

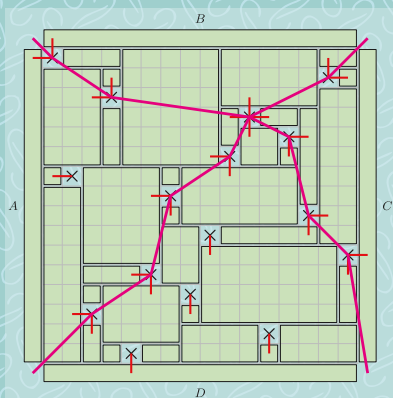
Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok

Informatika rovattal

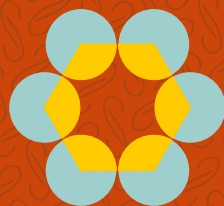
Képek a P. 5685. feladathoz



Ábra az idei IMO hatodik feladatának
megoldásához



Az idei Nemzetközi Matematikai Diákolimpia feladatainak
megoldásai II. | Kincsek a KöMaL múltjából | Egy egyszerű
egyenletmegoldó eljárás | Nyári tábor volt Dombóvár-Gunarason
| Rejtvények, ördöglakatok: Hanoi tornyai



KöMaL

75. évfolyam
8. szám

2025.
november



55. KöMaL Nyári Tábor 2025., Dombóvár-Gunaras



„Vörösingesek”



Pingpong?



Díjkiosztón

Jobsodrás



Az élet palacsintás oldala...



Láncreakciók



Aquaplaning



KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK

INFORMATIKA ROVATTAL BŐVÍTVE

ALAPÍTOTTA: ARANY DÁNIEL 1894-ben

75. évfolyam 8. szám

Budapest, 2025. november

Megjelenik évente 9 számban, januártól májusig és szeptembertől decemberig havonta. ÁRA: 1600 Ft

TARTALOMJEGYZÉK

A 66. Nemzetközi Matematikai Diákolimpia feladatainak megoldása II.	466
Beszámoló a 2025-ös nyári dombóvár-gunarasi táborról	472
<i>Bozóki Sándor</i> : Rejtvények, ördöglakatok – A Hanoi tornyai feladvány gráfja	475
<i>Kozma Katalin Abigél</i> : Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire	478
<i>Németh László</i> : Megoldásvázlatok a 2025./7. szám matematika gyakorló feladatsorához ...	479
Helyesbítés	488
Matematika feladatok megoldása (5440., 5459.)	488
Kincsek a KöMaL múltjából	492
A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok (874–878.)	497
A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (877–878., 1873–1877.)	497
A B pontversenyben kitűzött feladatok (5486–6593.)	499
Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (917–919.)	500
Informatikából kitűzött feladatok (675–678.) ..	501
<i>Woynarovich Ferenc</i> : Egy egyszerű egyenletmegoldó eljárás	505
Mérési feladatok megoldása (441., 442.)	509
Fizika gyakorlatok megoldása (891.)	513
Fizika feladatok megoldása (5635., 5636., 5639., 5645.)	515
Fizikából kitűzött feladatok (444., 901–904., 5679–5687.)	521
Problems in Mathematics	525
Problems in Physics	527

Főszerkesztő: KORÁNDI JÓZSEF

Fizikus szerkesztő: VANKÓ PÉTER

Műszaki szerkesztő: FRIED KATALIN

Borító: BURGHARDT ZSUZSA

Kiadja: MATFUND ALAPÍTVÁNY

Alapítványi képviselő: KÓS RITA

Felelős kiadó: KATONA GYULA

Nyomda: OOK-PRESS Kft.

Felelős vezető: SZATHMÁRY ATTILA

INDEX: 25 450 ISSN 1215-9247

A matematika bizottság vezetője:

HERMANN PÉTER

Tagjai: BÁN-SZABÓ ÁRON, BÍRÓ BÁLINT, CZETT MÁTYÁS, GYENES ZOLTÁN, HUJTER BÁLINT, KISS GÉZA, KÓS GÉZA, KOZMA KATALIN ABIGÉL, MAGYAR ESZTER, NÉMETH MÁRTON, PACH PÉTER PÁL, PAULOVIK ZOLTÁN, RATKÓ ÉVA, SIMON LÁSZLÓ BENCE, SZTRANYÁK ATTILA, UJHÁZY MÁRTON, VÍGH VIKTOR

A fizika bizottság tiszteletbeli elnöke:

HOLICS LÁSZLÓ

Vezetője: SZÉCHENYI GÁBOR

Tagjai: BARANYAI KLÁRA, GNÄDIG PÉTER, HONYEK GYULA, OLOSZ BALÁZS, SZÁSZ KRISZTIÁN, VÍGH MÁTÉ, VLADÁR KÁROLY, WOYNAROVICH FERENC

Az informatika bizottság vezetője:

SCHMIEDER LÁSZLÓ

Tagjai: LÓCZI LAJOS, SIEGLER GÁBOR, TÓTH TAMÁS

Fordítók: GYENES ZOLTÁN, TASNÁDI ANIKÓ

Nyelvi korrektor: ANDICS ÁGNES

Javítás koordinálása: CSOBÁNKA PETRA

Szerkesztőségi titkár: ONDINÉ SZABÓ SÁRA

A szerkesztőség címe: 1117 Budapest,
Pázmány Péter sétány 1/C III. emelet 3.405.
Telefon: +36 20 320-1143

A lap megrendelhető a
<https://komalujsg.myshoprenter.hu>
oldalon keresztül.

Előfizetési díj egy évre: 12 500 Ft
Kéziratokat nem őrzünk meg és nem küldünk vissza.
Minden jog a KöMaL tulajdonosaié.

E-mail: szerk@komal.hu

Internet: <http://www.komal.hu>

This journal can be ordered from the Editorial office:

Pázmány Péter sétány 1/C III. emelet 3.405.
1117-Budapest, Hungary
telephone: +36 20 320-1143

or on the Internet:

<https://komalujsg.myshoprenter.hu>.

A Lapban megjelenő hirdetések tartalmáért
felelősséget nem vállalunk.

A 66. Nemzetközi Matematikai Diákolimpia feladatainak megoldása II.

A hagyományoknak megfelelően közöljük a Nemzetközi Matematikai Diákolimpia feladatainak megoldásait. A megoldások leírására idén is a magyar csapat tagjait kértük meg. Közreműködésüket köszönjük, és ezúton is gratulálunk eredményeikhez.

A szerkesztőség

Második nap¹

4. feladat. Egy N pozitív egész szigorú osztói alatt az N -nél kisebb pozitív osztóit értjük.

Az $a_1, a_2, \dots$ végtelen sorozat olyan pozitív egészekből áll, melyek mindegyikének legalább három szigorú osztója van. Minden $n \geq 1$ esetén a_{n+1} megegyezik a_n három legnagyobb szigorú osztójának összegével.

Határozzuk meg a_1 összes lehetséges értékét.

Javasolta: Litvánia

Megoldás (Holló Martin). Azt fogjuk megmutatni, hogy pontosan azok a számok jók – vagyis ezek lehetnek a sorozat első elemei –, amelyek nem oszthatók 5-tel, a prímtényezős felbontásukban a 2 kitevője valamilyen k nemnegatív számra $2k+1$, és a 3 kitevője legalább $k+1$.

Ahhoz, hogy az ilyen számok jók, elég megmutatnunk, hogy minden ilyen számnak van legalább 4 osztója, és ha a_n tudja ezt a tulajdonságot, akkor a_{n+1} is tudja. Minden ilyen tulajdonságú számnak osztója az 1, 2, 3 és a 6, továbbá ha a_n négy legkisebb osztója az $1 < b < c < d$, akkor a három legnagyobb szigorú osztó az $\frac{a_n}{b} > \frac{a_n}{c} > \frac{a_n}{d}$, és így $a_{n+1} = \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right) a_n$.

Ha $k=0$, akkor a_n szám nem osztható 4-gyel, a három legkisebb osztó a 2, 3 és a 6, és így

$$a_{n+1} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) a_n = a_n,$$

vagyis innen kezdve a sorozat konstans.

Ha $k > 0$, akkor $b=2$, $c=3$, $d=4$, és így

$$a_{n+1} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) a_n = \frac{13a_n}{12},$$

és így a_{n+1} továbbra sem osztható 5-tel, a 2 kitevője 2-vel csökkent, vagyis most $2(k-1)+1$, és a 3 kitevője 1-gyel csökkent, vagyis ha eddig legalább k volt, akkor most még mindig legalább $k-1$, ezzel beláttuk, hogy ezek a számok jók.

¹Az első nap feladatainak megoldását az októberi számban közzétettük.

A megfordításhoz először megmutatjuk, hogy a sorozat egyik eleme sem lehet páratlan. Ha a_n páratlan, akkor minden osztója, és így a_{n+1} is páratlan. Ha az a_n négy legkisebb osztója $1 < b < c < d$, akkor

$$a_{n+1} = \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right) a_n \leq \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) a_n < a_n,$$

vagyis inntől kezdve a sorozat elemei szigorúan csökkennek, ami egy csak pozitív egészekből álló sorozatnál nem lehetséges.

Most azt is megmutatjuk, hogy a sorozat minden eleme osztható 3-mal. Ehhez elég megmutatnunk, hogy ha a_n páros és nem osztható 3-mal, akkor a_{n+1} páratlan (és akkor rögtön készen vagyunk), vagy pedig kisebb mint a_n és nem osztható 3-mal (ekkor pedig a sorozat mindig csökkenne, ami szintén nem lehet). Továbbra is legyen az a_n négy legkisebb osztója $1 < b < c < d$. Mivel a_n páros, ezért $b = 2$, továbbá tudjuk, hogy $c > 3$.

- Ha $c = 4$, akkor $a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{a_n}{4} + \frac{a_n}{d} = \frac{3a_n}{4} + \frac{a_n}{d}$; az első tag osztható 3-mal, a második nem; tehát a_{n+1} nem lehet osztható 3-mal. Továbbá $a_{n+1} < \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) a_n < a_n$.
- Ha $c > 4$, akkor a_n nem osztható 4-gyel, így c páratlan, az a_n legkisebb páratlan prímosztója. Ezen az eseten belül,
 - Ha d is páratlan, akkor $\frac{a_n}{2}$ páratlan, míg $\frac{a_n}{c}$ és $\frac{a_n}{d}$ páros, tehát ezek összege, a_{n+1} páratlan.
 - Ha d páros, akkor $d/2$ egy még kisebb osztó, ami csak a c lehet, vagyis $d = 2c$. Ekkor $a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{a_n}{c} + \frac{a_n}{2c} = \frac{a_n}{2} + \frac{3a_n}{2c}$; a második tag osztható 3-mal, az első nem, tehát a_{n+1} sem osztható 3-mal. Továbbá $a_{n+1} \leq \frac{a_n}{2} + \frac{3a_n}{10} < a_n$.

Így tehát feltehetjük, hogy a sorozat minden eleme osztható 2-vel és 3-mal.

Ha a_n osztható 4-gyel is, akkor a legkisebb osztói 1, 2, 3, 4, és $a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{a_n}{3} + \frac{a_n}{4} = \frac{13a_n}{12}$, tehát a következő tagban a 2 kitevője 2-vel csökken, a 3 kitevője pedig 1-gyel, az 5 kitevője nem változik.

Ezért ha a_1 prímtényezőző felbontásában a 2 kitevője páros, akkor minden lépés után páros marad, így viszont véges sok lépés után eljutunk egy páratlan elemhez, ami nem lehetséges. Az a_1 -ben tehát a 2 kitevője csak páratlan lehet, $2k + 1$ valamilyen k nemnegatív egészszel. k lépés után eljutunk az $a_{k+1} = \left(\frac{13}{12}\right)^k$ számhoz, amely páros, de nem osztható 4-gyel. Mivel ez az elem is osztható 3-mal, az a_1 prímtényezőző felbontásában a 3 kitevője legalább $k + 1$.

Már csak azt kell ellenőriznünk, hogy a_1 nem lehet osztható 5-tel. Ha a_1 osztható 5-tel, akkor a_{k+1} is osztható 5-tel, ezért a_{k+1} négy legkisebb osztói 1, 2, 3, 5, akkor viszont $a_{k+2} = \frac{a_{k+1}}{2} + \frac{a_{k+1}}{3} + \frac{a_{k+1}}{5}$; az első tag páratlan, a másik kettő pedig páros; ez ellentmond annak, hogy a_{k+2} páros.

5. feladat. Hanga és Ábel egy kétszemélyes játékot játszanak, amelynek a szabályai egy λ pozitív valós számtól függenek, amelyet mindkét játékos ismer. Az n -edik lépésben ($n = 1$ -gyel kezdődően) a következő történik.

- Ha n páratlan, Hanga választ egy x_n nemnegatív valós számot úgy, hogy

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq \lambda n.$$

- Ha n páros, Ábel választ egy x_n nemnegatív valós számot úgy, hogy

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq n.$$

Ha valamelyik játékos nem tud megfelelő x_n számot választani, a játék véget ér és a másik játékos nyer. Ha a játék örökké tart, egyik játékos sem nyer. A választott számok mindkét játékos számára ismertek.

Határozzuk meg az összes olyan λ számot, amelyre Hangának nyerő stratégiája van, valamint az összes olyat, amelyre Ábelnek nyerő stratégiája van.

Javasolta: Olaszország

Megoldás (Szakács Ábel). Azt állítjuk, hogy

- ha $0 < \lambda < \frac{1}{\sqrt{2}}$, akkor Ábelnek van nyerő stratégiája;
- ha $\lambda > \frac{1}{\sqrt{2}}$, akkor Hangának van nyerő stratégiája;
- ha $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}$, akkor mindkét játékos meg tudja akadályozni, hogy a másik nyerjen.

Először mutatunk egy egyszerű stratégiát, amelyet követve $\lambda \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ esetén Hanga nem veszíthet. Válassza Hanga mindig a 0 számot, tehát legyen minden $n = (2k + 1)$ -re $x_n = 0$. Gondoljuk meg, hogy Hanga ezt megteheti úgy, hogy sohasem sérül a $\sum_{i=1}^n x_i \leq \lambda n$ feltétel.

Ábel $2k$ -edik lépése után $\sum_{i=1}^{2k} x_i^2 \leq 2k$. A számtani és négyzetes közepek közti egyenlőtlenséggel felülről becsülhetjük az összeget. Mivel $x_1 = x_3 = \dots = x_{2k+1} = 0$,

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{i=1}^{2k+1} x_i}{k} &= \frac{\sum_{i=1}^k x_{2i}}{k} \leq \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^k x_{2i}^2}{k}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{2k} x_i^2}{k}} \leq \sqrt{\frac{2k}{k}} = \sqrt{2}, \\ \sum_{i=1}^{2k+1} x_i &\leq \sqrt{2} \cdot k \leq 2\lambda \cdot k < \lambda(2k+1). \end{aligned}$$

Így Hanga mindig folytatni tudja ezt a stratégiát.

Ha $\lambda > \frac{1}{\sqrt{2}}$, akkor nemcsak nem veszít, de nyerő stratégiája is van Hangának, mert elegendően sok 0 választása után tudja elég nagynak választani számát ahhoz,

hogy Ábel rögtön veszítsen. Válasszunk egy olyan nagy N pozitív egész számot, amelyre $(\lambda(2N+1) - \sqrt{2}N)^2 > 2N+2$ (ilyen létezik, mert a bal oldalon álló kifejezés másodfokú), és legyenek Hanga lépései

$$x_1 = x_3 = x_5 = \dots = x_{2N-1} = 0, \quad x_{2N+1} = \lambda(2N+1) - \sum_{k=1}^{2N} x_k.$$

Mint láttuk, $\sum_{k=1}^{2N} x_k \leq \sqrt{2}N < \lambda(2N+1)$, így $x_{2N+1} > 0$, vagyis Hangának ez a lépése is megengedett. Másrészt

$$\sum_{k=1}^{2N+1} x_k^2 \geq x_{2N+1}^2 \geq (\lambda(2N+1) - \sqrt{2}N)^2 > 2N+2,$$

így Ábel a $(2N+2)$ -edik lépésben nem tud lépni, és Hanga nyer.

Most vizsgáljuk azt az esetet, ha $\lambda \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$. Legyen Ábel stratégiája az, hogy mindig a legnagyobb megengedett számot választja:

$$x_{2n} = \sqrt{2 - x_{2n-1}^2}.$$

Megmutatjuk, hogy Ábel ezt mindig megteheti, tehát Hanga nem nyerhet; ha pedig $\lambda < \frac{1}{\sqrt{2}}$, akkor előáll egy olyan helyzet, amikor Hanga nem tud lépni, tehát Ábel nyer.

Vegyük észre, hogy minden pozitív egész n -re

$$x_{2n-1} + x_{2n} = \sqrt{x_{2n-1}^2 + 2x_{2n-1}x_{2n} + x_{2n}^2} \geq \sqrt{x_{2n-1}^2 + x_{2n}^2} = \sqrt{2},$$

ezért

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{2n} \geq n\sqrt{2} \geq \lambda \cdot 2n$$

(ez az $n=0$ esetben is igaz, amikor a bal oldalon üres összeg áll). Emiatt Hanga mindig legfeljebb $\lambda \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ -nek tudja választani x_{2n+1} -et, tehát Ábel mindig tud lépni, Hanga nem nyerhet.

Ha $\lambda < \frac{1}{\sqrt{2}}$, akkor Ábel nyerni is fog ezzel a stratégiával. Ha N olyan nagy pozitív egész, amelyre $\sqrt{2}N > (2N+1)\lambda$ (ilyen N létezik, mert $\sqrt{2} > 2\lambda$), akkor

$$\sum_{k=1}^{2N} x_k \geq \sqrt{2}N > (2N+1)\lambda,$$

tehát Hanga legkésőbb a $(2N+1)$ -edik lépésben biztosan veszít.

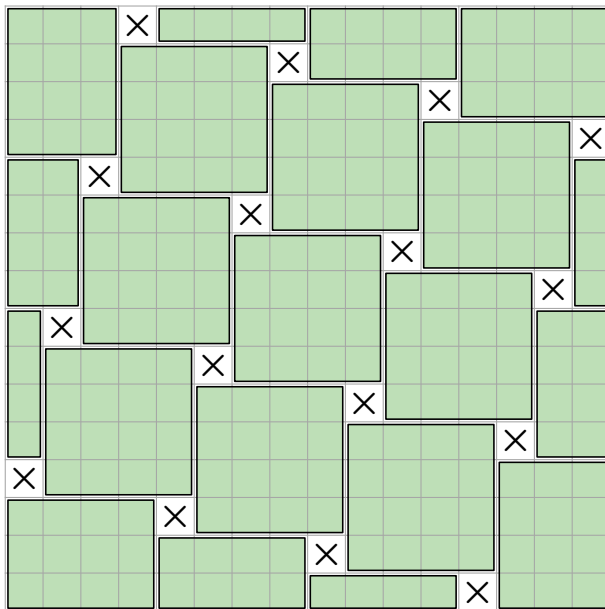
6. feladat. Vegyünk egy 2025×2025 egységnégyzetből álló négyzetrácsot. Matild téglalap alakú csempéket helyez a rácsra (amelyek mérete eltérő lehet) úgy, hogy a csempék oldalai a rácsegyenesekre esnek, illetve minden egységnégyzetet legfeljebb egy csempe fed.

Határozzuk meg, legkevesebb hány csempét kell Matildnak leraknia ahhoz, hogy a rács minden sorában és minden oszlopában pontosan egy egységnégyzetet ne fedjen csempe.

Javasolta: Szingapúr

Megoldás (Czanik Pál, az IMO Shortlist alapján). Az állítjuk, hogy $2025 + 2 \cdot 45 - 3 = 2112$ csempére van szüksége Matildnak, és általánosabban, ha $n = k^2$ négyzetszám, akkor egy $n \times n$ -es négyzetrács esetén a válasz $k^2 + 2k - 3$. (Ez valóban általánosabb állítás, hiszen $2025 = 45^2$.)

Vegyük az alábbi konstrukciót (az ábrán $k = 4$): Összesen $(k - 1)^2$ darab, $k \times k$ méretű csempe van középen és $k - 1$ minden oldalt, ami összesen $k^2 + 2k - 3$ csempe.



1. ábra

Így tudjuk, hogy ennyi csempe elegendő.

Annak bizonyításához, hogy ennél kevesebb nem tudja Matild lefedni a négyzetrácsot, felhasználjuk az Erdős–Szekeres tételt:

Tétel. Tetszőleges p, q nemnegatív egészek és $pq + 1$ különböző számból álló sorozatban van egy legalább $(p + 1)$ elemű monoton növekvő részsorozat, vagy egy legalább $(q + 1)$ -elemű monoton csökkenő részsorozat.

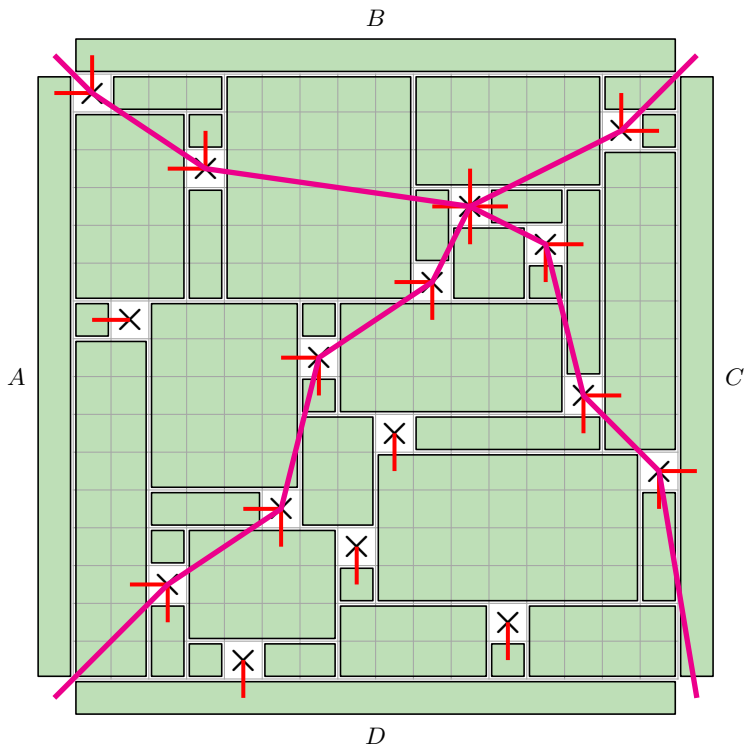
(Lásd <https://hu.wikipedia.org/wiki/Erdős–Szekeres-tétel>)

A tétel egy átfogalmazása. Ha egy n hosszú, különböző számokból álló sorozatban a leghosszabb monoton növekvő részsorozat p , a leghosszabb monoton csökkenő részsorozat q elemű, akkor $pq \geq n$.

Vegyünk egy tetszőleges csempézést, jelöljük a kimaradó mezőket $\times$ -ekkel, és a táblázat mind a négy oldalára helyezzünk egy $n \times 1$ -es csempét. Így minden $\times$ négy különböző csempével szomszédos a négy oldalán, és minden csempe minden oldalán legfeljebb egy $\times$ -szel szomszédos.

Nevezzük *leghosszabb növekvő részsorozatnak* (LNR) azt a töröttvonalat, ami a lehető legtöbb $\times$ közepét köti össze sorban úgy, hogy mindegyik jobbra-fel található az előzőtől, és ehhez vegyük hozzá a táblázat bal-alsó és jobb-felső sarkát is. Hasonlóan definiáljuk a *leghosszabb csökkenő részsorozatot* (LCsR) bal-fentről jobbra-le. Legyen az LNR-en lévő $\times$ -ek száma a és az LCsR-en lévő $\times$ -ek száma b . Az Erdős–Szekeres tétel átfogalmazása szerint $ab \geq n$.

A két töröttvonal négy részre bontja a négyzetrácsot: A -ra, B -re, C -re és D -re, ahol A a két töröttvonaltól balra, B felettük, C tőlük jobbra és D alattuk található. Kössük össze az összes A -ban (vagy határán) lévő $\times$ -et a közvetlenül tőle balra elhelyezkedő csempével, hasonlóan a B -beliket a fölöttük levővel, a C -beliket a tőlük jobbra levővel és a D -beli $\times$ -eket az alattuk levő csempével.



2. ábra

Lemma. Minden csempét legfeljebb egy $\times$ -szel kötöttünk össze.

Bizonyítás. Tegyük fel indirekten, hogy egy csempét két $\times$ -szel is összekötöttünk, ekkor vizsgáljunk három esetet:

1. eset: A két $\times$ a csempe ugyanazon oldalán van. Ekkor ugyanabban a sorban vagy oszlopban vannak, ami ellentmondás.

2. eset: A két $\times$ szemközti oldalon van, feltehetjük, hogy az egyik, $\times_d$ felül és a másik, $\times_b$, alul. Ekkor $\times_d$ az $\times_b$ felett van, de $\times_d$ a D részben, míg $\times_b$ a B részben van, ami ellentmondás.

3. eset: A két $\times$ szomszédos oldalon van, ekkor feltehetjük, hogy az egyik, $\times_a$, jobb oldalt és a másik, $\times_b$, alul. Ekkor $\times_a$ jobbra-fel található $\times_b$ -től. Viszont $\times_a$ az A részben, $\times_b$ pedig a B részben található, ami ezzel ellentmond. $\square$

Számoljuk meg kétféleképpen az összekötött $\times$ -csempe párokat. Minden $\times$ legalább egy csempével össze van kötve, és azok, amelyek valamely töröttvonalon találhatóak, legalább kettővel. Az ábrán látható esetben a két töröttvonal egy $\times$ -en metszi egymást, így ez 4 csempével is össze van kötve, azaz a csempék száma legalább $(n - a - b + 1) + 2(a - 1) + 2(b - 1) + 4 = n + a + b + 1$. Ha a két töröttvonal nem egy $\times$ -en találkozik, csak $n + a + b$ csempéhez kötöttük az $\times$ -eket. Viszont ekkor az a csempe, amelyen a két töröttvonal találkozik, egy $\times$ -szel sincs összekötve, vagyis ebben az esetben is legalább $n + a + b + 1$ csempénk van. Így a csempék száma legalább

$$n + a + b + 1 \geq n + 2\sqrt{ab} + 1 \geq n + 2\sqrt{n} + 1 = k^2 + 2k + 1.$$

Ha ebből kivonjuk azt a négy csempét, amit a négy oldalra helyeztünk, megkapjuk az $(k^2 + 2k - 3)$ -as alsó becslést, amit állítottunk.



Beszámoló a 2025-ös nyári dombóvár-gunarasi táborról

A 2025-ös nyári KöMaL-tábor ismét Dombóvár-Gunarason került megrendezésre, ahol a matematika és a fizika iránt érdeklődő középiskolás diákok egy héten át közösen gondolkodtak, versenyeztek és pihentek. A résztvevők között voltak visszatérő táborozók és új jelentkezők is, akik hamar beilleszkedtek a barátságos, motiváló közegbe. A tábor programjai három tapasztalt táborvezető, valamint több tanár és mentor részvételével zajlottak.

A megérkezést követő első este ismerkedéssel telt. A fizikás diákok három-, illetve négyfős csapatokba szerveződtek, amelyek egész héten együtt dolgoztak a különböző mérési, elméleti és numerikus feladatokon. A matematika és fizika szekciók párhuzamosan, de egymással együttműködve működtek, több közös program is volt, amelyek segítették a két terület közötti kapcsolat megélését.

A matematikai csoport tagjai két szinten dolgoztak: egy haladó és egy kezdő csapatban. A délelőttökön Dobos Sándor és Kiss Géza tanár urak vezettek foglalkozásokat, ahol korábbi évek olimpiai (IMO, MEMO) feladatait, valamint shortlist-es példákat oldottak meg közösen. Az ebédet követően a diákok kisebb csoportokban folytatták a gondolkodást, majd délután a megoldásokat közösen megbeszélték. A hét közepén, szerdán délelőtt a matekosok csapatversenyen mérhették össze tudásukat.

A fizika szekcióban tizenhat diák dolgozott három táborvezető irányításával. A csoportok minden nap többféle feladattípust kaptak – elméleti, mérési, numerikus és úgynevezett „képzetes” problémákat –, amelyek megoldásaira kapott pontok alapján alakult ki a tábori pontverseny végeredménye. A feladatok során a diákok nemcsak számoltak, hanem méréseket is végeztek, és betekintést kaptak a magasabb szintű fizikai gondolkodásba. Emlékezetes volt Kondákor Márk keddi esti előadása „Vezetés a sávon belül!” címmel. Ezt a fizikások számára tartotta a szálloda konferenciatermében, de több matekos is beült az előadásra. A tábor utolsó „versenynapján” a csapatoknak egy olyan láncreakciót kellett megalkotni, amely minél több elemből (például pingponglabdákból, könyvdominókból) állt, és minél tovább volt mozgásban. Néhányan a fák között dolgoztak, de az egyik csapat például a foci pályán építette meg művét. A láncreakciók pontozásán minden fizikás táborozó részt vett, és hatalmas izgalommal figyelték a labdák gurulását, a székek borulását és a vizespalackok eldőlését.

A mindennapokat svédasztalos reggeli, közös ebéd és vacsora tagolta, a reggeli bundáskenyér különösen népszerűnek bizonyult.

A tanulás mellett jutott idő szabadidős programokra is. A diákok gyakran kártyáztak, röplabdáztak. A szerda délután teljesen a kikapcsolódásé volt: az egész tábor a közeli gunarasi strandon fürdött, pihent, csúszdázott.

A pénteki zárónapon ismertették a pontversenyek eredményeit, és a táborvezetők értékelték az egész heti munkát, a diákok pedig a szervezők és mentorok munkáját köszönték meg.

Az utolsó este hagyományos tábortüze elmaradt ugyan a tűzgyújtási tilalom miatt, de az esti közös énekléssel ilyesmi nem történhetett meg, a két szekció együtt búcsúztatta a tábor gitárszó és körtemuzsika kíséretével.

A dombóvári KöMaL-tábor idén is bizonyította, hogy a természettudományos érdeklődés és a jókedv kéz a kézben járhat: a résztvevők nemcsak tudásban, hanem közösségi élményben is gazdagodtak. A közös gondolkodás, a versenyek és a baráti beszélgetések mind hozzájárultak ahhoz, hogy a tábor emléke sokáig megmaradjon a diákokban.

Sütő Áron (*Egri Dobó István Gimnázium*) históriás énekekben is megemlékezett a táborról:

Σ KöMaL-tábor

Szummáját írom KöMaL táborának,
Megszállásának, viadaljának,
Szégyönvallását sok feladatnak,
Nagy vigasságát majd' minden csapatnak.

Vasárnap négy volt, hogy megérkezőnk,
Barátot sokat ottan üdvözlénk,
Az újakkal meg megismerkedünk,
Ezután együtt étkezni elmenénk.

Másnap aztán, hogy megreggelizünk,
A fizikában el is merülünk,
Sok feladatot kardélre hányánk,
Mérés, elmélet, numerikus várt ránk.

Merőben más másnap sem történe,
Szerda azonban szépet ígére,
Strandolni menénk, ez évben végre,
Megintcsak csudás, ragyogó napfénybe'.

Csütörtök, újra sok a feladat,
Estig dolgozik az összes csapat,
Táborvezetők nem nyugodhatnak,
Újra és újra sok-sok kérdést kapnak.

Délután jöttek az eredmények,
Eredményei sok fejtörésnek,
Táborlakóknak örömeinek,
A szervezői, örök segítségnek.

Éneklés jöve e napon este,
Dalolt közösen táborunk népe,
Éjfélig voltunk a sötétségbe',
És aztán gondolánk, de kár, hogy vége.

Urak halljatok szép csuda dolgot,
Mint e hét nekünk ada vígságot,
Mutata hozzánk irgalmasságot,
Csak szervezőknek áda bosszúságot.

Étekben ekkor, s máskor sincs hiány,
Ki-ki annyit esz', amennyit kíván,
Vacsora után tábornemnyitítás,
S este még játék, csapatalakítás.

Nyolc óra táján mi összegyűlünk,
Megoldásokról szót, hogy ejtenénk,
Majd elméletről elcseverészünk,
Sötétedésig széjjel nem széledünk.

Majd kezdünk bátran, alkonyattájba',
Nem másba, kvantummechanikába,
Képzeletünk ez jól felkavarta,
Sokak érzelmit kissé megzavarta.

Péntekre emígy nem juta már más,
Csak láncreakció-konstruálás,
Mennél több darab mozogjon soká,
(E feladványba' sokan megizzadánk. . .)

Mi a Kaposig eztán sétálánk,
Krumpliágyúunkat mert kipróbálnánk,
Útközben aztán jól megvitatánk,
Programozásnak néhány gondját-baját.

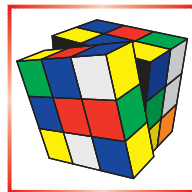
Nékem e hét már negyedik vala,
Épp ezért, sajnos, utolsó vala,
Érzésem ezért a hála vala,
Hogy még idén is ott lehettem vala.

Már csak egy van, mi mondandó hátra,
Köszönet ezért, hogy kinek járna,
Éljen soká Salamon Mária,
Meg Adél, Balázs, Bogdán s Márk, a „szakma”!

(A tábori beszámoló *Papp Emese Petra*, *Balla Donát*, *Morvai Várkony*, *Pázmándi József* és *Sütő Áron* írása alapján készült.)

Rejtvények, ördöglakatok

A Hanoi tornyai feladvány gráfja



Rovatunkban minden hónapban valamilyen szórakoztató matematikai fejtörőt mutatunk be. Ezek között fontos helyet foglalnak el a különböző kirakós játékok, topológiai feladványok, ördöglakatok és a matematikát felhasználó bűvészmutatványok.

Manapság szinte mindent meg lehet találni az interneten, de az igazi élményt az adja, ha a feladatokat magunk oldjuk meg, a bűvészmutatványok trükkjeit mi találjuk ki, és a szükséges kellékeket is mi tervezzük meg és készítjük el. Próbáljuk meg a feladatokat továbbgondolni, általánosítani, igyekezzünk új feladatokat kitalálni.

A Hanoi tornyai egy olyan feladvány, amelyben három függőleges pálcán van n db, különböző külső átmérőjű lyukas korong [2]. A hagyományos kiindulási állapotban a bal szélső pálcán van az összes korong, fentről lefelé növekvő méretben, a célállapot pedig ugyanez a korongpiramis, csak a jobb szélső pálcán. Két egyszerű szabályt kell betartani: minden lépésben valamelyik pálcát legfelső korongját tehetjük egy másik pálcára tetejére, továbbá semelyik korongot sem szabad nála kisebb korongra tenni. Igazolható, hogy a szükséges lépésszám $2^n - 1$, azaz minden egyes korong hozzáadásával lényegében megduplázódik.

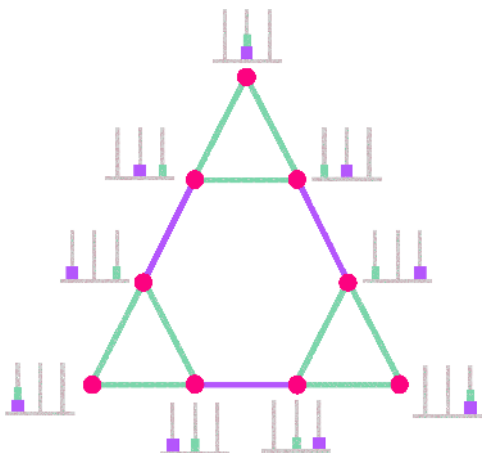
A 2024. szeptemberi [1] és novemberi [5] számokban már találkoztunk gráffal modellezhető feladványokkal. A Hanoi tornyai játék is ilyen, ráadásul az egyik legszebb gráffal rendelkezik. Az állapotokat reprezentáló csúcsok alkalmas geometriai elhelyezésével a Sierpiński-háromszög [3] egy részgráfja adódik. A Hanoi tornyai rekurzív jellegét a gráfjaik is visszatükrözik: bármelyik Hanoi-gráf részgráfja minden, nála nagyobb korongszámú Hanoi-gráfnak.

A gráffal modellezhető feladatok egy részében nem feltétlenül szembetűnő a gráf geometriája. (*Geometriai gráfnak* nevezik a síkban lerajzolt gráfokat, ahol tehát a csúcsok koordinátáinak is jelentősége van.) Lehet, hogy csak nem túl szerencsésen rendeztük el a csúcsokat, ezért nem igazán látható az élek által meghatározott struktúra. Ha azonban ügyesen választjuk meg a csúcsok helyét, a gráf azt is megmutatja magából, ami korábban rejtve maradt. Egyes játékoknál – sőt, talán inkább ez a tipikus – az is előfordulhat, hogy akármilyen ügyesen is helyezzük el a csúcsokat, a gráf továbbra sem mutat többet magából.

A Hanoi tornyai feladat esetében azonban egy kivételesen szép, rekurzív minta jelenik meg, egyike a legismertebb és a legkorábban felrajzolt fraktáloknak. Remek példája annak, amikor a matematika különböző területei találkoznak. Érdekes, hogy e kapcsolat feltárására bő hetven évet kellett várni [4].

Ha csak egyetlen (zöld) korongunk van, azt bármelyik másik pálcára áttehetjük. Az 1-korongos Hanoi-gráf tehát egy háromszög. Célszerű már itt bevezetni az él színezését: az él színe a mozgatott korong (esetünkben zöld) színével egyezzen meg.

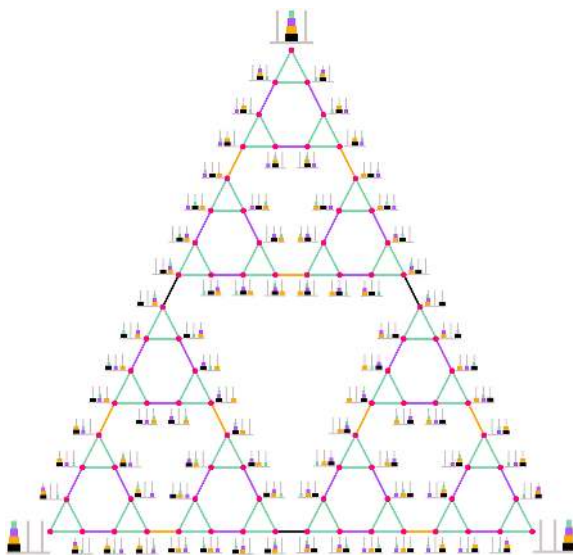
Adjunk hozzá egy második, nagyobb (lila) korongot is! Ekkor attól függően, hogy a lila korong melyik pálcán van, három darab zöld háromszöget kapunk, hiszen a zöld korong mozgását a lila továbbra sem akadályozza. A három



1. ábra. A 2-korongos Hanoi tornyai feladat gráfja

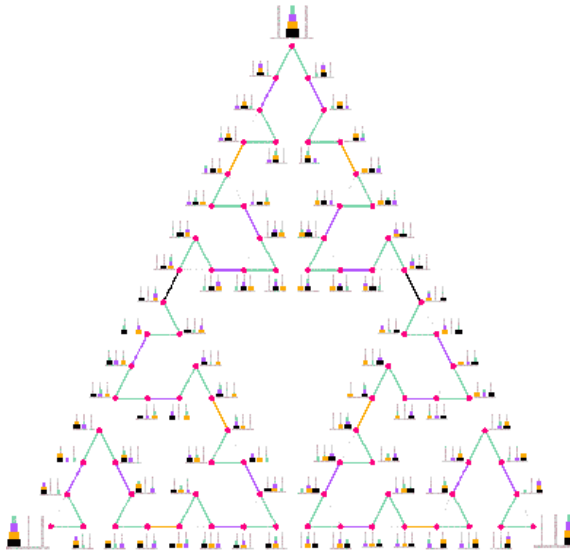
zöld háromszög az 1. ábra szerint kapcsolódik egymáshoz lila élekkel. Sokan már sejthetik, mi történik további korong(ok) hozzáadása esetén. A 2. ábra a 4-korongos Hanoi-tornyok gráfját mutatja. Az, hogy a legnagyobb (fekete) korong melyik pálcán helyezkedik el, a gráf egyik „harmadát” határozza meg. Mindegyik harmad megfelel az eggyel kisebb korongszámú Hanoi-tornyok gráfjának, ha figyelmen kívül hagyjuk a fekete korongot: bármelyik harmad ± 120 fokos elforgatottja a másik kettő.

A gráfban három fekete él van, hiszen a legnagyobb korongot csak akkor tudjuk mozgatni, ha az összes többi korong egyetlen pálcán van – ilyen állapotból három pár van, a nekik megfelelő csúcsok között futnak a fekete élek.



2. ábra. A 4-korongos Hanoi tornyai feladat gráfja

Tekintsük a hagyományos feladványt: kezdetben minden korong a bal oldali pálcán van, és juttassuk el az összes korongot a jobb oldali pálcára. A megoldás útvonala a 2. ábrán egy nyílegyenes, vízszintes út a nagy háromszög vízszintes oldala mentén. Aki próbálkozott már a Hanoi tornyai játékkal, bizonyára felismeri a megoldás menetét.



3. ábra. Egy Hamilton-út a 4-korongos Hanoi tornyai feladat gráfjában

Még izgalmasabb, ha tetszőleges kiindulási, illetve célállapotot megengedünk, akár egyidejűleg. Legyen például a kiindulási állapot az, amelyikben a fekete korong középen, az összes többi a jobb oldalon van. A célállapotban pedig legyen a fekete korong a jobb oldalon, az összes többi pedig középen. Keressük meg a 2. ábra alapján a legrövidebb utat, azaz a legkevesebb lépést igénylő megoldást! Hányszor helyeztük át a fekete korongot? Természetesen könnyen lehet a fekete korong egyetlen áthelyezésével is megoldást találni, de az majdnem kétszer annyi lépést igényel.

Végezetül a 3. ábra a 4-korongos Hanoi tornyai feladvány gráfjában mutat egy Hamilton-utat.

Hivatkozások

- [1] Kós Géza: Átkelés a folyón, KöMaL, 2024. szeptember.
- [2] F. É. A. Lucas: La Tour d'Hanoï, 1883. https://www.cs.wm.edu/~pkstoc/page_1f.html, https://www.cs.wm.edu/~pkstoc/page_2f.html
- [3] W. Sierpiński: Sur une courbe dont tout point est un point de ramification, C. R. A. S. 160, (1915) 302–305.
- [4] I. Stewart (1987): Another Fine Math You've Got Me Into, Oxford University Press
- [5] Vigh Viktor: Gráffal modellezhető logikai játékok, KöMaL, 2024. november

Jó szórakozást!

Bozóki Sándor



Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire

I. rész

1. Két pozitív szám számtani közepe 205, a számtani és mértani közepük különbsége 160. Melyik ez a két szám? (11 pont)

2. a) Számítsa ki $x \in \mathbb{R}$ értékét, ha $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$, valamint $A(x; 7)$, $B(4; -1)$ és $C(x - 11; -4)$. (8 pont)

b) Adja meg az $a)$ részben kapott $\triangle ABC$ háromszög súlypontját. (2 pont)

c) Mekkora az $a)$ részben kapott $\triangle ABC$ háromszög területe? (3 pont)

3. a) Határozza meg az

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \quad f(x) = -3 \cos(4x) + 2$$

függvény értékkészletét. (6 pont)

b) Számítással igazolja, hogy a

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \quad g(x) = 2025x^3 - 2026x$$

függvény páratlan. (6 pont)

4. a) Egy egyenes folyó mentén fekvő téglalap alakú telek folyóval párhuzamos oldalának hossza a téglalap másik oldalhosszának a négyszerese. A telek folyó felőli oldalán nincs kerítés, a másik három oldal mentén lévő kerítés együttes hosszúsága 600 méter. Mekkora a telek területe? (3 pont)

b) Egy másik folyóparti, téglalap alakú telek körbekerítésére szintén 600 méter hosszúságú kerítést használnak fel úgy, hogy a folyópartra nem építenek kerítést, de közben a telek területe a lehető legnagyobb legyen. Mekkora az így kapott telek területe? (8 pont)

c) Hány osztója van a $(-45\,000)$ -nek? (4 pont)

II. rész

5. a) Adott az $e: x - y = 8$ egyenletű egyenes és a $k: x^2 + y^2 - 6x + 4y + 4 = 0$ egyenletű kör. Állapítsa meg az e egyenes és a k kör kölcsönös helyzetét. Ha van(nak), adja meg a közös pont(ok) koordinátáit. (8 pont)

b) Adott a koordinátasíkon a $P(3; -5)$ és a $Q(6; -2)$ pont. Jelöljük rendre P_1 -gyel és Q_1 -gyel a P , illetve a Q pont x tengelyre eső merőleges vetületét; P_2 -vel és Q_2 -vel pedig a P , illetve a Q pont y tengelyre eső merőleges vetületét. Mekkora a $Q_1P_1Q_2P_2$ négyszög kerülete? (5 pont)

c) Mekkora a $Q_1P_1Q_2P_2$ négyszög területe? (3 pont)

6. a) Anna, Bogi és Cili unokatestvérek. Hat év múlva Bogi annyi idős lesz, mint most Anna. Hét év múlva Anna 9-szer annyi idős lesz, mint most Cili. Nyolc év múlva hárman együtt 42 évesek lesznek. Hány évesek most a lányok? (10 pont)

b) Oldja meg a $\left(\frac{2}{5}\right)^{\ln(x)} \geq 6,25$ egyenlőtlenséget a valós számok halmazán. (6 pont)

7. a) Bizonyítsa be, hogy a tízes számrendszerben felírt $2,0\dot{2}\dot{5}$ szám racionális. (6 pont)

b) Mutassa meg, hogy a $2 \cdot \lg 7$ irracionális. (5 pont)

c) Számítsa ki az $\int (5x^2 - 3x^9 + 8x)dx$ határozatlan integrált! (5 pont)

8. Tekintsük a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = x^3$, illetve $g(x) = 2x + 1$ hozzárendelési szabállyal megadott két függvényt. Adja meg az alábbi összetett függvények hozzárendelési szabályát és deriváltfüggvényét.

a) $(f \circ g)(x) =$ (2 pont) b) $(f \circ g)'(x) =$ (3 pont)

c) $(f \circ f)(x) =$ (2 pont) d) $(f \circ f)'(x) =$ (2 pont)

e) $(g \circ f)(x) =$ (2 pont) f) $(g \circ f)'(x) =$ (2 pont)

g) $(g \circ g)(x) =$ (2 pont) h) $(g \circ g)'(x) =$ (1 pont)

9. a) Töhötöm számegyenesen ábrázolta a $[-5; 8]$ intervallumot, majd csukott szemmel rábökött az egyik pontjára. Mekkora a valószínűsége, hogy Töhötöm a $[-1; 2]$ intervallum egyik pontjára bökött rá, ha a választás valószínűsége egyenesen arányos az intervallum hosszával? (3 pont)

b) Igazolja, hogy a $[-5; 8]$ és a $[-1; 2]$ intervallum számossága egyenlő. (5 pont)

c) Hányféleképpen választható ki pontosan két szám a Pascal-háromszög felső öt sorából úgy, hogy összegük páros legyen? (Két kiválasztás különböző, ha legalább az egyik számot másik helyről választottuk a Pascal-háromszögből.) (4 pont)

d) Hányféleképpen választható ki legalább hét szám a Pascal-háromszög felső öt sorából úgy, hogy szorzatuk páratlan legyen? (Két kiválasztás különböző, ha legalább az egyik számot másik helyről választottuk a Pascal-háromszögből.) (4 pont)

Kozma Katalin Abigél

Győr

Megoldásvázlatok a 2025./7. szám matematika gyakorló feladatsorához

I. rész

1. Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket.

a) $\frac{x}{x-1} + \frac{2x+1}{x+1} = \frac{3x+5}{x^2-1}$, (5 pont)

b) $\cos 2x + 2\sin x + 3 = 0$. (5 pont)

Megoldás. a) $x \neq \pm 1$.

$$\frac{x}{x-1} + \frac{2x+1}{x+1} = \frac{3x+5}{(x-1)(x+1)} \quad / \cdot (x-1)(x+1),$$

$x(x+1) + (x-1)(2x+1) = 3x+5$, rendezés és egyszerűsítés után: $x^2 - x - 2 = 0$, ennek gyökei: $x_1 = -1$; $x_2 = 2$. Az értelmezési tartomány miatt az egyenlet megoldása: $x = 2$.

Ellenőrzés: $\frac{2}{1} + \frac{5}{3} = \frac{11}{3}$, ami valóban teljesül.

b) $1 - 2\sin^2 x + 2\sin x + 3 = 0$; $\sin^2 x - \sin x - 2 = 0$; eszerint $\sin x$ lehetséges értékei -1 és 2 , ám ez utóbbi nem eleme az értékkészletnek, így az egyenlet megoldása: $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ellenőrzés: a kapott x értékekre $\cos(2x) = -1$, $\sin(x) = -1$, tehát valóban teljesül az eredeti egyenlőség.

2. Adott az $f(x) = |x+1|$, ($x \in \mathbb{R}$), és a $g(x) = \sqrt{x} - 2$, ($x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$) függvény.

a) Adja meg a $g(x)$ függvény inverzének értelmezési tartományát és hozzárendelési utasítását. (4 pont)

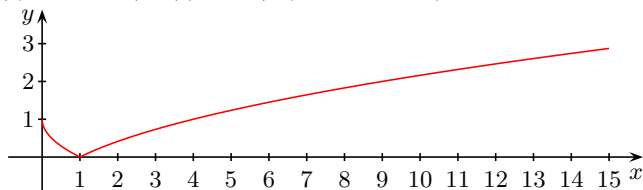
b) Ábrázolja az $f \circ g$ függvény grafikonját a $[0, 16]$ intervallumon. (5 pont)

(Az $f \circ g$ korábbi jelölése: $f(g(x))$.)

c) Határozza meg a $g \circ f$ függvény összes zérushelyét. (4 pont)

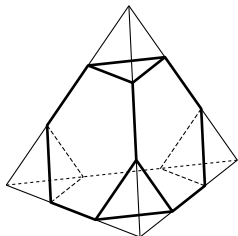
Megoldás. a) Cseréljük fel a változókat: $x = \sqrt{y} - 2$, $y \geq 0$, ahonnan $x \geq -2$; $y = (x+2)^2$, tehát a $g(x)$ függvény inverze: $g^{-1}(x) = (x+2)^2$, ($x \geq -2$, $x \in \mathbb{R}$).

b) $f \circ g = |\sqrt{x} - 2 + 1| = |\sqrt{x} - 1|$, ($x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$).



c) $g \circ f = \sqrt{|x+1|} - 2$; $\sqrt{|x+1|} - 2 = 0$; $\sqrt{|x+1|} = 2$; $|x+1| = 4$, ahonnan $x_1 = -5$; $x_2 = 3$. A függvény zérushelyei: $x_1 = -5$; $x_2 = 3$.

Ellenőrzés: $\sqrt{|-5+1|} - 2 = \sqrt{4} - 2 = 0$, illetve $\sqrt{|3+1|} - 2 = \sqrt{4} - 2 = 0$.



3. Egy szabályos tetraéder adott csúcsából induló éleinek a csúcshoz közelebbi harmadolópontjain átmenő síkkal lemetsettük a test csúcshoz közelebbi részét. Mindegyik csúcsnál elvégeztük ezt a csonkolást, és az ábra szerinti, 10 cm élű poliéderhez jutottunk.

a) Mekkora a poliéder felszíne és térfogata? (9 pont)

b) Mekkora szöget zár be egymással egy hatszög és egy vele szomszédos háromszög? (5 pont)

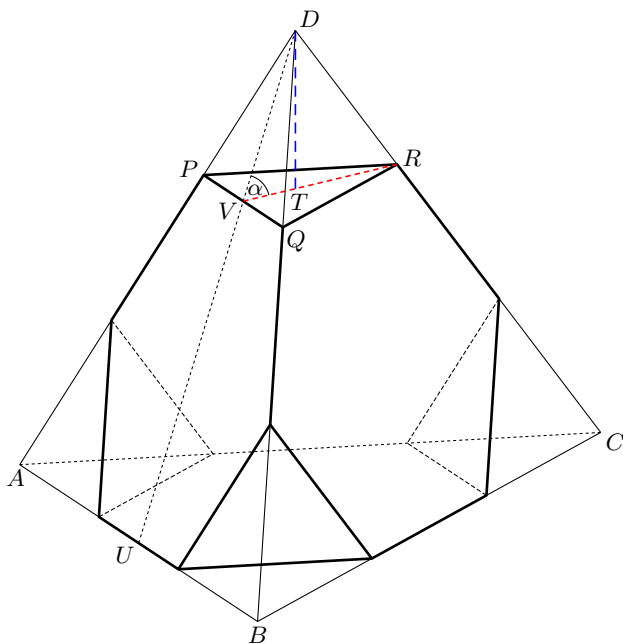
Megoldás. a) A felszint négy szabályos hatszög, és négy szabályos háromszög alkotja. A szabályos hatszögben hat olyan szabályos háromszög található, mint a levágott részeknél kialakult szabályos háromszög, így a test felszíne $6 \cdot 4 + 4 = 28$ darab, 10 cm oldalú szabályos háromszög területével ($T = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$) egyenlő:

$$A = 28 \cdot \frac{10^2\sqrt{3}}{4} = 700\sqrt{3} \approx 1212,4 \text{ cm}^2.$$

A test a csonkolás előtt egy 30 cm élű szabályos tetraéder volt, amelynek térfogatát legegyszerűbben a $V = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3$ képlettel számíthatjuk ki, ahol a a tetraéder éle. Ha ebből kivonjuk a négy levágott rész térfogatát – amelyet ugyanezzel az összefüggéssel kapunk –, akkor így megkapjuk a test térfogatát:

$$V = \frac{\sqrt{2}}{12} (30^3 - 4 \cdot 10^3) \approx 2710,6 \text{ cm}^3.$$

b) A keresett szög a szabályos tetraéder lapjai által bezárt szög mellékszöge.



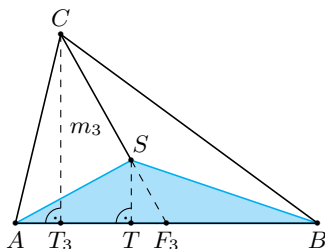
Az ábrán látható VTD derékszögű háromszög VT befogója a VD átfogó harmada, mivel $PQD\Delta \cong PQR\Delta$ és a VR szakasz a PQR szabályos háromszög súlyvonala, amelynek T harmadolópontja (a szabályos háromszög súlypontja) a VTD derékszögű háromszög derékszögű csúcsa, tehát: $\cos \alpha = \frac{1}{3}$, ebből $\alpha = 70,53^\circ$, így a lapok $109,47^\circ$ -os szöget zárnak be egymással.

4. Döntse el az alábbi A), B), C) állításokról, hogy igazak, vagy hamisak. Válaszeit indokolja!

A) Egy háromszög súlypontját a csúcsokkal összekötő szakaszok olyan kisebb háromszögekre bontják a háromszöget, amelyek területe egyenlő. (6 pont)

B) Nincs olyan racionális együtthatójú másodfokú egyenlet, amelynek egyik gyöke racionális, a másik irracionális szám. (4 pont)

C) Ha egy adott év napjaiból kiválasztunk 30-at, nem biztos, hogy lesz közöttük legalább öt olyan, amelyik a hét ugyanazon napjára esik. (4 pont)



Megoldás. A) Az állítás igaz. Belátjuk, hogy az ABS háromszög területe az ABC háromszög területének harmada. S a CF_3 súlyvonal oldalhoz közelebbi harmadolópontja, valamint a $CT_3F_3\Delta$ hasonló az $STF_3\Delta$ -höz (szögeik páronként egyenlők), ezért az $ABS\Delta$ c oldalához tartozó ST magasság harmada az m_3 -nak, így a területe is. Ugyanígy igaz ez a másik két kis háromszögre is, tehát területeik egyenlők.

B) Az állítás igaz. Indirekt módon tegyük fel, hogy van ilyen egyenlet: $ax^2 + bx + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{Q}$, $a \neq 0$, ahol az egyenlet gyökeire: $x_1 \in \mathbb{Q}$, $x_2 \in \mathbb{Q}^*$.

Mivel $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, amely racionális szám, ebből kivonva x_1 -et, szintén racionális számot kapunk, amely nem lehet egyenlő az x_2 irracionális számmal. Ellentmondásra jutottunk, tehát a feltevésünk hamis, így a tagadása igaz.

C) Az állítás hamis. Indoklás:

1. megoldás. Indirekt módon tegyük fel, hogy a hét minden napjából legfeljebb 4 van, ekkor legfeljebb $4 \cdot 7 = 28$ napot tudnánk választani, ámde 30 napot választottunk, ez ellentmondás, így a bizonyítást befejeztük.

2. megoldás. Az általános skatulyaelvet használva legalább $nk + 1$ golyót téve n skatulyába, lesz legalább egy skatulya, amelyben több, mint k darab golyó lesz. Jelen esetben a skatulyák a napok, 7 darab van. Mivel $30 \geq 4 \cdot 7 + 1$, így a skatulyaelv miatt lesz, amelyik napból több, mint 4, tehát legalább 5 van.

II. rész

5. Az a_n számsorozat első tagja $a_1 = 1$, és a második tagtól kezdve minden tagja kiszámítható a következő rekurzív képlet segítségével: $a_{n+1} = a_n + 2n$.

a) Igazolja, hogy $a_n = n^2 - n + 1$. (3 pont)

b) Határozza meg az $\{a_n\}$ sorozat első 11 tagjának mediánját, alsó és felső kvartilisét. (2 pont)

c) Bizonyítsa be (teljes indukcióval vagy más módszerrel), hogy az $\{a_n\}$ sorozat első n tagjának összege:

$$S_n = \frac{n(n^2 + 2)}{3}. \quad (6 \text{ pont})$$

Választunk egy $n < 1000$ pozitív egész számot, majd képezzük az $\{a_n\}$ sorozat első n tagjának átlagát.

d) Mennyi a valószínűsége, hogy a kapott átlag egész szám, ha minden $n < 1000$ pozitív egész kiválasztásának ugyanakkora a valószínűsége? (5 pont)

Megoldás. a) Mivel $a_n = a_{n-1} + 2(n-1) = a_{n-2} + 2(n-2) + 2(n-1) = \dots = a_1 + 2(1 + 2 + \dots + (n-2) + (n-1)) = 1 + 2 \cdot \frac{(n-1)n}{2} = 1 + n(n-1) = n^2 - n + 1$, ezért az állítást beláttuk.

b) A sorozat első 11 tagja: 1; 3; 7; 13; 21; 31; 43; 57; 73; 91; 111. A medián 31, az alsó kvartilis 7, a felső 73.

c) Teljes indukcióval bizonyítunk. Először is: $S_1 = 1 = \frac{1 \cdot (1+2)}{3}$. Ha $S_k = \frac{k(k^2+2)}{3}$ (indukciós feltétel), akkor

$$S_{k+1} = S_k + a_{k+1} = \frac{k(k^2+2)}{3} + (k+1)^2 - (k+1) + 1 = \frac{k^3 + 3k^2 + 5k + 3}{3},$$

másképp

$$S_{k+1} = \frac{(k+1)[(k+1)^2+2]}{3} = \frac{(k+1)(k^2+2k+3)}{3} = \frac{k^3+3k^2+5k+3}{3}.$$

A két kifejezés azonos, a „következőre öröklődést” igazoltuk, ezzel a bizonyítást befejeztük.

Más módszerrel: mivel $a_n = n^2 - n + 1$, a tagok összege úgy is kiszámítható, hogy az első n pozitív egész szám négyzete összegéből kivonjuk az első n pozitív egész szám összegét, és hozzáadjuk n -szer az 1-et. Így a sorozat első n tagjának összege

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{3n(n+1)}{6} + \frac{6n}{6} = \frac{n[2n^2+3n+1-3n-3+6]}{6} = \frac{n(n^2+2)}{3}.$$

$$d) \bar{S}_n = \frac{S_n}{n} = \frac{n^2+2}{3} \text{ pontosan akkor egész, ha } n^2+2 \text{ osztható 3-mal.}$$

Ha n maradéka 3-mal osztva: 1; 2; 0,

akkor n^2 maradéka 3-mal osztva: 1; 1; 0,

n^2+2 maradéka 3-mal osztva pedig: 0; 0; 2.

Tehát n^2+2 akkor osztható 3-mal, ha n nem osztható 3-mal. Az 1000-nél kisebb pozitív egész számok közül $\frac{999}{3} = 333$ osztható 3-mal, a többi $999 - 333 = 666$ nem,

így a keresett valószínűség: $P(A) = \frac{666}{999} = \frac{2}{3}$.

6. A H halmazt azok az ötpontú egyszerű gráfok alkotják, amelyek pontjai egy adott konvex ötszög A, B, C, D, E csúcsai.

a) Hány eleme van H -nak? (3 pont)

b) Rajzolja le az összes H -beli három élű gráfot, amelyek páronként nem izomorfak egymással. (5 pont)

c) Hány olyan gráf van H -ban, amely összefüggő és van benne kör? (8 pont)

Megoldás. a) Az ötpontú teljes gráfnak összesen $\binom{5}{2} = 10$ éle van, egy adott gráf esetén ezek mindegyikéről függetlenül dönthetünk, hogy behúzzuk, vagy nem, ezért $2^{10} = 1024$ ilyen gráf van.

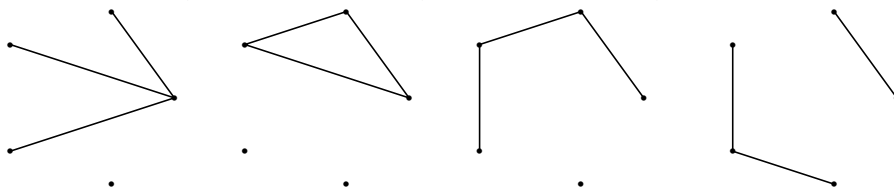
Vagy másképp: egy gráf a 10 él közül tartalmazhat 0, 1, 2, ..., 9 vagy 10 élet. Az összes lehetőség:

$$\binom{10}{0} + \binom{10}{1} + \binom{10}{2} + \dots + \binom{10}{10} = 2^{10} = 1024.$$

Tehát H -nak 1024 eleme van.

b) Ha az öt pont fokait nemcsökkenő nagyság szerint összeadjuk, akkor a következő lehetőségek adódnak (egy pont foka legfeljebb 3): három él esetén összegük $6 = 0 + 0 + 0 + 3 + 3$; amely nem egyszerű gráf, illetve $6 = 0 + 0 + 1 + 2 + 3$; ez sem egyszerű gráf. Az ezután következő esetekben esetleg több gráf is rajzolható, megvizsgálva őket, kizárólag az alábbiak lesznek jók, azaz egyszerű gráfok:

$$6 = 0 + 1 + 1 + 1 + 3; \quad 6 = 0 + 0 + 2 + 2 + 2; \quad 6 = 0 + 1 + 1 + 2 + 2; \quad 6 = 1 + 1 + 1 + 1 + 2.$$



Mivel további lehetőség nincs, ez a négy különböző 3 élű, egymással páronként nem izomorf gráf található H -ban.

c) A négy élnél kevesebb élű ötpontú egyszerű gráfok nem lehetnek összefüggők, a hét vagy annál több élet tartalmazók pedig biztosan összefüggők, és tartalmaznak kört. Részletesen tehát a 4-, 5-, 6-élű gráfokkal kell foglalkoznunk. Ha egy négyélű H -beli gráf összefüggő, akkor fagráf, tehát nem lehet benne kör. Az ötélű (H -beli) gráfok mindegyikében van kör, de nem mindegyik összefüggő. Legyen két komponense, közülük az egyik izolált pont, a másiknak négy pontja van (nyilvánvaló, ha kettőnél több komponense volna, nem lehetne benne öt él). Ha ez a négy pontú komponens teljes gráf lenne, hat éle volna, mivel csak öt van, ezért ez hatféleképpen jöhet létre, így összesen $5 \cdot 6 = 30$ ilyen gráf van. Mivel $\binom{10}{5} = 252$ darab ötélű gráf közül 30 nem összefüggő, ezért 222 olyan, amely összefüggő és van benne kör. A hatélű (H -beli) gráfok közül csak azok nem összefüggők, amelyeknek egyik komponense négy pontú teljes gráf, ezek száma 5, a $\binom{10}{6} = 210$ -ból 205 összefüggő, és kört is tartalmaz. Összesen tehát $222 + 205 + \binom{10}{7} + \binom{10}{8} + \binom{10}{9} + \binom{10}{10} = 603$ összefüggő és körrel rendelkező gráf van az 1024 között.

7. Az origó középpontú 5 egység sugarú körön az olyan pontok, amelyeknek mindkét koordinátája egész szám, egy körbeírt sokszöget határoznak meg.

a) Mekkora a sokszög szögei?

(8 pont)

b) Számítsa ki az y tengely azon pontjainak második koordinátáját, amelyekből az $A(4;5)$ és $B(8;-3)$ pontok által meghatározott szakasz 45° -os szögben látszik.

(8 pont)

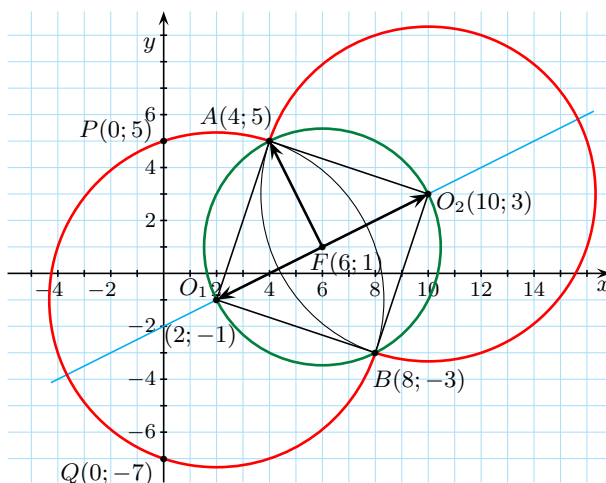
Megoldás. a) A kör egyenlete: $x^2 + y^2 = 25$. Keressük az egyenlet egész számpár megoldásait. A változók szimmetriája és második hatványa miatt elég az úgyneve-

zett alapmegoldásokat megadni, a többi az előjelek megváltoztatásával és a változók felcserélésével előállítható, tehát a sokszög szimmetrikus a koordinátatengelyekre, és ezek szögfelezőire.

Legyen $0 \leq x \leq y$, ekkor $x^2 + x^2 \leq 25$, $2x^2 \leq 25$, azaz $0 \leq x \leq 3$, tehát csak az $x = 0, 1, 2, 3$ egész számokat kell az egyenletbe helyettesíteni, amelyek közül az $x = 0$; $y = 5$, illetve az $x = 3$, $y = 4$ esetben kapunk y -ra egész számot. Az összes pontot láthatjuk az ábrán, amelyen az is látszik, hogy a síknegyedek belsejében levő csúcsoknál (pl. C, D) a szimmetria miatt ugyanakkorák a szögek (α), valamint a koordinátatengelyeken levő csúcsoknál szintén egyenlők a szögek (β), ezért a sokszögnek csupán két szögét kell kiszámítani.

A $\overrightarrow{BC} = (3; -1)$ vektor koordinátaiból: $\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{3}{1}$, ahonnan $\beta = 2 \cdot \operatorname{tg}^{-1}(3) \approx 143,130^\circ$. Ekkor az első síknegyed szögfelezőjére vonatkozó szimmetria miatt $\alpha = 45^\circ + 90^\circ + (90^\circ - \frac{\beta}{2}) \approx 153,435^\circ$. Tehát a tizenkétszögnek 4 darab $143,130^\circ$ -os és 8 darab $153,435^\circ$ -os szöge van.

b) Tudjuk, hogy a sík azon pontjainak mértani helye, amelyekből egy adott szakasz adott szög alatt látszik, két látószöggörív, amely (irányított) körívekhez tartozó középponti szögek az adott látószög kétszeresével egyenlők (kerületi és középponti szögek tétele). A látószög 45° , így a szóban forgó középponti szög most 90° , tehát a körív középpontja az AB szakasz Thalész-körének (zöld) és szakaszfelező merőlegesének (kék) metszéspontjában van.



Ezek a pontok az A, B pontokkal együtt egy négyzet csúcsai. Az AB szakasz F felezőpontjának koordinátái: $F(6; 1)$; innen $\overrightarrow{FA}(-2; 4)$. Forgassuk el az origó körül

$+90^\circ$ -kal $\overrightarrow{F\hat{A}}$ -t, majd adjuk hozzá a $(6;1)$ helyvektorhoz, így az egyik látókör középpontjához jutunk. $\overrightarrow{F\hat{A}}_{+90^\circ}(-4;-2)$, $(-4;-2) + (6;1) = (2;-1)$, tehát $O_1(2;-1)$, a másik ugyanígy $\overrightarrow{F\hat{A}}_{-90^\circ}(4;2)$, ahonnan $(4;2) + (6;1) = (10;3)$, azaz $O_2(10;3)$. A (piros) látókörívek sugara: $|\overrightarrow{O_1\hat{A}}(2;6)| = 2\sqrt{10}$, így egyenleteik:

$$k_1: (x-2)^2 + (y+1)^2 = 40; \quad k_2: (x-10)^2 + (y-3)^2 = 40.$$

Az y tengely pontjainak abszcisszája 0, az egyenletekbe beírva az elsőből $y_1 = -7$; $y_2 = 5$ adódik, a másodiknak nincs valós gyöke. Ezzel a kérdéses koordinátákat megkaptuk, a pontok: $P(0;5)$; $Q(0;-7)$.

8. a) Igazolja, hogy az $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$, $(x \in \mathbb{R})$ függvény grafikonjának nincs közös pontja az x tengellyel. (2 pont)

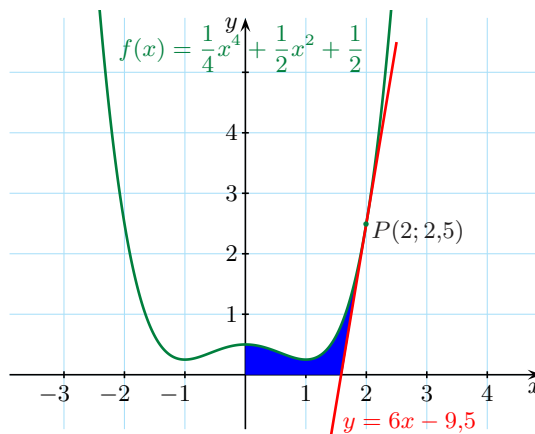
b) Határozza meg az $f(x)$ függvény globális és lokális szélsőértékhelyeit és szélsőértékeit. (6 pont)

c) Mekkora annak a zárt, korlátos síkidomnak a területe, amelyet az $f(x)$ függvény grafikonja, ehhez a grafikonhoz az $x_0 = 2$ abszcisszájú pontba húzott érintő és a két koordinátatengely bezár? (8 pont)

Megoldás. a) $\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}(x^4 - 2x^2 + 2) = \frac{1}{4}((x^2 - 1)^2 + 1)$ minden valós x értékre pozitív. Tehát a függvény grafikonjának valóban nincs közös pontja az x tengellyel.

b) $f'(x) = x^3 - x$ és $f''(x) = 3x^2 - 1$. $x(x^2 - 1 = 0)$ nullhelyei $x_1 = 0$; $x_{2,3} = \pm 1$ a lehetséges szélsőérték helyek. Mivel $f''(x) = 3x^2 - 1$; $f''(0) < 0$, így a 0-nál lokális maximuma van a függvénynek, értéke: $\frac{1}{2}$. Mivel $f''(1) > 0$ és $f''(-1) > 0$, így ezeken a helyeken lokális minimum van, amelyek értéke egyaránt $\frac{1}{4}$, ez egyúttal abszolút minimumérték is, mert $f(x) = \frac{1}{4}(x^2 - 1)^2 + \frac{1}{4} \geq \frac{1}{4}$.

c)



$f(2) = 2,5$, ezért az érintési pont $P(2; 2,5)$, az érintő meredeksége: $m = f'(2) = 6$, az érintő egyenlete: $y - 2,5 = 6(x - 2)$, $y = 6x - 9,5$. Az érintő az x tengelyt a $6x - \frac{19}{2} = 0$ egyenlet megoldása alapján a $\left(\frac{19}{12}; 0\right)$ pontban metszi.

$$t_1 = \int_0^2 \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \right) dx = \left[\frac{x^5}{20} - \frac{x^3}{6} + \frac{x}{2} \right]_0^2 = \frac{19}{15},$$

$$t_2 = \int_{\frac{19}{12}}^2 (6x - 9,5) dx = \left[3x^2 - 9,5x \right]_{\frac{19}{12}}^2 = \frac{25}{48},$$

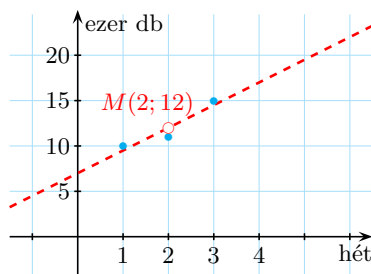
$t = t_1 - t_2 = \frac{179}{240} \approx 0,75$. A síkidom területe: $\frac{179}{240}$ területegység.

Megjegyzés. A t_2 elemi úton is kiszámítható. A derékszögű háromszög vízszintes befogója $2 - \frac{19}{12} = \frac{5}{12}$, a függőleges befogója $\frac{5}{2}$, tehát a területe: $t_2 = \frac{\frac{5}{12} \cdot \frac{5}{2}}{2} = \frac{25}{48}$.

9. a) Egy kereskedelmi vállalatnak a vásárlók palackvisszaváltási szokásairól készített felmérésén 500 olyan vásárlót kérdeztek meg, akik használták a visszaváltó automatát. A visszaváltó automatán a visszajáró összeget A) Bolti utalvány, B) Banki utalás, C) Jótekonysági felajánlás közül az egyiket kiválasztva lehet kérni. 398-an az A), 100-an a B) és 2-en a C) lehetőséget jelölték meg.

a) Mennyi a valószínűsége annak, hogy az 500 vásárlóból véletlenszerűen kiválasztva 20-at, közülük legfeljebb 16-an választották az A) lehetőséget? Az eredményt négy tizedesjegyre kerekítve adja meg. (5 pont)

Az egyik visszaváltó ponton az első héten 10 000, a következő héten 11 000, a harmadik héten pedig 15 000 terméket váltottak vissza. Ezek alapján készült a mellékelt ábra, amelyen a függőleges tengely egysége ezer darab terméket jelent.



b) Adjon meg egy olyan elsőfokú függvényt, amelynek grafikonja átmegy az $M(2; 12)$ ponton, és amely az $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$ helyen olyan értéket vesz fel, amelynek az $y_1 = 10$; $y_2 = 11$; $y_3 = 15$ értékektől való eltérésének négyzetösszege a lehető legkisebb. (9 pont)

A visszaváltott termékek anyagának típusát három csoportba sorolták: a (műanyag), b (fém), c (üveg). A fenti 500 vásárló közül arra a kérdésre, hogy milyen típusú palackokat szoktak visszaváltani, 380-an az a, b, c; 50-en az a, b; 24-en a b, c; 10-en az a, c választ adták. Azok száma, akik csak egyfajta terméket váltottak vissza, 3 : 2 : 1 arányban oszlott meg az a : b : c típusok között.

c) Hány vásárlónak volt „a” típusú palackja a visszaváltottak között? (2 pont)

Megoldás. a) A komplementer esemény valószínűsége:

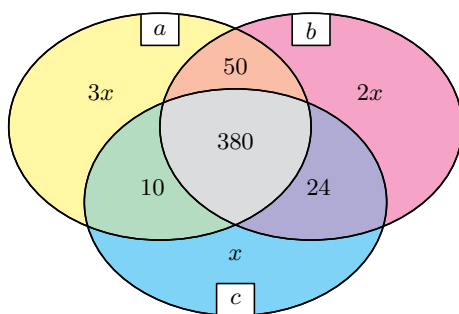
$$P(\bar{A}) = \frac{\binom{398}{17} \cdot \binom{102}{3} + \binom{398}{18} \cdot \binom{102}{2} + \binom{398}{19} \cdot \binom{102}{1} + \binom{398}{20}}{\binom{500}{20}} = 0,3903,$$

így az esemény valószínűsége: $P(A) = 1 - 0,3903 = 0,6097$.

b) Mivel az elsőfokú függvény $f(x) = mx + b$ grafikonja átmegy az $M(2; 12)$ ponton, $12 = 2m + b \Rightarrow b = 12 - 2m$, amely a megadott helyeken $12 - m$; 12 ; $m + 12$ értéket vesz fel. Ezeknek a 10; 11; 15 értékektől vett eltérése $m - 2$; -1 ; $3 - m$, vagyis a $g(m) = (m - 2)^2 + (-1)^2 + (3 - m)^2 = 2m^2 - 10m + 14$ függvény minimumhelyét kell meghatároznunk.

Elemi megoldás: $g(x) = 2m^2 - 10m + 14 = 2(m - 2,5)^2 + 1,5$ ez akkor a legkisebb, ha $m = 2,5$. A keresett elsőfokú függvény: $f(x) = 2,5x + 7$.

Differenciálással: $g'(m) = 4m - 10$, $0 = 4m - 10$, ahonnan $m = 2,5$; $g''(2,5) = 4 > 0$, az $m = 2,5$ helyen minimuma van a függvénynek.



c) Elkészítjük az alábbi Venn-diagramot: Összeadjuk az egyes tartományokba írt mennyiségeket:

$$380 + 50 + 24 + 10 + 6x = 500,$$

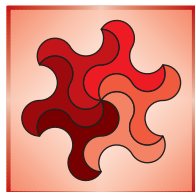
innen $x = 6$, tehát $380 + 50 + 10 + 3 \cdot 6 = 458$ vásárlónak volt műanyag palackja a visszaváltott palackok között.

Németh László

Fonyód

Helyesbítés. Kedves Olvasók! A szeptemberi szám emelt szintű feladatsorában az 5. a) feladat szövegébe sajnálatos sajtóhiba csúszott, a megjelent 20^2 helyett, mint az az októberi számban megjelent megoldásból is kiderül, $20p^2$ -nek kellett volna szerepelnie. Az esetleg okozott kényelmetlenségért elnézést kérünk.

A Szerkesztőség



Matematika feladatok megoldása

B. 5440 Egy háromszög oldalait az oldalegyeneselek mentén mindkét irányban meghosszabbítottuk, és mindegyik csúcs után felmértük még a csúccsal szemközi oldal hosszát. Mutassuk meg, hogy az így kapott hat pont egy körre illeszkedik.

(4 pont)

Javasolta: Róka Sándor (Nyíregyháza)

1. megoldás. Legyenek a háromszög csücsai A, B, C ; az oldalak hosszúságai a szokásos jelölések szerint a, b és c . Az AB , illetve AC szakaszokra az A -n túl felmért a hosszúságú szakaszok másik végpontjai legyenek D , illetve E . Ugyanezen módon a B -n túli meghosszabbítások végpontjai F és G , végül a C -n túli meghosszabbítások végpontjai H és K pontok az ábra szerint. Legyen továbbá az ABC háromszög beírt körének középpontja az I pont.

Ekkor $CE = CA + AE = b + a = BF + BC = CF$, vagyis ECF egyenlő szárú, tehát az ECF háromszög C -nél lévő belső szögfelezője szimmetriatengelye a háromszögnek, így az is igaz, hogy e szögfelező tetszőleges P pontjára $PE = PF$.

Ezenkívül, mivel CE illeszkedik a CA egyenesre és CB is illeszkedik a CF egyenesre, illetve mivel a pontokat kifelé vettük fel, az ABC háromszög C -nél lévő belső szögfelezője egybeesik az ECF háromszög C -nél fekvő szögfelezőjével, hiszen valójában ugyanannak a két egyenesnek a szögfelezőit vettük, így tehát $IE = IF$ is teljesül.

Hasonlóan $BF = BG = b$, illetve az FBG B -hez tartozó belső szögfelezője megegyezik az ABC B -hez tartozó belső szögfelezőjével, tehát ekkor a szögfelező hasonlóan szimmetriatengelye FBG -nek, vagyis $IF = IG$.

Logikai szimmetria miatt $IG = IH$, $IH = IK$, $IK = ID$ és $ID = IE$, vagyis $ID = IE = EF = IG = IH = IK$, tehát a hat pont rajta van egy I középpontú körön, a hat pont egy körön van.

Holló Martin (Budapest, Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. o. t.)

2. megoldás. Az első megoldás jelöléseit megtartva legyenek az ABC háromszög szögei – a kényelmesebb számolás érdekében – 2α , 2β , 2γ az ábra szerint, és határozzuk meg az ábrán látható egyes szögek nagyságát.

A DAE és HAG háromszögek egyenlő szárúak ($AD = AE = a$, $AG = AH = b + c$), mindkettő szárszöge 2α , így az alapon fekvő szögek mind $90^\circ - \alpha$ nagyságúak.

$$\angle ADE = \angle AED = \angle AGH = \angle AHG = 90^\circ - \alpha.$$

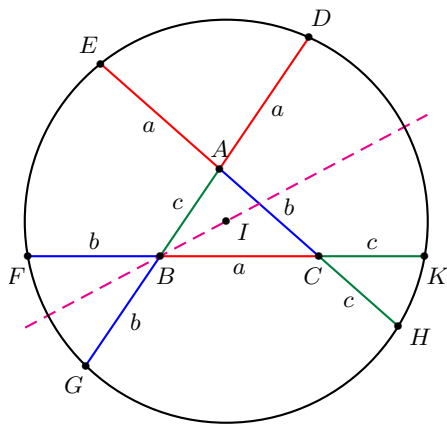
Ugyanilyen összefüggések írhatóak fel az ábra más hasonlóképpen létrejövő egyenlő szárú háromszögeire, ekkor az ábrán látható nagyságú szögekhez jutunk:

$$\angle BFG = \angle BGF = \angle BDK = \angle BKD = 90^\circ - \beta,$$

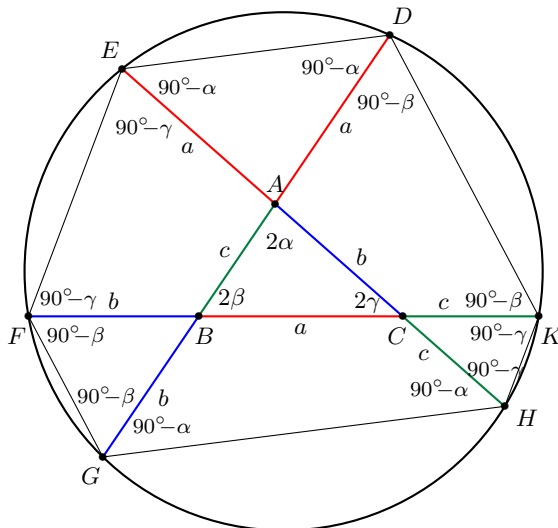
$$\angle CHK = \angle CKH = \angle CEF = \angle CFE = 90^\circ - \gamma.$$

Az $FGHK$ négyszögben

$\angle FKH + \angle FGH = 90^\circ - \gamma + 90^\circ - \alpha + 90^\circ - \beta = 270^\circ - (\alpha + \beta + \gamma) = 180^\circ$,
ezért $FGHK$ húrnégyszög.



1. ábra



2. ábra

A kerületi szögek tételének megfordítása alapján tudjuk, hogy mivel

$$\angle HKF = \angle HEF = 90^\circ - \gamma,$$

ezért $FHKE$ is húrnégyszög.

Az $FGKH$ és $FHKE$ húrnégyszögeknek három csúcsa azonos, a körülírt köreik megegyeznek a HKF háromszög körülírt körével, tehát $FGHKE$ húrötszög.

Az előzőekhez hasonlóan látjuk, hogy

$$\angle KHE + \angle EDK = 90^\circ - \gamma + 90^\circ - \alpha + 90^\circ - \beta = 180^\circ,$$

ezért $EDKH$ is húrnégyszög. Ennek a húrnégyszögnek három csúcsa – H , K és E – egybeesik az előző húrötszög három csúcsával, tehát körülírt köreik megegyeznek, a hat pont D , E , F , G , H , K egy körön van.

Kovács Benedek Noel (Budapest, Fazekas M. Gyak. Ált Isk. és Gimn., 12. o. t.)

A feladatra összesen 97 versenyző és csapat küldött megoldást. 4 pontos 89, 3 pontos 2 versenyző dolgozata. 2, illetve 1 pontot kapott 1–1 versenyző. 0 pontos 4 tanuló dolgozata.

Megjegyzés. Az első megoldás lényegében megegyezik a honlapon is szereplő megoldások egyikével.

B. 5459. Határozzuk meg azokat az $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ függvényeket, amelyekre bármely racionális x , y számok esetén teljesül, hogy

$$f(x) + f(y) = \frac{f(x+2y) + f(2x-y)}{5}.$$

(5 pont)

Javasolta: Füredi Erik (Budapest)

Megoldás. $y = x$ helyettesítéssel: $2f(x) = \frac{f(3x) + f(x)}{5}$.

$y = -x$ helyettesítéssel: $f(x) + f(-x) = \frac{f(-x) + f(3x)}{5}$.

Kivonva az elsőből a másodikat $f(x) - f(-x) = \frac{f(x) - f(-x)}{5}$, amiből rendezés után $f(x) = f(-x)$ adódik, vagyis az f függvény páros.

Állítás. Minden $n \in \mathbb{Z}$ és $x \in \mathbb{Q}$ esetén fennáll, hogy $f(nx) = n^2 f(x)$.

Az állítás bizonyítása. Az f függvény páros tulajdonsága miatt elegendő $n \geq 0$ esetén bizonyítanunk. Ezt n szerinti indukcióval tesszük.

Alapesetek:

- $n = 0$: az $x = y = 0$ helyettesítéssel $2f(0) = \frac{2}{5}f(0)$, amiből $f(0) = 0$.
- $n = 1$ triviálisan teljesül.
- $n = 2$: $y = 0$ helyettesítéssel és az $f(0) = 0$ felhasználásával $f(x) = \frac{f(x) + f(2x)}{5}$, rendezve $f(2x) = 4f(x)$.

- $n = 3$: az y helyébe is x -et írva $2f(x) = \frac{f(3x) + f(x)}{5}$, rendezve $f(3x) = 9f(x)$.

Indukciós lépés. Tegyük fel, hogy az állítást igazoltuk n -ig ($n \geq 3$), belátjuk $(n+2)$ -re.

1. eset: $n = 2k$ (ahol $k \geq 1$ egész). Ekkor az $x = (k+1)x$ és $y = 0$ helyettesítéssel

$$f((k+1)x) + f(0) = \frac{f((k+1)x) + f(2(k+1)x)}{5}.$$

Mivel $f(0) = 0$ és $k+1 \leq n$, ezért az indukciós feltevés alapján átírható így:

$$(k+1)^2 f(x) = \frac{(k+1)^2 f(x) + f(2(k+1)x)}{5},$$

amit átrendezve $4(k+1)^2 f(x) = f(2(k+1)x)$, vagyis $(n+2)^2 f(x) = f((n+2)x)$, amit bizonyítani akartunk.

2. eset $n = 2k+1$ (ahol $k \geq 1$ egész). Ekkor a függvényegyenletbe az x helyébe $(k+1)x$ -et, míg y helyébe $(-x)$ -et írva:

$$f((k+1)x) + f(-x) = \frac{f((k-1)x) + f((2k+3)x)}{5}.$$

Mivel $k-1$ és $k+1$ is $n = (2k+1)$ -nél kisebb nemnegatív egész, ezért az indukciós feltételt használhatjuk, így (f függvény páros tulajdonságát is felhasználva) átírhatjuk az egyenletet:

$$(k+1)^2 f(x) + f(x) = \frac{(k-1)^2 f(x) + f((2k+3)x)}{5}$$

$$(5(k^2 + 2k + 2) - (k^2 - 2k + 1))f(x) = f((2k+3)x)$$

$$(4k^2 + 12k + 9)f(x) = f((2k+3)x)$$

$$(2k+3)^2 f(x) = f((2k+3)x),$$

vagyis $(n+2)^2 f(x) = f((n+2)x)$, amit bizonyítani akartunk.

A kezdőlépésekkel, a kétféle indukciós lépéssel és az f páros tulajdonságára hivatkozással minden n egész szám esetét lefedtük, az állítást beláttuk. $\square$

Most legyen $x = \frac{a}{b}$ tetszőleges racionális szám ($a, b \in \mathbb{Z}$ és $b \neq 0$). Mivel $f(1) = f\left(b \cdot \frac{1}{b}\right) = b^2 \cdot \left(\frac{1}{b}\right)$, így $f\left(\frac{1}{b}\right) = \frac{f(1)}{b^2}$. Tehát $f\left(\frac{a}{b}\right) = a^2 \frac{f(1)}{b^2} = f(1) \frac{a^2}{b^2}$.

Azt kaptuk, hogy a feladat feltételeit teljesítő függvényekre $f(x) = f(1) \cdot x^2$ is igaz, tehát az x^2 konstansszorozói. Az ilyen $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ függvények pedig mind teljesítik a feladat feltételeit, hiszen tetszőleges $c \in \mathbb{Q}$ esetén ha $f(x) = cx^2$, akkor

$$\frac{f(x+2y) + f(2x-y)}{5} = \frac{c(x+2y)^2 + c(2x-y)^2}{5} = \frac{c(5x^2 + 5y^2)}{5} = cx^2 + cy^2 = f(x) + f(y).$$

Tehát a feladat megoldásai az $f(x) = cx^2$ alakú függvények, ahol $c \in \mathbb{Q}$ tetszőleges konstans.

Ali Richárd (Gödöllő, Török Ignác Gimn., 11. o. t.)

Megjegyzés. A feladatra érkezett összes megoldás teljes indukcióval bizonyítja, hogy $f(nx) = n^2 f(x)$ minden $n \in \mathbb{Z}$ és $x \in \mathbb{Q}$ esetén. A megoldások döntő többsége a páros és a páratlan n esetét kettéválasztja, ez azonban nem szükségszerű. Például *Zhai Yufan* (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Ált. Isk. és Gimn., 11. o. t.) észreveszi, hogy minden 3-nál nagyobb egész szám felírható $2a + 3b$ alakban valamilyen $a > 0$ és $b \geq 0$ egészekkel, és erre alapozza az indukciós lépését. Az x helyébe bx -et, y helyébe $(a+b)x$ -et írva, az

$$f(bx) + f((a+b)x) = \frac{f((2a+3b)x) + f((b-a)x)}{5}$$

egyenletet kapja. Mivel $a, a+b, |b-a| < 2a+b$ (itt használjuk, hogy $a > 0$), ezért az indukciós feltevésből

$$b^2 f(x) + (a+b)^2 f(x) = \frac{f((2a+3b)x) + (b-a)^2 f(x)}{5}$$

adódik; átrendezés után $f((2a+3b)x) = (2a+3b)^2 f(x)$.

Összesen 52 dolgozat érkezett. 5 pontos 12, 4 pontos 14, 3 pontos 7 dolgozat. 2 pontot 5, 1 pontot 7, 0 pontot 7 versenyző kapott.



Kincsek a KöMaL múltjából

Ebben a rovatunkban a KöMaL hasábjain régebben megjelent érdekes, ám feledésbe merült cikkeket, feladatmegoldásokat veszünk elő és mutatunk be. Felfrissítjük, a mai jelölésmódokhoz, szóhasználathoz igazítjuk a stílusukat, esetenként további gondolatokat fűzünk hozzájuk.

Ezúttal részletesebben egy 1928. januárjában kitűzött feladatról és annak az ugyanazon év márciusi számában megjelent megoldásáról, illetve további, szintén ehhez a témához kapcsolható feladatokról lesz szó. Mint később látjuk, ezek mindegyike szorosan kapcsolódik az e számban megoldott **B. 5440.** feladathoz.

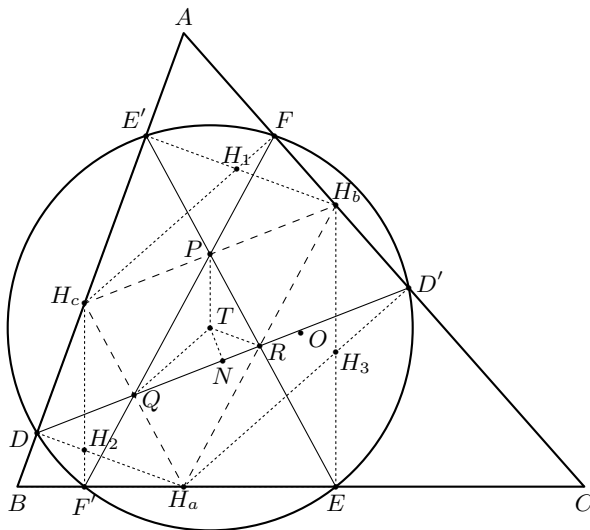
A korábban megjelent feladatot és a megoldást apró változtatásokkal közöljük:

345. a) Jelentsék H_a, H_b, H_c a nem derékszögű $ABC\triangle$ oldalain a magasságok talppontjait. A $H_aH_bH_c$ háromszög oldalainak felezőpontjai legyenek P, Q, R . Hosszabbítsuk meg a $PQR\triangle$ oldalait, amíg az $ABC\triangle$ oldalait metszik; bizonyítsuk be, hogy ilyen módon három egyenlő hosszúságú szakaszpárt kapunk.

b) Ezen szakaszok végpontjai (amelyek tehát az $ABC\triangle$ oldalain fekszenek) egy körön, az ún. Taylor-féle körön fekszenek. Ezen kör a $PQR\triangle$ -be írt vagy ezen háromszöghöz hozzáírt egyik körrel koncentrikus, aszerint, amint az $ABC\triangle$ hegyes-, illetve tompaszögű.

c) A b) alatti pontok egyszersmind a H_a, H_b, H_c pontokból, az $ABC\triangle$ oldalaira bocsátott merőlegesek talppontjai.

Megoldás. a) Messe QR az AB és CA oldalakat D , illetve D' pontban. Ismert, hogy egy nem derékszögű háromszög magassága a magasságvonalak talppontjai által alkotott háromszög belső szögfelezője, ezért $H_bH_cA\angle = H_aH_cB\angle$. Mivel pedig $QR \parallel H_bH_c$, $QDH_c\angle = H_bH_cA\angle$, ezért a $QH_cD\triangle$ egyenlő szárú: $QD = QH_c$. Ugyanígy az $RH_bD'\triangle$ is egyenlő szárú: $RD' = RH_b$ (lásd 1. ábra).



1. ábra

Eszerint:

$$DD' = DQ + QR + RD' = QH_c + QR + RH_b = RP + QR + PQ,$$

azaz DD' egyenlő a $PQR\triangle$ kerületével. Analóg módon igazolható ez az EE' és FF' távolságokról is, amelyek a PR , illetve PQ oldalak meghosszabbítása által keletkeztek.

Ha azonban például $BAC \angle > 90^\circ$, akkor

$$DD' = EE' = FF' = PQ + RP - QR.$$

b) Ha az $ABC\triangle$ hegyesszögű és a $PQR\triangle$ -be írható kör középpontja T , továbbá a T pontból a QR oldalra bocsátott merőleges talppontja N , a $PQR\triangle$ területének fele:

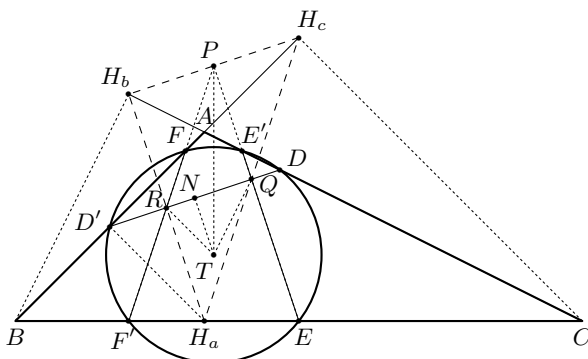
$$QN + RP = RN + QP,$$

vagy, mint a) alatt láttuk:

$$QN + QD = RN + RD', \quad \text{azaz} \quad DN = D'N.$$

Ez annyit jelent, hogy N felezi a DD' oldalt; mivel $TN \perp DD'$, azért T egyenlő távolságra van a D és D' pontoktól; ezen távolság $\sqrt{(DD'/2)^2 + (TN)^2}$. Ugyanekkora távolságban van tehát az E és E' , illetve az F és F' pontoktól; tehát T a D, D', E, E', F, F' pontokon átmenő kör középpontja.

Ha például $BAC \angle > 90^\circ$ (2. ábra), akkor a T pont azon kör középpontja, amely a $PQR\triangle$ QR oldalát Q és R között kívülről érinti.



2. ábra

c) Láttuk, hogy $RD' = RH_a = RH_b$, ebből máris következik, hogy $H_aD' \perp AC$. D' a H_aH_b átmérőjű körön fekszik. Hasonlóan igazolható, hogy $H_aD \perp AB$ s. í. t.

Etre Sándor (Mátyás király rg. VII. o. Bp. II.)

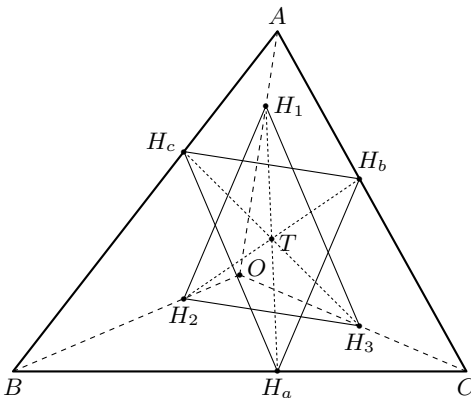
Kiegészítés. d) $PT \perp BC$; $QT \perp AC$; $RT \perp AB$.

Ugyanis PT felezi a QPR szöget és $PEF'\triangle$ egyenlő szárú: $PE = PF'$, amint ezt a) alatt láthattuk. Hasonlóan áll a dolog a másik két esetben. A tulajdonság megmarad akkor is, ha az $ABC\triangle$ tompaszögű.

e) Jelentsék H_1, H_2, H_3 rendre $AH_bH_c, BH_cH_a, CH_aH_b$ háromszögek magassági pontjait. Ekkor H_1H_a, H_2H_b, H_3H_c a T pontban felezik egymást.

Bizonyítás. A $H_1H_cH_aH_b$ és TQH_aR négyszögek hasonlóak és hasonló helyzetűek; megfelelő oldalaik egybeesnek, illetve párhuzamosak, és ezért megfelelő szögeik egyenlők, továbbá

$$H_cH_a : QH_a = 2 : 1 = H_bH_a : RH_a.$$



3. ábra

Ebből pedig következik, hogy a megfelelő T és H_1 csúcsok is a H_a -ból kiinduló sugáron fekszenek, úgy hogy $H_1H_a = 2TH_a$, azaz T felezi a H_1H_a távolságot.

Analóg a bizonyítás H_2H_b és H_2H_c esetére.

f) A T felezi az OH_0 távolságot is, ahol H_0 a $H_aH_bH_c\Delta$ magassági pontja, O pedig az ABC háromszög köré írt kör középpontja.

H_2H_b és H_3H_c , mint e) alatt láttuk, a T pontban felezik egymást; ezért a $H_bH_cH_2H_3$ idom paralelogramma, azaz $H_2H_3 \parallel H_bH_c$. Minthogy $AH_1 \perp H_cH_b$, egyszersmind $AH_1 \perp H_2H_3$, a **345.** a) állítás szerint AH_1 , $BH_2(\perp H_cH_a)$, $CH_3(\perp H_aH_b)$ az $ABC\Delta$ köré írt kör O középpontján mennek keresztül. Azonban O most a $H_1H_2H_3\Delta$ magassági pontja is és mint ilyen, szimmetrikus helyzetű a H_0 ponttal a T pontra nézve, mert a $H_aH_bH_c\Delta$ és $H_1H_2H_3\Delta$ szimmetrikus helyzetűek a T pontra nézve.

Az a), b), c), d), e), f) állítások alapján kimondhatjuk, hogy minden háromszögben a Taylor-féle kör középpontja egyúttal a talpponti háromszög oldalainak felezőpontjai által alkotott háromszögbe vagy a háromszöghöz írt kör középpontja aszerint, amint az $ABC\Delta$ hegyes-, illetve tompaszögű. Továbbá minden háromszögben a háromszög köré írt kör középpontja, a Taylor-féle kör középpontja és a talpponti háromszög magassági pontja egy egyenesen fekszik.

Megjegyzés. A feladat állításaiból azonnal adódik, hogy a **B. 5440.** feladatban szereplő ABC háromszög a fenti megoldásban az 1. ábrán látható PQR háromszög megfelelője. Vagyis az ABC háromszög egy olyan $A'B'C'$ háromszög talpponti háromszögének oldalfelező pontjaiból alkotott háromszög, amelynek Taylor-körén fekszenek a D, E, F, G, H, K pontok.

További érdekesség, hogy a $D'FE'DF'E$ hatszög szemközti oldalai párhuzamosak (ahogyan az a **B. 5440.** feladat második megoldásából is látható), illetve

a szemközti csúcsokat összekötő átlói egyenlő hosszúak (amint az a feladat első megoldásából látható).

Elhez kapcsolódik az a feladat, amely korábban kétszer is megjelent a KöMaL-ban: egyszer 1950-ben a Matematikai Olimpiász Moszkvában című versenybeszámolóban; illetve még egyszer, amikor az 1958. évi Arany Dániel Matematikai Tanulmányversenyen a haladók I. kategóriájában kitűzött feladatként idézi a lap.

Bizonyítsuk be, hogy ha egy hatszög szemközti oldalai párhuzamosak és a szemközti csúcsokat összekötő átlók egyenlő hosszúak, akkor kör írható a hatszög köré.

A bizonyítás az előzőekből következik.

Ám ezzel korántsem merítettük ki ezt a témát.

A KöMaL 1903/2. októberi számának 26. oldalán jelent meg az **1195.** feladat:

Egy hatszög minden szöge ugyanakkora, másodszomszédos oldalai egyenlő hosszúak. Mutassuk meg, hogy a hatszög köré kör rajzolható.

Vázlatos megoldás. Ha egy hatszög minden szöge ugyanakkora, akkor persze párhuzamosak a szemközti oldalai, illetve minden második oldal egyenesét megrajzolva, azok 60° -os szöget zárnak be, vagyis egy szabályos háromszöget határolnak. Legyen a hatszög oldalainak hossza felváltva a és b , és tegyük fel, hogy a b hosszúságú oldalak egyenesét rajzoltuk meg. Mivel a hatszög minden szöge 120° -os, úgy kapjuk meg a hatszöget a szabályos háromszögből, hogy annak minden csúcsából levágunk egy a oldalú szabályos háromszöget. Ebből (a fennálló szimmetriákból) már következik, hogy egyrészt a hatszög szemközti csúcsait összekötő átlók egyenlő hosszúak, másrészt hogy a hatszög húrhatszög. Az is világosan látszik, hogy ekkor a hatszög forgásszimmetrikus, mégpedig 120° szerint.

Ebből pedig következik egy másik, a KöMaL 2019/8. novemberi szám 483. oldalán **C. 1570.** számmal megjelent feladat állítása:

Egy hatszög minden szöge 120° , szemközti csúcsait összekötő átlói egyenlő hosszúak. Igazoljuk, hogy a hatszög forgásszimmetrikus.

Vázlatos bizonyítás. Az előzőekből következik, hogy a hatszög húrhatszög. Jelölje a hatszög csúcsait sorban A, B, C, D, E, F . A feltétel szerint $AD = BE = CF$.

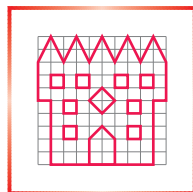
Tekintsük a BC oldalt. Mivel a BC szakaszfelező merőlegesére szimmetrikusan helyezkedik el a B csúcsban BC -vel 120° -ot bezáró félegyenes és a hatszög köré írt kör metszéspontja (A), illetve a BC -vel C -ben -120° -ot bezáró félegyenes és a kör metszéspontja (D), így $AB = CD$, és egyeneseik 120° -ot zárnak be egymással. Ebből következik, hogy a hatszög másodszomszédos oldalai ugyanolyan hosszúak, tehát az előzőek szerint forgásszimmetrikus.²

Kiss Géza Fried Katalin
(Csömör) (Budapest)

²A cikk egyes részeit elhangzottak 2021. évi KöMaL Ifjúsági Ankéton, elérhető a KöMaL honlapján.



A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok
ABACUS-szal közös pontverseny
9. osztályosoknak
(874–878.)

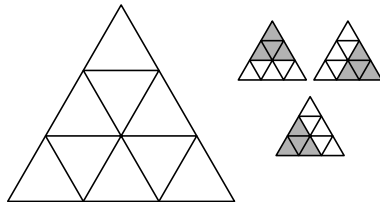


K. 874. András, Bori, Cili, Dezső, Elemér, Feri, Gabi és Hugó ebben a sorrendben állnak körben, a kezükben néhány babszem van, összesen 240 darab. Ha András ad Borinak, Cilinek, Dezsőnek, Elemérnek, Ferinek, Gabinak és Hugónak 1-1 babszemet, majd Bori ad Cilinek, Dezsőnek, Elemérnek, Ferinek, Gabinak és Hugónak 2-2 babszemet, majd Cili ad Dezsőnek, Elemérnek, Ferinek, Gabinak és Hugónak 3-3 babszemet, majd Dezső ad Elemérnek, Ferinek, Gabinak és Hugónak 4-4 babszemet, majd Elemér ad Ferinek, Gabinak és Hugónak 5-5 babszemet, majd Feri ad Gabinak és Hugónak 6-6 babszemet, majd Gabi ad Hugónak 7 babszemet, akkor mindenkinél ugyanannyi babszem lesz. Hány babszem volt kezdetben náluk?

K. 875. Bonts fel egy szabályos háromszöget négy egybevágó síkidomra, illetve hat egybevágó síkidomra! Összesen legalább négy felbontást készíts!

K. 876. Gondolj egy pozitív egész számra. Ha a szám páros, akkor oszd el 2-vel, ha páratlan, akkor adj hozzá 1-et. Az eredménnyel ugyanígy folytasd: ha a szám páros, akkor oszd el kettővel, ha páratlan, akkor adj hozzá 1-et. Igaz-e, hogy ha egy 2025-nél kisebb számból indulunk ki, akkor kevesebb, mint 25 lépésben az 1-hez jutunk?

K/C. 877. Írjuk be az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 számokat az ábrába úgy, hogy a három darab, négy kis háromszöget tartalmazó (a kis ábrákon szürke színű) háromszögben lévő számok szorzatát összeszorozva négyzetszámot kapjunk. Hány ilyen kitöltés van?



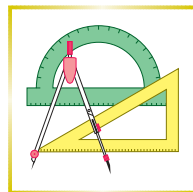
K/C. 878. Hány olyan 91-gyel osztható négyjegyű pozitív egész szám van, amelynek kétféle számjegye van és mindegyikből két darab?



Beküldési határidő: 2025. december 10.

Elektronikus munkafüzet: <https://www.komal.hu/munkafuzet>

A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok
(877–878., 1873–1877.)



Feladatok 10. évfolyamig

K/C. 877. A szövegét lásd a **K** feladatoknál.

K/C. 878. A szövegét lásd a **K** feladatoknál.

Feladatok mindenkinek

C. 1873. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert a valós számhármassok halmazán:

$$x^2 + 13x + 144 = 5y + 32z,$$

$$y^2 + 13y + 144 = 5z + 32x,$$

$$z^2 + 13z + 144 = 5x + 32y.$$

javasolta: *Czett Mátyás* (Zalaegerszeg)

C. 1874. Adott két pont a síkon, G és H . Szerkesszünk olyan hegyesszögű, egyenlő szárú háromszöget, amelynek magasságpontja H , súlypontja G . (Az elemi szerkesztési lépéseket, mint pl. szög felezése, tengelyes tükrözés, nem kell részletezni.)

javasolta: *Barta-Zágoni Csongor* (Marosvásárhely)

C. 1875. Egy nagylelkű adománynak hála a KöMaL Ankét szombati ebédszünetében m fajta könyvet osztottak szét a jelenlévő n diák között. A könyvek mindegyikéből rendelkezésre állt több példány is, továbbá mindenki kedvére válogathatott: többfajta könyvből is vihettek, de egy fajtából legfeljebb egyet.

Tudjuk, hogy bármely két könyv esetén legalább három diákban különbözött a könyveket választók halmaza. Bizonyítsuk be, hogy $m \leq \frac{2^n}{n+1}$.

javasolta: *Paulovics Zoltán* (Budapest)

Feladatok 11. évfolyamtól

C. 1876. Micimackó a következő állítás helyességét próbálja eldönteni. „Ha egy adott év napjaiból kiválasztunk 30-at, nem biztos, hogy lesz közöttük legalább öt olyan, amelyek a hét ugyanazon napjára esik.” Az alábbiak szerint érvel: „Az állítás hamis. A hét napjait vegyük egy-egy skatulyának, majd tegyük beléjük egy-egy (ugyanolyan) golyót a kiválasztott napoknak megfelelően. 28-at még el tudunk helyezni úgy, hogy mindegyik skatulyában 4-4 golyó van, azonban a 29. golyó biztosan olyan helyre kerül, ahol már van négy, így biztosan lesz a hétnek legalább egy olyan napja, amelyre legalább öt kiválasztott nap jut.”

Barátja, Róbert Gida rámutat érvelésének hiányos pontjára: „Te Mackó, így csak 7 esetet vizsgáltál meg: azokat, amikor mindegyik skatulyában pontosan 4 darab golyó van, kivéve egyet, amelyben 5. A többi esettel nem foglalkoztál!”

Hány esetet nem vizsgált meg Micimackó?

Németh László (Fonyód) ötlete alapján

C. 1877. Az ABC hegyesszögű háromszög körülírt körén az A , B , C pontot nem tartalmazó BC , CA , AB ív felezőpontja rendre D , E , F . A DE szakasz a BC , illetve CA oldalakat a P , illetve Q pontban, az EF szakasz a CA , illetve AB oldalakat az R , illetve S pontban, végül az FD szakasz az AB , illetve BC oldalakat a T , illetve U pontban metszi. Bizonyítsuk be, hogy a PRT és QSU háromszögek területe egyenlő.

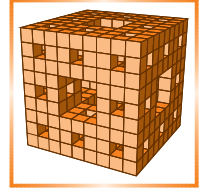
javasolta: *Bíró Bálint* (Eger)



Beküldési határidő: 2025. december 10.
Elektronikus munkafüzet: <https://www.komal.hu/munkafuzet>



A B pontversenyben kitűzött feladatok (5486–5493.)



B. 5486. Az $ABCD$ konvex négyszög átlóinak metszéspontja E . Tegyük fel, hogy $AB = CD$, és az ABE háromszög területe megegyezik a CDE háromszög területével. Mutassuk meg, hogy a négyszög paralelogramma vagy húrtrapéz.

(3 pont)

Javasolta: *Hujter Mihály* (Budapest)

B. 5487. Az $a_1, a_2, \dots, a_{2025}$ pozitív számokra $a_1 = 1$, továbbá

$$\frac{1}{a_1 + a_2} + \frac{1}{a_2 + a_3} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} + a_n} = a_n - 1$$

minden $2 \leq n \leq 2025$ esetén. Határozzuk meg a_{2025} értékét.

(3 pont)

Javasolta: *Bencze Mihály* (Brassó) ötletéből

B. 5488. Ki lehet-e színezni a sík minden pontját három szín egyikével úgy, hogy mindegyik színt felhasználjuk legalább egyszer, és ha egy háromszög minden csúcsa két szín egyikével van színezve, akkor azon háromszög minden belső-, és határpontja is ezen két szín valamelyikét viselje?

(4 pont)

Javasolta: *Lovas Márton* (Budakalász)

B. 5489. Az ABC derékszögű háromszögben $\angle ABC = 15^\circ$ és $\angle CAB = 75^\circ$, továbbá az AB átfogó felezőpontja F . A BC befogón vegyük fel a D pontot úgy, hogy $BD = CA$, a CA félegyenesen az A ponton túl az E pontot úgy, hogy $CE = BC$ teljesüljön. A BE és CF egyenesek metszéspontja legyen M . Bizonyítsuk be, hogy a DM és CM egyenesek érintik az AEF háromszög köré írt kört.

(4 pont)

Javasolta: *Bíró Bálint* (Eger)

B. 5490. Igazoljuk, hogy végtelen sok olyan pozitív egész n szám létezik, amelyre a $2^n - 2025, 2^n - 2024, \dots, 2^n + 2025$ számok mind összetettek.

(5 pont)

Javasolta: *Sándor Csaba* (Budapest)

B. 5491. Létezik-e legalább másodfokú, egész együtthatós polinomoknak olyan H halmaza, amelyre teljesül, hogy minden egész értéket pontosan egy H -beli polinom vesz fel egész helyen?

(5 pont)

Javasolta: *Pach Péter Pál* (Budapest)

B. 5492. Kornél az $I = [0, 2^k]$ intervallumnak (ahol k pozitív egész) egy egész végpontú, legalább 1 hosszúságú, zárt részintervallumára gondol. Kristóf kérdezhet egy tetszőleges egész hosszúságú, de nem feltétlenül egész kezdő- és végpontú, zárt részintervallumot, és Kornél elárulja a kért és a gondolt intervallum metszetének a hosszát. (A válasz 0, ha a két intervallum metszete üres, és akkor is, ha csak egyetlen pontból áll.) Hány kérdésből tudja Kristóf biztosan meghatározni a gondolt intervallumot?

(6 pont)

Javasolta: *Matolcsi Dávid* (Berkeley/Brüsszel)

B. 5493. Írjunk fel olyan, a síkvektorokhoz nemnegatív számokat rendelő f függvényt, amelyre teljesül, hogy bármely, az $x^2 - y^2 = 1$ hiperbolába írt ABC háromszög területe $f(\overrightarrow{AB}) \cdot f(\overrightarrow{BC}) \cdot f(\overrightarrow{CA})$.

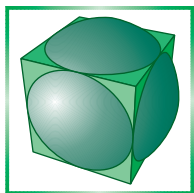
(6 pont)

Javasolta: *Kós Géza* (Budapest)



Beküldési határidő: 2025. december 10.

Elektronikus munkafüzet: <https://www.komal.hu/munkafuzet>



Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (917–919.)

A. 917. Egy komplex számokból álló S halmazt nevezzünk *szimmetrikusnak*, ha minden S -beli elem komplex konjugáltja is S -beli. Határozzuk meg minden pozitív egész n -hez a legnagyobb K_n pozitív egész számot, amelyhez létezik olyan n -elemű, szimmetrikus $S = \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ halmaz, amelynek a 0 nem eleme, és bármely $1 \leq k \leq K_n$ egészre

$$z_1^k + z_2^k + \dots + z_n^k \leq 0.$$

Javasolta: *Navid Safaei* (Teherán) és *Kós Géza* (Budapest)

A. 918. Egy n csúcú fagráf ($n \geq 2$) csúcsait jelöljük $v_1, v_2, \dots, v_n$ -nel. Minden csúcson ül egy törpe, és minden törpének van valamennyi, de legalább n darab pénz-értéke. Sorban, az indexek szerint növekvő sorrendben végighaladunk a csúcsokon, és mindig a soron következő csúcson ülő törpe elvesz egy értéket a leggazdagabb szomszédjától; ha több leggazdagabb is van, akkor mindegyiktől egyet-egyet.

Határozzuk meg n függvényében azt a legkisebb k értéket, amelyre teljesül, hogy tetszőleges n csúcú fagráf esetén van olyan kezdeti pénzürmelosztás, hogy kezdetben bármely két törpe pénzértémeinek száma legfeljebb k -val térjen el egymástól, és a folyamat végén minden törpének pontosan ugyanannyi pénzértéke legyen, mint kezdetben volt.

Javasolta: *Németh Márton* (Budapest)

A. 919. Legyen $\mathcal{P}$ egy legalább négy csúcsú konvex hűrsokszög, amelynek semelyik két átlója sem ugyanolyan hosszú. Bizonyítsuk be, hogy $\mathcal{P}$ -t legfeljebb egyféleképpen lehet azonos kerületű háromszögekre bontani néhány egymást nem metsző átlójával.

Javasolta: *Andrei Chirita* (Cambridge)



Beküldési határidő: 2025. december 10.

Elektronikus munkafüzet: <https://www.komal.hu/munkafuzet>



Informatikából kitűzött feladatok (675–678.)



I. 675. Négyzethálóba rendezett, négyzetekből álló és kevés színt tartalmazó SVG típusú vektorgrafikus ábrákat a színeket jelölő karakterek felsorolásával, tömörítve tárolhatunk. A négyzetek azonos méretűek, szorosan illeszkednek, nem fedik át egymást és oldalaik párhuzamosak a kép szélével.

Készítsünk programot *i675* néven, amely előállítja az SVG típusú vektorgrafikus ábrának a színek betűjével jelölt szöveges kódját.

A színeket jelölő nagybetűk: F fehér, P piros, K kék, Z zöld, S sárga, N narancs, L lila, B fekete.

A program standard bemenetének az *SVG* állomány nevét adjuk meg.

A standard kimenetre írjuk ki az ábra szöveges kódját.

Példa a bemenetre:	Az eredeti SVG kép:	Kimenet
z1.svg		K K K K K K S S S K K S P S K K S S S K K K K K K

Az SVG állomány szerkezetéről többek között a <http://svg.elte.hu/> címen olvashatunk.

Beküldendő egy tömörített *i675.zip* állományban a program forráskódja és rövid dokumentációja, amely megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben fordítható.

Letölthető minta bemenet: *z1.svg*

(10 pont)

I. 676. Tekintsük az 1, 2, 3, 4, 5 és 6 számjegyek permutációit. Ha az adott permutációnak – például 6, 1, 5, 3, 4, 2 – a számjegyeit egymás után írjuk, hatjegyű számot kapunk, – az előző példánál ez 615342.

1. Nyissunk meg egy üres táblázatkezelő munkafüzetet, és mentsük el *specpermhat* néven a táblázatkezelő alapértelmezett formátumában.

Határozzuk meg az 1, 2, 3, 4, 5 és 6 számjegyek összes olyan permutációját, illetve az ezekből a fenti módon képzett hatjegyű számokat, amelyek eleget tesznek az alábbi követelményeknek:

2. Az **A** oszlopba, amelyek 2-vel oszthatók.
3. A **B** oszlopba, amelyek 3-mal oszthatók.
4. A **C** oszlopba, amelyek 4-gyel oszthatók.
5. A **D** oszlopba, amelyek 5-tel oszthatók.
6. Az **E** oszlopba, amelyek 6-tal oszthatók.
7. Az **F** oszlopba, amelyeknél az első és utolsó számjegy összege kétjegyű.
8. A **G** oszlopba, amelyeknél az utolsó három számjegy összege 10.
9. A **H** oszlopba, amelyeknél az utolsó két számjegyből képzett szám prím.
10. Az **I** oszlopba, amelyeknél az utolsó három számjegyből képzett szám prím.

Az egyes oszlopokban a számok növekvő sorrendben jelenjenek meg. Segédszámításokat a **J** oszloptól jobbra vagy egy újonnan felvett munkalapon lehet végezni. A megoldásban saját függvény vagy makró nem használható.

Beküldendő egy tömörített *i676.zip* állományban a *specpermhat* néven mentett táblázatkezelő munkafüzet és egy rövid dokumentáció, amelyben szerepel az összes, a megoldásnál bevetett furfang magyarázata, a táblázatkezelő neve, verziószáma.

(10 pont)

I. 677. Magyar találmányok, technikai alkotások neveinek gyűjteménye és a feltalálók néhány adata áll rendelkezésünkre egy adatbázisban. A találmányok és a feltalálók között **N:M** (több a többhöz) kapcsolat van, ezt egy kapcsolótábla használatával oldjuk fel.

Tábla: *talalmany* (*tkod, talnev*)

tkod A találmány azonosítója (szám), ez a kulcs

talnev A találmány neve (szöveg)

kutato (*fkod, nev, szul, meghal*)

fkod A kutató vagy feltaláló azonosítója (szám), ez a kulcs

nev A kutató neve, vezeték- és utónév sorrendben (szöveg)

szul A kutató születési éve (szám)

meghal A kutató halálozási éve – ma is élők esetén üres (szám)

kapcsol (*tkod, fkod*)

tkod A találmány azonosítója (szám)

fkod A kutató azonosítója (szám)

Csak akkor szerepel egy találmány azonosítója a ***kapcsol*** táblában, ha a feltaláló neve ismert.

A következő feladatokat megoldó SQL-parancsokat rögzítsük a feladatok végén zárójelben megadott nevű és *.sql* kiterjesztésű szöveges állományban! Például a 3. feladat megoldását a *3bay.sql* nevű állományban. Az értékelés során csak ezeknek az állományoknak a tartalma lesz értékelve. Ügyeljünk arra, hogy a lekérdezésekben pontosan a kívánt mezők szerepeljenek, felesleges mezőt ne jelenítsünk meg.

1. A *feltalalok.sql* állomány tartalmazza az adatbázist és a táblákat létrehozó, valamint az adatokat a táblába beszűrő SQL-parancsokat. Futtassuk az SQL-szerveren a *feltalalok.sql* parancsfájlt.
2. Listázzuk ki ábécérendben lekérdezés segítségével azoknak a találmányoknak a nevét és feltalálójuknak a nevét, amelyek nevében szerepel az „*optika*” szó. (**2optika**)
3. Lekérdezéssel írassuk ki Bay Zoltán találmányainak nevét. (**3bay**)
4. Adjuk meg lekérdezés segítségével, hogy melyik találmányhoz fűződik a legtöbb kutató és az mennyi. (**4tobben**)
5. Soroljuk fel lekérdezés alkalmazásával azoknak a kutatóknak a nevét, akiknek se a születési, se a halálozási évszáma nincs megadva az adatbázisban. (**5hiany**)
6. Lekérdezéssel listázzuk ki azokat a kutatókat és találmányaik nevét, akiknek a vezetékeve szerepel a találmány nevében. (**6nevado**)
7. Milyen találmányaik voltak azoknak a kutatóknak, akik a XIX. század második felében (1851 és 1900 között, a határokat is beleszámolva) is éltek? A kutatók és a találmányok nevét adjuk meg lekérdezés használatával. (**7felszazad**)
8. Soroljuk fel lekérdezés alkalmazásával azoknak a kutatóknak a nevét és a találmányaik számát, akik Bay Zoltánnál több kutatási eredménnyel szerepelnek az adatbázisban. (**8kutszam**)
9. Adjuk meg lekérdezés segítségével, hogy a „porlasztó” feltalálóinak – a porlasztón kívül – milyen más találmányai vannak az adatbázisban. Minden találmány neve egyszer szerepeljen a listában. (**9porlaszto**)

Beküldendők egy *i677.zip* tömörített állományban a lekérdezések.

Letölthető fájl: *feltalalok.sql*

(10 pont)

I. 678. Egy elektronikus reklámokkal foglalkozó cég címlistájában egyéni e-mail címek és csoportok e-mail címei szerepelnek. Minden csoportban van legalább egy másik csoport vagy egy személy e-mail címe. Egy e-mail cím többször is előfordulhat úgy, hogy több csoportnak is tagja az adott személy vagy csoport.

A címlistát egy szöveges állományban tárolja a cég. Az állomány minden sora egy e-mail címmel kezdődik. Ha csak ez a cím áll a sorban, akkor az egy egyéni e-mail cím. Ha a cím után további címek következnek, akkor az azt jelöli, hogy a sor első címe egy csoport e-mail címe, a csoport tagjainak e-mail címei a sorban utána következnek. A címeket egy-egy szóköz választja el egymástól.

Példaként tekintsük a következő címlistát:

```

felso@alma.hu peter@alma.hu zsolt.kovacs@alma.hu
also@alma.hu andras.kovacs@bp.hu felso@alma.hu peter@alma.hu
kozepso@alma.hu peter@alma.hu also@korte.hu nagy.balint@bp.hu
balazs.kiss@alma.hu
also@korte.hu jozsef.kiss@korte.hu jozsef.nagy@bp.hu
felso@korte.hu kiss.jeno@bp.hu kozep@korte.hu
kozep@korte.hu nagy.balint@bp.hu felso@korte.hu

```

A címekben csak az angol ábécé kisbetűi, valamint a pont és @ jel szerepelnek. Előfordul, hogy egy egyedi név megjelenik a címlistában egy külön sorban, de előfordul az is, hogy csak valamely csoport tagjaként szerepel.

A cég úgy dönt, hogy meghívja a címlistán szereplő személyek egy részét egy találkozóra. Ehhez egy e-mailt küldenek ki, amelyben megadják a címzetteket. A címlista alapján azonban elég nehéz megmondani, hogy valójában hány személy fogja megkapni a levelet. Segítsünk a cégnek, és állapítsuk meg a címzett személyek számát.

Készítsünk programot, amely a címlista és a küldendő e-mail címzettjeinek felhasználásával megadja, hogy a levél hány személynek szól. A program olvassa be a – honlapunkról letölthető – mellékelt *cimlista.txt* állományt, majd a standard bemeneten megadott címzetteket, és írja ki a standard kimenetre a címzett személyek számát.

Példa, amelyben a címlista a fenti példában lévő lista:

Bemenet :	Kimenet
felso@korte.hu kozepso@alma.hu	5

A programnak tetszőleges, legfőljebb 100 sort tartalmazó címlista állomány mellett is működnie kell. A címlista állomány egy sorában legfőljebb 30 cím szerepel.

Beküldendő egy tömörített *i678.zip* állományban a program forráskódja és rövid dokumentációja, amely megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben fordítható.

Letölthető állomány: *cimlista.txt*

(10 pont)



Beküldési határidő: 2025. december 15.

Elektronikus munkafüzet: <https://www.komal.hu/munkafuzet>



Egy egyszerű egyenletmegoldó eljárás



Kevés az olyan egyenlettípus, amely zárt alakban megoldható, a legtöbb esetben valamilyen numerikus megoldáshoz kell folyamodnunk. Mindig lehetőségünk van a próbálgatásra, amit ügyesen végrehajtva megbízható eredményre juthatunk, de bizonyos esetekben a megoldás megkeresésére szisztematikus, könnyen automatizálható eljárás is a rendelkezésünkre áll. Az alábbiakban egy ilyet mutatunk be. Ez az

$$(1) \quad x = f(x)$$

típusú egyenletek esetében alkalmazható, és az $f(x)$ függvények egy széles osztályában eredményes. A módszer lényege, hogy az

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

képzési szabály segítségével egy sorozatot generálunk. Ennek a sorozatnak az elemei az $f(x)$ megfelelő tulajdonságai esetén egyre pontosabban megközelítenek egy, a kiinduló x_1 megválasztásától független

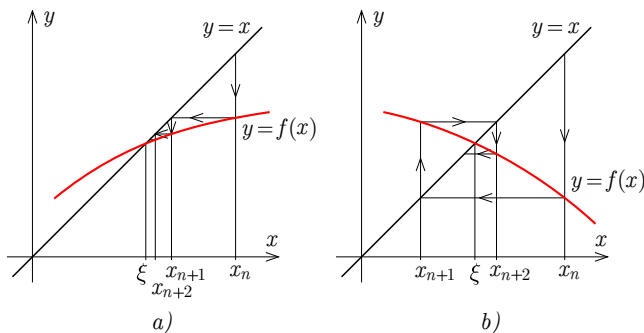
$$x_\infty = \xi$$

értéket, ami nyilván az egyenletünk megoldása, hisz tetszőleges pontossággal teljesül, hogy:

$$(2) \quad \xi = f(\xi).$$

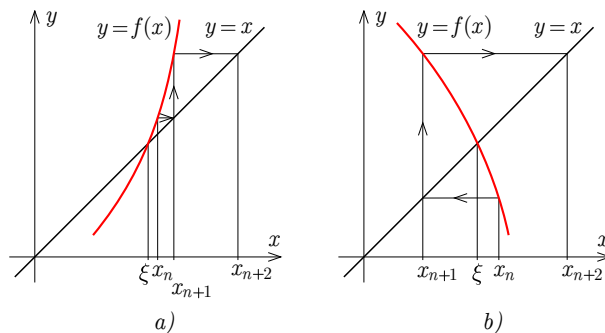
A továbbiakban x általában az egyenletben szereplő változót, ξ pedig mindig az egyenlet megoldását jelöli.

A módszer működése az 1. ábrán szemléletesen követhető.



1. ábra

Az eljárás nem mindig konvergál: ha az $y = f(x)$ függvény görbéje túl meredeken metszi az $y = x$ egyenest, akkor a sorozatnak nincs határértéke, a tagjai az n növekedésével egyre messzebb kerülnek a megoldástól (2. ábra).



2. ábra

Ahhoz, hogy az eljárás konvergenciájára kvantitatív feltételeket állapíthassunk meg, vizsgáljuk meg (az amúgy analitikusan is kezelhető) $f(x) = mx + b$ lineáris függvény esetét! Az

$$x_{n+1} = mx_n + b$$

rekurzió szerint

$$x_2 = mx_1 + b,$$

$$x_3 = m^2x_1 + mb + b,$$

$$x_4 = m^3x_1 + m^2b + mb + b,$$

$\vdots$

$$x_{n+1} = m^n x_1 + \left(\sum_{i=0}^{n-1} m^i \right) b = m^n x_1 + \frac{m^n - 1}{m - 1} b.$$

Látni való, hogy ez a kifejezés az $n \rightarrow \infty$ esetben az

$$x_\infty = \frac{b}{1 - m}$$

értékhez tart, ha $|m| < 1$, de nincs határértéke, ha $|m| \geq 1$. A két egyenes metszéspontja bármely $m \neq 1$ érték mellett $\xi = b/(1 - m)$ -nél van, de ezt az eljárás csak $|m| < 1$ esetén adja vissza. Tekintettel arra, hogy a számunkra érdekes (fizikában előforduló) folytonos és sima függvények a metszéspont környékén jó közelítéssel egyenessel helyettesíthetők, azt mondhatjuk: ha az $y = f(x)$ függvény az $y = x$ egyenest úgy metszi, hogy a ξ metszéspontban az m_f meredeksége $+1$ és -1 közé esik, azaz $|m_f| < 1$, akkor az algoritmus a metszéspont közeléből indítva konvergens. Az eddigieket végiggondolva a következő precíz megállapítást tehetjük:

Ha az (1) egyenlet megoldását jelentő ξ pont egy $\xi - d < x < \xi + d$ ($d > 0$) környezetében az $y = f(x)$ függvény görbéje határozottan a ξ -n átmenő $+1$ meredekségű $y = x$ és -1 meredekségű $y = 2\xi - x$ egyenesek között halad a

$$(3a) \quad \xi - \alpha(x - \xi) \leq f(x) \leq \xi + \alpha(x - \xi), \quad \text{ha} \quad 0 \leq x - \xi < d,$$

és

$$(3b) \quad \xi + \alpha(x - \xi) \leq f(x) \leq \xi - \alpha(x - \xi), \quad \text{ha} \quad 0 \geq x - \xi > -d$$

szabály szerint, ahol $0 < \alpha < 1$, akkor a közelítő eljárásunkat a $\xi - d < x < \xi + d$ tartomány bármely pontjából indítva az az $x_\infty = \xi$ értékhez fog tartani.

Állításunkat egyszerűen igazolhatjuk. Az $f(x)$ menetére vonatkozó (3a) és (3b) feltételünk szerint

$$|f(x) - \xi| \leq \alpha |x - \xi|, \quad \text{ha} \quad |x - \xi| \leq d,$$

amit a sorozat képzések sorozatán lépésről lépésre alkalmazva az

$$|x_{n+1} - \xi| \leq \alpha |x_n - \xi|$$

egyenlőtlenség sorozatot kapjuk. Fontos látni, hogy a $0 < \alpha < 1$ feltétel miatt, ha $|x_1 - \xi| < d$, akkor az $|x_n - \xi| < d$ is teljesül minden n -re, tehát a képzési szabály nem vezet ki a $\xi - d < x < \xi + d$ intervallumból. Ennek alapján

$$|x_{n+1} - \xi| \leq \alpha^n |x_1 - \xi|,$$

és mivel n növelésével α^n nullához tart, az x_n értékek valóban egyre pontosabban megközelítik ξ -t.

Az itt megfogalmazott feltétel az eljárás konvergenciájára nézve egy *elégséges*, a *szükséges*nél szigorúbb feltétel. Vannak olyan esetek, amikor ez nem teljesül, a rekurzió mégis konvergens, de olyan nincs, hogy a fentiek teljesülnek, az eljárás viszont mégsem használható. (Lehetséges például olyan eset, hogy az iterációt valahonnan a fenti $(\xi - d, \xi + d)$ tartományon kívülről indítva is eljutunk a ξ -hez, de ez általában nem garantálható.) Itt nem célunk a pontos, mindenre kiterjedő feltételek feltérképezése, csak azt akartuk bemutatni, hogy ez a megoldási módszer milyen feltételek között használható biztosan.

A gyakorlatban nem ismerjük ξ -t, így az $f(x)$ -et sem tudjuk a ξ közelében elemezni, de ha szükséges, pl. grafikus ábrázolással képet alkothatunk arról, hogy hol várható a megoldás, és az eljárás konvergensenek ígérkezik-e. Ha igen, a rekurziót addig folytatjuk, amíg az eredmény megkívánt pontosságának megfelelő értékes jegyek már nem változnak az újabb tagok generálásakor. (A sorozat egymást követő elemeinek a felhasználásával ennél szabatosabb hibabeccslés is lehetséges, de a gyakorlatban ez a „konyhaszabály” is bőven megfelel.)

Ennél izgalmasabb kérdés, mit tehetünk, ha a sorozatunknak nincs határértéke, a gyök várható környezetében az egymást követő tagok különbsége nem csökken, hanem egyre nő? Ha valóban van az adott környezetben az egyenletnek megoldása, a divergenciát az okozza, hogy ott az $f(x)$ meredeksége túl nagy ($|m_f| > 1$). Ebben az esetben az egyenletünket úgy kell átalakítani, hogy a gyök helye ne változzon, de az x -szel egyenlővé tett függvény meredeksége a megfelelő határok közé kerüljön. Ezt többféleképpen is megtehetjük.

A) Tegyük fel, hogy az $F(x)$ az $f(x)$ inverze, azaz

$$F(f(x)) = x.$$

Az $x = \xi$ helyen (2) miatt

$$F(\xi) = \xi,$$

tehát az

$$x = F(x)$$

egyenlet gyöke(i) ugyanott van(nak), ahol az (1) egyenleté. Ez nem meglepő, hiszen az $y = f(x)$ és az $y = F(x)$ görbéi egymás tükörképei az $y = x$ egyenesre. Ebből az is

következik, hogy a két függvény m_f és m_F meredeksége a metszéspontban egymás reciprokai:

$$m_fm_F = 1.$$

Így ha $|m_f| > 1$, akkor $|m_F| < 1$, és az eljárásunk $f(x)$ helyett $F(x)$ -et használva konvergálni fog.

B) Az

$$x = g(x)$$

egyenlet gyökei is megegyeznek az (1) egyenlet gyökeivel, ha

$$g(x) = cx + (1 - c)f(x) \quad (c \neq 1).$$

Ennek a meredeksége a gyök helyén

$$m_g = c + (1 - c)m_f,$$

tehát c alkalmas megválasztásával a meredekség „behúzható” a ± 1 tartomány belsejébe.

Mindkét trükk szemléltethető a **P. 5626.** feladat megoldásában (lásd lapunk 2025. februári számában) szerepet kapott

$$x = \frac{\operatorname{ctg} x}{2}$$

egyenlettel. Ahogy arról meggyőződhetünk, az

$$(4a) \quad x_{n+1} = \frac{\operatorname{ctg} x_n}{2}$$

szabállyal képzett sorozat, akárhonnan indítjuk, nem konvergál. Ugyanakkor az inverz függvény használata eredményes: az

$$(4b) \quad x_{n+1} = \operatorname{arcc} \operatorname{tg} 2x_n$$

rekurzió 10 értékes jegy pontossággal az $x_\infty = 0,6532711871$ értékhez tart. Ugyanekhez konvergál az

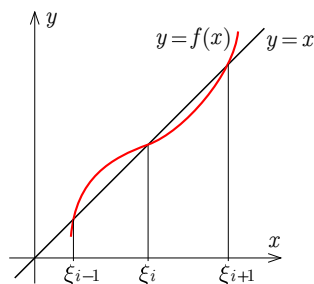
$$(4c) \quad x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{\operatorname{ctg} x_n}{4}$$

sorozat is, ami a B) eljárásban $c = 1/2$ -nek felel meg. Megjegyezzük, az

$$(4d) \quad x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{\operatorname{arcc} \operatorname{tg} 2x_n}{2}$$

sorozat is konvergens, de fontos látnunk, ez nem a (4c) rekurzió függvényének az inverzét használja, hanem (4b) módosítása a B) eljárás szerint $c = 1/2$ választással. A különböző eljárások különböző nagyságú lépésekben közelítik meg az eredményt, különböző sebességgel konvergálnak. Konyhaszabálynak elfogadhatjuk, hogy annál gyorsabb a konvergencia, minél kisebb a jobb oldal meredekségének az abszolút értéke a határérték közelében. A (4b), (4c) és (4d) sorozatokban a meredekségek rendre $-0,74$, $-0,17$ és $0,13$, ennek megfelelően a (4c) és (4d) sorozat számottevően gyorsabban közelíti meg az x_∞ értéket, mint a (4b) sorozat.

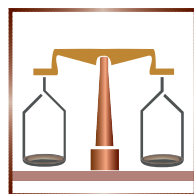
Végül néhány szót kell szólnunk arról az esetről is, amikor az (1) egyenletnek több gyöke is van. Előfordulhat, hogy az eljárás egyik gyököt sem találja meg, mert az m_f meredekség abszolút értéke minden gyök esetében nagyobb egynél. Ilyenkor az A) vagy a B) trükk segítségével elérhetjük, hogy az eljárás bármely kiválasztott gyök esetében megfelelő kezdőértékről indítva konvergáljon. Az viszont biztos nem lehetséges, hogy az eljárás minden további manipuláció nélkül minden gyök esetében konvergens legyen: ha mondjuk $f(x)$ a ξ_i gyök környezetében teljesíti a (3a) és (3b) feltételeket, akkor a szomszédos ξ_{i-1} , illetve ξ_{i+1} esetében biztos nem fogja, mert ott $|m_f|$ túl nagy lesz, ahogy azt a 3. ábrán is láthatjuk.



3. ábra

Woynarovich Ferenc

Mérési feladatok megoldása



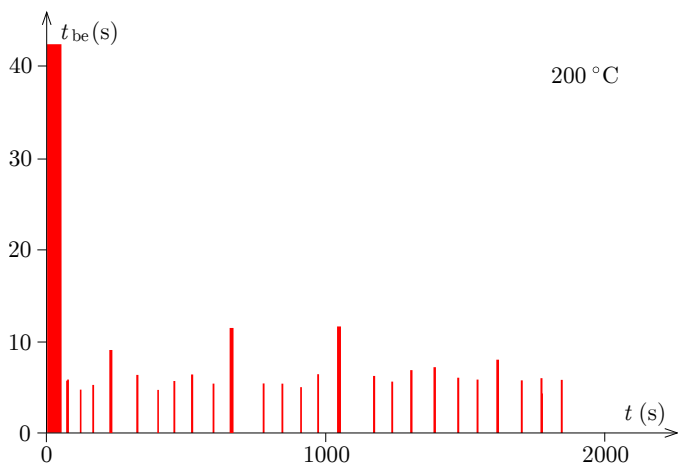
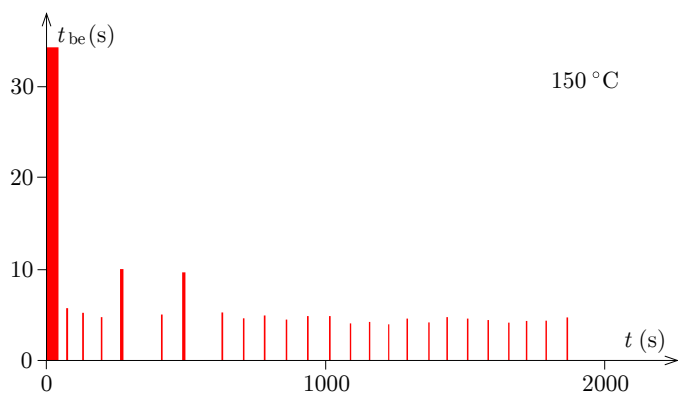
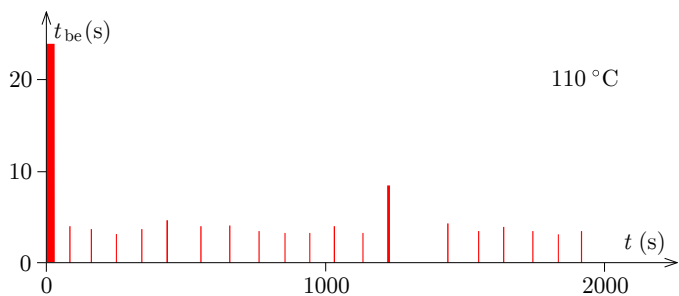
M. 441. Egy vasalót állítsuk ferde támasztólapjára, majd kapcsoljuk be. Ábrázoljuk az idő függvényében a vasaló ki-be kapcsolását! Várjuk meg a periodikus ki-be kapcsolgatást, és ennek segítségével becsüljük meg, hogy állandósult állapotban másodpercenként mennyi hőt ad le a vasaló! A méréseket végezzük el három különböző beállított hőmérsékletnél! Minden mérés előtt várjuk meg, hogy a vasaló szobahőmérsékletre hűljön. A becsléshez a bekapcsolt vasaló teljesítményét közelítsük a névleges értékkel.

(6 pont)

Közli: Honyek Gyula, Veresegyház

Megoldás. A méréshez egy Bosch CCBD5 vasalót és mobiltelefont használtam. A telefon hangfelvevő alkalmazásának elindítása után beállítottam egy hőmérsékletet a (kezdetben szobahőmérsékletű) vasalón, és bekapcsoltam. Körülbelül fél óráig hagytam bekapcsolva, közben végig ment a hangfelvétel. A mérés befejeztével a hangfelvétel elemzésével megállapítottam tizedmásodperc pontossággal a ki- és bekapcsolási időpontokat, amelyeket egy táblázatba foglaltam. A mérést három különböző hőmérséklet-beállításnál végeztem el. A beállított névleges hőmérsékletek a következők voltak: 110 °C, 150 °C, 200 °C.

Az 1. ábra különböző beállított hőmérsékletek esetén mutatja a vasaló ki- és bekapcsolási időpontjait. A felfutó élek (a téglalapok bal oldala) a bekapcsolási, a lemenő élek (a téglalapok jobb oldala) pedig a kikapcsolási időpontokat jelzik. Az egymást követő felfutó és lemenő élek közötti időszakaszok az egyes fűtési szakaszok időtartamát adják. Mivel ezek a fűtési szakaszok viszonylag rövidek, szemléltetés céljából az időtartamaikat (t_{be}) a megfelelő téglalapok magasságai jelzik. Az ábrán

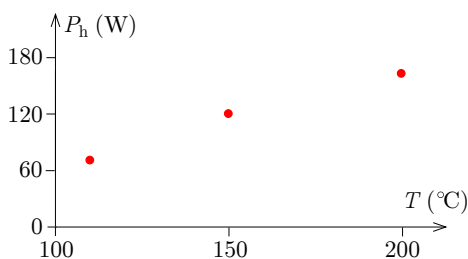


1. ábra

látható, hogy már a második bekapcsolástól kezdve állandósult állapotnak tekinthető a vasaló viselkedése, mert a rövid bekapcsolási időtartamok közel egyformák, és közel periodikusan követik egymást. Ezért az állandósult állapot megfigyelési időszakát úgy jelöltem ki, hogy a második bekapcsolási időponttól az utolsó megfigyelt bekapcsolási időpontig tart. Ezen belül a fűtési idő a bekapcsolt állapothoz tartozó rövid időszakaszok összege. Az állandósult állapot idejét és a fűtési időt a táblázat mutatja a három különböző hőmérséklet-beállítás esetén.

névleges hőmérséklet, T ($^{\circ}\text{C}$)	110	150	200
állandósult állapot időtartama, $t_{\text{ö}}$ (s)	1831,5	1788,7	1768,4
ebből fűtési idő, t_{f} (s)	72,4	119,8	160,7
elektromos energiafogyasztás, $W_{\text{e}} = Pt_{\text{f}}$ (J)	130320	215640	289260
leadott hőteljesítmény, $P_{\text{h}} = W_{\text{e}}/t_{\text{ö}}$ (W)	71,2	120,6	163,6

Az elektromos energiafogyasztást a $W_{\text{e}} = Pt_{\text{f}}$ összefüggésből számoltam, ahol a vasaló névleges teljesítménye $P = 1800$ W. Feltehetjük, hogy az állandósult állapotban $t_{\text{ö}}$ idő alatt leadott Q hőmennyiség megegyezik a felvett elektromos teljesítménnyel: $Q = W_{\text{e}}$. Az 1 s alatt leadott hőmennyiség a $P_{\text{h}} = Q/t_{\text{ö}} = W_{\text{e}}/t_{\text{ö}}$ képlettel számítható ki. Az (előre sejthető összefüggés) jól leolvasható a 2. ábrán: a vasaló által másodpercenként leadott hőmennyiség nő a beállított névleges hőmérséklettel.



2. ábra

Hibaforrások: A kapcsolási időpontok meghatározása $\pm 0,1$ s bizonytalanságú volt. Mivel mindig körülbelül 20 bekapcsolási időpont volt, ez a t_{f} idő meghatározásában körülbelül ± 2 s-ot, a $t_{\text{ö}}$ meghatározásában $\pm 0,1$ s-ot jelent. A be- és kikapcsolási periódus ideje ingadozott, ebből $t_{\text{ö}}$ meghatározására egy nagyobb bizonytalanság adódik, ami legalább ± 5 perc, azaz ± 300 s hibát jelenthet.

Fülöp Magdaléna (Pécsi Leőwey Klára Gimn., 10. évf.)

8 dolgozat érkezett. Helyes 3 megoldás. Kicsit hiányos (5 pont) 2, hiányos (3–4 pont) 3 dolgozat.

M. 442. *Mérjük meg egy – még nem használt – mosogatószivacs anyagának sűrűségét!*

(6 pont)

Közli: Szász Krisztián, Budapest

Megoldás. A feladat: meghatározni egy mosogatószivacs szilárd vázelemének sűrűségét.³

A mérést több szivacsra elvégeztem. Először megmértem a száraz szivacs tömegét. A még száraz szivacs „bruttó” térfogatát digitális tolómérővel határoztam meg.

³A megoldók többsége hibásan a levegővel telt szivacs átlagos sűrűségét határozta meg.

A szivacs téglatest alakú, amely oldalait lemértem, és ebből térfogatot számoltam. Ezután a szivacsot víz alá helyeztem, és addig nyomkodtam, amíg nem távozott belőle az összes levegő, majd hagytam, hogy megszívja magát vízzel. A már vízzel teli szivacsot kivettem, óvatosan (szigorúan csak a felületét) letöröltem, hogy megszábaduljak az odatapadt víztől, majd a tömegét ismét megmértem. A szivacs eddig levegővel telt pórusai ekkor már vízzel teltek, és a tömegnövekedésből kiszámoltam a pórusok össztérfogatát a szivacson belül. Ezek után meg tudtam határozni a szivacs anyagának sűrűségét.

Műszerek és adatok:

digitális mérleg méréshatár: 300 g, pontosság: $\delta m = 0,01$ g;
 digitális tolómérő pontosság: $\delta \ell = 0,01$ cm;
 víz $T = 20$ °C, $\rho_v = 0,998$ g/cm³.

Mért és számított mennyiségek:

m_0, m_t a szivacs száraz és vízzel teli tömege,
 a, b, c a szivacs oldalhosszúságai,
 $\Delta m = m_t - m_0$ tömegnövekmény,
 $V_0 = abc$ a szivacs (teljes) térfogata,
 $V_v = \Delta m / \rho_v$ a felvett víz térfogata,
 $V_{sz} = V_0 - V_v$ a szivacs anyagának térfogata,
 $\rho = m_0 / V_{sz}$ a szivacs sűrűsége.

A száraz szivacs mért és számított adatai:

$m_0 = (5,36 \pm 0,01)$ g,
 $a = (9,00 \pm 0,01)$ cm, $b = (2,00 \pm 0,01)$ cm, $c = (6,00 \pm 0,01)$ cm,
 $V_0 = abc = (108,00 \pm 0,86)$ cm³.

A szivacsok egy csomagból kerültek ki, mindegyik térfogatát és tömegét *hibahatáron belül* azonosnak mértem.

A vizes szivacsok mért és származtatott adatai:

	Δm (g)	V_v (cm ³)	V_{sz} (cm ³)	ρ (g/cm ³)
1	103,10	103,29	$4,71 \pm 0,58$	$1,14 \pm 0,14$
2	103,40	103,59	$4,41 \pm 0,58$	$1,21 \pm 0,16$
3	103,60	103,79	$4,21 \pm 0,58$	$1,27 \pm 0,18$
4	103,50	103,69	$4,31 \pm 0,58$	$1,24 \pm 0,17$
5	103,55	103,74	$4,26 \pm 0,58$	$1,26 \pm 0,17$

A mért adatokat átlagolva:

$$\rho = (1,22 \pm 0,07) \text{ g/cm}^3.$$

A relatív hiba 5,7%. Ennek fő forrása a $V_{sz} = V_0 - V_v$ kivonás, ahol két egymástól csak kicsit különböző mennyiség különbségét számítjuk ki. A szivacsok méretei ki-

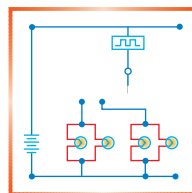
csik, így még digitális tolómérővel is csak ekkora pontosság volt elérhető (ami azonban sokkal pontosabb mintha egy hétköznapi vonalzót használtam volna, melynek abszolút hibája egy nagyságrenddel nagyobb).

Erdélyi Dominik (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 12. évf.)

Megjegyzés. A mérési eredményeket mindig érdemes összevetni a tapasztalattal és a fel-lelhető irodalmi adatokkal is. Több megoldó 1 g/cm^3 -nél jelentősen kisebb sűrűséget mért a szivacs anyagára, amely ellentmond annak a hétköznapi tapasztalatnak, hogy a vízzel telt mosogatószivacs elsüllyed a vízben. A mosogatószivacsok általában poliuretánból készülnek, az irodalmi adatok szerint ezek sűrűsége (a kémiai összetételtől függően) $1,01 \text{ g/cm}^3$ és $1,26 \text{ g/cm}^3$ között változik (<https://en.wikipedia.org/wiki/Polyurethane>).

28 dolgozat érkezett. Helyes 3 megoldás. Kicsit hiányos (4–5 pont) 3, hiányos (1–2 pont) 11, hibás 11 dolgozat.

Fizika gyakorlatok megoldása



G. 891. Egy dominó alakú hasábot készítünk valamilyen gyengén vezető anyagból. A méretek: $0,5 \text{ cm} \times 3 \text{ cm} \times 6 \text{ cm}$. Megmérjük a dominó elektromos ellenállását úgy, hogy az egymással szemben lévő oldalai között folyjon az áram. A csatlakozásokat úgy alakítjuk ki, hogy a dominókban az áramsűrűség homogén legyen. A feszültségeket úgy választjuk meg, hogy az áramsűrűség nagysága mindhárom esetben megegyezzen.

- Hogy aránylik egymáshoz a három mért ellenállás?
 - Hogy aránylik egymáshoz az alkalmazott három feszültség?
 - Hogy aránylik egymáshoz a három esetben a másodpercenként felszabaduló Joule-hő?
- (4 pont)

Megoldás. A dominó méretei: $a = 0,5 \text{ cm}$, $b = 3 \text{ cm}$, $c = 6 \text{ cm}$.

- Az ellenállás a dominó méreteinek és fajlagos ellenállásának függvényében:

$$R = \varrho \frac{\ell}{A},$$

ahol ϱ a fajlagos ellenállás, ℓ az áram irányával párhuzamos méret és A az erőmérőleges keresztmetszet. A három különböző esetben az ellenállás – rendre a

legkisebb, a közepes és a legnagyobb területű lapok közt mérve:

$$R_1 = \varrho \frac{c}{ab} = \varrho \cdot 4 \text{ cm}^{-1},$$

$$R_2 = \varrho \frac{b}{ac} = \varrho \cdot 1 \text{ cm}^{-1},$$

$$R_3 = \varrho \frac{a}{bc} = \varrho \cdot \frac{1}{36} \text{ cm}^{-1}.$$

Az ellenállások aránya:

$$R_1 : R_2 : R_3 = 4 : 1 : \frac{1}{36} = 144 : 36 : 1.$$

b) Az áramsűrűség az áramerősség és a keresztmetszet hányadosa:

$$j = \frac{I}{A},$$

amely a feladat szövege szerint mindhárom esetben ugyanakkora. A dominókra kapcsolt feszültség az Ohm-törvény alapján:

$$U = RI = RjA = \varrho \frac{\ell}{A} \cdot jA = \varrho j\ell.$$

A három különböző esetben a dominóra kapcsolt feszültség – ismét rendre a legkisebb, a közepes és a legnagyobb területű lapok közt mérve:

$$U_1 = \varrho jc = \varrho j \cdot 6 \text{ cm},$$

$$U_2 = \varrho jb = \varrho j \cdot 3 \text{ cm},$$

$$U_3 = \varrho ja = \varrho j \cdot \frac{1}{2} \text{ cm}.$$

A feszültségek aránya:

$$U_1 : U_2 : U_3 = 6 : 3 : \frac{1}{2} = 12 : 6 : 1.$$

c) A felszabaduló Joule-hő:

$$P = \frac{U^2}{R} = \frac{(\varrho j\ell)^2}{\varrho \frac{\ell}{A}} = \varrho j^2 \ell A = \varrho j^2 V,$$

ahol $V = \ell A$ a dominó térfogata. Tehát a teljesítmény független attól, hogy melyik lappár között mérünk:

$$P_1 : P_2 : P_3 = 1 : 1 : 1.$$

Megjegyzés. Az a) és b) részek eredményeiből is ugyanerre jutunk, hiszen

$$P_1 = \frac{U_1^2}{R_1} = \frac{(\varrho j \cdot 6 \text{ cm})^2}{\varrho \cdot 4 \text{ cm}^{-1}} = \varrho j^2 \cdot 9 \text{ cm}^3,$$

$$P_2 = \frac{U_2^2}{R_2} = \frac{(\varrho j \cdot 3 \text{ cm})^2}{\varrho \cdot 1 \text{ cm}^{-1}} = \varrho j^2 \cdot 9 \text{ cm}^3,$$

$$P_3 = \frac{U_3^2}{R_3} = \frac{(\varrho j \cdot \frac{1}{2} \text{ cm})^2}{\varrho \cdot \frac{1}{36} \text{ cm}^{-1}} = \varrho j^2 \cdot 9 \text{ cm}^3,$$

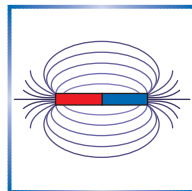
és így a teljesítmények aránya ugyanúgy:

$$P_1 : P_2 : P_3 = 9 : 9 : 9 = 1 : 1 : 1.$$

Szighardt Anna (Révkomárom, Selye János Gimn., 9. évf.)

23 dolgozat érkezett. Helyes 16 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 2, hiányos (1–2 pont) 5 dolgozat.

Fizika feladatok megoldása



P. 5635. A nyújtón az óriáskör bemutatásánál a tornász éppen átbillen a felső függőleges helyzetén. Amikor alulra ér, az acélrúd láthatóan meghajlik. Modellezzük a tornászt egy vékony, súlyos, homogén rúddal, ami vízszintes tengely körül forog. Ha a rúd a felső állásából az alsóba ér, akkor a súlyának hányszorosával húzza a tengelyt? (A súrlódást, közegellenállást, a tengely behajlását a rúd hosszához képest hanyagoljuk el.)

(4 pont)

Közl: Gelencsér Jenő, Kaposvár

Megoldás. Modellezzük a tornászt egy ℓ hosszúságú, m tömegű vékony rúddal. Ha a tornász a felső függőleges helyzeten éppen átbillen, akkor ott a szögsebessége 0, az alsó helyzetben pedig legyen ω . A tömegközéppontja éppen ℓ -el került lejjebb az óriáskör során. A mechanikai energia megmaradása alapján:

$$mg\ell = \frac{1}{2}\Theta\omega^2,$$

ahol

$$\Theta = \frac{1}{3}m\ell^2$$

a vékony rúd tehetetlenségi nyomatéka a végpontján átmenő, a rúdra merőleges tengelyre vonatkoztatva. Ebből

$$\omega^2 = \frac{6g}{\ell}.$$

Alsó állásban a tömegközéppontját a ráható erők – a tengely által kifejtett K erő és az mg nehézségi erő – eredője gyorsítja (tartja körpályán):

$$K - mg = ma_{\text{cp}} = m\omega^2\frac{\ell}{2}.$$

Ebből a tengely által kifejtett kényszererő:

$$K = 3mg + mg = 4mg.$$

Newton harmadik törvénye értelmében a tornász is K erővel, tehát súlyának négyszeresével húzza lefelé a tengelyt, az emiatt hajlik meg láthatóan.

Papp Emese Petra (Budapest, ELTE Apáczai Csere J. Gyak. Gimn., 10. évf.)

41 dolgozat érkezett. Helyes 19 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 18, hiányos (1–2 pont) 4 dolgozat.

P. 5636. Egy űrszonda a Föld $v \approx 30$ km/s-os keringési sebességével ellentétes irányban, a Földhöz képest nv sebességgel ($n < 1$) eltávolodott a Földtől. További mozgását – jó közelítéssel – csak a Nap gravitációs tere határozza meg.

a) Mekkora az űrszonda pályájának nagytengelye és a numerikus excentricitása?

b) Mekkora lehet n , hogy a szonda maradványai eljussanak a Nap felszínéig?

(Lásd még a Mesterséges égitestek mozgásával kapcsolatos problémák és feladatok c. cikket a honlapon.)

(5 pont)

Almár Iván feladata nyomán

Megoldás. A szonda kezdetben a v sebességgel mozgó Földhöz képest azzal ellentétes irányban nv sebességgel távolodik, így sebessége ekkor $v_0 = (1 - n)v$ nagyságú és a Naphoz húzott sugárra merőleges irányú (tehát ekkor van a szonda a Naptól legtávolabb).

A szonda teljes mechanikai energiája (a feladatban hivatkozott cikk alapján):

$$E = -\frac{\gamma m M_{\odot}}{2a},$$

ahol γ a gravitációs állandó, $M_{\odot}$ a Nap tömege, m a szonda tömege és a a pályájának félnagytengelye. γ és $M_{\odot}$ értékét táblázatokból kikereshetnénk, de egyszerűbb, ha a (közel) körpályán mozgó Föld mozgásegyenletét használjuk fel:

$$\frac{M_{\oplus} v^2}{r_{\oplus}} = \frac{\gamma M_{\oplus} M_{\odot}}{r_{\oplus}^2},$$

ahol $M_{\oplus}$ a Föld tömege és $r_{\oplus} \approx 1,5 \cdot 10^{11}$ m a Föld pályasugara. Ebből rendezéssel:

$$(1) \quad \frac{\gamma M_{\odot}}{v^2} = r_{\oplus}.$$

a) A szonda mechanikai energiáját a nap-távolsági pontra felírva:

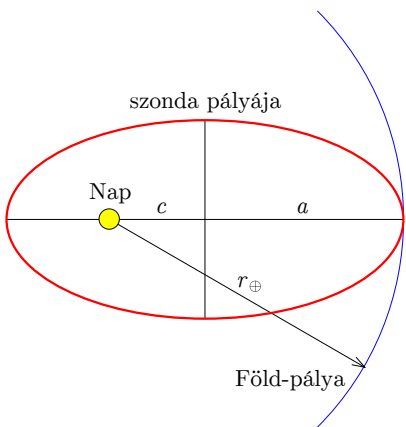
$$\frac{mv_0^2}{2} - \frac{\gamma m M_{\odot}}{r_{\oplus}} = E = -\frac{\gamma m M_{\odot}}{2a},$$

amiből

$$(2) \quad \frac{1}{a} = \frac{2}{r_{\oplus}} - \frac{(1-n)^2 v^2}{\gamma M_{\odot}} = \frac{2}{r_{\oplus}} - \frac{(1-n)^2}{r_{\oplus}} = \frac{1+2n-n^2}{r_{\oplus}}.$$

Az ábráról leolvasható, hogy $r_{\oplus} = a + c = a + ea = a(1 + e)$, amiből a pálya keresett excentricitása:

$$(3) \quad e = \frac{r_{\oplus}}{a} - 1 = 2n - n^2 = n(2 - n).$$



b) A szonda maradványai akkor érik el a Nap felszínét, ha $a - c \leq R_{\odot}$, ahol $R_{\odot} \approx 7 \cdot 10^8$ m a Nap sugara. Ez alapján (2) és (3) felhasználásával:

$$R_{\odot} \geq a - c = a - ea = a(1 - e) = \frac{1 - 2n + n^2}{1 + 2n - n^2} r_{\oplus} = \frac{(1 - n)^2}{2 - (1 - n)^2} r_{\oplus},$$

$$1 - n \leq \sqrt{\frac{2R_{\odot}}{r_{\oplus} + R_{\odot}}} \approx 0,096,$$

amiből (a feladatban szereplő $n < 1$ feltételt is figyelembe véve) a napfelszín elérésének feltétele:

$$0,904 \leq n < 1.$$

Kovács Tamás (Szeged, SZTE Báthory István Gyak. Gimn. és Ált. Isk., 11. évf.)

15 dolgozat érkezett. Helyes 8 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 3, hiányos (1–2 pont) 4 dolgozat.

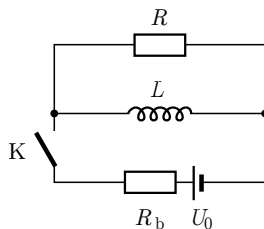
P. 5639. A mellékelt kapcsolási rajznak megfelelően összeállított áramkörben a feszültségforrás elektromotoros ereje 6 V, belső ellenállásának nagysága 2 Ω . Az ideális tekercs önindukciós együtthatója 1,5 H, az R ellenállás pedig 1000 Ω nagyságú. Kezdetben a kapcsoló zárva van.

a) Mekkora töltés áramlik át az R ellenálláson a kapcsoló kinyitása után?

b) Mennyi hő fejlődik az R ellenálláson ezalatt?

(5 pont)

Tornyai Sándor fizikaverseny nyomán, Hódmezővásárhely



I. megoldás. Kezdetben az R ellenálláson nem folyik áram, mert a kapcsoló zárása után hosszú idővel, állandósult állapotban az ideális tekercs rövidzárként viselkedik (1. ábra).

Ez alapján a tekercsen átfolyó áram:

$$I_0 = \frac{U_0}{R_b} = 3 \text{ A}.$$

a) A kapcsoló nyitása után (2. ábra) a tekercs árama nem változhat ugrásszerűen, így a $t = 0$ időpillanatban az RL -körben I_0 áram folyik. Ezután egy ideig a tekercs feszültségforrásként viselkedik, és áramot hajt át az R ellenálláson:

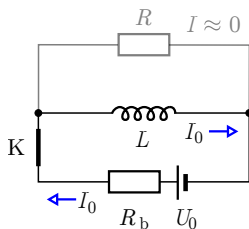
$$U_i = -L \frac{\Delta I}{\Delta t} = RI.$$

Rövid idő alatt az ellenálláson $\Delta q = I \Delta t$ töltés áramlik át, így az előző kifejezés alapján:

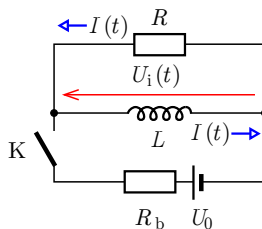
$$\Delta q = -\frac{L}{R} \Delta I.$$

A lecsengés teljes idejére mindkét oldalt összegezve:

$$q = \sum \Delta q = -\frac{L}{R} \sum \Delta I = \frac{L}{R} I_0 = \frac{LU_0}{RR_b} = 4,5 \text{ mC}.$$



1. ábra



2. ábra

b) Az R ellenálláson annyi hő fejlődik, amekkora a kapcsoló nyitásának pillanatában a tekercsben lévő mágneses tér energiája volt:

$$Q = E_m = \frac{1}{2} L I_0^2 = \frac{1}{2} L \frac{U_0^2}{R_b^2} = 6,75 \text{ J.}$$

Béltteki Teó (Hódmezővásárhely, Bethlen G. Ref. Gimn., 11. évf.)

II. megoldás. a) Az előző megoldás jelöléseit használva a kapcsoló nyitása után az áram időbeli változását leíró differenciálegyenlet:

$$\frac{dI(t)}{dt} = -\frac{R}{L} I(t).$$

Ez ugyanolyan alakú, mint a radioaktív bomlást leíró egyenlet, így a megoldása is ugyanolyan:

$$I(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L} t}.$$

Az R ellenálláson kicsiny dt idő alatt $dq = I dt$ töltés áramlik át, így a teljes átáramló töltés:

$$q = \int_0^{\infty} I dt = I_0 \int_0^{\infty} e^{-\frac{R}{L} t} dt = -I_0 \frac{L}{R} \left[e^{-\frac{R}{L} t} \right]_0^{\infty} = \frac{L}{R} I_0 = 4,5 \text{ mC.}$$

b) Kicsiny idő alatt az R ellenálláson $dQ = R [I(t)]^2 dt$ hő disszipálódik. A teljes disszipálódó hőt megkaphatjuk ennek integrálásával is:

$$Q = \int_0^{\infty} R [I(t)]^2 dt = R I_0^2 \int_0^{\infty} e^{-\frac{2R}{L} t} dt = -\frac{1}{2} L I_0^2 \left[e^{-\frac{2R}{L} t} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{2} L I_0^2 = 6,75 \text{ J.}$$

Erdélyi Dominik (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.)

Megjegyzés. A „végtelen” ideig tartó összegzés furcsának tűnhet, de valójában a lecsengés a $\tau = \frac{L}{R} = 1,5$ ms időállandó tízszerese (tehát 15 ezredmásodperc) alatt lényegében lejátszódik.

22 dolgozat érkezett. Helyes 13 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 4, hiányos (2–3 pont) 4, hibás 1 dolgozat.

P. 5645. Egy motoros 36 km/h sebességgel hajt be egy félkör alakú, „visszafor-dító” kanyarba. Az aszfalt és a kerekek közötti tapadási súrlódási együttható 0,58. A motoros mindvégig egy 40 m sugarú köríven tartja járművét (pontosabban a motor

és a motoros közös tömegközéppontját), és közben végig egyenletesen növeli annak sebességét.

a) Legfeljebb hány m/s-mal növelheti a motoros másodpercenként a sebességét?

b) Mekkora sebességre gyorsulhat fel a versenyző a kanyar végére?

c) Hogyan változik a motoros függőlegessel bezárt szöge a kanyarban?

(5 pont)

Közli: Kis Tamás, Heves

Megoldás. A motorosra függőleges irányban az mg nehézségi erő és a talaj N nyomóereje, vízszintes irányban pedig az S tapadási súrlódási erő hat. A függőleges erők eredője nulla, a vízszintes erő biztosítja a motor a gyorsulását. A motor akkor nem csúszik meg, ha

$$ma = S \leq \mu N = \mu mg,$$

$$(1) \quad a \leq \mu g.$$

a) és b) Az r sugarú körpályán mozgó motoros gyorsulása két, egymásra merőleges komponensre bontható: az érintőirányú a_t komponens a feladat szövege szerint állandó, a centripetális gyorsulás viszont a sebesség növekedésével nő, hiszen

$$a_{cp} = \frac{v^2}{r}.$$

A motoros gyorsulása a két komponens eredője, ennek nagysága:

$$(2) \quad a = \sqrt{a_t^2 + a_{cp}^2},$$

amely így akkor lesz a legnagyobb, amikor a sebesség a legnagyobb, tehát a „vissza-fordító kanyar” végén. Legyen ekkor a motoros sebessége v . A v_0 kezdősebességről egyenletesen gyorsuló motoros átlagsebessége:

$$v_{\text{átl}} = \frac{v + v_0}{2},$$

az $s = r\pi$ hosszúságú körív megtételéhez szükséges idő:

$$t = \frac{s}{v_{\text{átl}}} = \frac{2r\pi}{v + v_0}.$$

A motoros érintőirányú gyorsulása:

$$(3) \quad a_t = \frac{\Delta v}{t} = \frac{v - v_0}{t} = \frac{(v - v_0)(v + v_0)}{2r\pi} = \frac{v^2 - v_0^2}{2r\pi},$$

a teljes gyorsulása pedig (2) alapján:

$$a = \sqrt{\left(\frac{v^2 - v_0^2}{2r\pi}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{r}\right)^2}.$$

Az (1) feltétel szerint

$$\begin{aligned} a^2 &\leq (\mu g)^2, \\ \left(\frac{v^2 - v_0^2}{2r\pi}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{r}\right)^2 &\leq (\mu g)^2, \\ \frac{v^4 - 2v_0^2 v^2 + v_0^4}{4r^2 \pi^2} + \frac{v^4}{r^2} &\leq \mu^2 g^2, \\ (1 + 4\pi^2)v^4 - 2v_0^2 v^2 + v_0^4 - 4r^2 \pi^2 \mu^2 g^2 &\leq 0. \end{aligned}$$

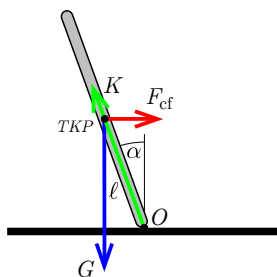
Határesetben ez v^2 -re egy másodfokú egyenlet. A numerikus adatokat behelyettesítve és megoldva, majd a pozitív megoldásból gyököt vonva:

$$v_{\max} \approx 15 \text{ m/s},$$

amiből (3) alapján a maximális érintőirányú gyorsulás (a „másodpercenkénti sebességnövelés maximális értéke”):

$$a_{t,\max} = \frac{v_{\max}^2 - v_0^2}{2r\pi} \approx 0,5 \text{ m/s}^2.$$

c) A motorosra a hozzá rögzített gyorsuló vonatkoztatási rendszerben tehetetlenségi erők is hatnak. A motoros bedőlése szempontjából a pályájára merőleges centrifugális erőnek van szerepe. Az ábrán látható, hogy a talajjal való érintkezési pontra vonatkoztatva a $G = mg$ nehézségi erőnek és az $F_{\text{cf}} = m \frac{v^2}{r}$ centrifugális erőnek van forgatónyomatéka (az O ponton átmenő, a nyomóerőből és a súrlódási erőből összetevődő K kényszererőnek nincs).



Feltéve, hogy a folyamatosan változó sebességgel a bedőlés szöge is folyamatosan és aránylag lassan változik (a teljes kanyart $t \approx 10$ s alatt teszi meg a motoros), a forgatónyomatékok egyensúlyát írjuk fel:

$$mgl \sin \alpha = m \frac{v^2}{r} \ell \cos \alpha,$$

ahol ℓ a tömegközéppont távolsága az érintkezési ponttól és α a motoros függőlegessel bezárt szöge. Ebből a keresett szög a sebesség függvényében:

$$\alpha = \arctg \frac{v^2}{gr}.$$

Ez a szög a teljes visszakanyarodás közben fokozatosan $\alpha_{\min} = \arctg \frac{v_0^2}{gr} \approx 14^\circ$ értékről $\alpha_{\max} = \arctg \frac{v^2}{gr} \approx 30^\circ$ értékre növekszik.

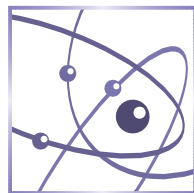
Ujpál Bálint (Miskolci Herman O. Gimn., 12. évf.)

Megjegyzések. 1. Eredményeink nem függenek a tömegközéppont magasságától és a rendszer tömegétől.

2. Az ábrán csak a motoros haladási irányára merőleges síkban ható erőket ábrázoltuk. A sebességét növelő motorra a haladási irányába is hat súrlódási erő, a motoros vonatkoztatási rendszerében pedig azzal ellentétes irányba egy ma_t nagyságú tehetetlenségi erőt is figyelembe kell vennünk. Ennek az erőnek a forgatónyomatéka a motort hátra akarja dönteni, amit a két kerékre ható eltérő nyomóerők forgatónyomatéka egyenlít ki. (Ha a gyorsulás nagyon nagy, akkor az első kerék meg is emelkedhet.) Ennek vizsgálatát azonban a feladat nem kéri, és a motor geometriai adatainak – a kerekek távolságának és a tömegközéppont magasságának – ismerete nélkül nem is tudnánk számításokat végezni.

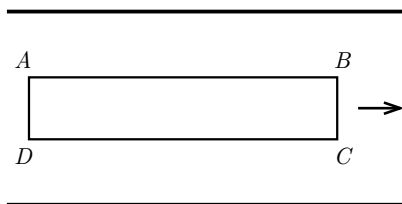
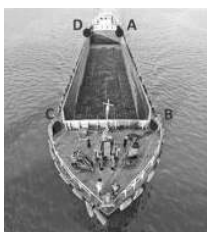
25 dolgozat érkezett. Helyes Ujpál Bálint megoldása. Kicsit hiányos (3–4 pont) 9, hiányos (1–2 pont) 10, hibás 5 dolgozat.

Fizikából kitűzött feladatok 2025. november



M. 444. Határozzuk meg egy AA-s ceruzaelem szimmetriatengelyére és egy arra merőleges, a tömegközépponton áthaladó tengelyre vett tehetetlenségi nyomatékait!
(6 pont) Közli: Széchenyi Gábor, Budapest

G. 901. Egy folyami uszály fedélzetén az ellenőrzést végző matróz $3,6 \text{ km/h}$ nagyságú sebességgel járja körbe az $A-B-C-D-A$ útvonalat. (Lásd a mellékelt ábrákat, ahol $AB = CD = 75 \text{ m}$, $BC = AD = 15 \text{ m}$.) Az uszály $3,6 \text{ km/h}$ sebességgel halad a parthoz képest.



- a) Hány percet vesz igénybe a matróz ellenőrző körútja?
 - b) Mekkora utat tesz meg a matróz a parton álló megfigyelőhöz viszonyítva, mialatt egyszer körbejárja a fedélzetet?
 - c) Rajzoljuk fel a matróz pályáját a parton álló megfigyelőhöz viszonyítva!
- (4 pont) Tornyai Sándor fizikaverseny feladata nyomán

G. 902. Egy 12 m magas fa tetejéről leesik a termés, 8 m-es magasságban egy kis ágba ütközik, és bár 30% -nyit veszít sebességéből, de – mivel letöri az ágat – folytatni tudja megkezdett pályáját. Mekkora sebességgel ér földet? (A termés súlyos és kicsi.)

(3 pont) Közli: Holics László, Budapest

G. 903. Négy gyerek szeretne mérleghintázni. Ancsi 20 kg , Bandi 25 kg , Cili 30 kg , Dini 35 kg tömegű. A mérleghinta mindkét oldalán $2-2$ ülés van 120 és 150 cm-re a tengelytől. Tapasztalatuk szerint úgy a legjobb hintázni, ha a két oldal között a lehető legkisebb a forgatónyomatékok eltérése.

Segíts nekik kiválasztani a két „legjobb” ültetést!
(3 pont) Közli: Csernovszky Zoltán, Budapest

G. 904. A 230 V feszültségű hálózatra kapcsolt elektromos készülékkel vizet melegítünk. A vízmelegítőben található fűtőszál elektromos ellenállása működés közben $46\ \Omega$.

a) Mekkora a vízmelegítő elektromos teljesítménye?

b) Hány fokkal melegszik fel 1 liter víz 3 perc alatt? A melegítés során 20% az energiavesztés.

(3 pont)

Versenyszöveg nyomán

P. 5679. Vízszintes talajon súrlódásmentesen mozoghat egy M tömegű, lapos felületű, kezdetben álló kiskocsi, melynek egyik végén egy $m = M/2$ tömegű, kicsiny hasáb helyezkedik el. A kiskocsi $\ell = 24\text{ cm}$ hosszú, a rajta lévő hasáb és a kiskocsi között a súrlódási együttható $\mu = 0,2$.



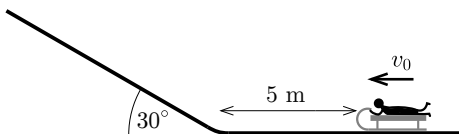
a) Legfeljebb mekkora v_0 sebességgel lökhetjük meg a kicsiny hasábot, hogy ne essen le a kiskocsiról?

b) Mekkora lesz a kiskocsi és a hasáb sebessége abban a pillanatban, amikor a hasáb lerepül a kiskocsiról, ha $v_1 = 2v_0$ sebességgel lökjük meg a hasábot?

(4 pont)

Közli: Wiedemann László, Budapest

P. 5680. Amikor a 30° -os hajlásszögű, vízszintes síkban folytatódó domboldalt mindenütt hó borította, Peti szokatlan módját választotta a szánkózásnak: az emelkedő aljától számított 5 m távolságból különböző kezdősebességgel indult el.



a) Mekkora kezdősebesség esetében áll meg leghamarabb a szánkó?

b) Milyen hosszú utat tett meg felfelé az emelkedőn ebben az esetben a szánkó?

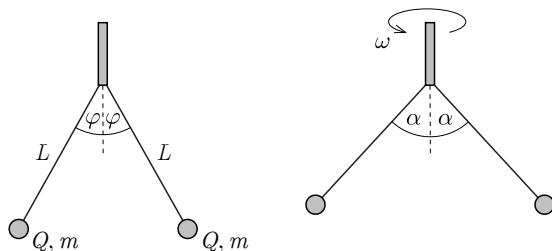
A szánkó pályája egybeesett a domboldal esésvonalával. A lejtő töréspontmentesen csatlakozik a vízszintes felülethez. A szánkó és a hó között a súrlódás elhanyagolható.

(4 pont)

Tornyai Sándor fizikaverseny, Hódmezővásárhely

P. 5681. Két darab, egyenként $L = 10\text{ cm}$ hosszúságú fonal egy-egy végét közös pontban egy függőleges tengelyhez rögzítettük, a másik végükre két egyforma, m tömegű és Q töltésű kicsiny gyöngyöt erősítettünk. Egyensúlyi állapotban a fonalak $\varphi = 30^\circ$ -os szöget zárnak be a függőlegessel. Ha a tengelyt egyenletesen forgatjuk, a gyöngyök az állandósult állapotban egyenletes körmozgással mozognak úgy, hogy a fonalak $\alpha = 45^\circ$ -os szöget zárnak be a forgástengellyel.

Mekkora a gyöngyök keringési ideje?



(4 pont)

Közli: Zsigri Ferenc, Budapest

P. 5682. Egy R sugarú, H magasságú hengerben folyadék van. A hengert a tengelye körül forgásba hozzuk. A forgás szögsebességét lassan növeljük egészen addig, amíg a folyadék széle felhúzódik egészen az edény szájáig. Ekkor a pohár aljának közepéről éppen „eltűnik” a folyadék.

- Mekkora az edény legnagyobb szögsebessége?
- Milyen magasan áll a folyadék a hengerben induláskor?

(5 pont)

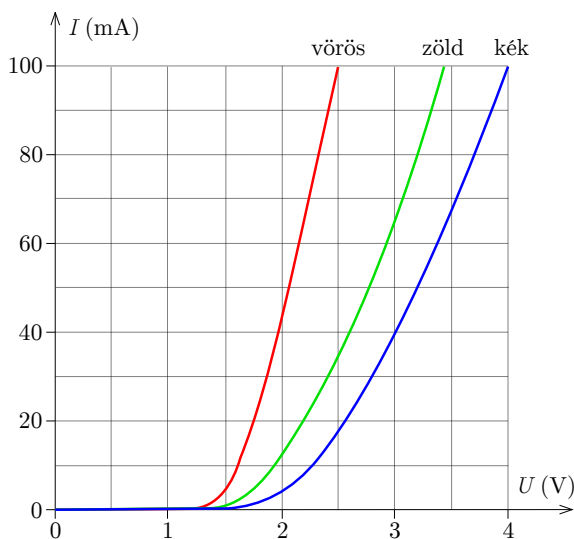
Közli: Simon Péter, Pécs

P. 5683. Az ábrán különböző színű LED-ek áram–feszültség karakterisztikáját láthatjuk. A grafikonról leolvashatjuk, hogy adott feszültség esetén mekkora a LED árama.

a) Az ábra alapján határozzuk meg, hogy mekkora teljesítményt vesz fel egy vörös, egy zöld és egy kék LED, ha $2,5$ V feszültségre kötjük őket párhuzamosan!

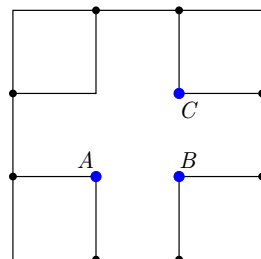
b) Mekkora lesz ugyanennek a három LED-nek a teljesítménye, ha $7,5$ V feszültségre kötjük őket sorosan?

(4 pont)



Közli: Honyek Gyula, Veresegyház

P. 5684. Egyenletes vastagságú drótból az ábrán látható keretet készítjük el. Számítsuk ki az A és B , valamint az A és C pontok közötti eredő ellenállások arányát!



(5 pont)

Közli: Cserti József, Budapest

P. 5685. Ismert jelenség, hogy egy tál vízbe részben bemerülő vékony, egyenes pálca képen egy töréspont jelenik meg (1. ábra).



1. ábra



2. ábra

A 2. ábrán egy olyan pálca fényképe látható, amely a függőlegessel valamekkora φ szöget zár be. Ha alkalmas irányból fényképezzük (vagy nézzük) a pálcát, annak a vízbe merülő része egyáltalán nem látszik, jóllehet a pálca itt is a tál aljáig ér.

Mekkora φ esetén jöhet létre ez a jelenség?

(4 pont)

Közli: Gnädig Péter, Vácduka

P. 5686. Űrhajósok egy a Földről induló $3/5c$ sebességgel távolodó űrhajóval elindulnak felfedezni a távoli univerzumot. A földi irányítók az indítás után T idővel a rakomány egy részét egy másik, $4/5c$ sebességgel haladó rakétával az űrhajó után küldik.

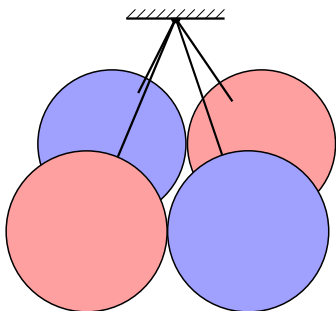
a) Mekkora sebességgel mozog a rakéta az űrhajósok koordináta-rendszerében?

b) Mennyi idő telik el a rakományt szállító rakéta elindulása és megérkezése között a földi irányítók, illetve az űrhajósok vonatkoztatási rendszerében?

A rakéta és az űrhajó gyorsításához szükséges idő elhanyagolható T mellett.

(5 pont)

Közli: Széchenyi Gábor, Budapest



P. 5687. Négy darab, r sugarú, m tömegű golyót r hosszúságú, vékony fonalakkal kötünk fel egy közös pontba úgy, hogy a golyók középpontja egy négyzetet határozzon meg. A négyzet egyik átlójának végén lévő két golyó piros, a másik kettő kék színű. (A golyók tömegének legnagyobb része a golyó középpontjánál található, emiatt a golyók tehetetlenségi nyomatéka elhanyagolhatóan kicsi. Ugyancsak elhanyagolható a golyók közötti súrlódási erő is.)

A golyók ilyen elrendeződése instabil egyensúlyi helyzet, amiből a rendszer a legkisebb külső zavar hatására „kibillen”, és egyre gyorsuló mozgással egy alacsonyabb helyzeti energiájú állapot felé mozdul el.

a) Mekkora szöveget zárnak be a függőlegessel a fonalak a kezdeti, illetve a legkisebb helyzeti energiájú állapotban?

b) Mekkora a négy golyó összes mozgási energiájának legnagyobb értéke?

(6 pont)

Közli: *Kis Tamás* (Heves), *Gnädig Péter* (Vácduka)

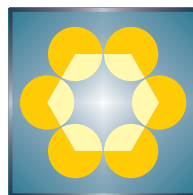


Beküldési határidő: 2025. december 15.

Elektronikus munkafüzet: <https://www.komal.hu/munkafuzet>



MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL FOR SECONDARY SCHOOLS (Volume 75. No. 8. November 2025)



Problems in Mathematics

New exercises for practice – competition K (see page 497): **K. 874.** András, Bori, Cili, Dezső, Elemér, Feri, Gabi and Hugó are standing in a circle in this order, each holding some beans, with a total of 240 beans altogether. If András gives 1 bean each to Bori, Cili, Dezső, Elemér, Feri, Gabi, and Hugó, then Bori gives 2 beans each to Cili, Dezső, Elemér, Feri, Gabi and Hugó, then Cili gives 3 beans each to Dezső, Elemér, Feri, Gabi and Hugó, then Dezső gives 4 beans each to Elemér, Feri, Gabi and Hugó, then Elemér gives 5 beans each to Feri, Gabi, and Hugó, then Feri gives 6 beans each to Gabi and Hugó, then Gabi gives Hugó 7 beans, each of them will have the same number of beans in their hands. How many beans did each of them have initially? **K. 875.** Divide an equilateral triangle into four congruent 2D-shapes. Divide an equilateral triangle into six congruent 2D-shapes. Create a total of at least four different divisions. **K. 876.** Think of a positive integer. If the number is even, divide it by 2, if odd, add 1 to it. Continue in the same manner with the result: if it's even, divide it by 2, if it's odd, add 1 to it. Is it true that if the initial number is less than 2025, we will get 1 in less than 25 steps? **K/C. 877.** Fill in the diagram (see page 497) with numbers 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 in a way that in the three grey parts containing four small triangles the product of the numbers is a perfect square. How many ways are there to achieve this? **K/C. 878.** How many four-digit positive integers divisible by 91 are there that contain exactly two different kinds of digits, with each digit appearing exactly twice?

New exercises for practice – competition C (see page 497): **Exercises up to grade 10:** **K/C. 877.** See the text at Exercises K. **K/C. 878.** See the text at Exercises K. **Exercises for everyone:** **C. 1873.** Solve the following system of equations on the set of triples of real numbers: $x^2 + 13x + 144 = 5y + 32z$, $y^2 + 13y + 144 = 5z + 32x$, $z^2 + 13z + 144 = 5x + 32y$. (Proposed by *Mátyás Czett*, Zalaegerszeg) **C. 1874.** Two points, G and H are given in the plane. Construct acute isosceles triangles using a straightedge and compass such that H is orthocenter and G is the centroid of the triangle. (The elementary steps of construction such as bisecting an angle, reflecting across a line etc. do not need to be

detailed.) **C. 1875.** Thanks to a generous donation, during the lunch break of the KöMaL Ankét on Saturday, m types of books were distributed among the n students present. There were multiple copies available of each book type, and everyone could choose freely: they could take books of several types, but at most one copy of each type. We know that for any two books there were a difference of at least three students between the set of students choosing each book. Prove that $m \leq \frac{2^n}{n+1}$. (Proposed by *Zoltán Paulovics*, Budapest)

Exercises upwards of grade 11: C. 1876. Winnie the Pooh tries to decide whether the following statement is true: 'If 30 days of a given year is chosen, there will not necessarily be at least five of them falling on the same day of the week.' He proposes the following argument: 'The statement is false. The day's of the week are the pigeon holes, and let's fill them with pigeons corresponding to the chosen days. We can distribute 28 (identical) pigeons such that every pigeon hole contains exactly 4 pigeons, however, the 29th pigeon will surely be placed in a pigeon hole containing four pigeons, therefore there must be a day of the week containing at least five of the chosen days.' Pooh's friend, Christopher Robin points out the missing part of the argument: 'Pooh, you've only considered seven cases: when each pigeon hole contains four pigeons, except for one containing five'. How many cases were omitted by Pooh? (Based on the idea of *László Németh*, Fonyód) **C. 1877.** Let D , E and F be the midpoints of the arcs BC , CA and AB not containing points A , B and C , respectively, on the circumcircle of acute triangle ABC . Line segment DE intersects sides BC and CA in points P and Q , respectively. Line segment EF intersects sides CA and AB in points R and S , respectively. Line segment FD intersects sides AB and BC in points T and U , respectively. Prove that triangles PRT and QSU have equal areas. (Proposed by *Bálint Bíró*, Eger)

New exercises – competition B (see page 499): **B. 5486.** Let E be the intersection of the diagonals of convex quadrilateral $ABCD$. Suppose that $AB = CD$, and the areas of triangles ABE and CDE are equal. Prove that the quadrilateral is a parallelogram or an isosceles trapezoid. (3 points) (Proposed by *Mihály Hujter*, Budapest) **B. 5487.** Positive numbers $a_1, a_2, \dots, a_{2025}$ satisfy $a_1 = 1$ and $\frac{1}{a_1+a_2} + \frac{1}{a_2+a_3} + \dots + \frac{1}{a_{n-1}+a_n} = a_n - 1$ for every $2 \leq n \leq 2025$. Find the value of a_{2025} . (3 points) (Based on the idea of *Mihály Bencze*, Brasov) **B. 5488.** Is it possible to color the points of the plane with three given colors such that each color is used at least once, and if the vertices of a triangle are colored with a color chosen from only two of the three given colors, then every point inside and on the perimeter of this triangle is also colored with one of these two colors? (4 points) (Proposed by *Márton Lovas*, Budakalász) **B. 5489.** In right triangle ABC the angles are the following: $\angle ABC = 15^\circ$ and $\angle CAB = 75^\circ$. Let F be the midpoint of hypotenuse AB . Let point D be chosen on leg BC such that $BD = CA$, and let point E be chosen on ray CA beyond point A such that $CE = BC$. Let M be the point of intersection of lines BE and CF . Prove that lines DM and CM are tangent to the circumcircle of triangle AEF . (4 points) (Proposed by *Bálint Bíró*, Eger) **B. 5490.** Prove that there exist infinitely many positive integers n such that numbers $2^n - 2025$, $2^n - 2024$, $\dots$, $2^n + 2025$ are all composite. (5 points) (Proposed by *Csaba Sándor*, Budapest) **B. 5491.** Does there exist a set H of polynomials with integer coefficients and degree at least two such that every integer value is taken by exactly one polynomial in H at an integer place? (5 points) (Proposed by *Péter Pál Pach*, Budapest) **B. 5492.** Kornél thinks about a closed subinterval of $I = [0, 2^k]$ (where k is a positive integer) with integer endpoints and length at least 1. Kristóf can ask the following question: he can choose an arbitrary closed subinterval with integer length, but not necessarily integer endpoints, and Kornél tells him the length of the intersection of the interval he picked and the interval chosen by Kristóf. (The answer is 0 if the intersection

of the two intervals is empty or consists of a single point.) Find the smallest number of questions with which Kristóf can guess the interval chosen by Kornél in all cases. (6 points) (Proposed by *Dávid Matolcsi*, Berkeley/Brussels) **B. 5493.** Show a function f that assigns a non-negative value to every vector in the plane satisfying the following: for an arbitrary triangle ABC with vertices on hyperbola $x^2 - y^2 = 1$ the area of the triangle equals $f(\overrightarrow{AB}) \cdot f(\overrightarrow{BC}) \cdot f(\overrightarrow{CA})$. (6 points) (Proposed by *Géza Kós*, Budapest)

New problems – competition A (see page 500): **A. 917.** Let a set S of complex numbers be called *symmetric* if the complex conjugate of every element of S also belongs to S . For each positive integer n , determine the largest positive integer K_n for which there exists an n -element symmetric set $S = \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ not containing 0, such that $z_1^k + z_2^k + \dots + z_n^k \leq 0$ holds true for every integer $1 \leq k \leq K_n$. (Proposed by *Navid Safaei*, Tehran and *Géza Kós*, Budapest) **A. 918.** Given a tree with $n \geq 2$ vertices labelled $v_1, v_2, \dots, v_n$. Each vertex hosts a dwarf, and every dwarf has some number of coins, at least n . We then go through the vertices in the order of increasing indices: the dwarf on the current vertex takes one coin from its richest neighbour; if there are several richest neighbours, he takes one coin from each of them. Determine, as a function of n , the smallest integer k such that for every tree with n vertices there exists an initial coin distribution in which the numbers of coins of any two dwarfs differ by at most k , and after the process every dwarf ends up with exactly the same number of coins as at the beginning. (Proposed by *Márton Németh*, Budapest) **A. 919.** Let $\mathcal{P}$ be a convex cyclic polygon with at least four vertices such that no two diagonals of $\mathcal{P}$ are congruent. Prove that there is at most one triangulation of $\mathcal{P}$ where all triangles have the same perimeter. (Proposed by *Andrei Chirita*, Cambridge)

Problems in Physics

(see page 521)

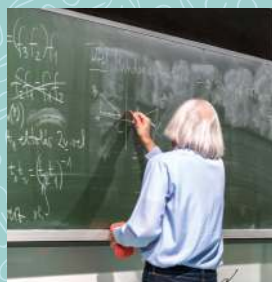
M. 444. Determine the moments of inertia of an AA battery which are calculated about the axis of symmetry and about an axis perpendicular to the axis of symmetry passing through the centre of mass.

G. 901. The sailor of a river barge is inspecting the deck of the barge and is walking at a speed of 3.6 km/h along the route $A-B-C-D-A$. (See the figure; $AB = CD = 75$ m, $BC = AD = 15$ m.) The barge is travelling at a speed of 3.6 km/h relative to the riverbank. *a)* How many minutes does it take for the sailor to complete his inspection route? *b)* What is the distance covered by the sailor relative to an observer on the riverbank while the sailor goes around the deck once? *c)* Plot the sailor's path relative to the observer on the riverbank. **G. 902.** A fruit falls from the top of a 12 m tree, hits a small branch at a height of 8 m, and although it loses 30% of its speed, it can continue falling because it breaks the branch. At what speed does it land? (The fruit is heavy and small.) **G. 903.** Four children want to play on a see-saw. Their masses are: Anne 20 kg, Brian 25 kg, Cecily 30 kg, Dave 35 kg. There are 2-2 seats on each side of the see-saw, 120 and 150 cm from the pivot. Based on their experience, it is best to swing with the smallest possible torque difference between the two sides. Help them choose the two “best” sitting arrangements. **G. 904.** An electric water heater connected to the 230 V mains is used to heat water. The resistance of the heating element of the water heater during operation is 46 Ω . *a)* What is the electrical power of the water heater? *b)* By how many degrees does 1 litre of water warm up in 3 minutes? The energy loss during heating is 20%.

P. 5679. An initially stationary trolley of mass M can move frictionlessly on the horizontal ground. The top of the trolley is flat and at one of its ends there is a small block of mass $m = M/2$ (as shown in the figure). The length of the trolley is $\ell = 24$ cm, and the coefficient of friction between the trolley and the block is $\mu = 0.2$. *a)* At what maximum

speed of v_0 can we push the small block so that it does not fall off the trolley? *b)* What will the speeds of the trolley and the block be at the moment when the block flies off the trolley, if the block is given an initial speed of $v_1 = 2v_0$? **P. 5680.** The angle of elevation of a hillside is 30° , and at the foot of the hill the ground is horizontal. When the hillside was covered with snow everywhere, Peter chose an unusual way of sledding: he started at different initial speeds at a distance of 5 m from the bottom of the slope (see *the figure*). *a)* At what initial speed did the sled stop in the shortest time? *b)* How much distance up the hill did the sled cover in this case? The path of the sled coincided with the fall line of the hillside. The hillside and the horizontal ground at the bottom of the hillside form a smooth curve. Friction between the sled and the snow is negligible. **P. 5681.** Two pieces of thread, each of length $L = 10$ cm, have one end fixed to a vertical axis at a common point, and two small beads of equal mass m and of charge Q are attached to the other ends. In equilibrium, each thread makes an angle of $\varphi = 30^\circ$ with the vertical axis. When the axis is rotated uniformly, the beads in the steady state undergo uniform circular motion such that the threads make an angle of $\alpha = 45^\circ$ with the axis of rotation. What is the period of the circular motion of the beads? **P. 5682.** A cylinder of radius R and of height H contains a liquid. The cylinder is made to rotate about its axis. The angular speed of rotation is slowly increased until the edge of the liquid is drawn up to the rim of the cylinder. The liquid then just “disappears” from the centre of the bottom of the cup. *a)* What is the greatest angular speed of the cylinder? *b)* What is the initial height of the liquid in the cylinder? **P. 5683.** The *figure* shows the current-voltage characteristics of different colour LEDs. For a given value of voltage the current of the LED can be read from the graph. *a)* Using the *graph*, determine the power consumption of a red, a green and a blue LED when they are connected in parallel to a voltage supply of voltage 2.5 V. *b)* What is the power of the same three LEDs when they are connected in series to a voltage supply of voltage 7.5 V? **P. 5684.** The frame shown *in the figure* is made from a piece of wire, which has uniform thickness. Calculate the ratio of the equivalent resistances between points A and B and between points A and C . **P. 5685.** It is a well-known phenomenon that a breakpoint appears in the image of a thin, straight stick when it is partly immersed into a bowl of water (see *Figure 1*). In *Figure 2* there is a photograph of a stick that makes an angle φ with the vertical. When the stick is photographed (or viewed) from a suitable direction, the submerged part of the stick is not visible at all, although the stick still reaches the bottom of the bowl. At what angle φ can this phenomenon occur? **P. 5686.** Astronauts set off to explore the distant universe. Their spacecraft is launched from the Earth and travels at a speed of $3/5c$. The controllers on Earth send a part of the cargo T time after the launch of the spacecraft in another rocket travelling at a speed of $4/5c$. *a)* What is the speed of the rocket in the coordinate system of the astronauts? *b)* How much time elapses between the launch and the arrival of the rocket, carrying the cargo, in the reference frame of the ground controllers and in the reference frame of the astronauts? The time required to accelerate the rocket and the spacecraft is negligible with respect to T . **P. 5687.** Four balls of radius r and mass m are held by thin threads of length r . One end of each thread is fixed at a common point so that the centers of the balls form a square. The two balls at the end of one diagonal of the square are red, the other two are blue. (Most of the mass of each ball is at the centre of the ball, so the moment of inertia of the balls is negligibly small. The frictional force between the balls is also negligible.) In this arrangement the balls are in an unstable equilibrium, from which the system will move away at the slightest external disturbance and will move towards a state of lower potential energy with increasing acceleration. *a)* What is the angle between the threads and the vertical in the initial and in lowest potential energy states? *b)* What is the maximum value of the total kinetic energy of the four balls?

Képek a KömaL Ankét díjkiosztójáról



2025. október 31.

AIT-BUDAPEST



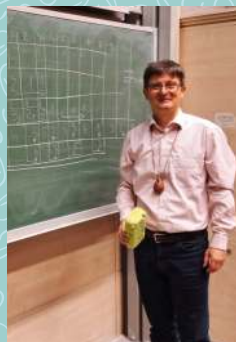
Morgan Stanley



hiflylabs



Képek a KöMaL Ankét előadásairól



Az előadásokról készült felvételek felkerülnek a KöMaL YouTube csatornájára:

