^3-c}{2}. \quad (4)$$

A (4) kifejezéseket visszahelyettesítjük az egyenletrendszer második egyenletébe:

$$\left(\frac{c^3-c}{2}\right)^3 - c = \left(\frac{c^3+c}{2}\right)^2,$$

ahonnan a műveletek elvégzésével és rendezéssel

$$\frac{c^9 - 3c^7 + 3c^5 - c^3}{8} - c = \frac{c^6 + 2c^4 + c^2}{4},$$

ebből 8-cal való szorzással és nullára rendezéssel

$$c^9 - 3c^7 - 2c^6 + 3c^5 - 4c^4 - c^3 - 2c^2 - 8c = 0. \quad (5)$$

Behelyettesítéssel ellenőrizhető, hogy az (5) egyenletnek $c = 0$ és $c = 2$ megoldása, amiből polinomosztás segítségével

$$c(c-2)(c^7 + 2c^6 + c^5 + 3c^3 + 2c^2 + 3c + 4) = 0 \quad (6)$$

következik.

A (6) összefüggésben látható zárójeles kifejezés értéke legalább 4 bármely c természetes szám esetén, ezért nem lehet 0. Eszerint csakis $c = 0$ és $c = 2$ lehetséges. A kapott két számnak (4)-be való helyettesítésével adódik az egyenletrendszer két megoldása:

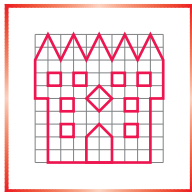
$$a = 0, \quad b = 0, \quad c = 0; \quad a = 2, \quad b = 5, \quad c = 2.$$

Az eredeti egyenletrendszer egyenleteibe helyettesítve ellenőrizhetjük, hogy ez a két számhármassal valóban megoldása az egyenletrendszernek.

Kallós Klára (Nyíregyháza, Szent Imre Kat. Gimn., Ált. Isk., 7. o. t.)

Megjegyzés. A helyes és teljes megoldások jelentős része a 2. megoldás valamilyen változatának megfelelő volt, a versenyzők közül néhányan az 1. megoldáshoz hasonló dolgot adtak be.

A feladatra 189 megoldás érkezett, ebből 35 dolgozat a maximális 5 pontot, 17 dolgozat 4, 12 dolgozat 3, 40 dolgozat 2 pontot, 64 dolgozat 1, végül 19 dolgozat 0 pontot kapott. Két beküldött munkára a javító a „nem versenyszerű” minősítést adta. A születési dátum, vagy a szülői nyilatkozat hiánya miatt 14 versenyző pontszáma nem számított bele a pontversenybe.



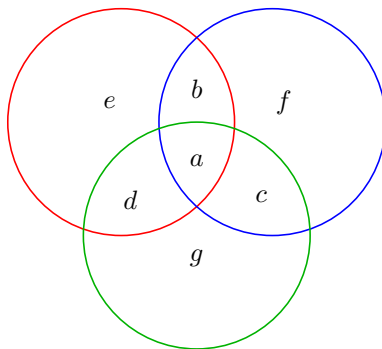
A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok ABACUS-szal közös pontverseny 9. osztályosoknak (869–873.)

K. 869. Öt nem feltétlenül különböző egész szám átlaga 69, mediánja 83, módusza 85, a számsor terjedelme 70. Melyik a második legkisebb szám az öt szám közül?

K. 870. Hogyan lehet 5 ugyanakkora négyzetet legfeljebb 5 egyenes vágással át-
darabolni egy nagy négyzetté? (A vágások során a darabokat nem helyezhetjük egymásra, és egy vágással egy alakzatot vághatunk ketté.) Adjunk meg egy megoldást.

K. 871. Hány pozitív egész szám van, amely 3-as számrendszerben felírva 4-jegyű, a 4-es számrendszerben felírva 3-jegyű?

K/C. 872. Írjuk be az ábra $a, b, \dots, g$ betűvel jelölt tartományaiba az 1, 2, 3, 4, 5, 6 és 7 számokat úgy, hogy a három körben a számok összege ugyanannyi, az a pedig négyzetszám legyen. Mennyi lehet ez az összeg? Keressük meg az összes megoldást.



K/C. 873. Nyuszi hat különböző üzletfelének írt levelet, borítékokat is megcímezett hozzájuk. Aztán az egész paksamétát Tigris kezébe nyomta, hogy tegye a borítékokba a leveleket és adja mindegyiket postára, mivel Tigris korábban többször hangoztatta, hogy legjobban a tigrisek tudnak leveleket postára adni. Azonban ez csak dicsekvés volt – Tigris igazából meglehetősen hadilábon áll a betűkkel –, így a hat levelet taláломra fogja beletenni a borítékokba. (Az azért sikerül majd neki, hogy minden borítékba pontosan egy levelet tegyen.) Hány olyan lehetőség van, amikor pontosan két borítékba kerül megfelelő levél?

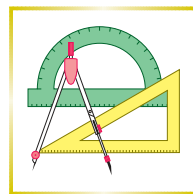


Beküldési határidő: 2025. november 10.

Elektronikus munkafüzet: <https://www.komal.hu/munkafuzet>



A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (872–873., 1868–1872.)



Feladatok 10. évfolyamig

K/C. 872. A szövegét lásd a **K** feladatoknál.

K/C. 873. A szövegét lásd a **K** feladatoknál.

Feladatok mindenkinek

C. 1868. Claire észrevette, hogy a lakhelye és kedvenc tava közötti kilométerben mért távolság a két hely közötti kerékpározáshoz szükséges, órákban mért idő négyzete. Egy nap Claire számára az út 4 órával tovább tartott, mivel a sebességét 3 km/h-val csökkentette. Határozzuk meg a két hely közötti távolságot.

kanadai versenyfeladat alapján

C. 1869. A 20 méter oldalú $ABCD$ négyzet A csúcsából induló fénysugár visszaverődik egymás után a BC , CD , DA oldalakon és ezután eléri az AB oldal N felezőpontját. Mekkora utat tesz meg az N pontig a fénysugár?

iráni versenyfeladat

C. 1870. Egy 10 fős pingpongversenyen minden versenyző egyszer játszik minden másik versenyzővel. A verseny egyik szünetében a szervezők megállapítják, hogy ha két versenyző ugyanannyi meccset játszott eddig, akkor nincs olyan versenyző, aki-vel mindketten játszottak volna. Feltéve, hogy a szünetig már több mint 5 mérkőzés lejátszott, van-e olyan versenyző, aki eddig pontosan két mérkőzést játszott?

Polygon feladat alapján (Szeged)

Feladatok 11. évfolyamtól

C. 1871. Az $x^2 - 6x - 4y + 9 = 0$ egyenletű parabola F fókuszpontján és egy tetszőleges P pontján átmenő egyenes a parabolát másodszor a Q pontban metszi. Határozzuk meg a PQ szakasz felezőpontjai mértani helyének egyenletét.

Javasolta: Bíró Bálint (Eger)

C. 1872. Peti felírta egy táblára az egész számokat egytől ötvenig. Egy lépésben kiválaszt két számot a táblán (a és b), letörli őket, és helyettük felírja a következő képlettel megadott számot:

$$a^2b - 6a^2 - 7ab + 42a + 6b - 30.$$

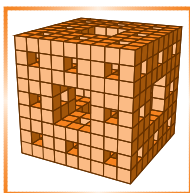
Ezt a lépést addig ismételteti, amíg csak egy szám marad a táblán. Milyen szám lehet ez?

Javasolta: Czett Máttyás (Zalaegerszeg)



Beküldési határidő: 2025. november 10.

Elektronikus munkafüzet: <https://www.komal.hu/munkafuzet>



A B pontversenyben kitűzött feladatok (5478–5485.)

B. 5478. Az ABC hegyesszögű háromszög súlypontja S , T pedig az A -ból induló magasság talppontja. A T kezdőpontú TS félegyenes a háromszög köré írt kört V -ben metszi. Mutassuk meg, hogy S harmadolja a TV szakaszt.

(3 pont)

Javasolta: Víg Viktor (Sándorfalva)

B. 5479. Legyen d egy pozitív egész szám. Mutassuk meg, hogy végtelen sok olyan pozitív egészekből álló (x, y) számpár van, melyre x és y számtani és mértani közepének különbsége d .

(3 pont)

Javasolta: Németh László (Fonyód)

B. 5480. Az ABC háromszögben $ACB \angle = 90^\circ$. Jelölje az AC befogó felezőpontját F , az AB átfogó felezőpontját pedig G . Igazoljuk, hogy FG Thalész-köre akkor és csak akkor érinti az ABC háromszögbe írt kört, ha $AC = 2BC$.

(4 pont)

Javasolta: *Sztranyák Attila* (Budapest)

B. 5481. Bizonyítsuk be, hogy bármely n pozitív egészre teljesül, hogy

$$(n!)^n \mid n^2 \cdot (n^2 - 1) \cdot (n^2 - 2) \cdot \dots \cdot (n + 2) \cdot (n + 1).$$

(4 pont)

Javasolta: *Hujter Bálint* (Budapest)

B. 5482. Kiválasztottunk páratlan sok egész számot. Egyet megváltoztattunk úgy, hogy a számok átlaga 1-gyel nőtt, de a szórásuk nem változott. Mutassuk meg, hogy az eredetileg kiválasztott számok átlaga egész.

(5 pont)

Berkó Erzsébet (Szolnok) javaslata alapján

B. 5483. Egy pakliban $2n$ darab kártya van n különböző színnel, mindegyik színből egy 1-es és egy 2-es. n játékos a következő kooperatív játékot játssza. Először összekeverik a $2n$ lapot, majd mindenki húz két lapot, amelyeket megmutatnak egymásnak. Ezután közösen eldöntik, hogy milyen sorrendben ülnek le körben, és azt is, hogy ki kezd. A játék folyamán a kör mentén óramutató járásával megegyező irányban sorban raknak le egy-egy lapot, de egy 2-es számú lapot csak akkor rakhatnak le, ha abból a színből az 1-es már korábban le lett rakva. Akkor nyernek, ha az összes lapot lerakják. Ha valaki a sorra kerülésekor nem tud rakni és még van lap a kezében, veszítenek. Mutassuk meg, hogy a játékosok bármilyen kártya kiosztás esetén tudnak nyerni.

(5 pont)

Javasolta: *Kocsis Anett és Imolay András* (Budapest)
a Dürer Verseny feladata alapján

B. 5484. Az ABC hegyesszögű háromszög magasságpontja M , BC oldalának felezőpontja pedig F . Az M pontból az A -ból induló belső szögfelezőre bocsátott merőleges talppontja legyen T . Az FT egyenes az AC oldalt D -ben metszi. Bizonyítsuk be, hogy a CDF háromszög körülírt köre áthalad az ABC háromszög C -ből húzott magasságának talppontján.

(6 pont)

Javasolta: *Bíró Bálint* (Eger)

B. 5485. Bizonyítandó, hogy $\frac{1}{2025}$ -höz tetszőlegesen közel van olyan racionális szám, amely nem állítható elő 2025 darab pozitív egész szám reciprokának összegeként.

(6 pont)

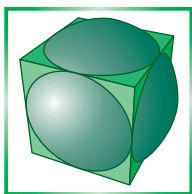
Javasolta: *Hujter Mihály* (Budapest)



Beküldési határidő: 2025. november 10.

Elektronikus munkafüzet: <https://www.komal.hu/munkafuzet>





Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (914–916.)

A. 914. A táblára felírjuk az $(1, 0)$ rendezett számpárt. Egy lépésben, ha a táblán az (a, b) számpár áll, akkor letöröljük, és felírjuk helyette vagy az $(a + b, b)$, vagy pedig a $(2a + b, a + b)$ számpárt. (Például két lépés után az $(1, 0)$, $(2, 1)$, $(3, 1)$ és $(5, 3)$ párok valamelyike állhat a táblán.) Mutassuk meg, hogy n lépés után a táblán lévő rendezett számpár pontosan 2^n -féle lehet.

Javasolta: *Imolay András* (Budapest)

A. 915. Adott egy kör és rajta az A , B és C pontok, melyek nem alkotnak egyenlő szárú háromszöget. A kör minden $P \notin \{A, B, C\}$ pontjára jelölje A_P , B_P és C_P rendre a kör P -beli érintőjének és az A , B és C -beli érintőknek metszéspontjait. Bizonyítsuk be, hogy pontosan három olyan $P \notin \{A, B, C\}$ pont van a körön, amelyre az A_P , B_P , C_P pontok léteznek, és az A_P -ből BC -re, B_P -ből CA -ra és C_P -ből AB -re állított merőlegesek egy pontban találkoznak. Továbbá mutassuk meg, hogy ez a három P pont egy szabályos háromszöget alkot.

Javasolta: *Gyenes Zoltán* (Budapest)

A. 916. Legyen $a \geq 3$ egész szám, és legyen $f(n) = a^n - 1$ minden n pozitív egészre. Jelölje $f^{(k)}$ az f függvény k -szoros iteráltját, tehát $f^{(1)}(n) = f(n)$, és $f^{(k+1)}(n) = f(f^{(k)}(n))$, ha $k \geq 1$.

a) Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges K pozitív egészhez létezik olyan M pozitív egész szám, hogy minden $1 \leq k \leq K$ egész esetén $f^{(k)}(M)$ pontosan akkor osztható M -mel, ha k osztható 2025-tel.

b) Létezik-e olyan N pozitív egész szám, amelyre minden k pozitív egész esetén $f^{(k)}(N)$ pontosan akkor osztható N -nel, ha k osztható 2025-tel?

Javasolta: *Varga Boldizsár* (Budapest)



Beküldési határidő: 2025. november 10.

Elektronikus munkafüzet: <https://www.komal.hu/munkafuzet>



Informatikából kitűzött feladatok (671–674.)



I. 671. Egy téglalap alakú terepasztalon egy robotjárművel kísérleteznek a diákok. A terepasztal $N \times M$ -es négyzetrácsra van felosztva, ahol minden rácsponthoz magasságát ismerjük. A robot az asztal első sorából, tetszőleges rácsponthól indulhat, de csak lefelé, valamint balról jobbra léphet egységnyit. A robot szerény képességű, legfeljebb 1 egységnyi szintkülönbségű szomszédos rácspontra tud lépni.

Készítsünk programot *i671* néven, amely megadja a robotjármű lehető leghosszabb útját.

A program standard bemenetének első sorában az asztal oldalainak hossza ($1 \leq N, M \leq 100$) van. A következő N sorban lévő M szám a rácsponthoz $H_{i,j}$ magasságát jelenti ($1 \leq H_{i,j} \leq 100$).

A programmal a standard kimenetre írjuk ki az első sorba a leghosszabb út hosszát, a második sorba az út kezdő (sor, oszlop) és befejező (sor, oszlop) pozícióját. Több azonos hosszúságú út esetén elegendő egyet megadni.

Példa bemenet	Kimenet
5 5	6
4 8 6 4 2	1 2 3 5
9 7 6 7 1	
7 5 7 6 5	
9 5 5 2 3	
4 2 4 5 6	

Beküldendő egy tömörített *i671.zip* állományban a program forráskódja és rövid dokumentációja, amely megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben fordítható.

(10 pont)

I. 672. Ebben a feladatban a hazai mezőgazdasági terület adatait vizsgáljuk 1950 és 2019 között.

- Nyissunk egy üres táblázatkezelő munkafüzetet. Töltsük be egy üres munkalapra az *A1*-es cellától kezdve az **UTF-8** kódolású, tabulátorokkal tagolt *mg1950-2019.txt* fájl tartalmát. A munkalap kapja az *mgadatok* nevet. Munkánkat mentsük *mgter* néven a táblázatkezelő alapértelmezett formátumában.
- Formázzuk meg az adatokat tartalmazó cellákat a minta és a leírás szerint.
 - Egyesítsük az *A1:G1* tartomány celláit;
 - szegélyezzük a munkalap adatokat vagy képleteket tartalmazó celláit;
 - a munkalap celláiban a betűtípus legyen Arial, a betűméret 11 pont;
 - az első sor betűi legyenek félkövér betűstílusúak;

- e. a második sor legyen kb. dupla magasságú az alapértelmezetthez képest, a betűstílus legyen félkövér, a cellák függőlegesen és vízszintesen középre igazítottak a minta szerint;
- f. az A:G tartomány oszlopainak szélessége legyen azonos.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Magyarország mezőgazdasági területe 1950 és 2019 között művelési ágak szerint [ezer hektár]							
2	Év	Szántó	Konyhakert	Gyümölcsös	Szőlő	Gyep	Mezőgazdasági terület	
3	1950	5 518,1	94,4	58,1	230,2	1 474,7		
4	1951	5 518,7	88,0	57,6	228,5	1 455,3		
5	1952	5 527,3	83,7	59,1	225,3	1 441,8		
6	1953	5 492,8	88,6	58,9	215,8	1 421,4		
7	1954	5 466,9	90,1	62,4	215,8	1 441,5		
8	1955	5 402,9	104,9	64,9	201,4	1 471,4		
9	1956	5 395,2	106,3	66,3	195,6	1 450,2		
10	1957	5 388,7	109,2	66,7	195,7	1 440,9		

3. Számítsuk ki a G3:G72 tartomány celláiban a mezőgazdasági területet.
4. Hozzuk létre a *valaszok* nevű munkalapot. Készítsük el a minta szerint az alábbi táblázatot.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	1	Melyik ágazat csökkent a legnagyobb arányban 1950 és 2019 között?						
2		ágazat:						
3	2	Melyik évben volt a legnagyobb a szántó csökkenése és mennyivel?						
4		év		érték				
5	3	Melyik évben volt a legnagyobb a szántó aránya a teljes mezőgazdasági területből, és mennyi volt a részaránya?						
6		év		arány:				
7	4	Melyik évben volt a legnagyobb a gyümölcsös területe?						
8		év						
9	5	Folyamatosan csökkent-e a vizsgált időszakban a mezőgazdasági terület?						
10								
11								

5. Számítsuk ki a 2. sor sárga cellájában az első kérdés válaszát.
6. Számítsuk ki a 4. sor sárga celláiban a második kérdés válaszait.
7. Számítsuk ki a 6. sor sárga celláiban a harmadik kérdés válaszait.

8. Számítsuk ki a 8. sor sárga cellájában a negyedik kérdés választát.
9. Számítsuk ki a 10. sor sárga cellájában az ötödik kérdés „Igen” vagy „Nem” választát.

Segédszámításokat az *mgadatok* munkalapon a *G* oszloptól jobbra, illetve a 71. sortól lefelé végezhetünk. A megoldásban saját függvény vagy makró nem használható.

Beküldendő egy tömörített *i672.zip* állományban a táblázatkezelő munkafüzet, illetve egy rövid dokumentáció, amelyben szerepel a megoldáskor alkalmazott táblázatkezelő neve, verziószáma.

Az adatok forrása: https://www.ksh.hu/stadat_files/mez/hu/mez0008.html

Letölthető fájl: *mg1950-2019.txt*

(10 pont)

I. 673. Ez a feladat az előző tanévben elkezdett prímekkel kapcsolatos sorozat (I. 633., I. 641. és I. 661.) negyedik része.

Additív prímeknek nevezzük az olyan prímszámok, amelyek számjegyei összege is prím. Például az 541579 additív prím, hiszen prím, és számjegyeinek összege 31, ami szintén prím.

Bölcshöldi–Dömötör-prímek a (tízes számrendszerben) azon prímszámok, amelyek minden számjegye prím (2, 3, 5 vagy 7), a számjegyek száma és összege is prím. Például a 33223 prímszám, számjegyeinek száma 5 és összegük 13.

Szimmetrikus prímeknek (a tízes számrendszerben) azokat a prímszámokat nevezzük, amelyek minden számjegye prím, számjegyeinek száma és számjegyeinek összege is prím, továbbá a szám középpontosan szimmetrikus a középső számjegyre. Például a 35753 prím, minden számjegye prím, számjegyeinek száma 5, azok összege 23, ezek is prímek és középpontosan szimmetrikus a középső számjegyre.

Háromrészes prímek a (tízes számrendszerben) azok a prímszámok, amelyeknél a számjegyek száma $3k$, ahol $k \geq 1$ egész, és három egyenlő hosszú részre osztva a számot, mindegyik rész is prím. Például a 295319 prímszám háromrészes prím, hiszen hatjegyű és részei: 29, 53 és 19 is prímek.

Négyrészes prímek a (tízes számrendszerben) azok a prímszámok, amelyeknél a számjegyek száma $4k$, ahol $k \geq 1$ egész, és négy egyenlő hosszú részre osztva a számot, mindegyik rész is prím. Például a 2557 prímszám négyrészes prím, hiszen négyjegyű, és részei: 2, 5, 5 és 7 is prímek.

1. Készítsünk egy táblázatkezelő munkafüzetben *primek* néven munkalapot és munkánkat mentsük *primek_megint* néven a táblázatkezelő program alapértelmezett formátumában.
2. Illesszük be az *A3* cellától az 1 000 000-nál nem nagyobb prímek listáját a *primek1000000ig.txt* fájlból. Az első két sorba oszlopfeliratokat készíthetünk a számításokhoz.
3. Válogassuk ki az öt prímcsoport 1 000 000 alatti prímek közé eső tagjait. A számításokat ezen a munkalapon végezzük.

4. Hozzunk létre egy *eredmények* nevű munkalapot, amelynek *A* oszlopát töltjük fel 1-től egész számokkal addig, amennyi a speciális prímszámok darabszámának maximuma. A következő oszlopokban határozzuk meg, minden prímszámtípusnál helykihagyás nélkül, növekvő sorrendben:
 - a. A *B* oszlopban az additív prímeket.
 - b. A *C* oszlopban a Bölcsföldi–Dömötör-prímeket.
 - c. A *D* oszlopban a szimmetrikus prímeket.
 - d. Az *E* oszlopban a talált háromrészes prímeket.
 - e. Végezetül az *F* oszlopba pedig a négyrészes prímek kerüljenek.
5. A munkalap adattartományát formázzuk a minta szerint!

	A	B	C	D	E	F
1	1	2	23	353	223	2237
2	2	3	223	373	227	2273
3	3	5	227	757	233	2333
4	4	7	337	32323	257	2357
5	5	11	353	33533	277	2377
6	6	23	373	35353	337	2557
7	7	29	557	35753	353	2753
8	8	41	577	75557	373	2777
9	9	43	733	77377	523	3253
10	10	47	757		557	3257
11	11	61	773		577	3323

6. Készítsük el az eredmények munkalapon az adott helyre a mintán látható táblázatot.

	G	H	I	J	K	L	M
1		Az egymilliónál kisebb prímek között					
2		típus	additív	Bölcsföldi–Dömötör	szimmetrikus	háromrészes	négyrészes
3		darab					
4		a legkisebb					
5		a legnagyobb					
6							

7. Számítsuk ki és jelenítsük meg a hiányzó adatokat.
8. Mindkét munkalapon cseréljük le oszloponként az első 99 sor utáni képleteket az értékükre.

Segédszámításokat a *prímek* munkalapon végezhetünk. A megoldásban saját függvényt vagy makró nem használható.

Beküldendő az *i673.zip* tömörtett állományban a munkafüzet az eredeti nevén *xlsb* formátumban (bináris munkafüzetként) és egy rövid dokumentáció, amelyben szerepel a kiválogatások módszere, a táblázatkezelő neve, verziószáma.

Letölthető fájl: *primek1000000iq.txt*

(10 pont)

I. 674. Egy falrészlet azonos méretű, de különböző tömegű téglákból épült fel az alábbi ábrának megfelelően. Az alsó sorban lévő téglák a földön fekszenek szorosan egymás mellett. A fölöttük lévő téglák az alatta lévő téglákon fekszenek, azokhoz képest egyharmad téglaszélességgel elcsúsztatva jobbra.

		6		5			
3		4		2			
5		2		5		8	

A téglákon lévő számok az adott téglátömegét mutatják. A legalsó sorban N darab téglát fekszik, a többi sor mindegyikében eggyel kevesebb, mint az alatta lévőben. Összesen K sorból áll a falrészlet. A fenti ábra esetén $N = 4$ és $K = 3$.

A téglák közül bármelyik kiemelhető és áthelyezhető, de három szabályt be kell tartani:

1. kiemeléskor az üresen maradt hely miatt a falrészlet nem omolhat le, tehát egyetlen másik téglát sem eshet vagy billenhet le;
2. áthelyezés után is egy egybefüggő falrészlet kell létrejöjjön, tehát a téglák továbbra is egymáshoz illeszkednek (a kiemelt téglát helyét leszámítva), a korábbi egyharmad téglaszélességgel elcsúsztatva;
3. az áthelyezett téglát olyan módon kell elhelyezni, hogy az biztosan fekszenjen vagy a földön, vagy az alatta lévő sor tégláján úgy, hogy ne billenjen le.

A fenti ábrán a felső sor bármelyik téglája kivehető és áthelyezhető például a többi sor jobb oldali végére vagy a felső sor fölé egy új sorként, ahol nem billen el. Hasonló módon kiemelhető minden sor utolsó téglája.

Az építész szeretné átrendezni a téglákat úgy, hogy ne forduljon elő, hogy nehezebb téglá fekszik egy vagy két másik, könnyebb téglán. Ehhez a fenti szabályok szerint áthelyezhet téglákat, de a végén vissza szeretné kapni a téglák eredeti elrendezését az eredeti helyen.

Készítsünk programot *i674* néven, amely javaslatot tesz a téglák szabályok szerinti áthelyezésére, hogy azok az építész kívánságának megfelelően helyezkedjenek el. Több megoldás lehetséges, elég egyet megadni, de törekedjünk a kevesebb áthelyezéssel járó megoldásra. A megoldások értékelése során az áthelyezések számát is figyelembe vesszük.

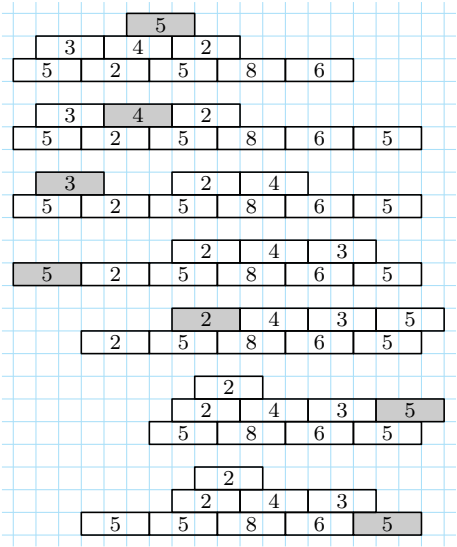
A program standard bemenetének első sorában az alsó sorban lévő téglák N száma ($3 \leq N \leq 10$) és a falrészlet magasságának K száma ($3 \leq K \leq N$) szerepel. A következő sorban egy-egy kettőskereszt ‘#’ jellel elválasztva a falrészlet soraiban lévő téglák tömege szerepel. A téglák számai és a ‘#’ jelek között egy szóköz az elválasztó.

A program a standard kimenet első sorába írja ki az áthelyezések Z számát, majd a következő sorokban az egyes áthelyezések utáni állapotát a falrészletnek. A Z számú sorba a bemenethez hasonlóan írjuk ki a falrészlet soraiban lévő téglák tömegét. A fal sorait ‘#’ jellel válasszuk el, a ‘#’ jel valamint a számok között egy-egy szóköz legyen, a bemenethez hasonlóan. Amennyiben a sor valamely részén üres hely van, azt a nulla számmal jelezzük.

Példa:

Bemenet:
4 3
6 5 # 3 4 2 # 5 2 5 8

Egy lehetséges kimenet
14
0 5 # 3 4 2 # 5 2 5 8 6
3 4 2 # 5 2 5 8 6 5
3 0 2 4 # 5 2 5 8 6 5
0 0 2 4 3 # 5 2 5 8 6 5
0 0 2 4 3 5 # 0 2 5 8 6 5
0 0 2 # 0 0 2 4 3 5 # 0 0 5 8 6 5
0 0 2 # 0 0 2 4 3 # 0 5 5 8 6 5
0 0 2 # 0 5 2 4 3 # 0 5 5 8 6
0 3 2 # 0 5 2 4 # 0 5 5 8 6
0 3 2 # 0 5 2 4 # 6 5 5 8
0 3 2 # 4 5 2 # 6 5 5 8
3 0 2 # 4 5 2 # 6 5 5 8
3 0 2 # 4 5 2 # 6 5 5 8
3 2 # 4 5 2 # 6 5 5 8



A példához tartozó ábra nem teljes, csak az első 7 áthelyezés utáni állapotot tartalmazza. A következő lépésben áthelyezendő téglát minden esetben szürkével jelöltük.

Beküldendő egy tömörített *i674.zip* állományban a program forráskódja és rövid dokumentációja, amely megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben fordítható.

(10 pont)



Beküldési határidő: 2025. november 17.

Elektronikus munkafüzet: <https://www.komal.hu/munkafuzet>



Két ezüst- és két bronzérem az 55. Nemzetközi Fizikai Diákolimpián (Párizs, 2025. július 18–24.)



A magyar csapat 2 ezüst- és 2 bronzéremmel végzett a Párizsban július 18. és 24. között megrendezett 55. Nemzetközi Fizikai Diákolimpián (IPhO-n)

A csapat és eredményeik:

Téti Miklós (Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium, 11. o. t.) *ezüstérem*, felkészítő tanára: *Schramek Anikó*;

Tóth Kolos Barnabás (Eötvös József Gimnázium, 11. o. t.) *ezüstérem*, felkészítő tanára: *Varga Balázs*;

Bencz Benedek (Baár-Madas Református Gimnázium, Általános Iskola és Diákotthon, 12. o. t.) *bronzérem*, felkészítő tanára: *Horváth Norbert*;

Elekes Dorottya (Budapest-Fasori Evangélikus Gimnázium, 12. o. t.) *bronzérem*, felkészítő tanára: *Izsa Éva*;

Erdélyi Dominik (Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium, 11. o. t.), felkészítő tanárai: *Nagy Piroska Mária* és *Schramek Anikó*.

Az olimpiára való készülés szokás szerint a budapesti (*Berke Martin*, *Csépányi István*, *Sarkadi Tamás*, *Szász Krisztián*, *Széchenyi Gábor*, *Tasnádi Tamás*, *Vankó Péter*, *Vigh Máté*), debreceni (*Bartáné Cserny Katalin*, *Csepregi Ákos*, *Egri Sándor*, *Hajdu Péter Béla*, *Nizsalóczki Enikő*, *Tófalusi Péter*), miskolci (*Zámborszky Ferenc*), pécsi (*Pálfalvi László*), szegedi (*Csányi Sándor*, *Sarlós Ferenc*) és székesfehérvári (*Orosz Tamás*) olimpiai szakkörökön kezdődött. A Kunfalvi-verseny – az elmúlt évekhez hasonlóan – február végén egy online formában megrendezett fordulóval kezdődött, amelyen bárki részt vehetett. Összesen harmincketten küldtek be dolgozatot, közülük tizenegy diák kapott meghívást a további fordulókra. A válogatás online felkészítéssel és négy villámversennyel folytatódott, majd a BME Fizikai Intézetében megrendezésre kerülő kétnapos döntővel zárult, ahol az elméleti feladatok mellett egy olimpiai stílusú mérési feladatot is meg kellett oldania a versenyzőknek. A felkészítések és a versenyek szervezésében a budapesti szakkörvezetőkön kívül *Barankai Norbert* is közreműködött.

A csapat tagjai részt vettek a Bulgáriában, Szófiában megrendezett Európai Fizikai Diákolimpián (EuPhO)², ezt követte a BME-n megtartott kétnapos csapatfelkészítés.

A csapat Sarkadi Tamás (BME Fizikai Intézet) és Széchenyi Gábor (ELTE Fizikai és Csillagászati Intézet) csapatvezetőkkel, valamint Tasnádi Tamás (BME Matematikai Intézet) megfigyelővel július 17-én, csütörtökön hajnalban repülővel indult a versenyre. A péntek délelőtti megnyitó után a diákok a Cité des Sciences et de l'Industrie interaktív tudományos technológiai élményparkban tehettek látogatást. Ezalatt a csapatvezetők megvitatták és lefordították a mérési feladatokat, amelyeket a diákok másnap, szombat délelőtt ismerhettek meg.

²Beszámoló lapunk 2025. szeptemberi számában

A verseny mérési fordulójában a diákok két feladatot kaptak, amelyek megoldására öt óra állt a rendelkezésükre. Az első feladatban mágnesek torziós rezgésének segítségével kellett meghatározniuk a Föld mágneses terének vízszintes komponensét. A feladat első részében a mágnesek erősségét kellett karakterizálni. A torziós szál rugalmas tulajdonságainak és a rajta függő rész tehetetlenségi nyomatékának meghatározása is külön feladat volt. A csapat számára a mérési feladat ismerős lehetett, hiszen hasonló mágneses kísérletet kellett elvégezniük a hazai válogatóversenyen is.

A második mérési feladatot a Mars bolygó sivatagja ihlette, ahol a kráterképződést, valamint egy marsjáró szonda kerekeinek gördülését kellett kísérletileg modellezni. A feladat első részében a diákok különböző tömegű golyókat ejtettek laza homokba, és vizsgálták, hogy az így keletkező kráter átmérője hogyan függ a becsapódás energiájától. A második részben homokágyban gördülő golyók energiadiSSIPÁCIÓJÁT mérték a versenyzők. A feladat nehézségét a mérések reprodukálhatósága jelentette, amit csak a kísérletek gondos előkészítésével lehetett elérni.

Másnap a kísérőtanárok megvitatták, majd lefordították az elméleti forduló feladatait. Ezalatt a diákok Versailles-ban tettek kirándulást. Az elméleti megméréstetis három feladatból tevődött össze, amelyre szintén öt óra állt rendelkezésre.

Az első feladat arra hívta fel a figyelmet, hogy a parányi hidrogén atomok hogyan lehetnek segítségünkre a galaxisunk szerkezetének vizsgálatakor. A feladat első részében a hidrogén atomok Bohr-féle modelljét kellett tanulmányozni, azon belül is a mag és az elektron spinjének kölcsönhatásából származó hiperfinom felhasadást. Ha a galaxisunk különböző pontjaiból érkező, a hidrogénatom hiperfinom átmenetéből származó 21 cm hullámhosszú sugárzást tanulmányozzuk, feltérképezhetjük a Tejútrendszer szerkezetét. A diákok a fenti elméleten alapuló asztrofizikai mérések adatait értékelték ki. A feladat érdekessége, valamint átgondolt felépítése miatt diákjaink ezt oldották meg a legsikeresebben.

A második elméleti feladatban egy különleges „örökmozgó” óra energiaforrását ismerhettük meg. Egy 18. századi órásmester olyan mechanikus órát készített, amely a légnyomás apró változásaiból nyeri az energiát a szerkezet működtetéséhez. A készülék fő alkotóeleme lényegében az ismert Torricelli-féle barométer. A feladat megoldásakor a fő kihívást a barométerhez kapcsolódó összetett mechanikai rendszer megértése, parametrizálása jelentette, amely a nemzetközi mezőnyt alaposan megosztotta.

A harmadik feladat a híres francia italkülönlegességet, a pezsgőt helyezte fókuszba. Megismerkedhettünk a buborékképződés fizikájával. A versenyzők modellt dolgoztak ki a szén-dioxid gáz kioldódásának leírására és tanulmányozták a növekvő buborékok mozgását a folyadékban. Vizsgálták az apró buborékok kipukkanásának dinamikáját a folyadék felületi feszültségének ismeretében. A feladatból megtudhattuk továbbá, hogy a különböző hőmérsékletű pezsgők felbontásakor eltérő színű köd hagyja el az üveg száját a dugó kiröptülése után. Csúpn érdekességképp: a bontatlan szobahőmérsékletű pezsgős üvegben nagyobb a nyomás, mint a behűtött palackban, hiszen a szén-dioxid oldhatósága magasabb hőmérsékleten kisebb. A felbontáskor bekövetkező adiabatikus tágulás során nagymértékben hűl a gázkeverék. Számolással kimutatható, hogy a nagyobb kezdeti nyomású, hűtetlen pezsgő (20 °C) bontásakor a kiáramló gázkeverék képes lehűlni annyira, hogy abban igen apró szilárd szén-dioxid szemcsék jelennek meg. A Rayleigh-szórás miatt ezek kék

ködöt képeznek a felbontás utáni pillanatban. Míg az alacsonyabb kezdeti nyomású behűtött pezsgő ($6\text{ }^{\circ}\text{C}$) felbontásakor a gázkeverék nem hűl ki annyira, hogy szilárd szárazjég szemcsék jelenjenek meg. Ugyanakkor a vízpárákicsapódás jelentős, amelynek cseppjei szürkésfehér ködöt képeznek.

A feladatokról általánosan elmondható, hogy a fizika sok területét lefedték, érdekes és változatos problémafelvetéseket tartalmaztak. Ugyanakkor jellemző tendencia, hogy a feladatsorok évről évre hosszabbakká válnak. A nemzetközi mezőny legjobbjai is a kitűzött feladatoknak csak mintegy 80%-át tudták megoldani. A fizikatudáson, problémamegoldó készségen túl nagy szükség van a hatékony időbeosztásra, valamint annak gyors felismerésére, hogy mely részproblémák megoldásával érhető el nagyobb siker.

A verseny utáni napokon a diákok meglátogatták a Musée d'Orsay kiállításait, ahol az igen pezsgő, 19. század végi francia képzőművészet nagy alkotásait csodálhatták meg. A csapatok részt vettek továbbá egy szajnai sétahajó-kiránduláson is. A kísérőtanárok a kulturális programokon túl részt vettek a diákok által elért pontszámok egyeztetésén, megvitatásán (moderáción). Elmondható, hogy a verseny rendezői körületekintő, igazságos pontozási sémát dolgoztak ki, biztosítva ezzel az objektív versenyeredményeket.

A versenyen 85 ország vett részt csapattal (ezen kívül vendégek és egyéni indulók is voltak). A ponthatárok alapján 37 aranyérmes (az elérhető 50 pontból 31,2 ponttól), 81 ezüstérmes (22,9 ponttól), 96 bronzérmes (15,3 ponttól) és 71 dicséretet (11,3 ponttól) osztottak ki. Az éremtáblázat élén az Egyesült Államok végzett 5 aranyéremmel, ezután Dél-Korea, Hong Kong és Kína következik 4-4 arany- és 1-1 ezüstéremmel. Az európai országok közül Románia 1 arany- és 4 ezüstéremmel, Szlovénia 1 arany-, 2 ezüst- és 1 bronzéremmel, Ukrajna 4 ezüst- és 1 bronzéremmel, valamint Észtország 3 ezüst- és 1 bronzéremmel volt a legeredményesebb. Az olimpia abszolút győztese *Hyeokjoon Lee* (Dél-Korea) lett, a legjobb mérésért járó különdíjat *Stan Ionut-Gabriel* (Románia), az elméleti feladatokban elért legjobb eredményért járó pedig *Tong Pengyu* (Kína) kapta.

A jó hangulatú díjkiosztó gálaesemény egyaránt helyet adott Alain Aspect Nobel-díjas professzor kvantumösszefonódásról szóló előadásának, valamint kamarazenei koncertnek, táncbemutatónak is. Másnap, július 25-én a magyar csapat sok élménnyel gazdagodva indult haza.

A jövő évi, 2026-os Nemzetközi Fizikai Diákolimpiát Dél-Amerikában, Kolumbiában rendezik meg július 4. és 12. között. A felkészüléssel és a csapatok kiválasztásával kapcsolatban minden információ megtalálható a fizika diákolimpiai szakkörök hivatalos honlapján: <https://ipho.physics.bme.hu/>.

Minden fizika iránt érdeklődő középiskolást bátorítunk a kitartó, eredményes felkészülésre, hiszen az IPHo nemcsak a világ legrangosabb fizikaversenye, hanem egy nagyszerű lehetőség arra is, hogy hasonló érdeklődésű fiatalok ismerkedjenek meg egymással egy különleges helyszínen.

Sarkadi Tamás, Széchenyi Gábor, Tasnádi Tamás



Ifjú Fizikusok Nemzetközi Versenye Versenyfelhívás és beszámoló



Ha szereted a fizikát, a kísérletezést, jól beszélsz angolul, és egy életre szóló élményre vágysz, akkor itt a helyed!

A Fizika Világ bajnokságnak is nevezett IYPT (Ifjú Fizikusok Nemzetközi Versenye, angolul International Young Physicists' Tournament) egy angol nyelvű, kísérleti fizikai csapatverseny, ahova a világ minden tájáról (közel 40 országból) érkeznek középiskolások, hogy összemérjék tudásukat. Az IYPT a XXI. század kihívásainak megfelelő készségeket vár el az indulóktól: nemcsak a fizikában kell jártasnak lenni, hanem az eredményeket prezentálni és megvédeni is tudni kell! A résztvevő diákok a versenyt megelőzően elvégzett fizikai méréseiket és kutatásaikat egy – angol nyelven előadott – tudományos prezentáció formájában mutatják be a rivális csapatoknak. Az IYPT verseny magyarországi első fordulójára (Hungarian Young Physicists' Tournament, HYPT) a <https://hypt.elte.hu> oldalon lehet regisztrálni, amelynek határideje:

2025. október 22. éjfél.

A jelentkező diákoknak a honlapról választott IYPT problémáról egy legfeljebb 8 oldalas magyar nyelvű dolgozatot kell beküldeniük. Beküldési határidő: 2025. december 20. Ezek alapján a legjobbak az ELTE TTK-án, 2025. január közepén megrendezésre kerülő szóbeli fordulón vehetnek részt. Az induló diákoknak itt az általuk beküldött dolgozat eredményeit élőben kell előadniuk 10 percben, majd kutatásukat megvédeniük.

A januári szóbeli fordulót követően a 10 legmagasabb pontszámot elérő diák az ELTE TTK Anyagfizikai Tanszékén végezheti a további kutatásait. A felkészülés során nyújtott teljesítmény alapján (legalább) 3 diák indulhat az osztrák AYPT versenyen, az 5 legjobb diák pedig bekerül a Zürichben megrendezésre kerülő 39. IYPT magyar csapatába.

További információkért látogass el a 2025. október 13-án tartandó nyílt napunkra. Jelentkezés, a feladatok szövege és sok hasznos tudnivaló a fenti weboldalon.

Néhány példa a 2026-ra kitűzött IYPT problémák közül:

3. Gyűrűs szökőkút: Amikor egy lapos fémgyűrű egy bizonyos magasságból egy víztartályba esik, egy szökőkutat hoz létre magasra lövelve a vizet a levegőbe. Hogyan függ a szökőkút maximális magassága a gyűrű paramétereitől?

13. Az éneklő vonalzó: Amikor egy vonalzót az egyik végén befognak és megütnek, az rezeg és jellegzetes hangot ad ki. Vizsgáld meg, hogyan függ a hang a releváns paraméterektől.

15. Mágneses Newton-bölcső: Egy új típusú Newton-bölcsőt úgy készíthetünk el, hogy taszító, nem érintkező mágneseket használunk az ütköző golyók helyett. Az új bölcso hasonlóan viselkedhet, mint egy hagyományos, de más érdekes viselkedést is mutathat. Magyarázd meg és tanulmányozd a mágneses bölcso mozgását!

Bronzérem a svédországi IYPT versenyen

2025. június 29. és július 6. között került megrendezésre 38. alkalommal az Ifjú Fizikusok Nemzetközi Versenye (IYPT – International Young Physicists’ Tournament, <https://www.iypt.org>). A megmérettetés 35 ország részvételével zajlott. A magyar csapat csodás versenyzéssel a 11. helyen végzett, amellyel bronzérmet érdemelt ki.

A felkészülési időszak során a hallgatók kutatásaik folytatása mellett a verseny körülményeit szimulálva próbálták el előadásait. A saját kutatási eredmények prezentálása mellett a többi ország eredményeinek opponálása és értékelése (review) is a verseny része. Az ELTE TTK IYPT laborja az év folyamán megtelt a kísérletekhez és mérésekhez szükséges eszközökkel. Ezen komplex alkotói munka során a diákok a fizikáról sokat tanulva megismerték a valódi kutatómunka örömeit és nehézségeit is. A felkészülés fontos pillanata az edzőtábor, ahol a kutatói munkát és előadások gyakorlását közösségi programok és játékok váltották egy idilli balatoni környezetben.

Lund városa nagyon nyugodt, rendezett és modern. Ideális helyszín volt az IYPT versenyre. A verseny mezőnye nagyon kiegyensúlyozott, emellett a sorsolás alapján nagyon nehéz helyzetbe kerültünk, hiszen mind az 5 fizikacsatánkban volt nagyon erős ellenfél. Hatalmas eredmény, hogy ezek közül legyőztük Koreát és Thaiföldet. Természetesen a verseny nem csak a fizikáról szól. A kirándulások alkalmával Lund és Malmö városát jártuk körbe, valamint meglátogattunk egy igazi viking falut és még a tengerben is fürödtünk. További információkért látogasd meg, és kövesd közösségi oldalainkat, ahol a csapat részletes élménybeszámolóját, képeit és eseményeit találod, amelyek többet mondanak minden szónál!

A magyar csapat tagjai voltak:

Bartók Blanka (Budapesti Német Iskola – Thomas Mann Gimnázium, 12. o. t.);

Csapó András (Baár-Madas Református Gimnázium, Általános Iskola és Kollégium, 10. o. t.);

Sipeki Stella (Budapesti Német Iskola – Thomas Mann Gimnázium, 11. o. t.);

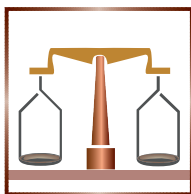
Sohajda László Márton (Budapesti Balassi Bálint Nyolcévfolyamos Gimnázium, 12. o. t.);

Sztrányai Milán (Budapesti Balassi Bálint Nyolcévfolyamos Gimnázium, 12. o. t.).

A versenyzők felkészítése az ELTE Anyagfizikai Tanszékén folyt egyetemi hallgatók, oktatók és középiskolai tanárok vezetésével: *Hörmöstre Mihály* (Budapesti Német Iskola, ELTE), *Ispánovity Péter* (ELTE), *Jenei Péter* (ELTE), *Széchenyi Gábor* (ELTE), *Vincze Miklós* (ELTE), *Jéhn Zoltán*, *Tóth Kristóf* (Czuczor Gergely Bencés Gimnázium, ELTE), *Kosztjó Péter* (Semilab), *Sarkadi Tamás* (BME).

A sok nevetéssel és kemény munkával töltött év után most indul a felkészülés a 2026-os, zürichi megmérettetésre.

az HYPT szervezői csapata



Mérési feladatok megoldása

M. 439. Mérjük meg egy AA-s ceruzaelem üresjárási feszültségét és belső ellenállását! Hogyan változnak ezek az értékek az elem merülése során?

(6 pont)

Közli: Széchenyi Gábor, Budapest

Megoldás. A mérést egy AA méretű cink-szén elemen végeztem. A méréshez a telepen kívül egy multimétert, ismert nagyságú ellenállásokat és vezetékeket használtam.

Amennyiben a telep nincs terhelve, az U_0 kapocsfeszültség megegyezik az üresjárási feszültséggel.³ Terhelés hatására a kapocsfeszültség csökken, mivel a meginduló áram miatt a belső ellenálláson is feszültség esik. Különböző terhelő ellenállásokkal mért feszültségértékekből a belső ellenállás meghatározható. Az Ohm-törvény alapján az áramerősség:

$$(1) \quad I = \frac{U_k}{R_k},$$

ahol U_k a mért kapocsfeszültség és R_k a telepre kapcsolt (külső) ellenállás. Ennek ismeretében már a belső ellenállás is meghatározható:

$$(2) \quad R_b = \frac{U_0 - U_k}{I} = \frac{U_0 - U_k}{U_k} R_k.$$

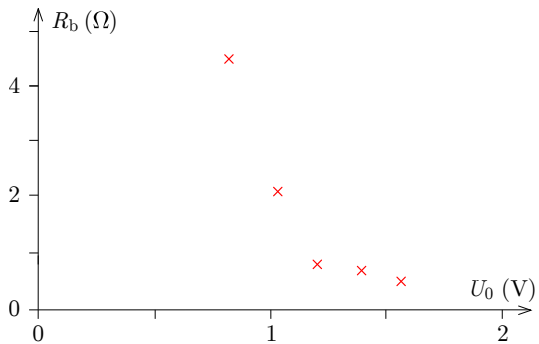
A mérés során megmértem a telep üresjárási feszültségét (terheletlen kapocsfeszültségét), majd három különböző terhelő ellenállást rákapcsolva a kapocsfeszültségeket. Ezután megvártam, hogy a telep üresjárási feszültsége a használat miatt körülbelül 0,2 V-tal csökkenjen, és megismételtem a mérést. Ezt még háromszor megtettem, majd a mért és a (2) összefüggés alapján számított eredményeket *táblázatba* foglaltam.

$R_k (\Omega)$	6	8	10				
$U_0 (\text{V})$	$U_{k1} (\text{V})$	$U_{k2} (\text{V})$	$U_{k3} (\text{V})$	$R_{b1} (\Omega)$	$R_{b2} (\Omega)$	$R_{b3} (\Omega)$	$\overline{R_b} (\Omega)$
1,56	1,43	1,47	1,49	0,55	0,48	0,47	0,50
1,39	1,25	1,28	1,32	0,67	0,86	0,53	0,69
1,20	1,06	1,06	1,11	0,70	0,80	0,91	0,80
1,03	0,78	0,82	0,84	1,92	2,05	2,26	2,08
0,82	0,46	0,55	0,56	4,70	3,93	4,60	4,41

³A feszültségmérőként használt multiméter belső ellenállása legalább 1 M Ω , azaz több nagyságrenddel nagyobb, mint a telep belső ellenállása, így a mérés során a telep valóban terheletlennek tekinthető.

A mérések hibája a szórás alapján 6% és 18% között változik. Hibát okozhat, hogy a telep egy-egy mérés közben is merül⁴, valamint az érintkezők oxidálódnak.

Megállapítható, hogy a telep használata, merülése során az üresjáratú feszültség csökken, míg a belső ellenállás megnő. A belső ellenállás a telep teljes lemerülésekor (az üresjáratú feszültség lecsökkenésekor) nagyon meredeken emelkedik (1. ábra).



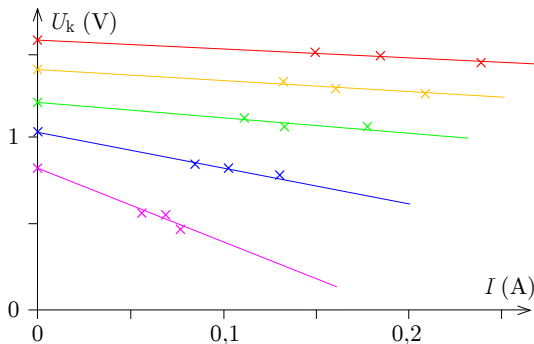
1. ábra

Szőke Bottyán (Szeged, SZTE Báthory I. Gyak. Gimn. és Ált. Isk., 10. évf.)

Megjegyzés. A (2) képlet használatánál és az átlagolásnál pontosabb és tanulságosabb a kapocsfeszültséget az (1) összefüggés alapján kiszámított áram függvényében ábrázolni, és a belső ellenállást a mérési pontokra illesztett egyenes meredekségéből meghatározni (2. ábra). Mivel

$$U_k = U_0 - R_b I,$$

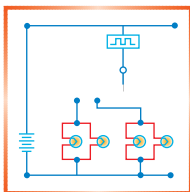
az illesztett egyenes meredekségének abszolút értéke adja a belső ellenállást. Ezáltal nemcsak az átlagolást és a szórásszámítást váltjuk ki (a belső ellenállás hibája az illesztett egyenes meredekségének hibája), hanem azt is vizsgálhatjuk, mennyire teljesül a (2) összefüggés, azaz a belső ellenállás a terheléstől valóban független-e, és így a mérési pontok – hibahatáron belül – valóban egy egyenesre illeszkednek-e.



2. ábra

10 dolgozat érkezett. Helyes 1 megoldás. Kicsit hiányos (5 pont) 3, hiányos (3–4 pont) 4, hibás 2 dolgozat.

⁴Ennek a hibának a csökkentése érdekében érdemes lett volna először a nagyobb terhelő ellenállással mérni (kisebb áram, lassabb merülés), és csak azután csökkenteni a terhelő ellenállás értékét (növelni az áramot).



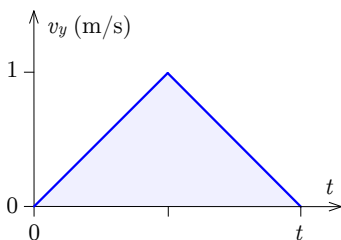
Fizika gyakorlatok megoldása

G. 881. Egy hosszú futószalag 2 m széles és 0,5 m/s nagyságú, állandó sebességgel mozog. Egy távirányításos játékautó úgy jut el a futószalag egyik szélétől a másikig, hogy a futószalaghoz képest nyugalmi helyzetből indul, a futószalaghoz képest mindig a szalagra merőleges irányban mozog, egyenletesen gyorsul a futószalag közepéig, ahol a szalaghoz képest 1 m/s sebességet ér el, majd ugyanolyan módon egyenletesen lassul, és végül a szalaghoz képest nullára csökken a sebessége.

a) A futószalag mennyivel viszi előbbre a kisautót az átkelése közben?

b) Rajzoljuk meg vázlatosan a kisautó pályáját a talajhoz képest!

(4 pont)



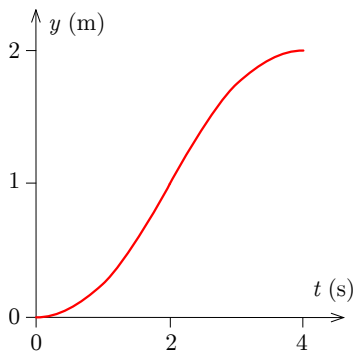
1. ábra

Megoldás. a) A futószalag állandó, $v = 0,5$ m/s nagyságú sebességgel mozog x irányba. A kisautó a futószalaghoz képest arra merőlegesen mozog y irányba, sebességének időfüggése az 1. ábrán látható.

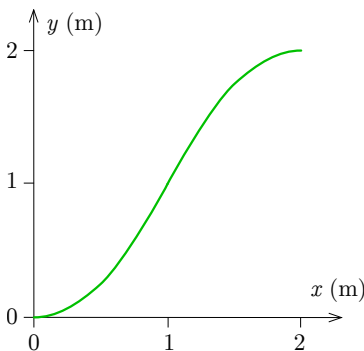
A kisautó által (a futószalaghoz képest) megtett út a sebesség-idő grafikonon a görbe alatti terület, amely megegyezik a szalag szélességével. Ebből a mozgás teljes ideje $t = \frac{2d}{v_{\max}} = \frac{2 \cdot 2 \text{ m}}{1 \text{ m/s}} = 4 \text{ s}$.

Ezalatt a szalag $s = vt = 2$ m utat tesz meg, ennyivel viszi előrébb a kisautót.

b) A kisautó a szalaghoz képest egyenletesen gyorsuló, majd egyenletesen lassuló mozgást végez. A szalaghoz viszonyított elmozdulása az idő függvényében a 2. ábrán látható: két egymásba fonódó parabolaív. Mivel a szalag egyenletesen mozog, a



2. ábra



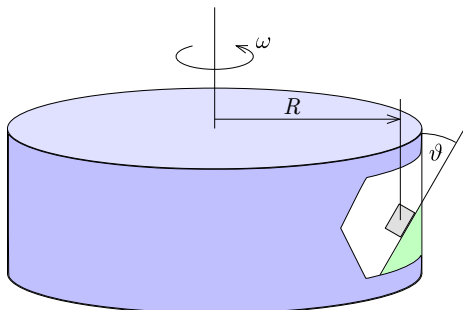
3. ábra

kisautó x irányú elmozdulása egyenesen arányos az idővel, így a pályát megadó grafikon is ugyanígy néz ki (3. ábra).

Csonka Áron (Budapest, Piarista Gimnázium, 10. évf.)

41 dolgozat érkezett. Helyes 24 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 6, hiányos (2 pont) 11 dolgozat.

G. 888. Egy vidámparkban egy hatalmas, forgó henger belsejében a henger palástjánál elhelyezett ferde felülethez tapadnak az emberek. A henger sugara $R = 5$ m, a tapadási súrlódási együttható $\mu = 0,25$, a ferde felület az ábrán látható módon $\vartheta = 30^\circ$ -os szöget zár be a függőlegessel.



a) Legalább és legfeljebb mennyi lehet a henger szögsebessége, hogy az emberek se lefelé, se felfelé ne csússzanak?

b) Mekkora lehet a súrlódási együttható, hogy akármilyen kicsiny szögsebesség-nél se csússzanak lefelé az emberek?

c) Mekkora lehet a súrlódási együttható, hogy akármilyen nagy szögsebesség esetén se csússzanak felfelé az emberek?

(4 pont)

I. megoldás. Térjünk át a megszokott, vízszintessel bezárt α szögre, amely így $\alpha = 90^\circ - \vartheta = 60^\circ$. A mozgást a hengerrel együtt forgó vonatkoztatási rendszerben vizsgáljuk: ebben a rendszerben az emberekre ható nehézségi erőn, nyomóerőn és súrlódási erőn kívül a forgásból származó $F_{cf} = m\omega^2 R$ centrifugális erőt is figyelembe kell venni (1. ábra).

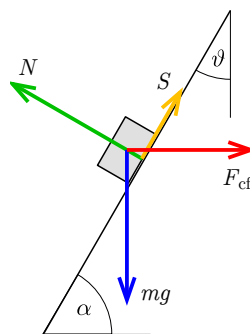
A lejtőre merőleges erők egyensúlya alapján:

$$N = mg \cos \alpha + m\omega^2 R \sin \alpha,$$

és ebből a súrlódási erő nagysága a határesetekben:

$$S = \pm \mu N = \pm \mu m(g \cos \alpha + \omega^2 R \sin \alpha).$$

A $\pm$ jel arra utal, hogy a minimális és maximális szögsebességnél (ahol a test éppen nem csúszik le, illetve éppen nem csúszik meg felfelé) a súrlódási erő iránya ellentétes.



1. ábra

a) A minimális szögsebesség esetében a súrlódási erő a lecsúszást akadályozza meg, felfelé mutat, így a lejtővel párhuzamos erőegyensúly:

$$mg \sin \alpha = m\omega^2 R \cos \alpha + \mu m(g \cos \alpha + \omega^2 R \sin \alpha),$$

amiből

$$\omega_{\min} = \sqrt{\frac{g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}{R(\cos \alpha + \mu \sin \alpha)}} = 1,42 \text{ s}^{-1}.$$

A felfelé megcsúszás megakadályozásához a súrlódási erő lefelé mutat, így a lejtő-irányú erőegyensúly ekkor:

$$mg \sin \alpha + \mu m(g \cos \alpha + \omega^2 R \sin \alpha) = m\omega^2 R \cos \alpha,$$

amiből

$$\omega_{\max} = \sqrt{\frac{g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}{R(\cos \alpha - \mu \sin \alpha)}} = 2,62 \text{ s}^{-1}.$$

b) Az álló hengerben nem hat a centrifugális erő, a súrlódási erőnek a nehézségi erő lejtővel párhuzamos komponensével kell egyensúlyt tartania:

$$\mu mg \cos \alpha = mg \sin \alpha,$$

amiből

$$\mu_{\min, \omega=0} = \tan \alpha = \sqrt{3} = 1,73.$$

c) A nagyon nagy szögsebességek esetében a súrlódási erő lefelé hat, az a) rész második esetéből indulhatunk ki. Most az erőegyenletből a súrlódási együtthatót fejezzük ki, és felhasználjuk, hogy a nehézségi erő elhanyagolható a centrifugális erő mellett:

$$\mu_{\min, \omega \rightarrow \infty} = \frac{\omega^2 R \cos \alpha - g \sin \alpha}{\omega^2 R \sin \alpha + g \cos \alpha} \approx \frac{\omega^2 R \cos \alpha}{\omega^2 R \sin \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0,58.$$

Sógor-Jász Soma (Szegedi Radnóti M. Kísérleti Gimn., 9. évf.)

II. megoldás. A lejtőre merőleges és a lejtővel párhuzamos komponensekre bontásnál egyszerűbben és szemléletesebben jutunk eredményre a *súrlódási határszög* használatával. Egy test akkor nem csúszik meg, ha a nyomóerő és a tapadó súrlódási erő eredője egyensúlyt tud tartani a testre ható többi erő eredőjével. Mivel $S \leq \mu N$, a két erő eredője legfeljebb

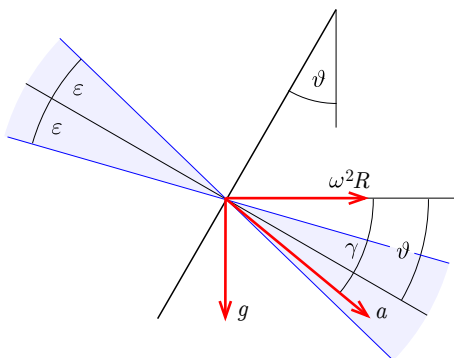
$$\varepsilon = \operatorname{arctg} \frac{S_{\max}}{N} = \operatorname{arctg} \mu$$

szöget zárhat be a felület normálisával (a felületre merőleges iránnyal).

Esetünkben a testre a nyomóerőn és a súrlódási erőn kívül csak a nehézségi erő és a forgó rendszerben fellépő centrifugális erő hat. Mindkét erő arányos a

test tömegével, így a két erő eredőjének irányát a függőlegesen lefelé mutató g és a vízszintesen, sugárirányban kifelé mutató $a_{\text{cf}} = \omega^2 R$ gyorsulásvektorok a eredőjének iránya határozza meg.

A feladatunk esetében ez azt jelenti, hogy a két gyorsulásvektor eredője a vízszintessel $\vartheta - \varepsilon \leq \gamma \leq \vartheta + \varepsilon$ szöveget zárhat be (2. ábra).



2. ábra

Az ábráról az is látszik, hogy $\operatorname{ctg} \gamma = \omega^2 \frac{R}{g}$. Ezután az egyes kérdésekre a válaszok:

a) A súrlódási együttható $\mu = 0,25$, ebből $\varepsilon = \arctg \mu \approx 14^\circ$, $\vartheta - \varepsilon \approx 16^\circ$, $\vartheta + \varepsilon \approx 44^\circ$. A szögsebesség-tartományt keressük:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{R} \operatorname{ctg} \gamma},$$

ahol $\vartheta - \varepsilon \leq \gamma \leq \vartheta + \varepsilon$. A minimális szögsebességhez a maximális γ szög tartozik (és fordítva), így:

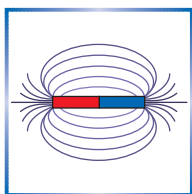
$$\omega_{\min} = \sqrt{\frac{g}{R} \operatorname{ctg}(\vartheta + \varepsilon)} \approx 1,42 \text{ s}^{-1},$$

$$\omega_{\max} = \sqrt{\frac{g}{R} \operatorname{ctg}(\vartheta - \varepsilon)} \approx 2,62 \text{ s}^{-1}.$$

b) $\omega = 0$ esetben az eredő gyorsulás függőleges (csak a nehézségi erő hat), így teljesülnie kell a $\vartheta + \varepsilon \geq 90^\circ$ egyenlőtlenségnek. Ebből $\varepsilon \geq 60^\circ$ és így a szükséges súrlódási együttható: $\mu \geq \operatorname{tg} 60^\circ \approx 1,73$.

c) Nagyon nagy szögsebesség esetében az eredő gyorsulás közel vízszintes, így az $\varepsilon \geq \vartheta$ egyenlőtlenségnek kell teljesülnie, amiből $\varepsilon \geq 30^\circ$ és így $\mu \geq \operatorname{tg} 30^\circ \approx 0,58$ súrlódási együttható szükséges.

26 dolgozat érkezett. Helyes 16 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 2, hiányos (1–2 pont) 6, hibás 2 dolgozat.

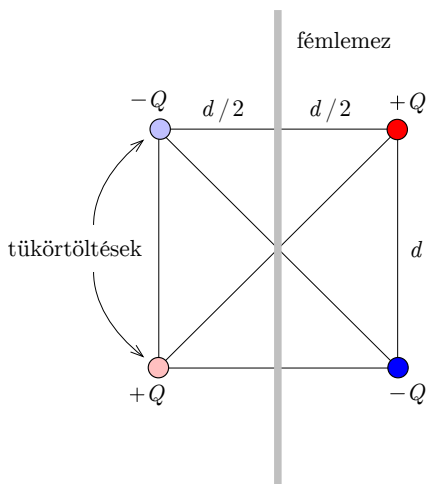


Fizika feladatok megoldása

P. 5632. Egy nagy méretű fémlemez egyik oldalán egy Q és egy $-Q$ töltésű, pontszerűnek tekinthető golyócska van, egymástól d , a lemeztől $d/2$ távolságra. Mekkora munkával tudjuk a töltéseket

- a lemez síkjával párhuzamosan mozgatva egymástól nagyon messzire eltávolítani,
 - a lemezre merőlegesen mozgatva a lemeztől nagyon messzire (azonos távolságra) elmozdítani,
 - a lemeztől és egymástól is nagyon messzire vinni?
- (5 pont)

Közli: Cserti József, Budapest



1. ábra

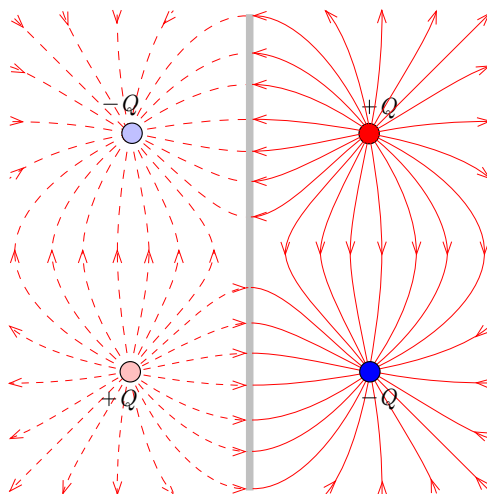
resét adják, hiszen a valóságban csak a fémlemez egyik oldalán van térerősség (ahol a valódi töltések vannak), a lemez túloldalán nincsen. (Ott a térerősség nulla, és így elektrosztatikus energia sincsen.)

Az eredeti elrendezés energiája (négy d távolságra lévő, ellentétes előjelű szomszéd és két $\sqrt{2}d$ távolságra lévő, azonos előjelű átlós pár, az $\frac{1}{2}$ -es szorzót is figyelembe véve):

$$\mathcal{E}_0 = \frac{1}{2} \cdot kQ^2 \left(\frac{-4}{d} + \frac{2}{\sqrt{2}d} \right) = \frac{kQ^2}{d} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 2 \right).$$

Megoldás. A fémlemezen az odahelyezett töltések hatására kialakuló bonyolult töltéselosztást helyettesíthetjük a fémlemez túloldalán szimmetrikusan elhelyezett ellentétes előjelű töltésekkel, úgynevezett *tükörtöltésekkel*. Az eredeti elrendezés az 1. ábrán látható, de ehhez hasonlóan elkészíthetjük a három elmozdított elrendezés megfelelőjét is.

Az így átalakított töltéselrendezés teljes elektrosztatikus energiáját kiszámíthatjuk az egyes töltések között páronként meghatározott Coulomb-energiák összegeként – a kezdeti állapotban és a három végállapotban is. Azonban az így kiszámított energiák az erővonalkép szimmetriája miatt (2. ábra) a valóságos energiáknak pontosan a kétszerese.



2. ábra

Az *a*) és *b*) esetben az energia (két d távolságra lévő, ellentétes előjelű pár):

$$\mathcal{E}_a = \mathcal{E}_b = \frac{1}{2} \cdot kQ^2 \left(\frac{-2}{d} \right) = \frac{-kQ^2}{d},$$

a *c*) esetben pedig (minden töltés nagyon messze van egymástól):

$$\mathcal{E}_c = 0.$$

A töltések eltávolítása közben végzett munka mindhárom esetben az elektrosztatikus energia megváltozását (növelését) fedezi:

$$W_a = W_b = \mathcal{E}_a - \mathcal{E}_0 = \mathcal{E}_b - \mathcal{E}_0 = \frac{kQ^2}{d} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right),$$

$$W_c = \mathcal{E}_c - \mathcal{E}_0 = -\mathcal{E}_0 = \frac{kQ^2}{d} \left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

Vértesi Janka (Debreceni Ady E. Gimn., 11. évf.) dolgozata alapján

6 dolgozat érkezett. Helyes megoldás nem volt. Kicsit hiányos (4 pont) 4, hiányos (2–3 pont) 2 dolgozat.

P. 5652. Egy H magasságú toronyból α szög alatt felfelé eldobunk egy követ. A becsapódás előtt a kő sebességvektora β szöget zár be a vízszintessel. A toronytól milyen messze csapódott be a kő? A közegellenállást hanyagoljuk el.

(4 pont)

KVANT feladat

Megoldás. Jelölje a kő sebességének (állandó) vízszintes komponensét v_x . A becsapódás és a torony keresett távolsága d , a repülési idő t . A nulla szintet válasszuk

a torony aljánál, függőleges irányban vegyük a lefele irányt pozitívnak, valamint használjuk az eldobás pillanatához a 0 és a becsapódás pillanatánál az 1 indexet.

Az eldobás utáni pillanatban a függőleges sebesség $v_{y0} = -v_x \operatorname{tg} \alpha$, a becsapódáskor $v_{y1} = v_x \operatorname{tg} \beta$, a függőleges gyorsulás g , ebből a repülési idő:

$$(1) \quad t = \frac{v_x(\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \alpha)}{g}.$$

Írjuk fel az energiamegmaradást:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv_0^2 + mgH &= \frac{1}{2}mv_1^2, \\ v_x^2(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) + 2gH &= v_x^2(1 + \operatorname{tg}^2 \beta), \\ 2gH &= v_x^2(\operatorname{tg}^2 \beta - \operatorname{tg}^2 \alpha), \\ 2H &= v_x \frac{v_x(\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \alpha)}{g}(\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha). \end{aligned}$$

(1) behelyettesítésével és $d = v_x t$ felhasználásával ebből a keresett távolság:

$$d = \frac{2H}{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha}.$$

Gyenes Károly (Kecskeméti Bányai Júlia Gimn., 11. évf.)

Megjegyzések. 1. A megoldásunk alapján:

$$v_x = \sqrt{\frac{2gH}{\operatorname{tg}^2 \beta - \operatorname{tg}^2 \alpha}},$$

és ebből a mozgáshoz szükséges kezdősebesség:

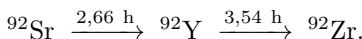
$$v_0 = \frac{v_x}{\cos \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha} \sqrt{\frac{2gH}{\operatorname{tg}^2 \beta - \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \sqrt{\frac{2gH}{\operatorname{tg}^2 \beta \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}}.$$

2. Ha $H > 0$ (azaz valóban egy toronyból és nem egy gödörből dobtuk el a követ), akkor csak $\beta > \alpha$ esetben kapunk pozitív távolságot. Ez érthető, hiszen amikor a kő már lefelé haladva eléri a H magasságot, akkor vízszintessel bezárt szöge éppen α , és ezután egyre meredekebb szögben esik, tehát valóban $\beta > \alpha$.

$\beta = \alpha$ estében $d \rightarrow \infty$, ehhez azonban $v_0 \rightarrow \infty$ kezdősebesség kellene. Ez is érthető: nagyon nagy távolság esetében H elhanyagolható a pálya magasságához képest, a mozgás olyan, mintha a talajról dobnánk el a követ, amikor is valóban $\beta = \alpha$.

33 dolgozat érkezett. Helyes 17 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 5, hiányos (1–2 pont) 9, hibás 2 dolgozat.

P. 5659. Maghasadási reakciókban gyakran keletkezik ^{92}Sr izotóp, amely két egymást követő β -bomlással a stabil ^{92}Zr -ra bomlik:



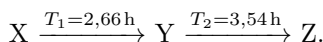
Egy adag vegytiszta ^{92}Sr preparátum elkészítése után mennyi idővel lesz a keletkező ^{92}Y mennyisége a legnagyobb?

Útmutatás: Próbálhatjuk az egyenleteket egyetlen radioaktív bomlási egyenletre visszavezetni. Ötletet adhat a következő kétrészes cikk: *Vigh Máté: Összetett rezgések I–II.* (<https://www.komal.hu/cikkek/cikklista.h.shtml>)

(5 pont)

Közli: *Vigh Máté*, Herceghalom

I. megoldás. Jelöljük a három izotópot X (^{92}Sr), Y (^{92}Y) és Z (^{92}Zr) betűkkel, a magjaik (időben változó) számát pedig jelölje x , y és z .



X mennyisége a bomlási törvény alapján:

$$x = x_0 e^{-\lambda_1 t},$$

ahol $\lambda_1 = \frac{\ln 2}{T_1}$. Az Y mag egyrészt X bomlásával keletkezik, másrészt maga is elbomlik. Ez alapján:

$$(1) \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{dx}{dt} - \lambda_2 y = x_0 \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} - \lambda_2 y,$$

ahol $\lambda_2 = \frac{\ln 2}{T_2}$. Feltételezzük, hogy y felírható

$$y = c_1 e^{-\lambda_2 t} + c_2 e^{-\lambda_3 t}$$

alakban. Ezt behelyettesítve az (1) egyenletbe:

$$\frac{dy}{dt} = -c_1 \lambda_2 e^{-\lambda_2 t} - c_2 \lambda_3 e^{-\lambda_3 t} = x_0 \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} - c_1 \lambda_2 e^{-\lambda_2 t} - c_2 \lambda_2 e^{-\lambda_3 t},$$

$$-c_2 \lambda_3 e^{-\lambda_3 t} = x_0 \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} - c_2 \lambda_2 e^{-\lambda_3 t},$$

$$(\lambda_2 - \lambda_3) c_2 e^{-\lambda_3 t} = x_0 \lambda_1 e^{-\lambda_1 t},$$

$$\lambda_3 = \lambda_1 \quad \text{és} \quad c_2 = x_0 \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

Ez alapján

$$y = c_1 e^{-\lambda_2 t} + x_0 \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_1 t},$$

ahol c_1 értékét az $y(0) = 0$ kezdeti feltétel alapján határozhatjuk meg:

$$c_1 = -x_0 \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

A maximum időpontját deriválással határozhatjuk meg:

$$\frac{dy}{dt} = x_0 \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_2 t} - x_0 \frac{\lambda_1^2}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_1 t} = 0,$$

$$t_{\max} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \ln \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right) = \frac{1}{\ln 2} \frac{T_1 T_2}{T_2 - T_1} \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) \approx 4,41 \text{ óra.}$$

Beke Márton Csaba (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.)

II. megoldás. Az előző megoldás jelöléseit használva τ idő elteltével:

$$x(\tau) = x_0 e^{-\lambda_1 \tau}.$$

Határozzuk meg, hogy t idő elteltével mennyi az Y magok száma, azaz $y(t)$. A kezdetből τ idő elteltével a kicsi $d\tau$ időintervallum alatt $x_0 \lambda_1 e^{-\lambda_1 \tau} d\tau$ X mag bomlik el, és ugyanennyi Y mag keletkezik. Ezeknek a kis idő alatt létrejött Y magoknak $e^{-\lambda_2(t-\tau)}$ része marad meg a kezdetből t idő utánra, azaz a kezdet után τ idővel $d\tau$ időintervallum alatt létrejövő Y magok közül

$$dy(t) = x_0 \lambda_1 e^{-\lambda_1 \tau} e^{-\lambda_2(t-\tau)} d\tau = x_0 \lambda_1 e^{-\lambda_2 t} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)\tau} d\tau$$

fog létezni a kezdet után t idővel. $y(t)$ értékét τ szerinti integrálással kaphatjuk meg:

$$y(t) = \int_0^t x_0 \lambda_1 e^{-\lambda_2 t} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)\tau} d\tau = x_0 \lambda_1 e^{-\lambda_2 t} \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \left[e^{(\lambda_2 - \lambda_1)\tau} \right]_0^t =$$

$$= x_0 \lambda_1 e^{-\lambda_2 t} \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} - 1 \right) = x_0 \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t} \right).$$

Keressük ennek maximumhelyét: mivel $x_0 \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}$ nem függ az időtől, ezért elég az utolsó tényezőt t szerint deriválni, és megkeresni, hogy hol nulla:

$$-\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + \lambda_2 e^{-\lambda_2 t} = 0,$$

$$t_{\max} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \ln \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right) \approx 4,41 \text{ óra.}$$

Gyenes Károly (Kecskeméti Bányai Júlia Gimn., 11. évf.)

Megjegyzések. 1. y maximális értéke $t_{\max}$ $y(t)$ -be való behelyettesítésével megkapható:

$$y_{\max} = y(t_{\max}) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left(\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}} - \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}} \right) x_0 \approx 0,422 x_0.$$

2. Érdekes megnézni a $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ esetet. Ilyenkor az $y(t)$ függvényben egy $\frac{0}{0}$ tényező jelenne meg. A megoldás ebben az esetben $y(t) = \lambda t x_0 e^{-\lambda t}$ és $t_{\max} = \frac{1}{\lambda}$.

III. megoldás. A feladat numerikusan is megoldható.⁵ Használjuk a korábbi jelöléseket, ekkor a megoldandó differenciálegyenlet-rendszer:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta x}{\Delta t} &= -\lambda_1 x, \\ \frac{\Delta y}{\Delta t} &= \lambda_1 x - \lambda_2 y.\end{aligned}$$

A programunk változói t , x és y , paramétereit $\lambda_1 = \frac{\ln 2}{T_1}$, $\lambda_2 = \frac{\ln 2}{T_2}$ és Δt (a közelítő számítás „felbontása”). Legyen $x_0 = 1$ (így x és y relatív értékek lesznek a kiinduló mennyiséghez képest.)

A paramétereink kezdőértéke legyen:

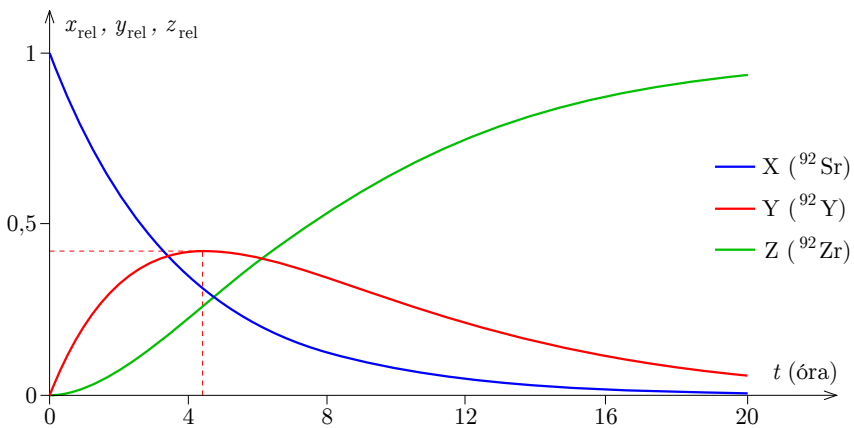
$$\begin{aligned}t &:= 0, \\ x &:= 1, \\ y &:= 0.\end{aligned}$$

Ezután ismételjük a következő ciklust:

$$\begin{aligned}t &:= t + \Delta t, \\ y &:= y + (\lambda_1 x - \lambda_2 y)\Delta t, \\ x &:= x - \lambda_1 x \Delta t,\end{aligned}$$

mindaddig, amíg $\lambda_1 x - \lambda_2 y > 0$. Amikor ez az érték előjelet vált, állítsuk le a ciklust, és írjuk ki t értékét.

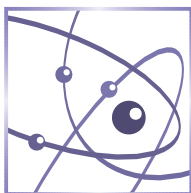
A ciklust tovább futtatva, és az adatokat ábrázolva elkészíthetjük az $x(t)$ és $y(t)$ grafikonokat is. Az *ábrán* látható grafikonon a Z (^{92}Zr) magok $z(t)$ relatív értékét is ábrázoltuk, amely a $z = x_0 - (x + y)$ képlettel minden időpontban könnyen meghatározható.



⁵Ehhez lásd Csóka Péter, Seprődi Barnabás: *Fizika problémák megoldása numerikus módszerekkel* című cikkét lapunk 2024. novemberi számában.

Megjegyzés. A futtatáshoz bármilyen program használható, de elvégezhető akár Excel táblázatkezelővel is: ekkor a képleteket az első sorba beírva autokitöltővel lehet a sorokat létrehozni, majd grafikonvarázslóval a grafikont elkészíteni. Az *ábrán* látható grafikon is így készült $\Delta t = 0,01$ óra lépéssel.

16 dolgozat érkezett. Helyes 9 megoldás. Kicsit hiányos (3–4 pont) 3, hiányos (1–2 pont) 4 dolgozat.



Fizikából kitűzött feladatok

M. 443. Mobiltelefon fényérzékelőjét használva mutassuk meg, hogy a fényintenzitás inverz négyzetesen függ egy pontszerű fényforrástól mért távolságtól! Hogyan válasszuk a kísérleti körülményeket ahhoz, hogy minél pontosabban tudjuk igazolni ezt az összefüggést?

(6 pont)

Közli: Vadász Gergely, Solymár

G. 897. Egy fonál egyik végét rögzítjük, a másikra egy nehéz testet erősítünk. A fonál akkor szakad el, ha a nehezebb tömege nagyobb, mint M .

A fonalat most egy vízszintes asztalra fektetjük, az egyik végéhez egy m tömegű testet erősítünk, a másik végét pedig az m tömegű testtel ellentétes irányban a gyorsulással húzni kezdjük. A test és az asztal közötti súrlódási együttható μ . Legfeljebb mekkora lehet a gyorsulás nagysága, ha a fonál nem szakad el?

(3 pont)

G. 898. Egy 16 000 N súlyú autó vízszintes felületen áll. Az autó mind a négy kereke egyenlő erővel nyomja a talajt. Ezután az autó vonóhorgára biciklitartót szerelnek, amire három biciklit rögzítenek szimmetrikusan, a képen látható módon (vagyis a terhelés a biciklihordozó közepére esik).



Mennyivel változik meg az autó kerekei által a talajra kifejtett erő?

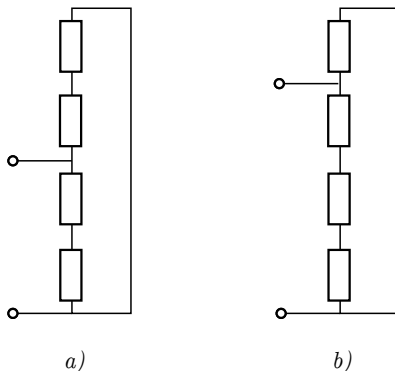
A három biciklire és a tartóra együttesen 800 N nehézségi erő hat, aminek a hatásvonal a 30 cm-re fekszik a vonóhorog rögzítési gömbjétől. Az autó első és hátsó tengelye közötti távolság 2,8 m, a vonóhorog gömbje vízszintes irányban 1 m-re van a hátsó tengelytől.

(3 pont)

G. 899. Legalább mekkora az átlagos áramfelvétele egy elektromos gépkocsinak, miközben 2,7 s alatt gyorsul fel 100 km/h sebességre? Az autó üzemi feszültsége 800 V, tömege 2500 kg.

(3 pont)

G. 900. Megválasztható-e az ábrán látható ohmos ellenállások (nullától különböző) nagysága úgy, hogy az eredő ellenállás az a) és b) esetekben egyenlő legyen?



(4 pont)

de Châtel Péter (1940–2023) feladata nyomán

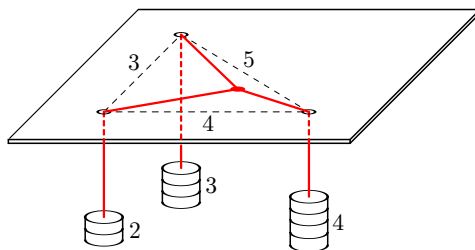
P. 5670. Két, egymást merőlegesen keresztező úton egy-egy motoros halad. Az egyik sebessége v_1 , a másiké v_2 , és az egymástól való legkisebb távolságuk d_0 . Milyen távolságra vannak ekkor a kereszteződéstől?

Az egyszerűség kedvéért mindkét járművet tekintsük pontszerűnek.

(5 pont)

Közli: Woyrnarovich Ferenc, Budapest

P. 5671. Vízszintes síkban rögzített lemezen három kicsiny lyuk van, távolságuk 3, 4 és 5 egységnyi. Három vékony, hajlékony fonál egy-egy végét összecsomózzuk, a másik végüket pedig a lyukakon átfűzzük, majd a lelógó végükre (az ábrán látható módon) 2, 3 és 4 egységnyi tömeget akasztunk. A fonalak és az asztal közötti súrlódás elhanyagolható.



Szerkesszük meg (körzővel és vonalzóval vagy a GeoGebra program segítségével), hogy egyensúlyi helyzetben hol lesz a csomó!

(5 pont)

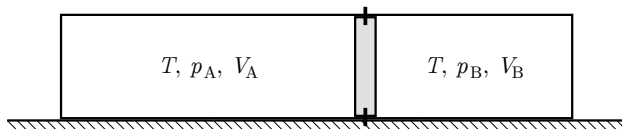
Közli: Gnädig Péter, Vácduka

P. 5672. Az Egyenlítőn állva, éppen a fejünk felett halad át egy műhold, amely a Föld felszínétől 400 km-re levő pályán kering. Legfeljebb mennyi ideig láthatjuk a műholdat?

(4 pont)

Közli: Németh László, Fonyód

P. 5673. Egy jó hőszigetelt falú, vízszintes helyzetű, rögzített, henger alakú tartályban lévő levegőt súrlódásmentesen mozgó, szintén jó hőszigetelő anyagból készült, 0,5 kg tömegű dugattyú oszt két részre (*ábra*). Kezdetben a dugattyú olyan helyzetben rögzített, hogy a bal oldali részben a levegő térfogata 3 dm^3 , nyomása 100 kPa, a másik részben pedig 2 dm^3 és 200 kPa. Ekkor mindkét részben a levegő hőmérséklete 300 K.



A dugattyú rögzítését megszüntetjük.

a) A rögzítés megszüntetését követően a dugattyú mekkora maximális sebességre gyorsul fel?

b) Mekkora lesz a bal oldali légoszlop legmagasabb hőmérséklete?

(5 pont)

Közli: Zsigri Ferenc, Budapest

P. 5674. Egy hőerőgép egy C hőkapacitású, kezdetben T hőmérsékletű test és egy állandó T_0 hőmérsékletű, nagy méretű hőtartály között üzemel.

Vizsgáljuk a következő két esetet: $T = T_0 + \Delta T$ és $T = T_0 - \Delta T$. Melyik esetben nyerhetünk több munkát?

(5 pont)

Példatári feladat nyomán

P. 5675. 30 cm oldalhosszúságú, szabályos háromszög csúcaiban 400 nC nagyságú, pontszerű töltések vannak. A szomszédos töltéseket szigetelőfonalak kötik össze.

a) Mekkora erő feszíti a fonalakat?

b) Mekkora erő feszíti a fonalakat akkor, ha a háromszög súlypontjába egy 200 nC nagyságú töltést helyezünk el?

(4 pont)

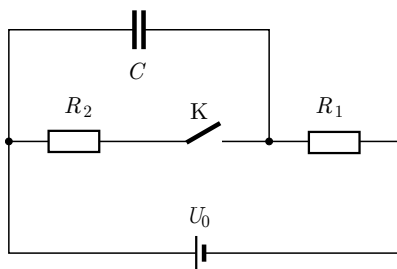
Közli: Veres Dénes, Szolnok

P. 5676. Az *ábrán* látható kapcsolási rajz szerint összeállított áramkörben szereplő feszültségforrás elektromotoros ereje 20 V, az ellenállások $R_1 = 50 \Omega$, illetve $R_2 = 150 \Omega$ nagyságúak, a kondenzátor $20 \mu\text{F}$ kapacitású. Kezdetben a K kapcsoló zárva van.

a) Mekkora a kondenzátor töltése a kapcsoló zárt állása esetén?

b) A kapcsoló nyitását követően kialakuló állandósult állapot eléréséig mennyivel változik meg a kondenzátor energiája, és mennyi hő fejlődik az R_1 ellenálláson?

A feszültségforrás belső ellenállása elhanyagolható.



(5 pont)

Tornyai Sándor fizikaverseny, Hódmezővásárhely

P. 5677. Egy 1,5 V-os elem kivezetéseihez két darab 20 cm hosszúságú, egyeres, 1 mm sugarú, vörösréz vezetékkel hozzákapszolunk egy 1 k Ω -os ellenállást. A vörösrézben atomonként egy darab vezetési elektron van.

a) Számoljuk ki a vezetékben a vezetési elektronok átlagos áramlási sebességét!

b) Mennyi idő alatt jutna el egy elektron ekkora sebességgel a teleptől az ellenállásig?

(5 pont)

Példatári feladat nyomán

P. 5678. Egy D rugóállandójú rugó egyik végét egy lift mennyezetéhez rögzítjük, másik végére pedig egy m tömegű testet akasztunk. Kezdetben a test egyensúlyban van. Egyszer csak a lift állandó a gyorsulással elindul felfelé, majd τ idő után a gyorsulás megszűnik és a felvonó állandó sebességgel halad tovább. Mekkora amplitúdójú mozgást végez ezután a test?

(6 pont)

Közli: Vigh Máté, Herceghalom

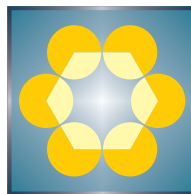


Beküldési határidő: 2025. november 17.

Elektronikus munkafüzet: <https://www.komal.hu/munkafuzet>



MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL FOR SECONDARY SCHOOLS (Volume 75. No. 7. October 2025)



Problems in Mathematics

New exercises for practice – competition K (see page 430): **K. 869.** The average, median, mode and range of five not necessarily distinct integer numbers are 69, 83, 85 and 70, respectively. Find the second smallest of the five numbers. **K. 870.** How can 5 identical squares be dissected into a single big square with at most 5 straight cuts? (During cutting, the individual pieces cannot be stacked, and each cut can be applied to a single piece.) Find a solution. **K. 871.** How many positive integers are there that consists of 4 digits in their base 3 representation, and 3 digits in their base 4 representation? **K/C. 872.** Fill in the parts denoted by a , b , $\dots$, g of the diagram (see page 431) with numbers 1, 2, 3, 4,

5, 6 and 7 such that the numbers in the three circles have the same sum, and a is perfect square. Find all solutions. **K/C. 873.** Rabbit has written letters to six of his friends and relations and filled out six envelopes with their addresses. Later he gave the whole stack to Tigger and asked him to put the letters into the envelopes and post them, since Tigger boasted several times that Tiggers are the best at posting letters. However, this was not the case, since Tigger actually couldn't read at all. So, not surprisingly, Tigger will put the six letters into the six envelopes randomly (at least he will make sure that each envelope will contain a single letter). In how many cases will exactly two letters be placed in their respective envelopes?

New exercises for practice – competition C (see page 431): **Exercises up to grade 10: K/C. 872.** See the text at Exercises K. **K/C. 873.** See the text at Exercises K. **Exercises for everyone: C. 1868.** Claire observed that the distance (in kilometers) between her home and her favorite lake is equal to the square of the time (in hours) it takes to travel between them on a bicycle. On a given day, it took 4 hours longer to get to the lake, as her speed was 3 km/h slower than usual. Find the distance between the two places. (Based on a Canadian competition problem) **C. 1869.** Square $ABCD$ has a side length of 20 meters. A ray of light is emitted from the vertex A and reflected back from side BC , CD and DA (in this order) and finally arrives at the midpoint N of the side AB . Find the distance traveled by the ray of light. (Iranian competition problem) **C. 1870.** A table tennis competition is held between 10 contestants. Each contestant plays exactly one match against every other contestant. At one of the breaks the organizers observe that if two contestants played the same number of matches so far, then there is no contestant that played with both of them. Supposing that more than 5 matches had already been played until the break, is there a contestant who played exactly two matches so far? (Based on a problem from Polygon, Szeged) **Exercises upwards of grade 11: C. 1871.** The line through focus F of the parabola $x^2 - 6x - 4y + 9 = 0$ and an arbitrary point P of the parabola intersects the parabola at point Q for the second time. Find the equation corresponding to the locus of the midpoints of line segment PQ . (Proposed by *Bálint Bíró*, Eger) **C. 1872.** Peti has written the integers from one to fifty on the blackboard. In each step, he chooses two numbers (a and b) on the board, erases them and replaces them with the number defined by the formula $a^2b - 6a^2 - 7ab + 42a + 6b - 30$. He repeats this until a single number remains on the board. What can this number be? (Proposed by *Mátyás Czett*, Zalaegerszeg)

New exercises – competition B (see page 432): **B. 5478.** Let S denote the centroid of triangle ABC . Let T denote the foot of the height from vertex A in triangle ABC . Ray TS (starting from point T) intersect the circumcircle of the triangle in V . Prove that S trisects line segment TV . (3 points) (Proposed by *Viktor Vígh*, Sándorfalva) **B. 5479.** Let d be a given positive integer. Prove that there exist infinitely many pairs (x, y) of positive integers such that the difference of the arithmetic and geometric mean of x and y is d . (3 points) (Proposed by *László Németh*, Fonyód) **B. 5480.** In triangle ABC angle $\angle ACB$ is 90° . Let F denote the midpoint of leg AC , and let G denote the midpoint of hypotenuse BC . Prove that the circle with diameter FG is tangent to the incircle of triangle ABC if and only if $AC = 2BC$. (4 points) (Proposed by *Attila Sztranyák*, Budapest) **B. 5481.** Prove the following divisibility for every positive integer n : $(n!)^n \mid n^2 \cdot (n^2 - 1) \cdot (n^2 - 2) \cdot \dots \cdot (n + 2) \cdot (n + 1)$. (4 points) (Proposed by *Bálint Hujter*, Budapest) **B. 5482.** We have selected an odd number of integers. We have changed one of them such that their average increased by 1, but their standard deviation did not change. Prove that the average of the originally selected numbers is an integer. (5 points) (Based on a proposal by *Erzsébet Berkó*, Szolnok) **B. 5483.** A deck of $2n$ cards consists of n suits, each suit consisting of two values, 1 and 2. n players play the following cooperative game: They start by shuffling the $2n$ cards, then each player is dealt two cards, which they reveal to the other players.

Subsequently, they decide together the order they sit down around a round table, and they also choose the player starting the game. During the game, each consecutive player (in the clockwise direction) tries to put down a card, however, a card with value 2 can only be put down if the card of the same suit with value 1 is already on the table. They win the game if they manage to put all the cards on the table, however, they lose the game if somebody holding at least one card in their hand cannot put down a card on the table. Prove that the players can always win the game, regardless of the hand they were dealt. (5 points) (Proposed by *Anett Kocsis and András Imolay*, Budapest, based on a Dürer competition problem) **B. 5484.** Let M denote the orthocenter of acute triangle ABC , and let F denote the midpoint of side BC . Let T denote the foot of the perpendicular from M to the inner angle bisector at vertex A . Line FT intersects side AC at point D . Prove that the circumcircle of triangle CDF contains the foot of the height of triangle ABC from vertex A . (6 points) (Proposed by *Bálint Bíró*, Eger) **B. 5485.** Prove that there exists a rational number arbitrarily close to $\frac{1}{2025}$ that cannot be obtained as the sum of the reciprocals of 2025 positive integers. (6 points) (Proposed by *Mihály Hujter*, Budapest)

New problems – competition A (see page 434):

A. 914. We write the ordered pair $(1, 0)$ on the board. In one step, if the ordered pair (a, b) is on the board, we erase it and replace it with either $(a + b, b)$ or $(2a + b, a + b)$. (For example, after two steps, the pair on the board may be one of $(1, 0)$, $(2, 1)$, $(3, 1)$, or $(5, 3)$.) Prove that after n steps, the ordered pair on the board can take exactly 2^n different values. (Proposed by *András Imolay*, Budapest) **A. 915.** Given a circle with three points A , B , and C on it, which do not form an isosceles triangle. For every point $P \notin \{A, B, C\}$ on the circle, let A_P , B_P and C_P denote the intersections of the tangent at P with the tangents at A , B , and C , respectively. Prove that there exist exactly three points $P \notin \{A, B, C\}$ on the circle for which the points A_P , B_P and C_P are well-defined and the perpendiculars from A_P to BC , from B_P to CA , and from C_P to AB are concurrent. Furthermore, show that these three points P form an equilateral triangle. (Proposed by *Zoltán Gyenes*, Budapest) **A. 916.** Let $a \geq 3$ be an integer, and define $f(n) = a^n - 1$ for every positive integer n . Denote by $f^{(k)}$ the k -iterate of f , that is, $f^{(1)}(n) = f(n)$ and $f^{(k+1)}(n) = f(f^{(k)}(n))$ for $k \geq 1$. a) Prove that for any positive integer K there exists a positive integer M such that for every integer $1 \leq k \leq K$, the number $f^{(k)}(M)$ is divisible by M if and only if k is divisible by 2025. b) Does there exist a positive integer N such that for every positive integer k , the number $f^{(k)}(N)$ is divisible by N if and only if k is divisible by 2025? (Proposed by *Boldizsár Varga*, Budapest)

Problems in Physics

October 2025 (see page 458)

M. 443. Using the light sensor of a mobile phone, show that light intensity is inversely proportional to the square of the distance from a point source of light. How should we choose the experimental conditions in order to prove this relationship as accurately as possible?

G. 897. One end of a thread is fixed and a heavy body is attached to the other end. The thread will break if the mass of the body is greater than M . Now the thread is laid on a horizontal table, a body of mass m is attached to one end, and the other end is pulled in the direction opposite to the body, with an acceleration of a . The coefficient of friction between the body and the table is μ . What is the maximum magnitude of the acceleration if the thread does not break? **G. 898.** A car of weight 16000 N is standing on a horizontal surface. All four wheels of the car push the ground with the same force. A bicycle carrier is then attached to the hitch of the car, to which three bicycles are

attached symmetrically, as shown in the picture (i.e. the load is applied to the centre of the bicycle carrier). By how much does the force exerted by the wheels of the car on the ground change? The three bicycles and the bicycle carrier together weigh 800 N, the line of action is at a distance of 30 cm from the ball of the hitch. The distance between the front and rear axles of the car is 2.8 m, the ball of the hitch is 1 m horizontally from the rear axle. **G. 899.** What is at least the average current drawn by an electric car while it accelerates to 100 km/h in 2.7 s? The car has a nominal voltage of 800 V and a mass of 2500 kg. **G. 900.** Is it possible to choose the resistances of the resistors (other than zero) such that the effective resistance *in figures a) and b)* are equal?

P. 5670. Two motorcyclists are riding on two roads, which cross each other perpendicularly. The speed of one is v_1 , the speed of the other is v_2 , and their minimum distance from each other is d_0 . What is their distance from the crossroad at this moment? For simplicity, consider both vehicles point-like. **P. 5671.** There are three small holes in a plate, fixed in a horizontal plane 3, 4, and 5 units apart. One end of each of three flexible thin threads are tied together, the other ends are threaded through the holes and 2, 3, and 4 units of mass are hung over the hanging ends (see *the figure*). Friction between the threads and the table is negligible. Construct the position of the knot at equilibrium. **P. 5672.** Standing on the Equator, a satellite passes just above our heads, orbiting at a distance of 400 km from the surface of the Earth. At most for how long can we see the satellite? **P. 5673.** A piston with a mass of 0.5 kg divides the air in a fixed horizontal cylindrical tank into two parts. The walls of the tank and the piston have good thermal insulation, and the piston can move frictionlessly (see *the figure*). Initially, the piston is fixed in such a position that the volume of air in the left part is 3 dm^3 and the pressure is 100 kPa, while in the other part the volume is 2 dm^3 and the pressure is 200 kPa. At this state the temperature of the air in both parts is 300 K. The piston is released from its clamping. *a)* After releasing the piston from the clamping, what is the maximum speed to which the piston accelerates? *b)* What will be the maximum temperature of the air column on the left? **P. 5674.** A heat engine operates between a body of heat capacity C , which was initially at a temperature of T , and a large heat reservoir of constant temperature T_0 . Consider the two cases $T = T_0 + \Delta T$ and $T = T_0 - \Delta T$. In which case can we gain more work? **P. 5675.** There are point-like charges of 400 nC at the vertices of an equilateral triangle of side 30 cm. The adjacent charges are connected by insulating threads. *a)* What is the tension in the threads? *b)* What is the tension in the threads, when a 200 nC point-charge is placed at the centroid of the triangle? **P. 5676.** In the circuit shown *in the figure*, the electromotive force of the voltage supply is 20 V, the resistances of the resistors are $R_1 = 50 \, \Omega$ and $R_2 = 150 \, \Omega$, and the capacitor has a capacity of $20 \, \mu\text{F}$. Initially, switch K is closed. *a)* What is the charge on the capacitor when the switch is closed? *b)* Until the steady state is reached after the switch is opened, how much does the energy of the capacitor change and how much heat is dissipated in resistor R_1 ? The internal resistance of the voltage supply is negligible. **P. 5677.** To the terminals of a battery of 1.5 V, a resistor of $1 \text{ k}\Omega$ is connected with two copper wires of length 20 cm, and of radius 1 mm. The copper has one conduction electron per atom. *a)* Calculate the drift speed of the conduction electrons in the wire. *b)* How long would it take for an electron to travel at this speed from the battery to the resistor? **P. 5678.** One end of a spring with a spring constant D is attached to the ceiling of a lift, and the other end is attached to a body with mass of m . Initially, the body is at rest. Suddenly the lift starts to move upwards with a constant acceleration of a , and after a time τ the acceleration ceases, and the lift continues to move at a constant speed. What is the amplitude of the subsequent motion of the body?

Versenynaptár 2025-2026

	VERSENYEK	Típus	Nevezési határidő	A megrendezés időpontja
MATEMATIKA	Bolyai Csapatverseny 9–12. osztály www.bolyaiverseny.hu	csapat (teszt + feladatmegoldás)	2025. október 22. 18:00	közzeti (iskolai) forduló: 2026. január 13. 13:30 döntő: 2026. március 7. 11:00
	OKTV 11–12. osztály I–II. kategória www.oktatas.hu	kifejtős feladatmegoldás	2025. szeptember 12.	Első forduló: 2025. november 8. szombat, 10:00–18:00 Második forduló: 2025. december 6. szombat, 10:00–18:00 Harmadik forduló: 2026. január 3. szombat, 10:00–18:00 Negyedik forduló: 2026. február 14. szombat, 10:00–18:00 Ötödik forduló: 2026. április 11. szombat, 10:00–18:00
	Arany Dániel 9–10. osztály I–II. kategória www.bolyai.hu	kifejtős feladatmegoldás	2025. október 30.	első forduló: 2025. november 20. (csütörtök) 14–18 óra második forduló: 2026. január 15. (csütörtök) 14–18 óra döntő: 2026. március 26. (csütörtök) 11–15 óra.
	Zrínyi Ilona 2–12. osztály www.mategye.hu	teszt	2025. október 7.	első (iskolai) forduló: 2025. november 24. második forduló: 2026. február 20. döntő: 2026. április 17–19.
	Dürer Matematikaverseny 9–12. osztály durerinfo.hu	kifejtős feladatmegoldás	2025. október 17. éjféli	online forduló: 2025. október 21. (kedd) helyi forduló: 2025. november 14. (péntek) döntő: 2026. február 6–8.
	Medve Matek medvematek.hu	teszt	2025. szeptember 26., 2025. december 5., 2026. január 30. 2026. március 20.	MedveMatek GO összel: szept. 3–okt. 10. Logirintus: 2025. november 17–28. Városliget: 2026. május 9. 10:00–13:00 Gellért-hegy: 2026. április 24. péntek 14:00–17:00 2025. április 25. szombat 10:00–13:00
	Matematika Határok Nélkül https://msf.berzsenyi.hu	9-edikes osztályok közötti verseny	2026. január 15.	2026. március 18. (szerda)
INFORMATIKA	OKTV digitális kultúra I. kategória	gyakorlat	2025. szeptember 12.	első forduló: 2025. november 19. 14 óra. második forduló: 2026. január 24. (szombat) harmadik forduló (döntő): 2026. március 21.
	OKTV II. kategória	írásbeli, gyakorlat	2025. szeptember 12.	első forduló: 2025. november 11. 14 óra második forduló: 2026. január 17. harmadik forduló (döntő): 2026. február 21.
	Neumann János programozó verseny	csapat	2025. február 19.	első forduló: 2025. február 26–2025. március 01. második forduló: 2025. március 05–2025. március 08. harmadik forduló: 2025. március 12–2025. március 15. negyedik forduló: 2025. március 21–2025. március 22. A döntő várható időpontja: 2025. március 28.
	Zsakó László Nemzetközi Programozási Verseny	egyéni	2025. október 23.	Első, iskolai forduló: 2025. nov. 11. Második, regionális forduló: 2026. jan. 17. Harmadik, országos forduló: 2026. feb. 21.
	Nemes Tihamér Országos Alkalmazói Tanulmányi Verseny	egyéni	2026. január 7.	Első, iskolai forduló: 2026. jan. 21. Második, országos forduló: 2026. már. 28.
	Nemes Tihamér Online Programozási Verseny	online egyéni	A forduló napja előtti szerda	Első forduló: 2025. november 8. szombat, 10:00–18:00 Második forduló: 2025. december 6. szombat, 10:00–18:00 Harmadik forduló: 2026. január 3. szombat, 10:00–18:00 Negyedik forduló: 2026. február 14. szombat, 10:00–18:00 Ötödik forduló: 2026. április 11. szombat, 10:00–18:00
FIZIKA	Eötvös Loránd Fizikaverseny	kifejtős feladatmegoldás	–	2025. október 17. 15:00-20:00
	OKTV	írásbeli, gyakorlat	2025. szeptember 12.	első forduló időpontja: 2025. november 6. 14 óra második forduló: 2026. január 29. harmadik forduló (döntő): 2026. március 28. (szombat).
	Öveges József Kárpát-medencei Fizikaverseny 7–8. osztály	http://ovegesfizikaverseny.samfules.hu		első forduló (iskolai): 2026. február 3. 14–16 óra második forduló (vármegyei/fővárosi): 2026. március 24. 14–16 óra harmadik forduló (országos döntő, Győr): 2026. május 29–31.
	Mikola Sándor Országos tehetségkutató Fizikaverseny 9–10. osztály	teszt	2026. január 9.	első forduló: 2026. február 10. 14–17 óráig második forduló: 2026. március 10. 14–17 óráig harmadik forduló: május
	XXIX. Országos Szilárd Leó Fizikaverseny	teszt	2026. január 15.	első forduló: 2026. február 23. 14–17 óráig második forduló (döntő): 2026. április 17–19.

Kedves Tanuló, Tisztelt Tanár Kolléga!

A Bolyai János Matematikai Társulat, az Eötvös Loránd Fizikai Társulat,
a MATFUND Alapítvány és
a Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok szerkesztősége szeretettel
meghívja a

KöMaL Ifjúsági Ankétra,

amelynek tervezett időpontja:

2025. október 31–november 1.

Helyszín: ELTE TTK, Budapest, XI. Pázmány P. sétány 1/A. Fizika épület.
A szállással és étkezéssel kapcsolatos információk, a részletes program és a jelentkezéshez kitöltendő űrlap honlapunkon lesz elérhető: <http://www.komal.hu>.

Az Ankét támogatói:



Morgan Stanley



KULTURÁLIS ÉS INNOVÁCIÓS
MINISZTERIUM



NEMZETI KULTURÁLIS
TÁMOGATÁSKEEZELŐ

nka
Nemzeti Kulturális Alap

Az Ifjúsági Ankétan minden érdeklődőt szívesen látunk, az előadások nyilvánosak.
A pontversenyek **díjazottjai és az első dicséretesek közül az első öt helyezett, valamint tanáraik térítésmentes étkezést** (két ebéd és állófogadás), a **nem budapestiek** ezenkívül **térítésmentes szállást** igényelhetnek az űrlapon keresztül. Kérünk minden érdeklődőt, hogy részvételi szándékát, illetve szállás és/vagy étkezés igénylését mielőbb jelezze az űrlap kitöltésével!

Rövid előzetes program

Péntek – délelőtt 10 órától előadások, délután 3-tól díjkiosztó.
Szombat – előadások.
A programváltoztatás jogát fenntartjuk.