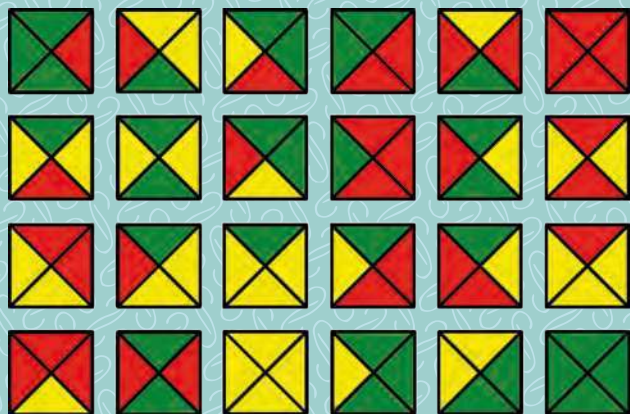


Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok

Informatika rovattal

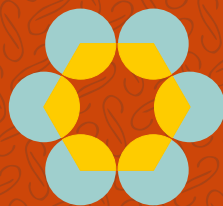


Holics László (1931–2025)



A MacMahon-féle készlet elemei

Beszámoló a 2025. évi Eötvös-versenyről |
Rátz László Vándorgyűlés; Tanárverseny |
Színdominók, Wang-csempék | A 2025. évi Rátz
Tanár Úr Életműdíjak



KöMaL

76. évfolyam
1. szám

2026.
január



Képek a 2025. évi Eötvös Loránd Fizikaversenyről (október 17-én) és az eredményhirdetésről (november 28-án).



Versenyzők az ELTE előadótermében a verseny budapesti helyszínén, 2025. október 17.



Balról jobbra:
Ormos Pál (az Eötvös Loránd Fizikai Társulat elnöke),
Horváth Norbert (Bencz Benedek tanára) és
Bencz Benedek (a verseny győztese)



A verseny díjazottjai és a díjátadón résztvevő tanárok: Jávor Bence, Horicsányi Attila, Vödörös Dániel, Schramek Anikó, Sánta Gergely Péter, Erdélyi Dominik, Téti Miklós, Pázmándi József Áron, Horváth Norbert, Bencz Benedek, Pálfalvi László, Kossár Benedek Balázs



KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK INFORMATIKA ROVATTAL BŐVÍTVE

ALAPÍTOTTA: ARANY DÁNIEL 1894-ben

76. évfolyam 1. szám

Budapest, 2026. január

Megjelenik évente 9 számban, januártól májusig és szeptembertől decemberig havonta. ÁRA: 1600 Ft

TARTALOMJEGYZÉK

Holics László tanár úr (1931–2025)	2
Rátz Tanár úr életműdíj 2025	3
<i>Gál Péter</i> : Rejtvények, ördöglatok – Színdomínóktól a Wang csempéig	4
<i>Jócsik Csilla</i> : Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire	9
<i>Az ELTE Apáczai Csere János Gyakorló Gimnázium matematika munkaközössége</i> : Megoldásvázlatok a 2025/9. szám matematika gyakorló feladatsorához	12
<i>Kozma Katalin Abigél</i> : Beszámoló a 64. Rátz László Vándorgyűlésről	20
<i>Fonyó Lajos, Fonyóné Németh Ildikó</i> : Tanárverseny középiskolában tanító tanároknak – feladatok	20
Tanárverseny középiskolában tanító tanároknak – megoldásvázlatok	26
A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok (884–888.)	33
A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (887–888., 1883–1887.)	34
A B pontversenyben kitűzött feladatok (5502–5509.)	35
Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (923–925.)	37
Informatikából kitűzött feladatok (683–686.) ..	38
<i>Széchenyi Gábor, Vankó Péter, Vigh Máté, Vladár Károly</i> : Beszámoló a 2025. évi Eötvösversenyéről	41
Méresi feladatok megoldása (443.)	51
Fizika feladatok megoldása (5653., 5672.)	54
Fizikából kitűzött feladatok (446., 909–912., 5697–5705.)	57
Problems in Mathematics	61
Problems in Physics	63

Főszerkesztő: KORÁNDI JÓZSEF

Fizikus szerkesztő: VANKÓ PÉTER

Műszaki szerkesztő: FRIED KATALIN

Borító: BURGHARDT ZSUZSA

Kiadja: MATFUND ALAPÍTVÁNY

Alapítványi képviselő: KÓS RITA

Felelős kiadó: PATKÓS BALÁZS

Nyomda: OOK-PRESS Kft.

Felelős vezető: SZATHMÁRY ATTILA

INDEX: 25 450 ISSN 1215-9247

A matematika bizottság tiszteletbeli elnöke:

HERMANN PÉTER

A matematika bizottság vezetője: KÓS GÉZA

Tagjai: BÁN-SZABÓ ÁRON, BÍRÓ BÁLINT,

CZETT MÁTYÁS, GYENES ZOLTÁN, HUJTER BÁLINT,

KISS GÉZA, KOZMA KATALIN ABIGÉL,

MAGYAR ESZTER, NÉMETH MÁRTON,

PACH PÉTER PÁL, PAULOVICS ZOLTÁN, RATKÓ ÉVA,

SIMON LÁSZLÓ BENCE, SZTRANYÁK ATTILA,

UJHÁZY MÁRTON, VIGH VIKTOR

A fizika bizottság tiszteletbeli elnöke:

HOLICS LÁSZLÓ

Vezetője: SZÉCHENYI GÁBOR

Tagjai: BARANYAI KLÁRA, GNÄDIG PÉTER,

HONYEK GYULA, OLOSZ BALÁZS, SZÁSZ KRISZTIÁN,

VIGH MÁTÉ, VLADÁR KÁROLY,

WOYNAROVICH FERENC

Az informatika bizottság vezetője:

SCHMIEDER LÁSZLÓ

Tagjai: LÓCZI LAJOS, SIEGLER GÁBOR,

TÓTH TAMÁS

Fordítók: GYENES ZOLTÁN, TASNÁDI ANIKÓ

Nyelvi korrektor: ANDICS ÁGNES

Javítás koordinálása: CSOBÁNKA PETRA

Szerkesztőségi titkár: ONDINÉ SZABÓ SÁRA

A szerkesztőség címe: 1117 Budapest,

Pázmány Péter sétány 1/C III. emelet 3.405.

Telefon: +36 20 320-1143

A lap megrendelhető a

<https://komalujsag.myshoprenter.hu>
oldalon keresztül.

Előfizetési díj egy évre: 12 500 Ft

Kéziratokat nem őrzünk meg és nem küldünk vissza.

Minden jog a KöMaL tulajdonosaié.

E-mail: szerk@komal.hu

Internet: <http://www.komal.hu>

This journal can be ordered from the Editorial office:

Pázmány Péter sétány 1/C III. emelet 3.405.

1117-Budapest, Hungary

telephone: +36 20 320-1143

or on the Internet:

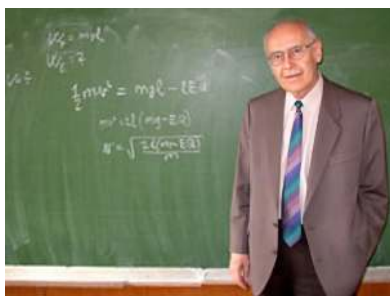
<https://komalujsag.myshoprenter.hu>.

A Lapban megjelenő hirdetések tartalmáért felelősséget nem vállalunk.



Holics László tanár úr (1931–2025)

Rövid betegség után meghalt Holics László tanár úr. Februárban lett volna 95 éves. Egyedülálló tanári pályafutás volt az övé. 1949-ben érettségizett a Szent Imre Gimnáziumban, és abban az évben győzött az Eötvös-versenyen. Az ELTE Természettudományi Karán matematika-fizika-ábrázoló geometria szakon diplomázott 1953-ban. Hat évig tanított a II. Rákóczi Ferenc Gimnáziumban, majd 1959-től az ELTE Apáczai Csere János Gyakorlóiskolájában. Hamarosan fizika szakos vezetőtanár lett, és óraadóként az ELTE-n is vezetett fizika gyakorlatokat. 51 évig tanított az Apáczaiiban, közel 80 éves volt, amikor az általa tanított utolsó osztály 2010-ben elballagott.



Holics tanár úr

A fizika rovattal bővített KöMaL először 1959-ben jelent meg, és Holics tanár úr a kezdetektől a fizika szerkesztőbizottság tagja volt. Fizika feladata jelent meg az első számban, majd azt követően még több mint 500 alkalommal. Szinte nem volt olyan száma a lapnak, amelyben nem volt Holics-feladat. Nemzedékek tanultak ezekből a példákából. Élete végén a fizika szerkesztőbizottság tiszteletbeli elnöke lett, már nem járt el a bizottsági ülésekre, de a korábban elkészített feladatait még évekig közölte a lap. Szinte addig élt, amíg hónapról hónapra újra és újra feladata jelent meg a KöMaL-ban.

Az 1980-as évek elején jelent meg először III. osztályos (ma 11.-esnek mondjuk) gimnáziumi fizika tankönyve, majd utána sok éven át újabb és újabb kiadásokban, átdolgozásokban. Ez a tankönyv szenzációsan magas szinten, csodálatos gondossággal tárgyalta az elektrodinamikát. Holics tanár úr nagyszerű elektrodinamika példatárakat írt, majd szerkesztette és jelentős részben megírta a hiánypótló Fizika összefoglaló kötetet, ami először 1986-ban jelent meg a Műszaki Könyvkiadó gondozásában. Ennek a részletes és magas színvonalú műnek később számos változata jelent meg később más kiadóknál is (Akadémiai Kiadó, Typotex).

Számos országos fizikaverseny feladat-összeállító bizottságában dolgozott. Sokáig volt a Mikola-verseny gyöngyösi döntőjének zsűrielnöke. Nagyon sok feladatot készített a fizika OKTV különböző fordulói számára. Megjelentette a fizika OKTV

összes feladatát 1961-től 2016-ig több kötetben, rendkívül részletes megoldással minden egyes feladatról. Legérdekesebb feladatainak gyűjteménye angolul is megjelent (300 Creative Physics Problems with Solutions, Anthem Learning), a példák szövegét itt lehet megtekinteni: <https://physicsgg.me/wp-content/uploads/2019/01/Lazlo-300-Creative-Physics-Problems.pdf>

Holics tanár úrnak a fizika mellett a komolyzene volt a másik szenvedélye. Kedvenc tanítványait meghívta magához úgynevezett mikrobarázdás koncertekre, ahol beszélgettek, hanglemezeket hallgattak.

Rátz Tanár úr életműdíj 2025



Negyedszázados jubileumához érkezett a magyar természettudományos oktatás egyik legrangosabb kitüntetése: 25. alkalommal adták át a Rátz Tanár úr életműdíjakat. A 2000-ben alapított elismerés már 192 díjjal tisztelt meg a kiváló pedagógusokat, amelyhez a támogatók – az Ericsson Magyarország, a Graphisoft SE és a RichterGedeon Nyrt. – 270 millió forintot meghaladó összegben járultak hozzá. A jubileumi díjátadó színhelye idén ismét, a 200. évfordulóját ünneplő Magyar Tudományos Akadémia felújított székházában zajlott.

Az Alapítvány a Magyar Természettudományos Oktatásért kuratóriumának tagjai:

- Dr. Kroó Norbert *professzor, akadémikus, a kuratórium elnöke*
- Lajos Józsefné (Balázs Erzsébet) *matematika tantárgyi szakértő*
- Dr. Falus András *professzor emeritus, akadémikus*
- Dr. Ifj. Szántay Csaba *professzor, az MTA doktora*

A kitüntetést 2025-ben az alábbi pedagógusoknak ítélte oda a kuratórium:

Matematika:

Dr. Kántor Sándorné – *Debreceni Fazekas Mihály Gimnázium/DE TTK Matematikai Intézet, Debrecen*

Dr. Pintér Klára – *SZTE Báthory István Gyakorló Gimnázium és Általános Iskola/SZTE Juhász Gyula Pedagógusképző Kar, Szeged*

Fizika:

Ábrám László – *Városmajori Gimnázium, Budapest*

Horváth Norbert – *Baár-Madas Református Gimnázium, Általános Iskola és Kollégium, Budapest*

Kémia:

Karasz Gyöngyi – *Gödöllői Török Ignác Gimnázium, Gödöllő*

Nagy István – *Szekszárdi I. Béla Gimnázium, Kollégium és Általános Iskola, Szekszárd*

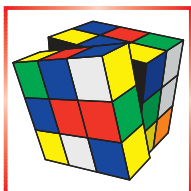
Biológia:

Bódis Bertalan – *Börzsöny Általános Iskola, Nagyoroszi*

Mándics Dezső – *ELTE Radnóti Miklós Gyakorló Általános Iskola és Gyakorló Gimnázium, Budapest*

A KöMaL szerkesztősége is kíván mindnyájuknak – és tanártársaiknak is – további erőt a tanításhoz, a tehetséges és érdeklődő diákok felkutatásához, támogatásához!

A kitüntetettek részletes bemutatása és az évente megújuló felhívás megtalálható a Rázt Tanár Úr Élelműdíj hivatalos honlapján: <https://www.ratztanarurdij.hu/>



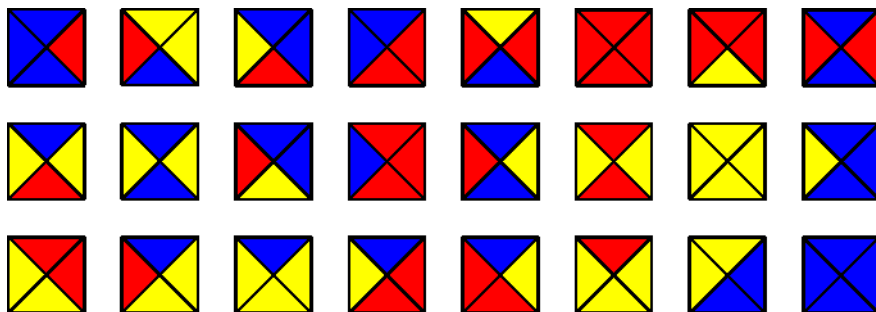
Rejtvények, ördöglakatok

Rovatunkban minden hónapban valamilyen szórakoztató matematikai fejtörőt mutatunk be. Ezek között fontos helyet foglalnak el a különböző kirakós játékok, topológiai feladványok, ördöglakatok és a matematikát felhasználó bűvészműtárványok.

Manapság szinte mindent meg lehet találni az interneten, de az igazi élményt az adja, ha a feladatokat magunk oldjuk meg, a bűvészműtárványok trükkjeit mi találjuk ki, és a szükséges kellékeket is mi tervezzük meg és készítjük el. Próbáljuk meg a feladatokat továbbgondolni, általánosítani, igyekezzünk új feladatokat kitalálni.

Szindominóktól a Wang csempékig

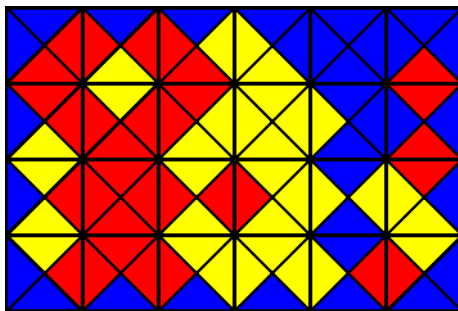
Ha egy négyzetet a két átlójával felosztunk négy háromszögre, majd ezeket kiszínezzük három színnel az összes lehetséges módon, akkor megkapjuk a négyzetes szindominókat. Két színezést akkor tekintünk egyformának, ha síkbeli forgatással egymásba vihetők. Tehát a tükörképek (pl. az 1. ábra alsó sorának 4. és 5. eleme) különbözőek.



1. ábra

A szindominókat először a múlt század elején írta le Percy Alexander MacMahon, a kalandos életű matematikus. Ő rögtön megadott több nehéz feladatot is

hozzájuk. Például: rakjunk ki az összes elemből egy téglalapot úgy, hogy oldalak mentén csak azonos színek érintkezzenek. A 2. ábra mutat egy lehetséges megoldást.



2. ábra

Érdekes elkészíteni az 1. ábrán látható MacMahon-féle készlet elemeit. A fenti 4×6 -os téglalapon kívül még a szóba jöhető 2×12 -es és 3×8 -as is kirakható belőlük, igaz, hogy csak úgy, ha nem kívánjuk meg, hogy a téglalap kerületére csupa azonos szín kerüljön. Próbáljuk meg megoldani ezeket a feladatokat!

Ha néhány elemet elhagyunk, kisebb téglalapokat is ki tudunk rakni. Minden olyan téglalap kirakható, ami 24 vagy annál kevesebb négyzetből áll, és mindkét oldala egész. Érdekes megvizsgálni, hogy közülük vajon melyikek rakhatók úgy ki, hogy a keretük egyféle színű legyen. (Lásd a cikk végén kitéűzött feladatokat.)

Mindazonáltal 24 elem elég sok egy jó játékhoz. Más összerakó játékoknál tapasztalhatjuk, hogy 7, 10 vagy 12 elemből is meglepően nehéz feladványok készíthetők. Felmerülhet az ötlet, hogy ne 3 színt használjunk, illetve ne engedjük meg a színek ismétlődését egy elemen belül – ezekkel kapcsolatban szintén lásd a cikk végén kitéűzött feladatokat. Természetes gondolat az is, ha más alakzatokból álló játékot keresünk.

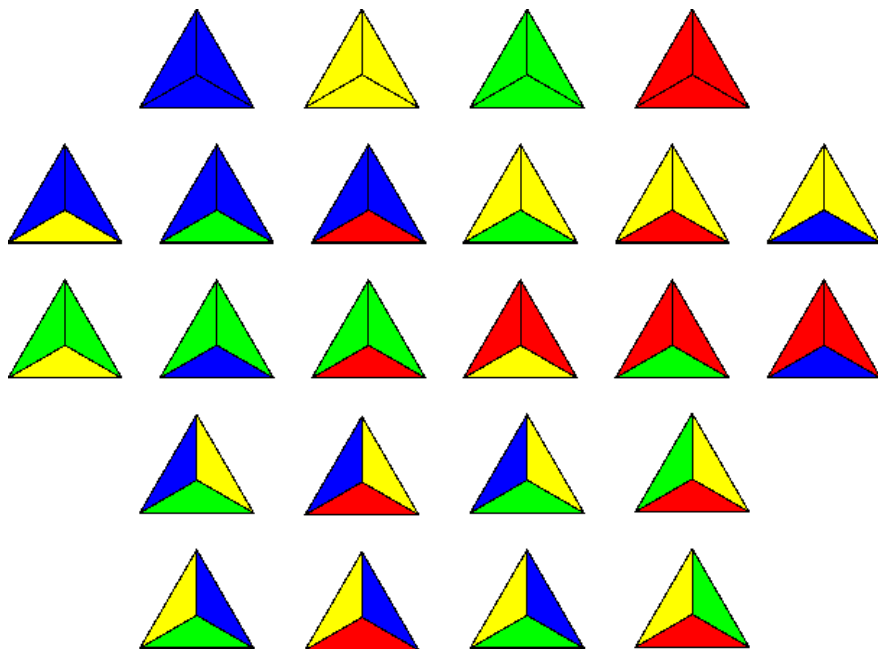
A szabályos sokszögek közül a négyzeten kívül az egyenlő oldalú háromszög és a hatszög alkalmas arra, hogy a síkot csempézzé (más szóhasználattal parkettázza), vagyis hézagmentesen, átfedés nélkül lefedje. Ezekből is érdekes, játékra alkalmas színdominók készíthetők.

Ha a szabályos háromszög középpontját kötjük össze a csúcsaival, akkor három egybevágó háromszögre bontjuk. Ezeket kiszínezve kaphatjuk a háromszög színdominóit (3. ábra). Talán meglepő, hogy négy színnel éppúgy 24-féle színdominót készíthetünk, mint három színnel négyzetet.

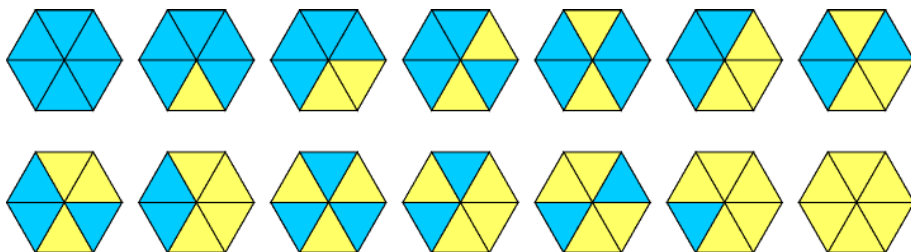
Ezekből az elemekből pl. paralelogrammákat lehet kirakni és egészen hasonló kérdések vethetők fel, mint a négyzetes kirakónál.

Játszhatóság szempontjából lényegesen más a helyzet a hatszögekkel. Ha három színt használunk a színezéshez, amelyek ismétlődhetnek is, akkor 100-nál több elemet kapunk. Szintén száz feletti az elemek száma hat szín ismétlődés nélküli használata esetén. Két szín használata viszont érdekes készlethez és kérdésekhez vezet. Ebben az esetben 14 különböző elemet kapunk (4. ábra).

Ez az elemkészlet még kevésbé vizsgált, de az már kiderült róla, hogy jó nehéz feladványok létrehozására alkalmas! Részletesebb elemzése majd egy másik cikk témája lesz. Próbáljunk hozzá mi magunk érdekes feladványokat kitalálni!



3. ábra



4. ábra

A 2. ábrán látható téglalap kerete egyszínű. Ha sok készletünk lenne MacMahon négyzeteiből, akkor a fenti kirakást minden irányban megismételhetnénk, hiszen csupa kék mezőből áll a körvonala, ezért egy másik ugyanilyen téglalap mellé helyezhető. Ha ezt a kirakást periodikusan ismételtetjük, a teljes síkot ki tudjuk színdominóinkkal csempézni. A periodikus csempézés könnyen érthető fogalom: létezik olyan (nem nulla vektorral történő) eltolás a síkon, ami a csempézést önmagába viszi. (Csempénként értelmezve: egy csempézés periodikus, ha van olyan eltolás, amelyre minden csempe eltolt képe vele azonosan színezett csempe.) A periodikus csempézésnek bizonyos értelemben az ellentéte az aperiodikus csempézés. Ez tehát azt jelenti, hogy az egész síkot csempézzük színdominókkal, de nincs olyan (nem

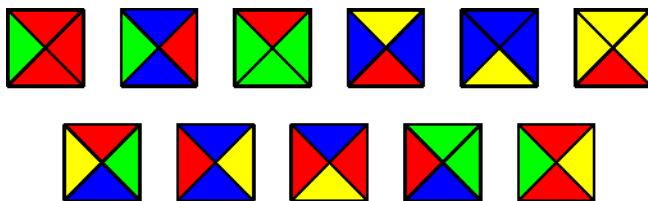
nulla vektorral történő) eltolás a síkon, amit erre a fedésre alkalmazva a színezés nem változik meg. (Lásd 5. feladat.)

Sokáig azt gondolták, hogy ugyanúgy viselkednek a különböző módokon színezett négyzetes színdominók: ha ki lehet velük csempézni a síkot, akkor periodikusan is ki lehet csempézni. De hogyan lehet eldönteni, hogy egy színdominó elemkészlettel ki lehet-e csempézni a síkot? Van-e erre valami jó módszer, létezik-e rá algoritmus, amivel esetleg egy – kellően gyors – számítógép segítségével mindig válaszolhatunk a kérdésre? Ezt a kérdést nevezték el „csempézési problémának”.

1961-ben Hao Wang amerikai matematikus bebizonyította [1], hogy akkor és csak akkor létezik algoritmus egy dominó készlet jóságának eldöntésére, ha azzal periodikusan is le lehet fedni a síkot. Ezen eredmény tiszteletére a színezett négyzetekből álló készleteket Wang dominóknak vagy Wang csempéknek nevezzük. Wang azt gondolta, hogy minden jó készlet periodikus, azaz ha egy készlet csempézi a síkot, akkor periodikusan is tudja ezt.

Aztán 1966-ban Wang tanítványa, Robert Berger talált egy dominókészletet, amivel ugyan ki lehet csempézni a síkot, de csak aperiodikusan. Ezzel eldőlt, hogy a dominó csempézési probléma algoritmikusan nem megoldható. (Hasonlóan a Turing-gép megállási problémájához, csak ez sokkal könnyebben érthető, sokkal játékosabb feladvány.)

Berger dominókészlete több mint 20 ezer elemből állt, ami a tényleges megvalósítást szinte lehetetlenné tette. Azóta számos matematikus próbálkozott minél kevesebb darabszámú és színű készlet megalkotásával, amivel a sík csak aperiodikusan csempézhető. 2019-ben Emmanuel Jeandel és Michaël Rao [2] francia matematikusok, számítástudományi szakemberek megalkottak egy 11 elemből álló készletet, amihez mindössze 4 színre volt szükségük. Készletük elemei az 5. ábrán láthatóak. (Az ő definíciójuk szerint a csempézéshez nem forgathatók el a négyzetek, tehát csak olyan állásban használhatók, ahogy az ábrán lerajzoltuk.) Azt is bebizonyították, hogy ez lehető legkevesebb elemből és színből álló készlet.

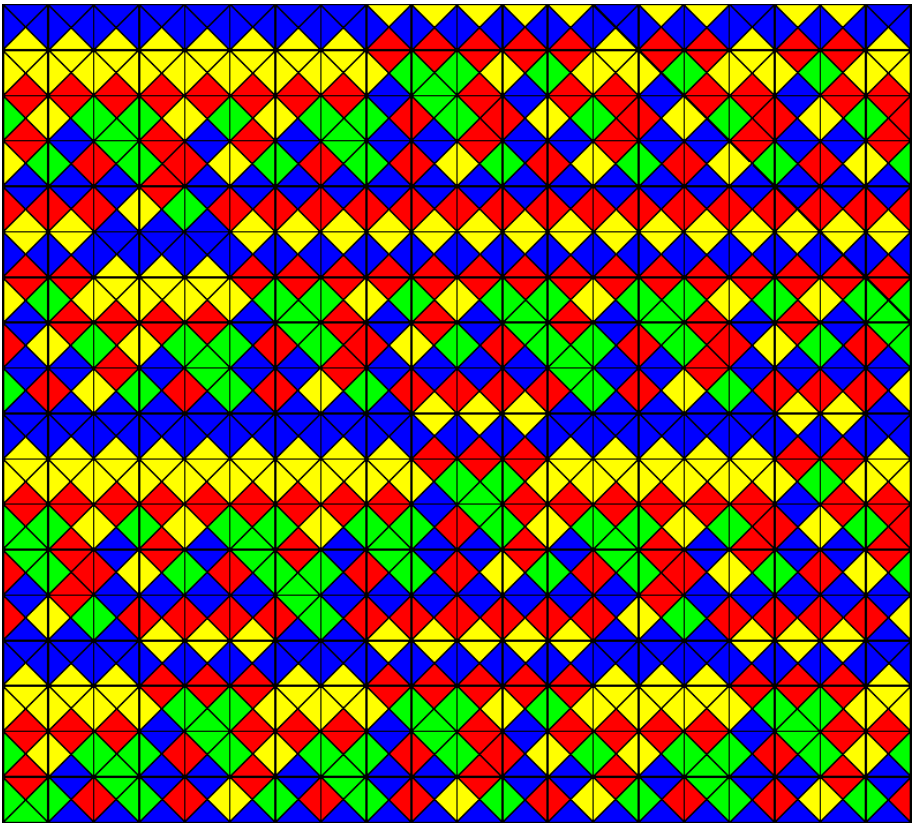


5. ábra

Ez annyira kevés elem, hogy akár már játszani is alkalmas. A 6. ábrán egy 20×20 -as téglalap látható Jeandel és Rao csempéiből kirakva. Lehet próbálkozni még nagyobb területek létrehozásával!

A cikket néhány kapcsolódó feladvánnyal zárjuk. (A feladatokban szereplő alakzatokat nem tekintjük különbözőknek, ha azok egymásba forgathatók.)

1. Ha csak 2 színt használhatunk, hányféle négyzetes elem készíthető?
2. Hány különböző négyzetes elem készíthető 4 színnel, ha minden négyzeten minden színnek szerepelni kell?



6. ábra

3. Hány különböző négyzetes elem készíthető 5 színnel, ha a színek egy elemen belül nem ismétlődhetnek?

4. Keressünk példát olyan, a MacMahon-féle készletből elkészíthető, 24-nél kisebb területű téglalagra, amely kirakható úgy, hogy a kerete egyszínű, és olyanra is, ami nem rakható ki ilyen módon!

5. Adjuk meg a sík egy aperiodikus csempézését a MacMahon négyzetekkel! (Nem feltétlenül szükséges az összes elemet felhasználni.)

6. Mutassuk meg, hogy a 4. ábrán látható hatszögekkel kirakható olyan alakzat, amit sokszor egymás mellé helyezve a sík egy periodikus parkettázását kapjuk!

Hivatkozások

- [1] Hao Wang. Proving theorems by Pattern Recognition II. Bell Systems Technical Journal, 40:1–41, 1961.
- [2] Emmanuel Jeandel and Michaël Rao. 2021. „An Aperiodic Set of 11 Wang Tiles.” Advances in Combinatorics, January. <https://doi.org/10.19086/aic.18614>.

Jó szórakozást!

Gál Péter

Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire



I. rész

1. a) Oldja meg a következő egyenletet az egész számok halmazán:

$$(x^2 - 9) \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+3} - 1 \right) = 9 + x \quad (6 \text{ pont})$$

b) Egy négyszög α szögére teljesül, hogy $4 \sin^2 \alpha - 3 = 0$. Mekkora lehet az α szög nagysága? (6 pont)

2. Zoli biciklikerekének átmérője 70 cm, a pedálhoz kapcsolódó első váltója olyan fokozatban van, ahol a fogaskerék kerületén 56 „fog” van, míg a hátsó kerékhez kapcsolódó váltó esetén a fogaskeréken 20 „fog” helyezkedik el. (A biciklin a pedálhoz kapcsolódó első váltó fogaskereke és a pedál teljesen együtt forog. Az első és a hátsó fogaskereket köti össze a biciklilánc, így a két fogaskerék mindig ugyanannyi „fogat” fordul.)

a) Mekkora sebességgel halad Zoli, ha a pedálja 10 teljes kört 8 másodperc alatt tesz meg, illetve a hátsó kerék és a hátsó fogaskerék teljesen együtt forog? (4 pont)

b) Zoli 34 barátjával együtt közös kerékpártúrára indul. A biciklik minden kereke egymástól függetlenül két egész kilométer között 0,0005 valószínűséggel kap defektet. Milyen hosszú út esetén mondhatják, hogy legalább 0,95 valószínűséggel lesz defekt a túrán? (6 pont)

c) Egy biciklikölcsönzőben kedden 48-an kértek kerékpárt, 4-gyel több nő, mint férfi. A legalább 40 éves vendégek számának 60%-a volt a 40 évnél fiatalabbak száma; a legalább 40 évesek közül ötször annyian kértek hagyományos kerékpárt, mint elektromosat. Egyetlen férfi kért elektromosat, 2-vel több legalább 40 éves nő volt, mint férfi. Hány 40 évesnél fiatalabb nő kölcsönzött kedden biciklit? (4 pont)

3. a) Adja meg az $(m-1)x^2 + (2m-9)x + 1 = 0$ másodfokú egyenlet $m \in \mathbb{R}$ paraméterének lehetséges értékeit úgy, hogy az egyenlet két különböző pozitív gyökének összege 5-nél nagyobb legyen. (7 pont)

b) Gondoltam egy számra, lejegyeztem egy lapra, és leírtam mellé a négyzetét. Lehet-e a gondolt szám páros, ha a leírt számok tízes alapú logaritmusainak összege kisebb, mint a számok összegének tízes alapú logaritmus? (6 pont)

4. Egy pozitív tagokból álló számtani sorozat első három tagjának összege 10,5. Az $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2^x$ függvény helyettesítési értékeinek összege a sorozat első három tagjának helyén $73\sqrt{2}$. Határozza meg a sorozat differenciáját. (7 pont)

b) Igazolja, hogy ha egy sorozat első n tagjának összege $S_n = 1,5n^2 - n$, akkor az egy 3 differenciájú számtani sorozat. (5 pont)

II. rész

5. Egy kastély parkjában a tulipánok virágágyása derékszögű trapéz alakú, amelynek párhuzamos oldalai 8 m és 5 m, derékszögű szára pedig 4 m hosszúságú.

a) Igazolja, hogy a hegyesszögű csúcsból induló átló mentén ültetett tulipánok a hegyesszög szögfelezőjére illeszkednek. (6 pont)

Egy olyan húrtrapéz alakú területet füvesítenek be a kertészek, amelynek alapjai 6 m és 3 m hosszúságúak, hegyesszögei 60° -osak. Erre a területre a gyerekek 30 cm sugarú műanyag hulahoppkarikákat dobálnak. A karikák (képzeletbeli) középpontjai véletlenszerűen esnek valahová a füvesített területre.

b) Mennyi a valószínűsége, hogy egy hulahoppkarika nem lóg le a füves területről? (5 pont)

A park közepén lévő tóban tavirózsákat láthatunk. A virágzás időszakában naponta 30%-kal több kinyílt virágot láthatunk itt.

c) Ha június elsején tizenkét virágot számoltunk meg, akkor mikor lesz legalább kétszáz kinyílt virág ezen a tavon? (5 pont)

6. A H halmazt azok az $(a; b)$ számpárok alkotják, amelyekre teljesülnek a következő feltételek:

- $a \in \mathbb{N}; b \in \mathbb{N}$
- $a \leq b$
- $a \mid 12; b \mid 12$

a) Igazolja, hogy a H halmaznak 21 eleme van. (3 pont)

Tekintsük azt a 21 pontú gráfot, amelynek csúcsai a H halmaz elemei. Ebben a gráfban két pontot akkor kötünk össze, ha a nekik megfelelő számpárok között vannak azonos számok. Pl. összekötjük a $(4; 6)$ pontot és a $(6; 12)$ pontokat, mert mindegyik számpárban szerepel a 6.

b) Csúcsai felsorolásával adjon meg egy 5 pontból álló kört ebben a gráfban. (2 pont)

c) Hány él van ebben a gráfban? (5 pont)

d) A 21 pontú gráfnak megfelelő szabályos 21 szöveget szeretnénk egy körlapra megrajzolni úgy, hogy a szabályos sokszög leghosszabb átlója 18 cm legyen. Ehhez minimálisan mekkora sugarú körlapra lesz szükség? (6 pont)

7. a) Szilárd időjárás előrejelzésében hétfőtől péntekig a napi maximumok a következő módon alakulnak: 34°C , 30°C , 26°C , 22°C és 28°C . Szilárd azt is elmondta, hogy a teljes hétre számítva a napi maximumok átlaga 28°C és az átlagtól való átlagos abszolút eltérés értéke $\frac{18}{7}^\circ\text{C}$. Határozza meg a hétvégi napi maximumokat, ha vasárnapra várhatóan kicsit lehül az idő. (6 pont)

b) A 2023. évre vonatkozóan Szilárd összegyűjtötte a napi csapadékmennyiséget és megadta a sodrófadiagram elkészítéséhez szükséges adatokat. $Q_0 = 0$ mm; $Q_1 = 1$ mm; $Q_2 = 5$ mm; $Q_3 = 8$ mm és $Q_4 = 32$ mm. Mennyi lehet a 2023. évben összesen mért csapadék mennyiségének legkisebb, illetve legnagyobb értéke? (5 pont)

c) Szilárd számítógépén elromlott a 7-es számjegy, ezért az adatok továbbításához a 10-es számrendszer helyett a 7-es számrendszert használja. Mekkora a szélerősség, illetve a legalacsonyabb és legmagasabb hőmérséklet 10-es számrendszerbeli értéke, ha Szilárd üzenete így szólt:

A mai napon mért legnagyobb szélerősség 50 km/h. A legmagasabb és legalacsonyabb hőmérséklet összege 105 °C, különbsége pedig 15 °C. (5 pont)

8. a) Egy négyzetes hasáb tetejére olyan 6 cm magas szabályos négyoldalú gúlát helyezünk, amelynek alaplapja pontosan illeszkedik a négyzetes hasáb négyzet alakú lapjára. Számítsa ki a test felszínét, ha az alapéleinek hossza 12 cm, teljes magassága pedig 30 cm. (4 pont)

b) Az előbbi test éleire pozitív prímszámokat írunk úgy, hogy az egy csúcsba befutó éleken különböző számoknak kell szerepelni. Lehetséges-e olyan eset, hogy az élekre írt számok összege kevesebb, mint 70? Válaszát indokolja! (4 pont)

c) Van egy 22 cm magas négyzetes hasábunk, amelynek az egyik négyzet alakú lapjára 6 cm magas szabályos négyoldalú gúlát illesztünk. Az összeillesztett testet a négyzetlapjára állítjuk, 500 ml folyadékot töltünk bele, és megjelöljük a vízszintet. Ezt követően a testet a gúla csúcsára állítjuk, és azt tapasztaljuk, hogy a folyadékszint most 2 cm-rel magasabban van, mint az első esetben bejelölt szint, de mindkét esetben a hasáb alakú részre esik. Mekkora a hasáb alapéleinek hossza? (8 pont)

9. Az emelt szintű matematika érettségi szóbeli vizsgarészének fontos eleme az adott témakörhöz kapcsolódó gyakorlati alkalmazások ismertetése. A diákok a differenciál- és integrálszámításhoz kapcsolódóan gyakran hoznak példákat a fizika területéről.

a) Egy autó pillanatnyi sebességét olyan másodfokú függvény írja le az idő függvényében, amelynek két zérushelye a 0 másodpercnél, illetve a 10 másodpercnél van, maximális értéke pedig a mozgás 5. másodpercében 8 m/s. Igazolja, hogy a sebességnek megfelelő függvény hozzárendelési szabálya $f(x) = -0,32x^2 + 3,2x$. (4 pont)

b) Az autó által megtett út nagyságát a sebesség-idő grafikon alatti terület számértéke adja meg. Számítsa ki az autó által a megállásig megtett utat. (4 pont)

c) A testek gyorsulását úgy számíthatjuk ki a sebesség-idő függvény ismeretében, ha meghatározzuk a függvény adott időponthoz tartozó érintőjének a meredekségét. Egy harmonikus rezgő mozgást végző test esetén a sebességet leíró függvény: $f(x) = 0,3\cos(3x)$. Számítsa ki az $x = 2$ másodperchez tartozó gyorsulás számértékét. (4 pont)

d) A munka kiszámításához az erő és az erő irányába történő elmozdulás szorzatát kell kiszámítani. Mekkora a munkavégzés számértéke abban az esetben, ha a testre ható állandó 45 N nagyságú erő a derékszögű koordinátarendszer x tengelyének pozitív irányába mutat, miközben a test az origóból felfelé induló $f(x) = \frac{1}{2}x$ függvényre illeszkedő emelkedőn 160 m utat tesz meg? (4 pont)

Jócsik Csilla

Győr

Megoldásvázlatok a 2025/9. szám matematika gyakorló feladatsorához

I. rész

1. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet!

$$\sqrt{x^2 - 5x - 14} \cdot |5 - x| \cdot \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \cdot \lg(9 - x) = 0 \quad (13 \text{ pont})$$

Megoldás. Az értelmezési tartomány a logaritmikus kifejezés miatt $9 - x > 0$, így $x < 9$, továbbá a négyzetgyökös kifejezés miatt $x^2 - 5x - 14 \geq 0$, amiből $x \leq -2$ vagy $x \geq 7$ (összesítve: $x \leq -2$ vagy $7 \leq x < 9$).

Egy szorzat pontosan akkor 0, ha valamelyik tényezője 0, így a lehetséges esetek:

1. $|5 - x| = 0$, azaz $5 - x = 0$, ahonnan $x = 5$, de ez nem eleme a fenti értelmezési tartománynak; $\lg(9 - x) = 0$, tehát $9 - x = 1$, amiből $x = 8$, és ez megoldás;

2. $\sqrt{x^2 - 5x - 14} = 0$, vagyis $x^2 - 5x - 14 = 0$, amiből $x = -2$ és $x = 7$ is megoldás; $\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = 0$ -ból következik, hogy $2x + \frac{\pi}{6} = k\pi$, ahol $k \in \mathbb{Z}$, ezt átrendezve $x = -\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}$, de az értelmezési tartomány miatt, csak $k < -1$, illetve $k = 5$ esetén kapunk megoldást.

Tehát összesítve: $x \in \{-2; 7; 8\} \cup \left\{-\frac{\pi}{12} + k \cdot \frac{\pi}{2} \mid k < -1 \text{ vagy } k = 5\right\}$ (ahol $k \in \mathbb{Z}$), és a kapott megoldások igazzá teszik az egyenletet (ekvivalens átalakításokat végeztünk).

2. a) Tíz-es számrendszerben hány jegyű szám az 5^{29} ? (3 pont)

b) Egy mértani sorozat első tagja 5^{-29} , kvóciense 5. Az első tagtól kezdve legalább hány tagot kell összeszorozni ebben a sorozatban, hogy a szorzat értéke elérje 5^{29} -t? (8 pont)

c) Apáczai Csere János éppen 400 éve született. Írja fel a tudós születési évszámát ötös számrendszerben! (2 pont)

Megoldás. a) Mivel $20 < \lg 5^{29} < 21$ (így $10^{20} < 5^{29} < 10^{21}$), ezért az 5^{29} tízes számrendszerben 21-jegyű.

b) Jelölje a mértani sorozat első n tagjának szorzatát P_n .

$$P_n = a_1 \cdot a_1 q \cdot a_1 q^2 \cdot a_1 q^3 \cdot \dots \cdot a_1 q^{n-1} = a_1^n \cdot q^{1+2+3+\dots+(n-1)} = a_1^n \cdot q^{\frac{n \cdot (n-1)}{2}}.$$

Behelyettesítve $a_1 = 5^{-29}$, $q = 5$ értékét, az alábbi egyenlőtlenség adódik:

$$(5^{-29})^n \cdot 5^{\frac{n \cdot (n-1)}{2}} \geq 5^{29},$$

amelynek összevont alakja: $5^{-29n + \frac{n \cdot (n-1)}{2}} \geq 5^{29}$.

Mivel az 5^x függvény szigorúan monoton növekvő, ezért $-29n + \frac{n \cdot (n-1)}{2} \geq 29$, amiből $n^2 - 59n - 58 \geq 0$. Ennek megoldása a pozitív számok halmazán: $n \geq \frac{59 + \sqrt{3713}}{2} \approx 59,97$, azaz legalább 60 tagot kell összeszorozni.

c) Apáczai Csere János $2025 - 400 = 1625$ -ben született, és az 1625 ötös számrendszerbeli alakja: $1625_{10} = 23\,000_5$.

3. Egy 34-fős osztályban senki sem született februárban.

a) Bizonyítsa be, hogy van olyan hónap, amelyben az osztályból legalább négy diák született! (3 pont)

b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy lesz két olyan diák ebben az osztályban, aki ugyanazon a napon született? (6 pont)

c) Az iskolához közeli fagyizóban tízféle fagyilaltot árulnak. Legalább hányszor kellett a teljes osztálynak elmennie a fagyizóba, ha biztosak lehetünk abban, hogy a fagyizások alatt volt két pontosan ugyanolyan rendelés, ha mindenki legfeljebb két gombóc fagyit vehet? (Két fagyirendelés különböző, ha a két tölcserben az alsó vagy a felső gombóc íze eltér rendelésekben.) (5 pont)

Megoldás. a) Ha nem lenne 4, ugyanazon hónapban született diák, akkor egy hónapban legfeljebb 3-an születhettek volna, de akkor legfeljebb $11 \cdot 3 = 33$ diák lehetne az osztályban.

Ez ellentmondás, így kell lennie 4 ugyanazon hónapban született diáknak.

b) Ha nem született senki februárban, akkor $365 - 28 = 366 - 29 = 337$ lehetőség marad egy évben. Ha mindenki különböző napon született, akkor a kedvező lehetőségek száma:

$$337 \cdot 336 \cdot 335 \cdot \dots \cdot 304 \left(= \frac{337!}{303!} \right),$$

az összes lehetőség pedig 337^{34} .

Így annak a valószínűsége, hogy mindenki más napon született:

$$\frac{337 \cdot 336 \cdot 335 \cdot \dots \cdot 304}{337^{34}} = \frac{337!}{303! 337^{34}} \approx 0,1786,$$

vagyis a keresett valószínűség: $1 - 0,179 = 0,821$.

c) Egygombócos fagyiból 10 különböző van. Kétegombócos lehet egyforma – ilyenből 10 lehetőség van – vagy két különböző (és a sorrend is számít), ez $10 \cdot 9 = 90$ lehetőség, összesen 110 eset. Egy fagyizás alatt legfeljebb 34 különböző fagyilehetőség adódhat, és mivel $4 \cdot 34 > 110 > 3 \cdot 34$, azért legalább 4-szer kell menni fagyizni az osztálynak.

4. Egy osztály nyári buliján az osztály egy része a strandon a büfében vásárol. Lujzi csak egy lángost vesz magának, de kifizeti Sanyi, Szósz, Kati és Béla teasült krumpli menüjét is (négy teát és négy sült krumplit), ezért végül 7130 Ft-ot fizet. Jani is összegyűjtött pár rendelést, nyolc teát, öt lángost és két sült krumplit vesz, amiért 12 790 Ft-ot fizet. Armand csak Zsuzsit és Amandát hívja meg most, azt tervezi, vesz mindhármuknak egy-egy teát, sült krumplit, lángost, de rájön, hogy ő így éhes maradna, így végül hozzácsap még a rendeléshez két sült krumplit; egy tízezreért fizet, és még vissza is kap 230 Ft-ot.

a) Mennyibe kerül a tea, a lángos és a sült krumpli ebben a büfében? (8 pont)

b) Hányféle sorrendben adhatják ki a kiadópuhlon az előbb kifizetett összes italt és ételt, ha az azonos termékek között nem teszünk különbséget? (3 pont)

Megoldás. Adatok táblázatosan:

	lángos	tea	sült krumpli	összár
Lujzi	1	4	4	7 130
Jani	5	8	2	12 790
Armand	3	3	5	9 770
Összesen	9	15	11	
	l	t	s	Ft/db

a) Legyenek az egyes termékek egységárai rendre l , t és s Ft/db, ahol l , t és $s \in \mathbb{R}^+$. Ezekkel felírható a következő egyenletrendszer:

$$\begin{cases} l + 4t + 4s = 7130 \\ 5l + 8t + 2s = 12\,790 \\ 3l + 3t + 5s = 9770 \end{cases}$$

A megoldási módszer lehet az egyenlő együtthatók módszere vagy kifejezés és behelyettesítés, amely alapján a megoldások: $l = 1210$ (Ft/db), $t = 630$ (Ft/db) és $s = 850$ (Ft/db). Tehát a lángos 1210 Ft-ba, a tea 630 Ft-ba és a sült krumpli 850 Ft-ba kerül.

Ellenőrzés a szöveg alapján.

b) Összesen 9 lángost, 15 teát és 11 sült krumplit vásároltak, ezen 35 termék lehetséges sorrendjeinek száma: (ismétléses permutációval) $\frac{35!}{9! \cdot 15! \cdot 11!} (\approx 5,455 \cdot 10^{14})$.

II. rész

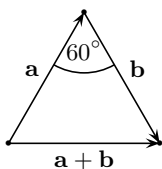
5. Az \mathbf{a} és \mathbf{b} vektorokra teljesül, hogy $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{a} + \mathbf{b}| = 1$.

a) Mekkora \mathbf{a} és \mathbf{b} vektorok skaláris szorzata? (4 pont)

b) Mekkora $2\mathbf{a} + \mathbf{b}$ vektor abszolútértéke? (4 pont)

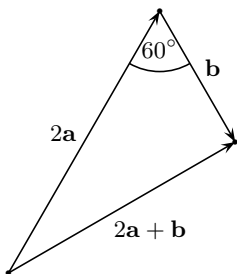
Adott az $\mathbf{a}(3;4)$ vektor. Az origó középpontú 6 egység sugarú kör \mathbf{a} vektorral párhuzamos érintője az y tengelyt a $(0;p)$ pontban metszi.

c) Adja meg p lehetséges értékeit! (8 pont)



Megoldás. a) Az \mathbf{a} , \mathbf{b} és $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ vektorok felrajzolhatóak egy szabályos háromszög oldalvektoraiként, így az \mathbf{a} és \mathbf{b} vektorok által bezárt szög 120° , ezért skaláris szorzatuk

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos 120^\circ = 1 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}.$$



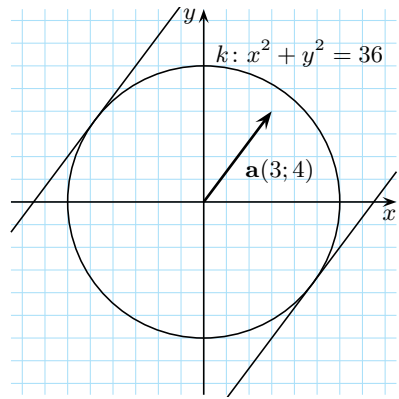
b) $2\mathbf{a}$, \mathbf{b} és $2\mathbf{a} + \mathbf{b}$ vektorok felrajzolhatóak egy olyan háromszög oldalvektoraiként, amelyben két oldal hossza 2 és 1 egység, és az oldalak bezárt szöge 60° . Jelöljük a keresett vektorhosszt x -szel: $|2\mathbf{a} + \mathbf{b}| = x$, a fenti háromszögben koszinusztétellel számítható ki az ismeretlen x oldal: $x^2 = 2^2 + 1^2 - 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ$, amiből $x = \sqrt{3}$ ($x > 0$), ami éppen a kérdéses vektor hossza.

c) Készítsünk ábrát.

Az \mathbf{a} vektor egyenesének meredeksége $\frac{4}{3}$, így a vele párhuzamos egyenesek egyenlete $y = \frac{4}{3}x + b$, ahol $b \in \mathbb{R}$. Ez b -nek arra az értékére érintő, amikor az egyenesnek egyetlen közös pontja van a körrel. Helyettesítsük be az y -ra felírt kifejezést a kör egyenletébe:

$$x^2 + \left(\frac{4}{3}x + b\right)^2 = 36.$$

Akkor van egyetlen közös pont, ha az így kapott másodfokú egyenlet, $25x^2 + 24b \cdot x + 9b^2 - 324 = 0$ diszkriminánsa 0, azaz $D = 576b^2 - 100(9b^2 - 324) = -324b^2 + 32400 = 0$, ahonnan $b = \pm 10$, így a két érintő egyenlete: $y = \frac{4}{3}x + 10$ és $y = \frac{4}{3}x - 10$. Ebből következik, hogy p lehetséges értékei 10 és -10 .



6. Zsigri tanár úr egy magánnyugdíj-megtakarítási konstrukcióban vesz részt: 2001 első banki napján, és azóta is minden hónap első banki napján befizetett 40 000 Ft-ot. A nyugdíjpénztár mindvégig havi 0,4%-os kamatot biztosít. Az állam, hogy támogassa az öngondoskodást, az adott évben befizetett összeg 5%-át, de legfeljebb évi 25 000 Ft-ot, a következő év első banki napján befizeti a pénztártag számlájára.

a) Mekkora összeg lesz a tanár úr számláján 2026 első banki napján? (2026-ban már nem fizet be tanár úr és már nem is számol kamatot a bank, csak az állami jóváírást 2025-re.) (7 pont)

A 2026-ra összegyűlt pénz egy részéből Zsigri tanár úr világszerte utazásba kezd, de 12 millió Ft-ot a számlán hagy majd, hogy abból havi állandó összegű nyugdíj kiegészítést kapjon pont 20 éven keresztül. (A pénztár minden hónap első napján jóváírja a kamatot, majd díjmentesen átvezeti a tanár úr normál bankszámlájára a nyugdíjkiegészítés összegét.)

b) Mekkora havi nyugdíjkiegészítéssel számolhat ebből a tanár úr, ha a pénztár továbbra is fix 0,4%-os havi kamatot biztosít a számlán maradó pénzre? (6 pont)

Minden egyes évben 0,002 annak a valószínűsége, hogy ez a nyugdíjpénztár kamatot csökkent.

c) Mennyi a valószínűsége annak, hogy a teljes folyamat 45 éve alatt egyszer sem fog kamatot csökkenteni a pénztár? (3 pont)

Megoldás. a) Minden évben összesen $12 \cdot 40\,000 = 480\,000$ Ft a befizetés, amiből az állami jóváírás ennek 5%-a: 24 000 Ft. Mivel a betett 40 000 forintok havonta kamatoznak, ezért egy év múlva a számlán:

$$A_1 = \underbrace{40\,000 \cdot 1,004^{12} + 40\,000 \cdot 1,004^{11} + \dots + 40\,000 \cdot 1,004}_{2001. \text{ évi betett összegek}} + \underbrace{40\,000}_{2002 \text{ elején betett összeg}} + \underbrace{24\,000}_{\text{állami jóváírás}}$$

forint lesz.

A 25 év alatt 300 hónap telik el, amiből a tanár úr által betett összegek és az állami jóváírások is tovább kamatoznak, de az állami jóváírások csak 12 havonta adódnak hozzá, így 25 év múlva, tehát 2026 első banki napján a számlán:

$$A_{25} = 40\,000 \cdot 1,004^{300} + 40\,000 \cdot 1,004^{299} + \dots + 40\,000 \cdot 1,004 + \\ + 24\,000 \cdot 1,004^{288} + 24\,000 \cdot 1,004^{276} + \dots + 24\,000$$

forint lesz.

Ezt az összeget két mértani sorozat első néhány tagjának összegére bonthatjuk: a havi betett pénzekhez tartozó mértani sorozat kvóciense 1,004, és 300-tagú az összeg; a jóváírásokhoz tartozó mértani sorozat kvóciense $1,004^{12}$, és 25-tagú az összeg;

$$A_{25} = 40\,000 \cdot (1,004^{300} + 1,004^{299} + \dots + 1,004) + 24\,000 \cdot (1,004^{288} + 1,004^{276} + \dots + 1) = \\ = 40\,000 \cdot 1,004 \cdot \frac{1,004^{300} - 1}{1,004 - 1} + 24\,000 \cdot \frac{(1,004^{12})^{25} - 1}{1,004^{12} - 1} \approx \\ \approx 23\,214\,280 + 1\,130\,876 = 24\,345\,156,$$

tehát a tanár úr számláján 24,345 millió forint lesz.

b) Jelöljük x -szel a kapott havi összegeket és B_n -nel az n . hónap végén a számlán maradó összeget: $B_1 = 12 \cdot 10^6 \cdot 1,004 - x$, $B_2 = (12 \cdot 10^6 \cdot 1,004 - x) \cdot 1,004 - x = 12 \cdot 10^6 \cdot 1,004^2 - x \cdot 1,004 - x$, és hasonlóan az utolsó, 240. hónap végére: $B_{240} = 12 \cdot 10^6 \cdot 1,004^{240} - x \cdot 1,004^{239} - x \cdot 1,004^{238} - \dots - x \cdot 1,004 - x$.

Mivel az összeg éppen elfogy, így

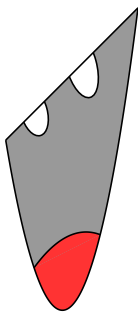
$$12 \cdot 10^6 \cdot 1,004^{240} - x \cdot (1,004^{239} + 1,004^{238} + \dots + 1,004 + 1) = 0.$$

A zárójelben szereplő kifejezés egy mértani sorozat első 240 tagjának összege, így

$$12 \cdot 10^6 \cdot 1,004^{240} = x \cdot \frac{1,004^{240} - 1}{1,004 - 1},$$

amelyből $x = 12 \cdot 10^6 \cdot 1,004^{240} \cdot \frac{1,004 - 1}{1,004^{240} - 1} = 77875$ forint a havi nyugdíjkiegészítés.

c) 0,998 a valószínűsége, hogy egy adott évben nem csökkent kamatot a pénztár. Annak a valószínűsége, hogy 45 év alatt egyik évben sem csökkent: $0,998^{45} \approx 0,914$.



7. Egy szellemvasút olyan szörnyszáj alakú cégért készít, amely terveinek határvonalait a koordináta-rendszerben az $y = x + 5$ egyenletű egyenes, illetve az

$$f(x) = 2x^2 - 4x + 2 \quad \text{és} \quad a \quad g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{13}{8}x + \frac{3}{4}$$

függvények görbéi határozzák meg.

Hány deciliter piros festéket kell használni a nyelvhez és hány deciliter szürke festéket a száj belsejének befestéséhez, ha négyzetméterenként 7 dl festék szükséges mindkét színből, és a koordináta-rendszer tengelyein a terveken az egységek valóságban 50 cm-nek felelnek meg? (A fogakat egy fehér ledlámpa szolgáltatja majd, de az alatta lévő területet is befestik szürkére.) Válaszait egészre kerekítve adja meg! (16 pont)

Megoldás. $f(x)$ függvény minimummal rendelkező, $g(x)$ pedig maximummal rendelkező másodfokú függvény, ezek grafikonja a szájszél és nyelv megfelelő határvonalai.

A nyelv és a szájszél csatlakozásának pontos helyét az $f(x) = g(x)$ egyenlet megoldásai adják:

$$2x^2 - 4x + 2 = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{13}{8}x + \frac{3}{4},$$

innen $\frac{5}{2}x^2 - \frac{45}{8}x + \frac{5}{4} = 0$, amiből $x_1 = \frac{1}{4}$ és $x_2 = 2$.

A szájszél ferde határolóegyenese és a konvex határolófüggvény metszéspontjaihoz az $2x^2 - 4x + 2 = x + 5$ egyenletet megoldásait kell kiszámolni, amelyek $x_3 = -\frac{1}{2}$ és $x_4 = 3$.

Tehát a piros nyelv területét az alábbi határozott integrállal kapjuk:

$$\begin{aligned} T_{\text{nyelv}} &= \int_{\frac{1}{4}}^2 \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{13}{8}x + \frac{3}{4} \right) - (2x^2 - 4x + 2) dx = \\ &= \int_{\frac{1}{4}}^2 -\frac{5}{2}x^2 + \frac{45}{8}x - \frac{5}{4} dx = \left[-\frac{5}{6}x^3 + \frac{45}{16}x^2 - \frac{5}{4}x \right]_{\frac{1}{4}}^2 = \frac{1715}{768} \approx 2,233 \text{ területegység.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{\text{száj}} &= \int_{-\frac{1}{2}}^3 (x + 5) - (2x^2 - 4x + 2) dx = \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^3 -2x^2 + 5x + 3 dx = \left[-\frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 3x \right]_{-\frac{1}{2}}^3 = \frac{343}{24} \approx 14,292 \text{ területegység.} \end{aligned}$$

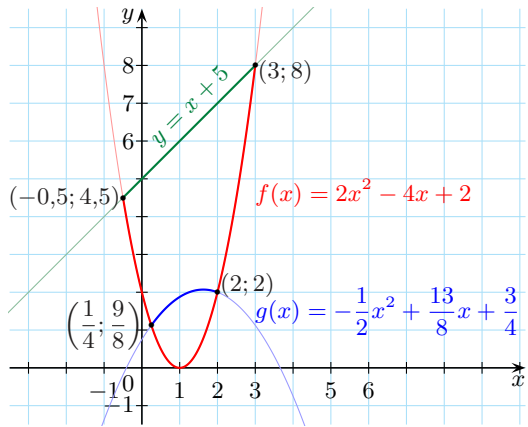
Egy egységnyi terület valódi területe $T_e = 50 \text{ cm} \cdot 50 \text{ cm} = 2500 \text{ cm}^2 = 0,25 \text{ m}^2$. Tehát a két színes terület a valóságban: $T_{\text{nyelv}} = 2,233 \cdot 0,25 \approx 0,558 \text{ m}^2$ és $T_{\text{száj}} = 14,292 \cdot 0,25 \approx 3,573 \text{ m}^2$.

Tehát a szürke terület nagysága: $T_{\text{szürke}} = 3,573 \text{ m}^2 - 0,558 \text{ m}^2 = 3,015 \text{ m}^2$.

Így a szürke festékből $3,015 \cdot 7 \approx 21$ dl szükséges, piros festékből pedig $0,558 \cdot 7 \approx 4$ dl-re van szükség.

8. Egy egyenlő szárú háromszög alapja 10 egység, szárjai 13 egység hosszúak. A háromszögbe téglalapokat írunk, amelyeknek egyik oldala a háromszög alapjára esik, a másik két csúcsa pedig a háromszög egy-egy szárára.

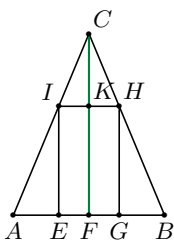
a) Mekkora a téglalap területe, ha háromszög alapjára eső oldalhossza 8 egység? (5 pont)



b) Mekkora a maximális területű beírható téglalap oldalai? (5 pont)

A háromszöget kétféleképpen megforgatjuk: A) az alapja körül, B) az egyik szára körül.

c) Mekkora az A), illetve a B) esetben keletkezett testek felszíneinek aránya? Az arány pontos értékét adja meg! (6 pont)

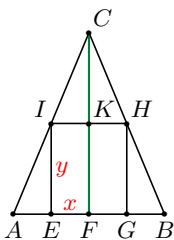


Megoldás. a) Az ABC egyenlő szárú háromszög alapja AB , a beírt téglalap legyen $EGHI$ (lásd ábra).

A háromszög alaphoz tartozó magassága a téglalpnak és a háromszögnek is szimmetriatengelye, ezért $AF = FB = 5$ egység és $EF = FG = 4$ egység.

Az AFC háromszögben a Pitagorasz-tétel miatt $CF = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$.

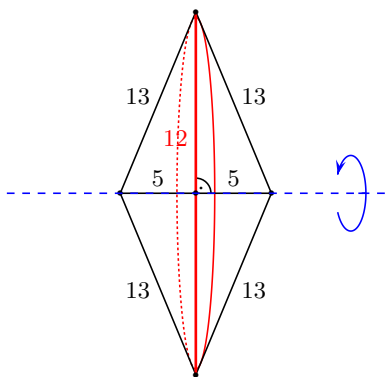
Az AFC és IKC háromszögek hasonlóak, mivel megfelelő oldalaik párhuzamosak (vagy a párhuzamos szelőszakaszok tétele miatt), így a megfelelő oldalak arányára felírható: $\frac{4}{5} = \frac{12-KF}{12}$, amiből $KF = 2,4$, így az $EGHI$ téglalap területe $8 \cdot 2,4 = 19,2$ (területegység).



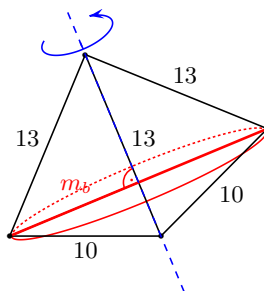
b) Legyenek a maximális területű téglalap oldalai $2x$ és y . Ekkor az előző alponthoz hasonlóan: $\frac{x}{5} = \frac{12-y}{12}$, amiből $y = 12 - 2,4x$ és így a téglalap területe $T(x) = x \cdot (12 - 2,4x)$.

A terület függvénye olyan másodfokú függvény, amelynek maximuma van, és mivel a két zérushelye $x_1 = 0$ és $x_2 = \frac{12}{2,4} = 5$, így a maximumhelye $x_{\max} = \frac{x_1 + x_2}{2} = 2,5$. Tehát a maximális területű téglalap oldalai $2x = 5$, illetve $y = 12 - 2,4x = 6$ egység hosszúak.

c) Az A) esetben olyan kettős kúpot kapunk, amelynek alkotója 13 egység, alapkörének sugara 12 egység. Így a kettős kúp felszíne: $A_A = 2 \cdot 12 \cdot 13 \cdot \pi = 312\pi$ (területegység).



A) eset



B) eset

A B) esetben olyan kettős kúpot kapunk, amely alapkörének sugara az egyenlő szárú háromszög szárához tartozó magassága: m_b . Az egyenlő szárú háromszög

területét kétféleképp felírva: $T_{\Delta} = \frac{10 \cdot 12}{2} = \frac{13 \cdot m_b}{2}$, az egyenletből adódik, hogy $m_b = \frac{120}{13}$ (egység).

Így a kettőskúp felszíne: $A_B = \frac{120}{13} \cdot 10 \cdot \pi + \frac{120}{13} \cdot 13 \cdot \pi = \frac{2760}{13} \pi$ (területegység).

Vagyis a két keletkezett forgástest felszínének aránya:

$$\frac{A_A}{A_B} = \frac{312\pi}{\frac{2760}{13}\pi} = \frac{169}{115}.$$

9. Egy ellenőrzés során azt vizsgálták, hogy az 1 kg-os csomagolású rizs tömege valójában mennyire tér el az 1000 grammtól. Két sorozatban 8-8 mérést csináltak, az eredményeket az alábbi táblázatba foglalták.

	A mért eltérések grammban							
1. mérésorozat	1	3	5,5	2,5	3	6	5	0
2. mérésorozat	3	6	6	3		3	3	6

a) *Hány gramm az első mérésorozat átlaga és szórása? Válaszát egy tizedesjegyre pontossággal adja meg!* (3 pont)

b) *Készítsen sodrófa (boxplot) diagramot az első mérésorozat adatairól!* (5 pont)
A második mérésorozat szórása 1,5 gramm.

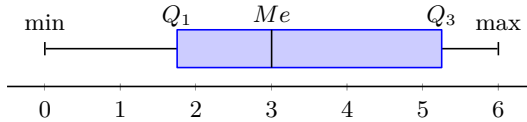
c) *Mi lehetett a táblázat hiányzó adata?* (8 pont)

Megoldás. a) $\bar{x} = \frac{1+3+5,5+2,5+3+6+5}{8} = 3,25 \approx 3,3$ gramm.

$$\sigma = \sqrt{\frac{2,25^2+0,25^2+2,25^2+2,0,75^2+2,75^2+1,75^2+3,25^2}{8}} = 2,0 \text{ gramm.}$$

b) A medián: $Me = 3$, az alsó kvartilis: $Q_1 = \frac{x_2+x_3}{2} = 1,75$, a felső kvartilis: $Q_3 = \frac{x_6+x_7}{2} = 5,25$.

Így a sodrófadiagram:



c) Legyen a hiányzó adat a , az adatok átlaga pedig b . Ekkor $8b = 4 \cdot 3 + 3 \cdot 6 + a$, amiből $a = 8b - 30$. Ekkor a szórásnégyzetre felírhatjuk az alábbi egyenletet:

$$\frac{4 \cdot (3 - b)^2 + 3 \cdot (6 - b)^2 + (8b - 30 - b)^2}{8} = \left(\frac{3}{2}\right)^2,$$

ahonnan $56b^2 - 480b + 1026 = 0$.

Az egyenlet gyökei: $b_1 = \frac{9}{2}$ és $b_2 = \frac{57}{14}$, amelyekből a hiányzó adat: $a_1 = 8 \cdot \frac{9}{2} - 30 = 6$ (gramm) vagy $a_2 = 8 \cdot \frac{57}{14} - 30 = \frac{18}{7}$ (gramm) lehet.

**Az ELTE Apáczai Csere János Gyakorló Gimnázium matematika munkaközössége
 Budapest**



Beszámoló a 64. Rátz László Vándorgyűlésről

Miskolc immár ötödször látta vendégül a matematikatanárok népes csapatát a Rátz László Vándorgyűlés keretei között.

Az első napon, 2025. július másodikán a Miskolci Egyetem dísztermében Lajos Józsefné átadta a Bolyai János Matematikai Társulat Beke Manó Emlékdíjait. Szintén ekkor osztották ki a Reményi díjakat az országos matematikaversenyeken kiváló eredményt elért tanulók tanárainak. Ezután néhány szakmai előadást, majd a Miskolci Egyetem Bartók Béla Zeneművészeti Karának növendékeiből álló Palota Harsona Kvartett színvonalas koncertjét hallgatták meg a résztvevők.

Július 3-án kora reggel megkezdődött a munka, négy szekcióban hatalmas érdeklődés mellett zajlottak a szemináriumok és az előadások. Különösen sokan voltak kíváncsiak Babus Réka és Juhász Péter gerrymanderingről, valamint Tamásné Kollár Magdolna a statisztika témakörének érdekes megközelítéséről szóló előadására.

Július 4-én délelőtt folytatódott a szakmai program, a kollégák interaktív feladatmegoldó szemináriumokon és plenáris előadásokon gyarapították matematikai és módszertani tudásukat. Délután tartalmas kirándulásokon ismerhették meg közelebbről a várost, a környéket és egymást az ország minden részéből és a határon túlról érkező matematikatanárok.

A legeglesebbek még július 5-én, szombaton is remekbe szabott előadást hallgathattak meg Fried Katalin és Korándi József párhuzamos tolmácsolásában. A 90 perc gyorsan elrepült, amelynek során a tankönyvekben, valamint a tanárok és a diákok gondolkodásában megjelenő tévedések, tévesztések, hibák jellegét boncolgatták a kollégák. Bizony, középiskolás korában már nehezebben látja be a gondolkodni szerető tanuló, hogy a $0,9 = 1$ -gyel, ha az ő fogalomrendszerében két különböző számként jelenik meg. A szimmetrikus trapéz elnevezése is számos kérdést vet fel és folytathatnánk a sort. Érdemes lenne bővebben foglalkozni e téma kifejtésével, akár rövid podcastok, akár egy cikksorozat keretében.

A 65. Rátz László Vándorgyűlést 2026. július 7-től 10-ig, Esztergomban rendezik meg a Bolyai János Matematikai Társulat, amelyre szeretettel várnak minden érdeklődőt.

Kozma Katalin Abigél
Győr

Tanárverseny középiskolában tanító tanároknak – feladatok

A verseny időtartama **90 perc**. A feladatok pontozása: minden helyes válasz 5 pontot ér; helytelen válaszra 0 pont jár; válasz nélkül hagyott kérdésekre 1-1 pontot

adunk. A versenyen íróeszközön, papíron, körzőn és vonalzón kívül semmilyen más segédeszköz nem használható, azaz **számológép sem**. A verseny befejeztével **csak** a kódlapot kell beadni. Kérjük, hogy a versenyen csak olyan tanárok induljanak, akik középiskolában tanítanak!

Feladatok

1. Az Azariah koncertre jegyet vásárlók sorában Dávid előlről a 2024., hátulról a 2025. várakozó. Hány ember áll a sorban?

- (A) 4047 (B) 4048 (C) 4049 (D) 4050 (E) 4051

2. Dia és Viki egy táblán meglát néhány számot. Dia minden számhoz hozzáad 3-at, majd megállapítja, hogy a kapott számok összege 45. Viki az eredetileg a táblán szereplő számokat megszorozza 3-mal, és meglepődve állapítja meg, hogy az általa kapott számok összege is 45. Hány szám volt felírva a táblára a lányok érkezésekor?

- (A) 10 (B) 9 (C) 8 (D) 6 (E) 5

3. Ha az a , b , c valós számok átlaga 0, az a^2 , b^2 , c^2 számoké 10, akkor mennyi az ab , bc , ca számok átlaga?

- (A) -5 (B) $-\frac{10}{3}$ (C) $-\frac{10}{9}$ (D) $\frac{10}{9}$ (E) 5

4. A Miskolci Egyetemen a hallgatók 60%-a szeret táncolni, a többiek nem kedvelik ezt a szórakozási formát. Megkérdezve a diákokat, sajnos nem mindenki árulta el magáról az igazságot. A táncolni szeretők 80%-a azt mondta, hogy szeret táncolni, a többiek pedig azt, hogy nem szeretnek. A táncolást nem kedvelő hallgatók 90%-a mondta azt, hogy nem szeret táncolni, a többiek pedig azt, hogy szeretnek. A „nem szeretek táncolni” választ adók hány százalékára igaz, hogy szeret táncolni?

- (A) 10 (B) 12 (C) 20 (D) 25 (E) $33\frac{1}{3}$

5. Melyik az a legnagyobb n pozitív egész szám, amelyre a $2^x + \frac{2025}{2^x} - n > 0$ egyenlőtlenség bármely x valós számra teljesül?

- (A) 45 (B) 64 (C) 69 (D) 79 (E) 89

6. Mennyi az alábbi egyenlet megoldása a pozitív egész számok halmazán?

$$\frac{\log_2 x \cdot \log_3 x}{\log_2 x + \log_3 x} = 2$$

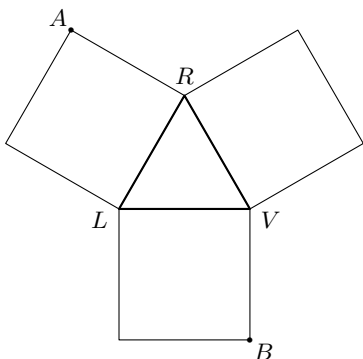
- (A) 25 (B) 32 (C) 36 (D) 42 (E) 48

7. A 2025. évi Dürer Verseny döntőjére 150 diák nevezett, akik 3 fős csapatokban mérték össze tudásukat matematika, fizika és kémia tantárgyakból. A csoportok összetétele az alábbiak szerint alakult:

- 15 csapatban csak 1 fiú szerepelt;
- 27 csapatban 2 vagy több fiú vett részt a versenyen;
- a fiúcsapatok száma kétszerese volt a lánycsapatok számának.

Hány lány vett részt a versenyen?

- (A) 50 (B) 60 (C) 65 (D) 70 (E) 85



8. A 20 egység oldalú RLV szabályos háromszög oldalaira kifelé négyzeteket rajzolunk. Ha az ábra szerinti A és B pontok távolságát $a + \sqrt{b}$ ($a, b \in \mathbb{N}$) formában fejezzük ki, akkor mennyi az $a + b$ összeg értéke?

- (A) 40 (B) 80 (C) 620
(D) 1220 (E) 1600

9. Az RLV2025 karaktersorozatnak hány olyan sorrendje létezik, amelyben nincs egymás mellett két mássalhangzó?

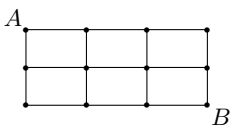
- (A) 144 (B) 360 (C) 576
(D) 720 (E) 1440

10. Mennyi a $\frac{\sqrt{2}\cos(2x)}{\cos(x) - \sin(x)}$ ($x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$) kifejezés maximális értéke?

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) 1 (C) $\frac{3}{2}$ (D) 2 (E) nincs maximális érték

11. Az $1 + 3 + 5 + \dots + 35 + 37 + 39$ kifejezésben Rózi néhány pluszjelet mínuszjelre változtatott. Így a kapott művelet sor eredménye negatív lett. Mennyi lehetett a legkevesebb műveleti jel, amit Rózi megváltoztatott?

- (A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8



12. Az alábbi sematikus térkép Miskolc 12 nevezetességét és az azokat összekötő 17 utat ábrázolja. Vivi az A helyről szeretne eljutni a B -be úgy, hogy útja során pontosan 13 útszakaszt járjon végig, azokon ne haladjon át többször, és sétája során minden nevezetességhez eljusson.

(Útja során többször is eljuthat ugyanahhoz a nevezetességhez.) Hányféle különböző úton haladhat Vivi?

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

13. Az x, y, a, b valós számok teljesítik az

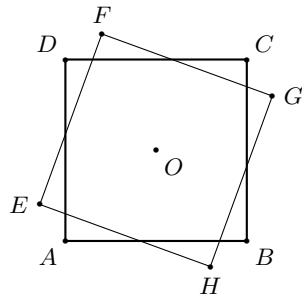
$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 6x - 8y &= a \\ x^2 + y^2 - 10x + 4y &= b \end{aligned}$$

egyenlőségeket. Mennyi az $a + b$ kifejezés minimális értéke?

- (A) -54 (B) -46 (C) -34 (D) -16 (E) 34

14. Az $ABCD$ négyzetet az O középpontja körül az óramutató járásával megegyező irányba 20° -kal elforgatva az ábra szerint az $EFGH$ négyzetet kapjuk. Hány fokos az EAD ?

- (A) 20 (B) 24 (C) 30
(D) 32 (E) 35

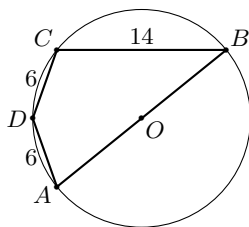


15. Az A és B városokat 30 km hosszú egyenes út köti össze. Két autó az A , illetve B városból egyszerre indul el egymás felé. Az A várostól B felé haladva a megengedett sebességhatár 10 km-enként rendre 50, 80, illetve 40 km/h. Az A várostól hány km-re találkozik a két autó egymással, ha mindkettő végig a megengedett maximális sebességgel halad?

- (A) 15,5 (B) 16 (C) 16,5 (D) 17 (E) 17,5

16. Az alábbi ábra szerint az $ABCD$ húrnégyszög AB oldala a körülírt körének átmérője, további oldalainak hossza pedig rendre $BC = 14$, $CD = DA = 6$ egység. Hány egység hosszú a négyszög AB oldala?

- (A) 16 (B) 17 (C) 18
(D) 19 (E) 20



17. Egy 5×5 -ös táblázat néhány mezőjébe az alábbi számokat írtuk: Melyik szám kerül a ? helyére, ha tudjuk, hogy a táblázat minden sorában és oszlopában az egymás utáni számok egy-egy számtani sorozat szomszédos tagjai?

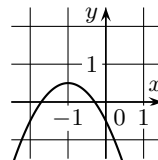
- (A) 24 (B) 29 (C) 34
(D) 36 (E) 39

	?			
			48	
12				
		16		
				0

18. Az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) másodfokú függvény maximumhelye -1 , és grafikonja az alábbi ábrán látható. Hány állítás teljesül biztosan az alábbiak közül:

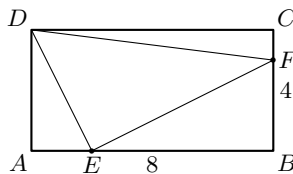
I. $a - b + c > 0$ II. $a + b - c > 0$ III. $a + b + c > 0$ IV. $abc < 0$

- (A) 0 (B) 1 (C) 2
(D) 3 (E) 4



19. Az ábra szerinti $ABCD$ téglalap oldalainak hossza $AB = 8$ és $BC = 4$ egység. E és F rendre az AB és BC oldal azon pontja, amelyekre $DEF \angle = 90^\circ$, és $T(DAE\Delta) = T(DFC\Delta)$. Hány területegység a $DEF\Delta$ területe?

- (A) 12 (B) 14 (C) 15
(D) 16 (E) 18



20. A Keszthelyi Vajda János Gimnázium 11. B osztályos tanulói azt kapták tanárnőjüktől feladatként, hogy az alábbi táblázat üres mezőibe írják be a „lehetséges” vagy a „nem lehetséges” válaszokat aszerint, hogy egy adott, nem végtelen meredekségű egyenes tartalmazhat-e adott számú rácspontot (olyan pontot, amelynek mindkét koordinátája egész szám). A 12 helyes válasz közül hány lesz „lehetséges”?

meredekség	0	pontosan 1	pontosan 2	pontosan 3
$m = 0$				
$m \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$				
$m \in \mathbb{Q}^*$				

- (A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 9

21. Hány olyan különböző pozitív egész számokból álló $(a; b; c; d)$ számnégyes van, amelyekre $a > b > c > d$, $a + b + c + d = 2024$ és $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 2024$?

- (A) 0 (B) 1 (C) 24 (D) 504 (E) 505

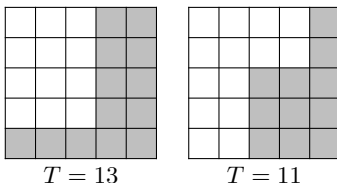
22. Egy tanteremben 35 fogas található. Dani szereti a rendet, ezért a saját és az osztálytársai kabátjait mindig úgy próbálja felakasztani, hogy az első kabát előtt, két szomszédos kabát között és az utolsó után ugyanannyi üres fogas legyen. Hányféle kabátszám esetén tudja Dani az általa elképzelt elrendezést megvalósítani, ha tudjuk, hogy ha a fogasokon elhelyezett kabátok száma k , akkor $1 \leq k \leq 34$ ($k \in \mathbb{N}$)?

- (A) 2 (B) 4 (C) 5 (D) 7 (E) 9

23. Az ABC háromszögben $\angle C = 90^\circ$ és $BA = BC = \sqrt{2}$. $P_1, P_2, \dots, P_{2025}$ az AC átfogó azon pontjai, amelyekre $\overrightarrow{AP_1} = \overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{P_2P_3} = \dots = \overrightarrow{P_{2024}P_{2025}} = \overrightarrow{P_{2025}C}$. Mekkora a $\overrightarrow{BP_1} + \overrightarrow{BP_2} + \dots + \overrightarrow{BP_{2024}} + \overrightarrow{BP_{2025}}$ vektorösszeg hossza?

- (A) 1011 (B) 1012 (C) 2023 (D) 2024 (E) 2025

24. Andris megrajzolta az 5×5 -ös négyzetrácsban az összes olyan rácsvonalakon haladó útvonalat, amely a bal alsó sarokból a jobb felső sarokba vezet, és 1 egység hosszúságú jobbra vagy felfelé irányuló szakaszokból áll. Minden egyes esetben kiszámította a négyzetrácsnak az útiránytól jobbra eső területét. Az alábbi ábrákon két példa látható. Hány egység az Andris által kiszámolt területek összege?



- (A) 2520 (B) 3150 (C) 3840 (D) 4730 (E) 5050

25. Hány olyan k egész szám létezik, amelyre a $kx^2 + 20x + 20 - k = 0$ másodfokú egyenletnek csak egész megoldása van?

- (A) 1 (B) 4 (C) 6 (D) 8 (E) 12

26. Kiss úr egy írószertboltban vásárolt 7 mappát, 5 golyóstollat, 9 radírt, és ezekért 27 eurót fizetett. Kovács úr ugyanebben az üzletben 13 mappáért, 11 golyóstollért és 21 radírért 60 eurót fizetett. Hány euróba kerül ebben a boltban 8 mappa, 4 golyóstoll és 6 radír együtt?

- (A) 21 (B) 22 (C) 23 (D) 24 (E) 26

27. Az ábrán látható téglalapok közül hány teljesíti azt a feltételt, hogy a belsejében lévő számok összege osztható 5-tel?

- (A) 45 (B) 57 (C) 60
(D) 71 (E) 75

21	22	23	24	25
16	17	18	19	20
11	12	13	14	15
6	7	8	9	10
1	2	3	4	5

28. Egy kisváros gimnáziumában 50 végzős tanuló érettségizett. Közülük 40 diák kapott jelest magyarból, 45 matematikából és 42 történelemből. Ha m és n jelöli rendre a mindhárom tantárgyból ötöst szerzett diákok maximális és minimális számát, akkor mennyi az $m - n$ különbség értéke?

- (A) 13 (B) 14 (C) 15 (D) 16 (E) 17

29. Bea véletlenszerűen kiválaszt 3 különböző számot az $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ halmazból, és csökkenő sorrendbe rendezve azokat egy háromjegyű számot képez belőlük. Balázs az $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmazból választ véletlenszerűen 3 különböző számot, és ő is csökkenő sorrend szerint felír belőlük egy háromjegyű számot. Mennyi a valószínűsége annak, hogy Bea száma nagyobb, mint Balázsé?

- (A) $\frac{11}{20}$ (B) $\frac{29}{40}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{5}{6}$ (E) $\frac{19}{20}$

30. Van néhány egyforma négyzet alakú papírlapunk, mindegyiknek az egyik oldala fehér, a másik fekete. Hat papírnégyzetet összeillesztünk, így egy 3×2 -es téglalap alakú kártyát kapunk. Minden kis négyzet esetén szabadon megválaszthatjuk, hogy melyik színű fele legyen fölül. Ha két 3×2 -es kártyát nem lehet elforgatni vagy átfordítani úgy, hogy pontosan ugyanúgy nézzenek ki, akkor azokat különbözőnek tekintjük. Hány különböző 3×2 -es kártya készíthető?

- (A) 20 (B) 23 (C) 26 (D) 27 (E) 28

Fonyó Lajos, Fonyóné Németh Ildikó

A középiskolai tanárok versenyének eredménye

- 1. helyezett** *Molnár István* (Gál Ferenc Egyetem Gazdasági Kar, Békéscsaba)
- 2. helyezett** *Cseh Judit* (Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium, Szeged)
- 3. helyezett** *Teleki Olivér* (Kőrösi Csoma Sándor Két Tanítási Nyelvű Baptista Gimnázium, Budapest)
- 4. helyezett** *Magyar Zsolt* (Szent István Gimnázium, Budapest)
- 5. helyezett** *Tamásné Kollár Magdolna* (Pannonhalmi Bencés Gimnázium)

6. helyezett *Urbán Diana* (Szent Margit Gimnázium, Budapest)

7. helyezett *Bekőné Wekszli Mária* (Mosonmagyaróvári Kossuth Lajos Gimnázium és Kollégium)

8. helyezett *Retki Botond* (XIII. kerületi Ady Endre Gimnázium/ELTE hallgató)

9. helyezett *Kovács Ildikó* (Veres Pálné Gimnázium, Budapest)

10. helyezett *Bene Koppány* (Szlovák Tanítási Nyelvű Óvoda, Általános Iskola, Gimnázium, Budapest)

Tanárverseny középiskolában tanító tanároknak – megoldásvázlatok

A helyes válaszok kódjai

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.
B	A	A	D	E	C	C	D	D	E	C	E	C	E	D
16.	17.	18.	19.	20.	21.	22.	23.	24.	25.	26.	27.	28.	29.	30.
C	B	C	C	C	D	D	E	B	E	A	D	A	B	A

1. (B) Előtte 2023, mögötte 2024 várakozó áll: $2023 + 1 + 2024 = 4048$.

2. (A) A táblán n szám van, az összegük S . Dia: $S + 3n = 45$; Viki: $3S = 45$, tehát $S = 15$; $n = 10$.

3. (A) $\frac{a+b+c}{3} = 0$, tehát $a + b + c = 0$, így $a^2 + nb^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = 0$;
 $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} = 10$, vagyis $a^2 + b^2 + c^2 = 30$, így $2ab + 2bc + 2ca = -30$, ahonnan
 $\frac{ab + bc + ca}{3} = -5$.

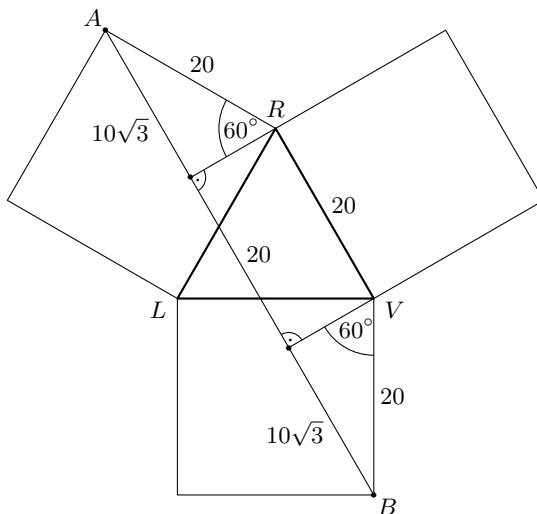
4. (D) A „nem szeretek táncolni” választ adók száma: $0,6 \cdot 0,2n + 0,4 \cdot 0,9n = 0,48n$, közülük szeret táncolni: $0,6 \cdot 0,2n = 0,12n$, ezért $\frac{0,12n}{0,48n} = \frac{1}{4} = 0,25$. Tehát 25%.

5. (E) $2^x + \frac{2025}{2^x} \geq 2\sqrt{2^x \cdot \frac{2025}{2^x}} = 2 \cdot 45 = 90 > n$, ahonnan $n_{\max} = 89$.

6. (C) $\frac{\log_2 x \cdot \log_3 x}{\log_2 x + \log_3 x} = 2$, így $\frac{\log_2 x + \log_3 x}{\log_2 x \cdot \log_3 x} = \frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_2 x} = \log_x 3 + \log_x 2 =$
 $= \log_x 6 = \frac{1}{2}$, ahonnan $x = 36$.

7. (C) $\frac{150}{3} - 15 - 27 = 8$ csapatban nem volt fiú, ezért $2 \cdot 8 = 16$ a fiúcsapatok száma. A pontosan 2 fiút tartalmazó csapatok száma $27 - 16 = 11$, azaz a fiúk száma $15 \cdot 1 + 11 \cdot 2 + 16 \cdot 3 = 85$, a lányoké $150 - 85 = 65$.

8. (D) $AB = 20 + 20\sqrt{3} = 20 + \sqrt{1200}$. Tehát $a + b = 20 + 1200 = 1220$.



9. (D) A számjegyek $\frac{4!}{2!} = 12$ -féle sorrendben követhetik egymást. A számjegyek elé, közé és mögé a mássalhangzók $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ -féleképpen szűrhatók be. Ezért a megfelelő sorrendek száma $12 \cdot 60 = 720$.

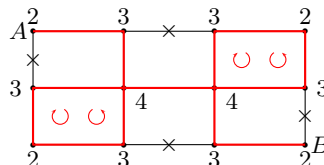
10. (E)
$$\frac{\sqrt{2} \cos(2x)}{\cos x - \sin x} = \frac{\sqrt{2}(\cos^2 x - \sin^2 x)}{\cos x - \sin x} = \frac{\sqrt{2}(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{\cos x - \sin x} = \sqrt{2}(\cos x + \sin x) = \sqrt{2}(\cos x + \sin x) = 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x \right) = 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \leq 2$$
, de a maximumhelyeknél az eredeti kifejezés nem értelmezhető, ebből következik, hogy nincs maximális érték.

11. (C) $1 + 3 + 5 + \dots + 35 + 37 + 39 = \frac{1 + 39}{2} \cdot 20 = 400$,

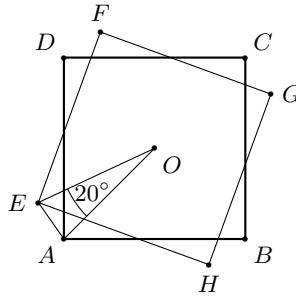
$$[1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)] - [(2n + 1) + \dots + 39] < 0.$$

Innen $n^2 - (400 - n^2) < 0$, azaz $n^2 < 200$, tehát $n_{\max} = 14$, eszerint legalább 6 előjelváltás szükséges.

12. (E) Írjuk rá a térképre, hogy melyik vezetességtől hány útszakasz indul, vagyis a gráf csúcsainak fokszámát. A gráfból 4 élet kell törölni úgy, hogy A és B fokszáma páratlan legyen, a többi csúcs pedig páros. A megmaradt két kör két-két forgásirány szerint járható be, vagyis a megfelelő utak száma $2 \cdot 2 = 4$.

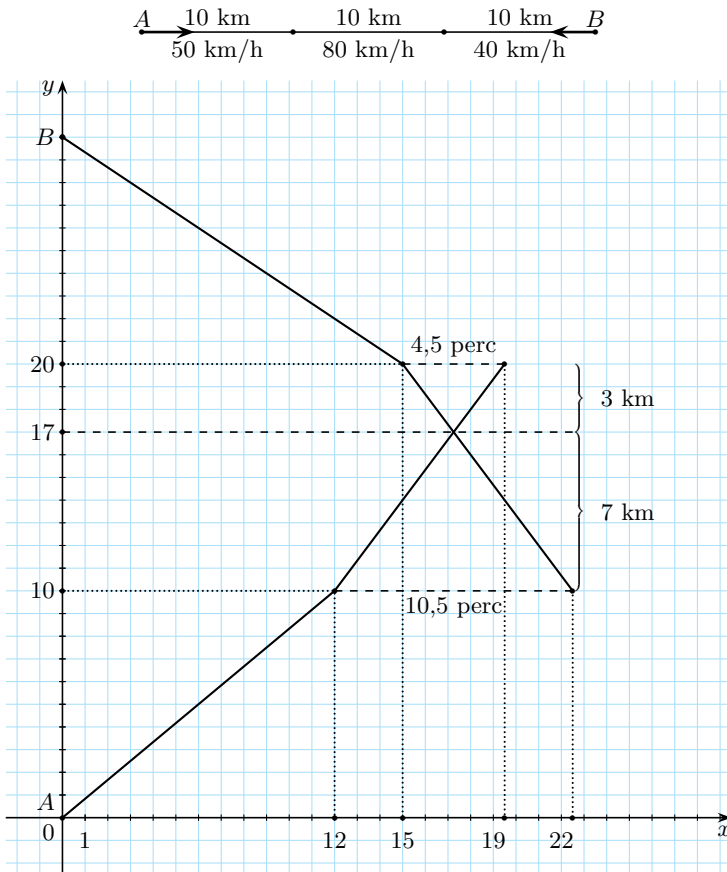


13. (C) $a + b = 2x^2 + 2y^2 - 16x - 4y = 2(x - 4)^2 + 2(y - 1)^2 - 34 \geq -34$, tehát $(a + b)_{\min} = -34$ (ha $x = 4$ és $y = 1$).



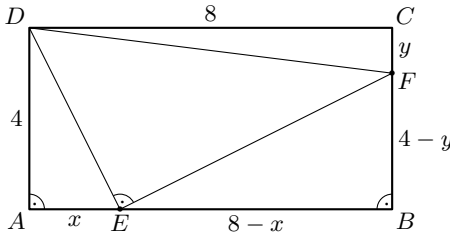
14. (E) $OA = OE$, $\angle AOE = 20^\circ$, ebből következik, hogy $\angle OAE = \frac{180^\circ - 20^\circ}{2} = 80^\circ$. $\angle OAD = 45^\circ$, tehát $\angle EAD = 80^\circ - 45^\circ = 35^\circ$.

15. (D)



De $a + b + c < 0$, tehát a III. állítás hamis. $f(-1) = a - b + c > 0$, vagyis az I. állítás igaz. Ha $\left. \begin{array}{l} a - b + c > 0 \\ a + b - c > 0 \end{array} \right\}$, akkor $a > 0$, ami ellentmondás, tehát a II. állítás hamis.

19. (C) $T(DAE\Delta) = T(DFC\Delta)$, ebből következik, hogy $2x = 4y$, azaz $x = 2y$. $AED\Delta \sim BFE\Delta$ alapján $\frac{x}{4} = \frac{4-y}{8-x} = \frac{4-\frac{x}{2}}{8-\frac{x}{2}}$, innen $x^2 - 10x + 16 = 0$, azaz $x_1 = 2$ és $x_2 = 8$, ám ez utóbbi nem megoldás. Ezek szerint $x = 2$, $y = 1$. $T(DEF\Delta) = T(ABCD) - T(DAE\Delta) - T(BFE\Delta) - T(CDF\Delta) = 32 - 4 - 9 - 4 = 15$.



20. (C) Ha $m \in \mathbb{Q}$, akkor vagy 0, vagy 2-nél több rácspontot tartalmazhat, például: $y = \frac{1}{2}$, $y = 1$, $y = x + \frac{1}{2}$, $y = 2x + 1$; ha $m \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, akkor vagy 0, vagy pontosan 1 rácspontot tartalmazhat, például: $y = \sqrt{3}x + \frac{1}{2}$, $y = \sqrt{2}x + 1$.

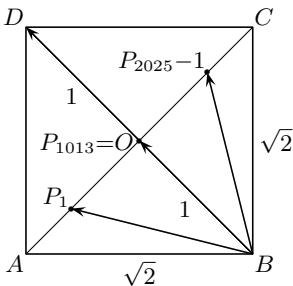
Az üres mezőkbe rendre: lehetséges, nem lehetséges, nem lehetséges, lehetséges; lehetséges, nem lehetséges, nem lehetséges, lehetséges; lehetséges, lehetséges, nem lehetséges, nem lehetséges kerül. Tehát a válasz: összesen 6 esetben „lehetséges”.

21. (D) $2024 = a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = (a - b)(a + b) + (c - d)(c + d) \geq a + b + c + d = 2024$, tehát $b + 1 + b + d + 1 + d = 2024$, ahonnan $b + d = 2022$ ($b \geq d + 2$).

a	1011	1010	...	508
b	1010	1009	...	507
c	2	3	...	505
d	1	2	...	504

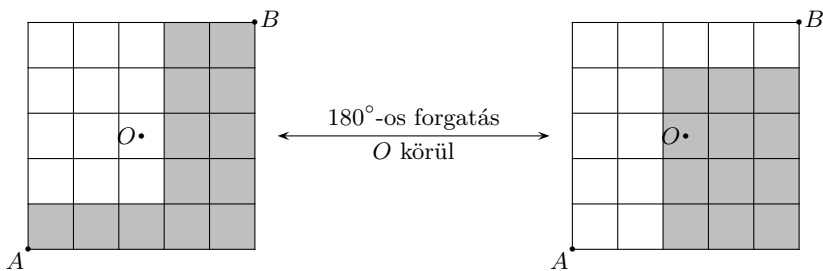
22. (D) $k + (k + 1)f = 35$, vagyis $(k + 1)(f + 1) = 36$, így:

$k + 1$	2	3	4	6	9	12	18
$f + 1$	18	12	9	6	4	3	2
k	1	2	3	5	8	11	17
f	17	11	8	5	3	2	1



23. (E) Vegyük fel a D pontot úgy, hogy $ABCD$ egy $\sqrt{2}$ oldalú négyzet legyen. Ha $1 \leq k \leq 1012$, akkor $\overrightarrow{BP_k} + \overrightarrow{BP_{2025-k}} = \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BO}$, így a 2025 tag összege $2025\overrightarrow{BO}$ -ral egyenlő, amelynek hossza $2025 \cdot |\overrightarrow{BO}| = 2025$.

24. (B) Minden útnak megfeleltethető egy másik (ábra), amelyek alatt lévő területek összege a négyzet területével egyenlő. Az A -ból B -be vezető utak száma $\binom{10}{5} = 252$, innen $T_{\text{összes}} = \frac{252 \cdot 5^2}{2} = 3150$.



25. (E) Bármely $k \in \mathbb{Z}$ esetén -1 megoldása az egyenletnek. A másik gyökre (esetleg szintén -1) teljesül, hogy $-1 + x_2 = -\frac{20}{k} \cdot x_2$ akkor és csak akkor egész, ha $k \mid 20$. k lehetséges értékei: $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 5, \pm 10, \pm 20$, összesen 12 lehetőség.

26. (A) A felírható háromismeretlenes egyenletrendszer

$$\left. \begin{aligned} 7m + 5g + 9r &= 27 & (1) \\ 13m + 11g + 21r &= 60 & (2) \\ 8m + 4g + 6r &= n & (3) \end{aligned} \right\}$$

első két egyenletének alkalmas lineáris kombinációjával kifejezhető a harmadik: $\lambda \cdot (1) + \mu \cdot (2) = (3)$, innen

$$\left. \begin{aligned} 7\lambda + 13\mu &= 8 \\ 5\lambda + 11\mu &= 4 \\ (9\lambda + 21\mu &= 6) \end{aligned} \right\},$$

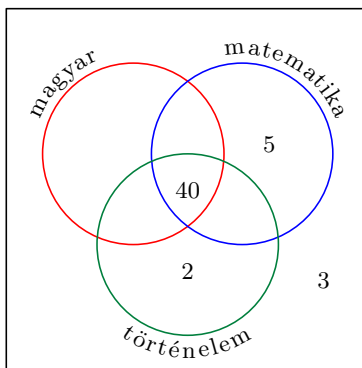
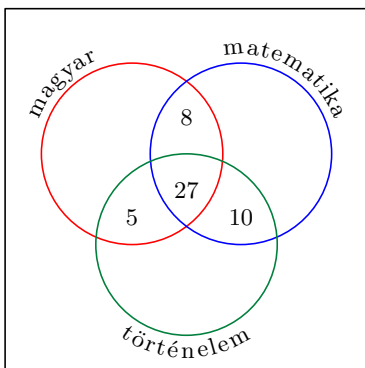
ebből pedig $\lambda = 3, \mu = -1$, vagyis $n = 3 \cdot 27 - 60 = 21$ következik.

27. (D) Az 5-tel való osztási maradékokat vizsgáljuk, és eszerint újrarajzoltuk a táblázatot. Ha egy téglalap magassága 5, akkor az megfelel a feltételeknek. Ilyen téglalap $\binom{6}{2} = 15$ van. Ha a téglalap magassága nem 5, akkor olyan szomszédos számok szerepelnek benne, amelyek összege 5 egy többszöröse. Ilyen lehet a 0, a $2 + 3$, az $1 + 2 + 3 + 4$ és az $1 + 2 + 3 + 4 + 0$. Minden ilyen típusú téglalaphól $\binom{6}{2} = 15$ van, de ezek közül az 5 magasságúakat már számításba vettük. A megfelelő téglalapok száma tehát $15 + 4 \cdot 14 = 71$.

1	2	3	4	0
1	2	3	4	0
1	2	3	4	0
1	2	3	4	0
1	2	3	4	0

28. (A) Az ötösök száma összesen $40 + 45 + 42 = 127$. Ha mindenki legfeljebb két tárgyból kapott volna 5-öst, akkor legfeljebb 100 ötös lehetne, tehát legalább 27 tanuló mindhárom tárgyból ötöst kellett kapjon. Ez csak úgy lehetett, hogy a többi (23) tanuló közül magyarból további 13, matematikából további 18, történelemből további 15 kapott jelest. Ezért matematikából és történelemből 10, történelemből és magyarból 5, magyarból és matematikából 8 tanuló kellett, hogy ötöst kapjon (1. halmazábra).

Legfeljebb 40 tanuló kaphatott mindhárom tárgyból ötöst, mert magyarból mindössze 40 jeles született. A további 10 tanuló közül – például – 2 történelemből, 5 matematikából kapott ötöst, a többi (3) a három tantárgy egyikéből sem kapott ötöst (2. halmazábra). (Vagy 2-en történelemből és matematikából is, 3-an csak matematikából, és 5-en egyikből sem; vagy egyvalaki történelemből és matematikából is, egyvalaki csak történelemből, 4-en csak matematikából, és 4-en egyikből sem.)



29. (B) Ha Bea számai között szerepel a 6-os, akkor az ő száma biztosan nagyobb, mint Balázsé $P_1 = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{6}{3}} \cdot 1 = \frac{1}{2}$. Ha Bea számai között nincs 6-os (ennek az esélye $\frac{1}{2}$), akkor annak a valószínűsége, hogy két egyenlő számot választanak $\frac{1}{\binom{5}{3}} = \frac{1}{10}$. Minden más esetben az egyik szám nagyobb, mint a másik, ezen esetek felében Bea száma a nagyobb $\frac{9}{10} \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{20}$. Eszerint $P_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{20} = \frac{9}{40}$. $P = P_1 + P_2 = \frac{1}{2} + \frac{9}{40} = \frac{29}{40}$.

1	2
3	4
5	6

30. (A) Az ábrán látható számozás segítségével soroljuk fel a lehetséges mintákat a fekete négyzetek száma szerint.

A fekete négyzetek száma 0 (vagy átfordítva 6) 1 esetben.

A fekete négyzetek száma 1 (vagy átfordítva 5) 3 megkülönböztethető esetben: $\{1\} \cup \{6\}$ (forgatással egymásba vihetők), $\{2\} \cup \{5\}$, $\{3\} \cup \{4\}$.

Néhányan a 2024–2025-ös tanév legszorgalmasabb megoldói közül 7–9. évfolyam



Kun Zsófia



Kallós Klára



**Molnár-Sáska
Tamás**



Blaskovics Bálint



Aravin Peter



Lakatos Levente



Bodor Ádám



Sógor-Jász Soma



László Gyula



**Rajtik Sándor
Barnabás**



Sajter Klaus



Izsa Ferenc Gergő



**Pázmándi József
Áron**



Patócs Péter



Baran Júlia

1. sor: Kun Zsófia 7. o. (Budapesti Fazekas Mihály Gyak. Ált. Isk. és Gimn.), Kallós Klára 7. o. (Szent Imre Katolikus Gim., Két Tanítási Nyelvű Ált. Isk., Koll., Óvoda és AMI, Nyíregyháza), Molnár-Sáska Tamás 7. o. (Budapesti Fazekas Mihály Gyak. Ált. Isk. és Gimn.), Blaskovics Bálint 8. o. (Óbudai Árpád Gimn.), Aravin Peter 8. o. (Budapesti Fazekas Mihály Gyak. Ált. Isk. és Gimn.).
2. sor: Lakatos Levente 9. o. (Szekszárdi Garay János Gim.), Bodor Ádám 9. o. (Csíkszereda, Márton Áron Líceum), Sógor-Jász Soma 9. o. (Szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimn.), László Gyula 9. o. (Debreceni Református Koll. Dóczy Gimnáziuma), Rajtik Sándor Barnabás 9. o. (Budapesti Fazekas Mihály Gyak. Ált. Isk. és Gimn.).
3. sor: Sajter Klaus 9. o. (Márton Áron Líceum, Csíkszereda), Izsa Ferenc Gergő 9. o. (Békásmegyeri Veres Péter Gimn.), Pázmándi József Áron 9. o. (Budapesti Fazekas Mihály Gyak. Ált. Isk. és Gimn.), Patócs Péter 9. o. (Kempelen Farkas Gimn., Budapest), Baran Júlia 9. o. (Debreceni Fazekas Mihály Gimn.).

10- . évfolyam



Kis Boglárka



Blaskovics Ádám



Elekes Panni



Sánta Gergely
Péter



Rasztyörgy
Jázmin



Csató Hanna Zita



Lengyel Ádám



Németh Ábel



Vízhányó Janka



Papp Emese Petra



Gáti Benjamin



Tóth Luca



Simon János
Dániel



Péter Hanna



Bélteki Teó

1. sor: Kis Boglárka 10. o. (Kecskeméti Katona József Gimn.), Blaskovics Ádám 10. o. (Budapesti Fazekas Mihály Gyak. Ált. Isk. és Gimn.), Elekes Panni 10. o. (Budapest-Fasori Evangélikus Gimn.), Sánta Gergely Péter 10. o. (Budapesti Fazekas Mihály Gyak. Ált. Isk. és Gimn.), Rasztyörgy Jázmin 10. o. (Selye János Gimn., Révkomárom).

2. sor: Csató Hanna Zita 10. o. (Budapesti Fazekas Mihály Gyak. Ált. Isk. és Gimn.), Lengyel Ádám 10. o. (Madách Imre Gimn., Somorja, Szlovákia), Németh Ábel 10. o. (ELTE Bolyai János Gyakorló Ált. Iskola és Gimn.), Vízhányó Janka 10. o. (Kecskeméti Katona József Gimn.), Papp Emese Petra 10. o. (ELTE Apáczai Csere János Gyakorló Gimn. és Koll.).

3. sor: Gáti Benjamin 10. o. (Berzsenyi Dániel Gimn., Budapest), Tóth Luca 10. o. (Kempelen Farkas Gimn., Budapest), Simon János Dániel 11. o. (Career Academy South Bend Public Charter School, South Bend, Amerikai Egyesült Államok), Péter Hanna 11. o. (Bartók Béla Elméleti Líceum, Temesvár), Bélteki Teó 11. o. (Bethlen Gábor Református Gimn. és Szathmáry Koll., Hódmezővásárhely).

11. évfolyam



**Horváth Ábel
Nándor**



Németh Barnabás



Hetyei Dániel



Bodor Mátyás



Ali Richárd



Kerekes András



Ollé Sarolta



Szakács Ábel



Diaconescu Tashi



Vigh Zalán



Veres Dorottya



Baráth Borbála



Bús László Teodor



Barna Krisztina



Jávor Botond

1. sor: Horváth Ábel Nándor 11. o. (Szent István Gimn., Budapest), Németh Barnabás 11. o. (Szent István Gimn., Budapest), Hetyei Dániel 11. o. (Révai Miklós Gimn. és Koll., Győr), Bodor Mátyás 11. o. (Csíkszereda, Márton Áron Líceum), Ali Richárd 11. o. (Gödöllői Török Ignác Gimn.).

2. sor: Kerekes András 11. o. (Budapesti Fazekas Mihály Gyak. Ált. Isk. és Gimn.), Ollé Sarolta 11. o. (Bethlen Gábor Református Gimn. és Szathmáry Koll., Hódmezővásárhely), Szakács Ábel 11. o. (Budapesti Fazekas Mihály Gyak. Ált. Isk. és Gimn.), Diaconescu Tashi 11. o. (Spark Generation, Kolozsvár), Vigh Zalán 11. o. (Szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimn.).

3. sor: Veres Dorottya 11. o. (Budapesti Fazekas Mihály Gyak. Ált. Isk. és Gimn.), Baráth Borbála 11. o. (Szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimn.), Bús László Teodor 11. o. (Ceglédi Kossuth Lajos Gimn.), Barna Krisztina 11. o. (Koch Valéria Gimn., Ált. Isk., Óvoda, Koll. és Pedagógiai Intézet), Jávor Botond 11. o. (Városmajori Gimn.).

11-12. évfolyam



Herczeg Viktória



Sütő Áron



Gyönki Dominik



Bencze Mátyás



Nagy Korina



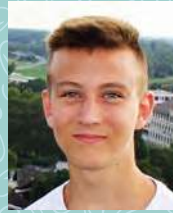
Márfai Dóra



Csiszár András



Wodala Gréta
Klára



Balogh Péter



Kiss Adorján
Timon



Hodossy Réka



Guthy Gábor



Kovács Benedek
Noel



Klement Tamás



Virág Lénárd
Dániel

1. sor: Herczeg Viktória 11. o. (Bethlen Gábor Református Gimn. és Szathmáry Koll., Hódmezővásárhely), Sütő Áron 12. o. (Dobó István Gimn., Eger), Gyönki Dominik 12. o. (Neumann János Gimn., Technikum és Koll., Eger), Bencze Mátyás 12. o. (Tamási Áron Gimn., Székelyudvarhely), Nagy Korina 12. o. (Kecskeméti Bányai Júlia Gimn.).
2. sor: Márfai Dóra 12. o. (Szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimn.), Csiszár András 12. o. (Szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimn.), Wodala Gréta Klára 12. o. (Szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimn.), Balogh Péter 12. o. (Szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimn.), Kiss Adorján Timon 12. o. (Kaposvári Táncsics Mihály Gimn.).
3. sor: Hodossy Réka 12. o. (Balassagyarmati Balassi Bálint Gimn.), Guthy Gábor 12. o. (Debreceni Fazekas Mihály Gimn.), Kovács Benedek Noel 12. o. (Budapesti Fazekas Mihály Gyak. Ált. Isk. és Gimn.), Klement Tamás 12. o. (Pécsi Leőwey Klára Gimn.), Virág Lénárd Dániel 12. o. (ELTE Apáczai Csere János Gyakorló Gimn. és Koll.),

A fekete négyzetek száma 2 (vagy átfordítva 4). Lexikografikusan vesszük sorra a lehetséges hármásokat, de ami már szerepelt – ezeket kékkel jelöljük –, azt nem ismétljük meg. A pirossal jelöltek az adott transzformáción belül ismétlődnek.

$$\{1,2\} \circ \{5,6\}, \{1,3\} \circ \{4,6\}, \{1,4\} \circ \{3,6\}, \{1,5\} \circ \{2,6\}, \{1,6\} \circ \{1,6\}, \\ \{2,3\} \circ \{4,5\}, \{2,4\} \circ \{3,5\}, \{2,5\} \circ \{5,2\}, \{3,4\} \circ \{4,3\}.$$

Összesen 9 különböző eset. (A lehetséges 15 esetből 6 kétszer szerepel.)

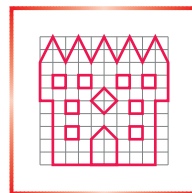
A fekete négyzetek száma 3: $\{1,2,3\}$, elforgatva $\{4,5,6\}$, átfordítva $\{1,2,4\}$, ezt elforgatva $\{3,5,6\}$, jelölésekkel: $\{1,2,3\} \circ \{4,5,6\} \leftrightarrow \{1,2,4\} \circ \{3,5,6\}$.

$$\{1,2,3\} \circ \{4,5,6\} \leftrightarrow \{1,2,4\} \circ \{3,5,6\}, \{1,2,5\} \circ \{3,4,6\} \leftrightarrow \{1,2,6\} \circ \{3,4,5\}, \\ \{1,3,4\} \circ \{2,5,6\} \leftrightarrow \{2,3,4\} \circ \{1,5,6\}, \{1,3,5\} \circ \{2,4,6\} \leftrightarrow \{2,4,6\} \circ \{1,3,5\}, \\ \{1,3,6\} \circ \{2,4,5\} \leftrightarrow \{2,4,5\} \circ \{1,3,6\}, \{1,4,5\} \circ \{2,3,6\} \leftrightarrow \{2,3,6\} \circ \{1,4,5\}, \\ \{1,4,6\} \circ \{2,3,5\} \leftrightarrow \{2,3,5\} \circ \{1,4,6\}.$$

Ez 7 különböző lehetőség. (A lehetséges 20 esetből 13 kétszer szerepel.)

Összesen $1 + 3 + 9 + 7 = 20$ lehetőség.

A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok ABACUS-szal közös pontverseny 9. osztályosoknak (884–888.)



K. 884. Cikkcakk számnak hívjuk az olyan számokat, amelyek számjegyeit balról jobbra tekintve az első számjegynél kisebb a második, a második számjegynél nagyobb a harmadik, a harmadiknál kisebb a negyedik és így tovább.

Készítsd el az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyekből az összes cikkcakk számot, azaz az összes olyan \overline{abcde} ötjegyű számot, ahol a, b, c, d, e mind különböző, és amelyre $a > b$ és $b < c$ és $c > d$ és $d < e$ teljesül. Hány ilyen ötjegyű cikkcakk szám van?

K. 885. Peti reggelire kakaót vagy gyümölcslevet iszik, mindig valamelyiket, de csak az egyiket. A kakaózás nála kétnapos esemény, ezért a kakaóívási időszakok mindig páros sok napból állnak. Hányféleképpen alakulhat a reggeli innivalója szempontjából február első tíz napja?

K. 886. Egy autó gumiabroncsa elkopik, ha az első kerékre téve 20000 km-t fut, vagy ha a hátsó kerékre téve 30000 km-t fut.

a) Van négy új gumink. Legfeljebb hány km-t tud ezekkel az autó menni, ha a gumikat cserélhetjük az első és a hátsó kerekek között? Hány km megtétele után kell cserélni a gumikat az első és a hátsó kerekek között a maximális távolság eléréséhez?

b) Van öt új gumink. Legfeljebb hány km-t tud az autó ezekkel menni, ha a gumikat cserélhetjük az első és a hátsó kerekek között? Hogyan kell cserélni a gumikat a kerekek között a maximális távolság eléréséhez?

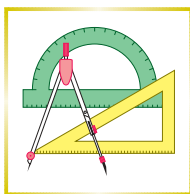
K/C. 887. Melyik háromjegyű számra teljesül az $\overline{xyz} = x! + y! + z!$ összefüggés? (x, y, z a háromjegyű szám számjegyei; $n!$ pedig 1-től n -ig az egész számok szorzatát jelenti azzal a feltétellel, hogy $0! = 1$ és $1! = 1$.)

K/C. 888. Három egymást követő páratlan egész szám négyzeteinek összege négy azonos számjegyből áll. Keressük meg az összes ilyen, pozitív egész számokból álló számhármast.



Beküldési határidő: 2026. február 10.

Elektronikus munkafüzet: <https://www.komal.hu/munkafuzet>



A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (887–888., 1883–1887.)

Feladatok 10. évfolyamig

K/C. 887. A szövegét lásd a **K** feladatoknál.

K/C. 888. A szövegét lásd a **K** feladatoknál.

Feladatok mindenkinek

C. 1883. Mely n természetes számokra igaz, hogy $n^3 + 25n \geq 10n^2 + 16$?

Javasolta: *Czett Máttyás* (Zalaegerszeg)

C. 1884. Egy osztály 30 tanulója dolgozatot írt matematikából. A tanár kijavította a dolgozatokat, és a diákoknak egy táblázatban küldte el az eredményeket, ahol egymás alatt szerepeltek a kapott érdemjegyek: 15 darab négyes és 15 darab ötös. Mutassuk meg, hogy biztosan van 14 olyan egymást követő sor, amelyekben szereplő érdemjegyek összege 63.

Felvidéki Magyar Matematikaverseny feladat alapján

C. 1885. A PQR szabályos háromszögben megrajzoltuk az $ABCDEF$ szabályos hatszöget úgy, hogy a B, D, F pontok rendre a PQ, QR, RP oldalak felezőpontjai. Határozzuk meg a PQR háromszög területét, ha az $ABQRF$ ötszög területe egységnyi.

holland versenyfeladat

Feladatok 11. évfolyamtól

C. 1886. Az $ABCDEF$ hatszög minden belső szöge ugyanakkora. Bizonyítsuk be, hogy az ACE és BDF háromszögek területei egyenlők.

Javasolta: *Ujházy Márton* (Budapest)

C. 1887. Hány olyan \overline{abcabc}_9 alakú szám van a kilences számrendszerben, amely 40 pozitív osztóval rendelkezik? (Az egyező betűk egyező számjegyeket jelölnek.)

Javasolta: *Ujházy Márton* (Budapest)

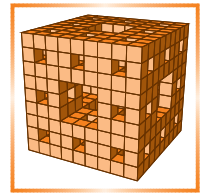
✱

Beküldési határidő: 2026. február 10.

Elektronikus munkafüzet: <https://www.komal.hu/munkafuzet>

✱

A B pontversenyben kitűzött feladatok (5502–5509.)



B. 5502. Legyen A egy valós számokból álló n elemű halmaz. Mutassuk meg, hogy legalább $4n - 3$ szám felírható $a - 2b + c$ alakban, ahol $a, b, c \in A$ nem feltétlenül különbözőek.

(3 pont)

Javasolta: *Pach Péter Pál* (Budapest)

B. 5503. Az ABC háromszög BC oldalára szerkesztett szabályos háromszögek harmadik csúcsai legyenek P és Q . Mutassuk meg, hogy $AP^2 + AQ^2 = AB^2 + BC^2 + CA^2$.

(3 pont)

Javasolta: *Kiss Géza* (Csömör)

B. 5504. Legyenek a , b és c nem mind egyenlő valós számok. Mutassuk meg, hogy

$$\frac{a + b + c}{3} > \sqrt[3]{abc}$$

akkor és csak akkor teljesül, ha $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c} > 0$.

(4 pont)

Javasolta: *Barczy Máttyás* (Szeged) és *Páles Zsolt* (Debrecen)

B. 5505. Legyen az $ABCD$ húrnégyszög AC és BD átlóinak metszéspontja P , az APB háromszög körülírt körének középpontja K , továbbá a CPD háromszög magasságpontja M . Mutassuk meg, hogy a K , M és P pontok egy egyenesen vannak.

(4 pont)

Javasolta: *Bencze Mihály* (Brassó)

B. 5506. Oldjuk meg a pozitív egész számok halmazán a következő egyenletet:

$$x^5 - xy^2 + y^2 = 1.$$

(5 pont)

Javasolta: *Molnár István* (Békéscsaba)

B. 5507. Az $(n^2; n^2 + n)$ intervallumból ($n > 2$ egész szám) választunk két különböző egész számot, a -t és b -t. Bizonyítsuk be, hogy nincs olyan ezektől különböző egész szám az intervallumban, amely osztója az ab szorzatnak.

(5 pont)

Javasolta: *Róka Sándor* (Nyíregyháza)

B. 5508. Legyen $ABCD$ konvex négyszög.

a) Igazoljuk, hogy ha

$$\operatorname{tg} BAC \cdot \operatorname{tg} DCA = \operatorname{tg} CAD \cdot \operatorname{tg} ACB,$$

akkor

$$\operatorname{tg} CBD \cdot \operatorname{tg} ADB = \operatorname{tg} DBA \cdot \operatorname{tg} BDC.$$

b) Igazoljuk, hogy ha

$$\operatorname{tg} \frac{BAC}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{DCA}{2} = \operatorname{tg} \frac{CAD}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{ACB}{2},$$

akkor

$$\operatorname{tg} \frac{CBD}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{ADB}{2} = \operatorname{tg} \frac{DBA}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{BDC}{2}.$$

(6 pont)

Javasolta: *Hujter Bálint* (Budapest) és *Kós Géza* (Budapest)

B. 5509. Egy n csúcsú gráf csúcshalmaza legyen: $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, a v_i csúcs fokszáma d_i . Egy a gráf csúcsaihoz nemnegatív valós számokat rendelő f függvényt *verőceinek* nevezünk, ha a gráf minden $v_i v_j$ élére teljesül, hogy

$$f(v_i) + f(v_j) \geq d_i + d_j.$$

Határozzuk meg azt a legnagyobb λ valós számot, amelyre minden n -re, minden n csúcsú egyszerű gráfra és minden f verőcei függvényre teljesül, hogy

$$f(v_1) + f(v_2) + \dots + f(v_n) \geq \lambda(d_1 + d_2 + \dots + d_n).$$

(6 pont)

Javasolta: *Varga Boldizsár* (Verőce)

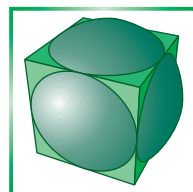


Beküldési határidő: 2026. február 10.

Elektronikus munkafüzet: <https://www.komal.hu/munkafuzet>



Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (923–925.)



A. 923. Egy kiállítást, amelyen 1000 festményt mutattak be, 2026-an látogattak meg. Bizonyítsuk be, hogy a látogatók közül néhányat el lehet küldeni két terembe úgy, hogy mindkét terembe küldünk legalább egy embert, és nincs olyan festmény, amely az egyik teremben tetszett valakinek, de a másikban senkinek sem, továbbá nincs olyan festmény, amelynek festőjét az egyik teremben személyesen ismeri valaki, de a másikban senki sem.

A. 924. Mely pozitív egész (k, l) párokra teljesül, hogy bármely pozitív egész n esetén létezik olyan $0 \leq i \leq l - 1$ egész, amelyre

$$\binom{n}{i} + (-1)^l \binom{n}{i+l} + (-1)^{2l} \binom{n}{i+2l} + \dots$$

nem osztható k -val?

(Kvant feladat nyomán)

A. 925. Négy pontot nevezünk általános helyzetűnek, ha páronként különbözők, semelyik három nincs egy egyenesen, és az általuk meghatározott hat egyenes között semelyik kettő sem párhuzamos.

Adottak az A, B, C, D általános helyzetű pontok egy körön. Legyen az AB és CD egyenesek metszéspontja E , AC és BD metszéspontja F , AD és BC metszéspontja pedig G . Jelölje az EFG háromszögben az E, F, G csúcsokhoz tartozó magasságvonalak talppontjait rendre P, Q , illetve R .

a) Mutassuk meg, hogy az $AR-BQ-CP$, $AQ-BR-DP$, $AP-CR-DQ$, illetve $BP-CQ-DR$ egyeneshármások egy-egy ponton mennek át vagy párhuzamosak.

b) Tegyük fel, hogy mind a négy egyeneshármás egy-egy pontban találkozik, jelöljük ezeket a pontokat rendre X, Y, Z, W -vel. Továbbá tegyük fel, hogy ezek a pontok általános helyzetűek. Bizonyítsuk be, hogy az $XWYZ$, $XYZW$, $XZWY$ négyszögek Miquel-pontjai éppen a P, Q, R pontok.

Javasolta: Varga Boldizsár (Verőce) és Bán-Szabó Áron (Palaiseau)



Beküldési határidő: 2026. február 10.

Elektronikus munkafüzet: <https://www.komal.hu/munkafuzet>





Informatikából kitűzött feladatok (683–686.)

I. 683. Egy kötéláncos a házak fölé kifeszített kötélen szeretne végigsétálni (természetesen megfelelő biztosítással). A kijelölt ház sorban azonos szélességű, de változó emeletszámú házak vannak. A kötéláncos azt szeretné, hogy a két szélső – a kötélt rögzítésre választott ház – a lehető legtávolabb legyen egymástól és közöttük csak náluk alacsonyabb épületek legyenek.

Készítsünk programot *i683* néven, amely megadja a két rögzítésre javasolt ház távolságát, azaz hány másik ház van közöttük.

Bemenet:	Kimenet:
14 8 7 10 7 6 9 2 8 4 5 4 2 7 6	4

A program standard bemenetének első sorában a ház sorban az épületek N száma ($1 \leq N \leq 1000$) található. A következő sorban az egyes

épületek emeletszáma ($1 \leq E_i \leq 100$) szerepel szóközzel elválasztva.

A program standard kimenetére a kiválasztott épületek közötti házak számát írjuk. Ha nem lehet kiválasztani a feltételnek eleget tevő két házat, akkor -1 értéket írjunk.

Beküldendő egy tömörített *i683.zip* állományban a program forráskódja és rövid dokumentációja, amely tartalmazza a megoldás rövid leírását, és megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben fordítható.

(10 pont)

I. 684. Az egyszavas anagrammák úgy készülnek, hogy egy adott szó betűinek sorrendjét felcseréljük. Például KAROM – MAROK – RAKOM – ARMOK – KORMA – AORKM – AKMOR ... Amint látjuk, egy szó egyszavas anagrammái között előfordulhatnak értelmes szavak is, de a többségük nyelviileg értelmezhetetlen betűsor.

1. Nyissunk meg egy üres táblázatkezelő munkafüzetet és egy munkalapján adjuk meg a következő feladat megoldásait.

Készítsük el a PATAKI és KOBOLD szavak összes egyszavas anagrammáját növekvő ábécérendben

2. az A és J oszlopba azokat, amelyek nem kezdődnek „K” betűvel,
3. a B és K oszlopba azokat, amelyek nem kezdődnek mássalhangzóval,
4. a C és L oszlopba azokat, amelyek magánhangzóval kezdődnek,
5. a D és M oszlopba azokat, amelyek magánhangzóval kezdődnek és arra is végződnek,
6. az E és N oszlopba azokat, amelyek harmadik betűje „K”,
7. az F és O oszlopba azokat, amelyeknél az első és második betű azonos,

8. a G és P oszlopba azokat, amelyeknél az azonos betűk nem állnak egymás mellett.

Segédszámításokat a Q oszloptól jobbra vagy egy újonnan felvett munkalapon lehet végezni. A megoldásban saját függvény vagy makró nem használható.

Beküldendő egy tömörített *i684.zip* állományban az **anagramma** néven mentett táblázatkezelő munkafüzet és egy rövid dokumentáció, amelyben szerepel az összes, a megoldásnál bevetett furfang magyarázata, a táblázatkezelő neve, verziószáma.

(10 pont)

I. 685. A mesterséges intelligencia az elkövetkező években alaposan átalakíthatja az ember által végzett munkákat. A feladatban szereplő adatok az MI hatását vizsgálják az egyes munkakörökre. Az adatok forrása <https://www.kaggle.com/datasets/khushiyad001/ai-impact-on-jobs-2030>. A táblázat minden egyes sorában egy tipikus amerikai munkavállaló adatai szerepelnek. A táblázat oszlopainak jelentése a következő:

<i>Foglalkozas</i>	A foglalkozás megnevezése (szöveg)
<i>Fizetes</i>	Az éves fizetés dollárban (egész szám)
<i>Tapasztalat</i>	Munkatapasztalat években számolva (egész szám)
<i>Kepzettseg</i>	Legmagasabb iskolai végzettség (szöveg)
<i>Kitettség</i>	Megadja, hogy mennyire van szoros kapcsolatban az MI-vel az adott foglalkozás (0 = nincs, 1 = teljes mértékben) (0 és 1 közötti valós szám)
<i>Novekedes</i>	Szorozószám, amely megadja, hogy évről-évre milyen ütemben fejlődik a technológia az adott területen (valós szám)
<i>Automatizalas</i>	A munkaterület automatizálásának becsült valószínűsége 2030-ra (0 és 1 közötti valós szám)

A feladat megoldásaként egy prezentációt kell elkészítenünk, amely a kiértékelt adatokat is tartalmazza, és röviden válaszol a feltett kérdésekre. A megoldás során tetszőleges táblázatkezelő, számítógépes program vagy adatbázis-kezelő használható az adatok előkészítéséhez és értékeléséhez.

A prezentációban bemutatandó témák:

1. Van-e összefüggés az adatok alapján a kitettségi és az automatizálás, valamint a növekedés üteme között?
2. Milyen összefüggés mutatható ki a nagy kitettségi ($\geq 0,5$) munkakörök esetében a munkatapasztalat éveinek száma és az automatizálás között?
3. Mennyire igaz az állítás, hogy a legalacsonyabb, illetve a legmagasabb képzettséget igénylő munkakörökre van a legkisebb hatással az MI?
4. Mennyire igaz az egyes munkaterületeken, hogy a pályakezdők (legfőleg 2 év munkatapasztalat) munkáját lehet a legjobban automatizálni?
5. Soroljuk be az adatok egy részét a három alábbi kategóriába, és hasonlítsuk össze a kategóriákat a kitettségi mértékét és az automatizálás szintjét vizsgálva:
 - a. az első csoportba az informatikához közvetlenül kapcsolódó munkakörök kerüljenek;

- b. a második csoportba az emberekhez és emberi kapcsolatokhoz sorolható foglalkozások, például orvos, ügyvéd, HR-szakember;
- c. a harmadikban az ipari termeléshez és a pénzügyekhez kapcsolódó szakmák jelenjenek meg, például szerelő, pénzügyi szakember.

A bemutatóban mindegyik kérdésre 1-2 diával adjuk meg a választ. A diák tartalmazzanak az elemzésben feltárt adatokból készült diagramokat és ábrákat. Minden diának legyen megfelelő címe, és tartalmazzon egy-egy néhány szavas utalást a dia témájára. Teljes mondatok és hosszabb szövegek ne szerepeljenek, a dia tartalmából lehessen megállapítani a mondanivalót.

Beküldendő egy tömörített *i685.zip* állományban az elkészített bemutató, valamint az ahhoz felhasznált táblázatok, adatbázisok vagy programok forrása.

Letölthető állomány: `jobs30.csv`.

(10 pont)

I. 686. A pozitív egész számokat láthatatlan kapcsolatok kötik össze. Egy ilyen például a számok közötti oszthatósági kapcsolat, vagy ha két szám összege egy harmadik. Tekintsük úgy, hogy a pozitív egészek egy irányított gráf csúcsai. Minden összetett számtól egy irányított él indul ki a szám összes prímosztójához. Tehát a 24-estől egy-egy él indul ki a 2-eshez és a 3-ashoz. Ezenkívül minden egymás utáni prímszámtól egy irányított él indul ki a két szám összegéhez. Például a 2-estől és a 3-astól az 5-öshöz, a 3-astól és az 5-östől a 8-ashoz stb.

Keressük meg ebben a gráfban, hogy két pozitív egész szám összeköttetésben áll-e egymással, tehát el lehet-e jutni az egyikről indulva a másik számhoz egy útvonalon a gráfban.

Készítsünk programot *i686* néven, amely bekéri a két egész számot, és megad a két szám között egy lehetséges útvonalat, vagy megadja, hogy nem állnak összeköttetésben.

Példa bemenetek:	Példa kimenetek:
8 14	14 7 18 3 8
9 10	-1
13 12	13 24 3 5 12

A program standard bemenetének első sorában a két pozitív egész szám szerepel ($1 \leq a, b \leq 100$). A program a standard kimenet egyetlen sorába írjon ki egy lehetséges útvonalat a gráfban a két szám

között az érintett csúcsok segítségével, vagy -1 -et, ha a számok nem állnak összeköttetésben.

Beküldendő egy tömörített *i686.zip* állományban a program forráskódja és rövid dokumentációja, amely tartalmazza a megoldás rövid leírását, és megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben fordítható.

(10 pont)



Beküldési határidő: 2026. február 15.

Elektronikus munkafüzet: <https://www.komal.hu/munkafuzet>



Beszámoló a 2025. évi Eötvös-versenyről



Az Eötvös Loránd Fizikai Társulat 2025. évi Eötvös-versenye október 17-én délután 3 órai kezdettel tíz magyarországi helyszínen¹ került megrendezésre. Ezért külön köszönettel tartozunk mindazoknak, akik ebben szervezéssel, felügyelettel a segítségünkre voltak. A versenyen a három feladat megoldására 300 perc áll rendelkezésre, bármely írott vagy nyomtatott segédeszköz használható, de (nem programozható) zsebszámológépen kívül minden elektronikus eszköz használata tilos. Az Eötvös-versenyen azok vehetnek részt, akik vagy középiskolai tanulók, vagy a verseny évében fejezték be középiskolai tanulmányaikat. Összesen 63 versenyző adott be dolgozatot, 25 egyetemista és 38 középiskolás.

Ismertetjük a feladatokat és azok megoldását.



1. Egy 400 g tömegű, 6 cm átmérőjű poharat hosszú ideig 45 °C-os vízben mosogatunk, majd a vízből kivéve szájával lefelé egy vízszintes, sík felületre helyezzük, és hagyjuk kihűlni. (A szobahőmérséklet 20 °C.)

Mekkora erővel tudjuk a poharat a felületre merőleges irányban megmozdítani?

(Vigh Máté)

Megoldás. Az aránylag nagy hőkapacitású, vizes pohár a felületre helyezésekor 45 °C-os, és erre a hőmérsékletre felmelegíti a lerakáskor alászoruló levegőt is. Ezen kívül a pohár belső, vizes faláról annyi víz párolog el, hogy a poháron belül telített vízgőz alakul ki. Eközben a pohárból – a pohár nagyon csekély megemelésével, némi gáz távozik. A túlnyomás csak akkor tudja megemelni a poharat, ha ennek a rövid folyamatnak a végén a pohárban

$$p_1 = p_0 + \frac{mg}{A} = p_0 + \frac{4mg}{d^2\pi} = 101,3 \text{ kPa} + 1,5 \text{ kPa} = 102,8 \text{ kPa}$$

lesz a nyomás. ($p_0 = 101,3 \text{ kPa}$ a normál légköri nyomás.) A telített vízgőz parciális nyomása 45 °C-on táblázati adat alapján²:

$$p_{1,v} = 9,6 \text{ kPa},$$

így a bezárt levegő parciális nyomása

$$p_{1,\ell} = p_1 - p_{1,v} = 93,2 \text{ kPa}.$$

Ezután a pohár és a bezárt gáz lehűl 20 °C-ra. A telített vízgőz parciális nyomása a táblázat alapján:

$$p_{2,v} = 2,3 \text{ kPa},$$

¹Részletek a verseny honlapján: <http://eik.bme.hu/~vanko/fizika/eotvos.htm>

²Függvénytáblázat adata alapján.

a bezárt levegő pedig izochor módon lehül, és így az új parciális nyomása:

$$p_{2,\ell} = \frac{T_2}{T_1} p_{1,\ell} = \frac{293 \text{ K}}{318 \text{ K}} \cdot 93,2 \text{ kPa} = 85,9 \text{ kPa}.$$

A poháron belül tehát a teljes nyomás:

$$p_2 = p_{2,v} + p_{2,\ell} = 88,2 \text{ kPa}.$$

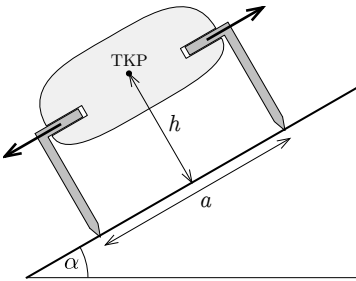
A pohár felemeléséhez szükséges erő:

$$F = mg + (p_0 - p_2)A = mg + \frac{d^2 \pi (p_0 - p_2)}{4} \approx 41 \text{ N}.$$

Megjegyzések. 1. A külső légnyomás függ a tengerszint feletti magasságtól és az időjárástól, a $p \approx 100 \text{ kPa}$ érték is elfogadható.

2. Ha a felület kicsit egyenetlen, akkor már nagyon kis *pozitív* nyomáskülönbség hatására is kijuthat gáz a pohár alól, így ekkor a $p_1 \approx p_0$ közelítés is reális lehet. (Ugyanakkor a *negatív* nyomáskülönbség nagy erővel odaszorítja a poharat, és így befelé nem juthat levegő.)

2. Az *ábrán* látható két lábbal rendelkező úrszonda egy α hajlásszögű, sík, lejtős felületen landolt. Az úrszonda széles lábai a lejtő esésvonalára (és az *ábra* síkjára) merőleges két párhuzamos szakasz mentén érintkeznek a talajjal. A lábak és a lejtő között a súrlódási együttható μ . A teljes úrszonda tömegközéppontja h távolságra van a talajtól, a lábak távolsága egymástól kezdetben a . Az úrszonda egy belső szerkezet segítségével az *ábrának* megfelelően elkezdi kitolni a lábait (miközben azok mindvégig a talajra merőlegesek maradnak).



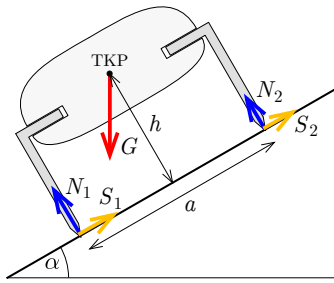
1. ábra

Melyik láb csúszik meg először a lejtőn?

(Vankó Péter, Vigh Máté)

I. megoldás. Egyensúlyban a szondára ható erők és forgatónyomatékok külön-külön el kell tűnjenek, valamint teljesülnie kell a tapadási súrlódási erőre vonatkozó határfeltételnek. Az alsó láb adatait 1-es, a felsőt 2-es indexszel, a nyomóerőket N -nel, a súrlódási erőket S -sel (a felfelé irányt pozitívnak tekintve), a testre ható nehézségi erőt G -vel jelölve (2. ábra) a következő egyenleteket és egyenlőtlenségeket írhatjuk fel:

$$\begin{aligned} (1) \quad & N_1 + N_2 = G \cos \alpha, \\ (2) \quad & S_1 + S_2 = G \sin \alpha, \\ (3) \quad & aN_2 + hG \sin \alpha = \frac{a}{2} G \cos \alpha, \\ (4) \quad & |S_1| \leq \mu N_1, \\ (5) \quad & |S_2| \leq \mu N_2. \end{aligned}$$



2. ábra

Annak a feltételei, hogy (még a lábak mozgatása előtt) az úrszonda ne boruljon fel és ne csússzon le (3), illetve (1), (2), (4) és (5) alapján:

$$N_2 = G \left(\frac{\cos \alpha}{2} - \frac{h \sin \alpha}{a} \right) \geq 0 \Rightarrow b = \frac{2h \operatorname{tg} \alpha}{a} \leq 1,$$

$$S_1 + S_2 = G \sin \alpha \leq \mu(N_1 + N_2) = \mu G \cos \alpha \Rightarrow c = \frac{\mu}{\operatorname{tg} \alpha} \geq 1,$$

ahol bevezettük a borulást jellemző b és a csúszást jellemző c paramétereket.

Az (1) és (3) egyenletekből:

$$N_1 = G \left(\frac{\cos \alpha}{2} + \frac{h \sin \alpha}{a} \right),$$

$$N_2 = G \left(\frac{\cos \alpha}{2} - \frac{h \sin \alpha}{a} \right),$$

és ezeket a (4) és (5) egyenlőtlenségbe helyettesítve:

$$(6) \quad |S_1| \leq \mu G \left(\frac{\cos \alpha}{2} + \frac{h \sin \alpha}{a} \right),$$

$$(7) \quad |S_2| \leq \mu G \left(\frac{\cos \alpha}{2} - \frac{h \sin \alpha}{a} \right).$$

Mérjük az erőt $G \sin \alpha$ egységekben (azaz legyen $G \sin \alpha = 1$), ekkor (2) alapján

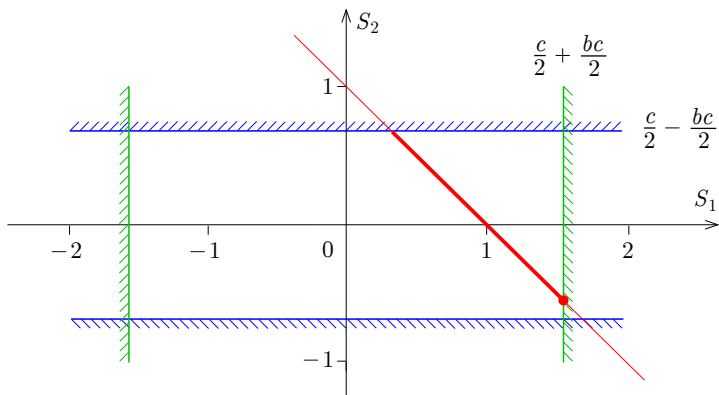
$$(8) \quad S_1 + S_2 = 1,$$

valamint a (6) és (7) egyenlőtlenségekbe helyettesítsük be a b és c paramétereket:

$$(9) \quad |S_1| \leq \frac{c}{2} + \frac{bc}{2},$$

$$(10) \quad |S_2| \leq \frac{c}{2} - \frac{bc}{2}.$$

Ábrázoljuk a (8), (9) és (10) összefüggéseket az S_1 - S_2 síkon (3. ábra).



3. ábra

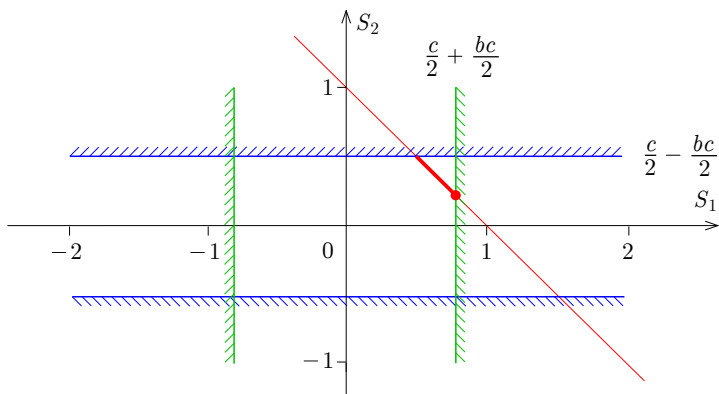
Az S_1 és S_2 lehetséges értékpárjait a piros vonal téglalapon belüli (megvastagított) része jelöli ki.

Amikor a szonda elkezdi a lábait széttolni, akkor az alsó láb lefelé mozdulna, és így S_1 értéke nőni fog, a felső láb pedig felfelé mozdulna, és így S_2 csökken, és – ha a másik láb hamarabb meg nem csúszik – negatívvá válik. Azt, hogy melyik láb csúszik meg először, a b és c paraméterek értékei határozzák meg.

Amennyiben

$$\frac{c}{2} + \frac{bc}{2} \leq 1, \quad \text{azaz} \quad \mu \left(\frac{1}{2 \operatorname{tg} \alpha} + \frac{h}{a} \right) \leq 1,$$

akkor S_2 nem válhat negatívvá, és így biztosan az alsó láb csúszik meg, amikor



4. ábra

eléri az

$$S_1 = \frac{c}{2} + \frac{bc}{2}$$

értéket (4. ábra).

Ha viszont

$$\frac{c}{2} + \frac{bc}{2} > 1, \text{ azaz } \mu \left(\frac{1}{2\operatorname{tg}\alpha} + \frac{h}{a} \right) > 1,$$

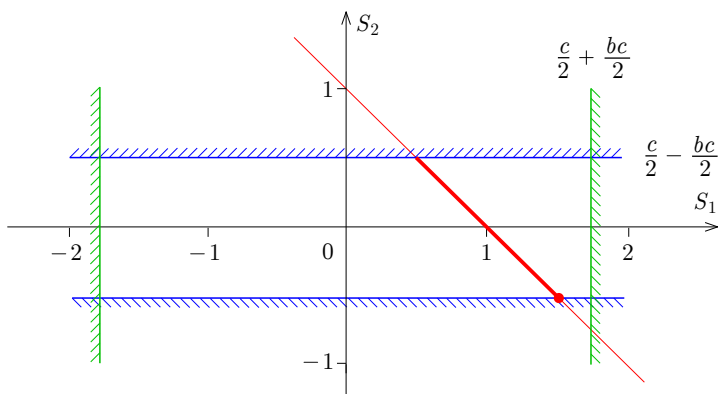
akkor S_2 negatívvá válhat. Ekkor az a láb fog előbb megcsúszni, amelyik határfel-tételét előbb metszi a piros egyenes. Ha

$$bc < 1, \text{ azaz } \frac{2h\mu}{a} < 1,$$

akkor az alsó láb (mint a 3. ábrán), ha viszont

$$bc > 1, \text{ azaz } \frac{2h\mu}{a} > 1,$$

akkor a felső láb (5. ábra) fog először megcsúszni. (Egyenlőség esetén határozatlan a feladat, a kis egyenlenségek döntik el, melyik láb csúszik meg.)



5. ábra

Összefoglalva:

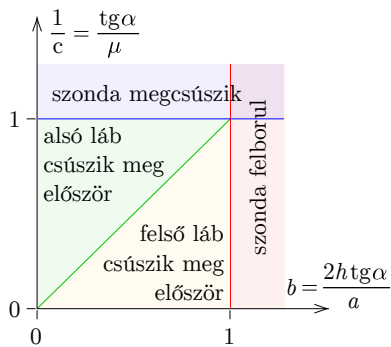
1. Ha $b > 1$, azaz $2h\operatorname{tg}\alpha > a$, a szonda felborul közvetlenül a landolás után,
2. ha $c < 1$, azaz $\mu < \operatorname{tg}\alpha$, a szonda lecsúszik a landolás pillanatában,
3. ha $b \leq 1$ és $c \geq 1$, azaz $2h\operatorname{tg}\alpha \leq a$ és $\mu \geq \operatorname{tg}\alpha$, valamint ha

- $bc < 1$, azaz $2h\mu < a$, akkor az alsó láb csúszik meg,

- $bc > 1$, azaz $2h\mu > a$, akkor a felső láb csúszik meg.

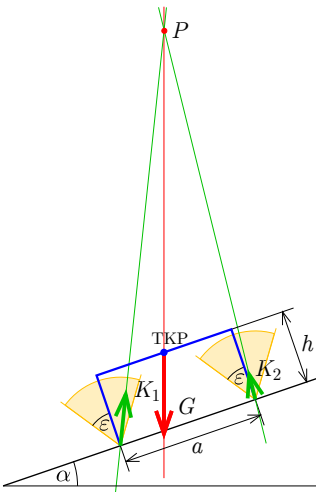
- $bc = 1$, azaz $2h\mu = a$, akkor bizonytalan, melyik csúszik meg.

Az egyes esetek a 6. ábrán látható $b = \frac{1}{c}$ síkon jól áttekinthetők.



6. ábra

Megjegyzés. Teljesen hasonlóan vizsgálható az az eset is, amikor a szonda a két lábat közelíti egymáshoz. Ilyenkor az alsó láb felfelé mozdulna, és így S_1 csökken, a felső viszont lefelé mozdulna, és így S_2 értéke nőni fog. Az ábrák alapján könnyen belátható, hogy ilyenkor minden esetben a felső láb csúszik meg először.



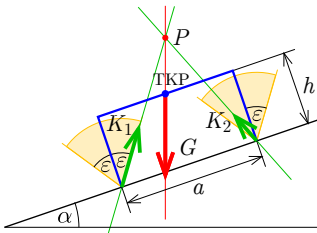
7. ábra

II. megoldás. Ha az egyes lábaknál ható kényszererőket egyetlen erőként (K_1 , illetve K_2) tekintjük, akkor a testre a G nehézségi erővel együtt összesen három erő hat. Három nem párhuzamos irányú erő csak akkor lehet egyensúlyban, ha a hatásvonalaik egy pontban metszik egymást (különben az egyik erőnek forgatónyomatéka lenne a másik két erő metszéspontjára vonatkoztatva), és így a feladat az egyenletek és egyenlőtlenségek felírása nélkül is megoldható. Ehhez még szükségünk van az ε *súrlódási határszög* fogalmára: ahhoz, hogy az $|S| \leq \mu N$ egyenlőtlenség teljesüljön, a K kényszererő (amely az egymásra merőleges N és S erők eredője) legfeljebb $\varepsilon = \arctg \mu$ szöget zárhat be a felület normálisával.

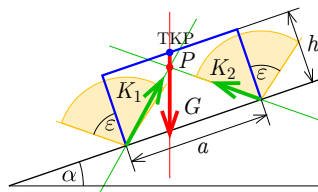
Kezdetben (amikor a szonda még nem kezdi el széttolni a lábait), elegendően nagy súrlódási együttható mellett a két kényszererő a súrlódási határszög szabta határok között sokféleképp biztosíthatja az egyensúlyt. A 7. ábrán egy ilyen lehetséges erőábra látható. (A rajzon az erők nagyságát az határozza meg, hogy az erők eredője nullát kell adjon. A hatásvonalak közös P metszéspontja csak a forgatónyomaték-egyensúlyt biztosítja.)

Amikor a szonda elkezd széttolni a lábait, akkor az alsó lábat lefelé, a felsőt felfelé tolja, így az alsó lábánál ható K_1 kényszererő az ábrán az óra mutató járásával egyező, a felső lábánál ható K_2 kényszererő azzal ellenkező irányban fordul el. A 8. ábrán a K_1 erő éri el először az ε szög által meghatározott tartomány szélét, és így az alsó láb csúszik meg először. Az erők elfordulásának következtében a hatásvonalak P metszéspontja lefelé mozdul el, de ebben az esetben mindvégig a tömegközéppont felett marad.

A 9. ábrán a súrlódási együttható, és így az ε szög nagyobb. Ekkor a P pont a tömegközéppont alá kerül, és a K_2 erő éri el először a szögtartomány szélét. Ekkor a felső láb csúszik meg először.



8. ábra

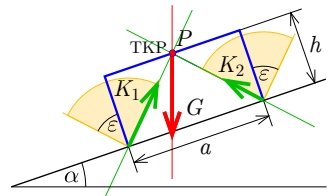


9. ábra

A határesetet az jelenti, amikor a súrlódási határszög egyenese éppen a tömegközépponton megy át (10. ábra). Leolvasható, hogy ekkor

$$\frac{a}{2h} = \operatorname{tg} \varepsilon = \mu,$$

az előző megoldással összhangban.



10. ábra

3. Két azonos m tömegű, $+q$ és $-q$ töltésű pontszerű test kezdetben egymástól d távolságra, nyugalomban van. Ha a testeket egyszerre elengedjük, akkor egy idő után összeütköznek. Ha a kísérletet megfelelő erősségű, a testeket összekötő szakaszra merőleges irányú, homogén mágneses mező jelenlétében ismételjük meg, akkor a testek nem ütköznek össze.

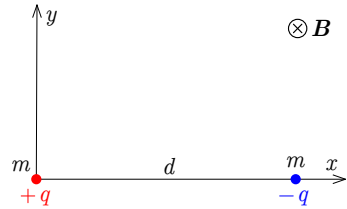
a) Legalább mekkora legyen a mágneses indukció értéke, hogy ne ütközzenek össze?

b) Mekkora minimális távolságra közelítik meg egymást a testek ekkor?

(KVANT)

I. megoldás. a) Válasszuk a koordináta-rendszer középpontját a $+q$ töltés kezdeti helyzetében, és mutasson az x tengely a másik test kezdeti helyzete felé, az y tengely pedig legyen erre és a mágneses tér irányára is merőleges (11. ábra).

Jelölje x a bal oldali ($+q$ töltésű) test koordinátáját. A mozgás során az elektrosztatikus és a mozgási energia összege állandó. A szimmetria miatt a két test sebessége megegyezik. Így az energiaegyenlet:



11. ábra

$$(11) \quad \begin{aligned} 2 \cdot \frac{1}{2} m v^2 &= k q^2 \left(\frac{1}{d-2x} - \frac{1}{d} \right), \\ m v^2 &= k q^2 \frac{2x}{d(d-2x)}. \end{aligned}$$

Tekintsük most külön a bal oldali ponttöltés mozgását! A szimmetria miatt az elektrosztatikus vonzóerő mindvégig x irányban hat. Csak a mágneses tér miatt fellépő Lorentz-erőnek van y irányú komponense, és így csak ez az erő gyorsítja a testet y irányba:

$$a_y = \frac{B q v_x}{m}.$$

Ez alapján a test y irányú sebessége kicsiny dt idő alatt

$$dv_y = a_y dt = \frac{B q}{m} v_x dt$$

értékkel változik meg. Az egyenlet mindkét oldalát összegezve a kezdeti állapottól (ahol $v_y(0) = 0$ és $x(0) = 0$) a vizsgált állapotig:

$$(12) \quad v_y = \frac{B q}{m} x.$$

Amikor a két test legközelebb ér egymáshoz, akkor az x irányú sebességük 0, és így $v = v_y$. Ezt felhasználva, és a (11) egyenletbe a (12) kifejezést behelyettesítve:

$$m \left(\frac{Bq}{m} x \right)^2 = kq^2 \frac{2x}{d(d-2x)},$$

amiből az $x \neq 0$ -val való egyszerűsítés és rendezés után egy másodfokú egyenletet kapunk $\frac{x}{d}$ -re:

$$2 \left(\frac{x}{d} \right)^2 - \frac{x}{d} + \frac{2km}{B^2 d^3} = 0.$$

Ennek csak akkor van megoldása, ha a diszkrimináns nem negatív:

$$D = 1 - \frac{16km}{B^2 d^3} \geq 0, \quad \text{azaz} \quad B \geq 4 \sqrt{\frac{km}{d^3}}.$$

Tehát a minimális mágneses indukció nagysága:

$$B_{\min} = 4 \sqrt{\frac{km}{d^3}}.$$

b) A másodfokú egyenlet általános megoldása (a két megoldásból csak a kisebb valósul meg):

$$\frac{x}{d} = \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{16km}{B^2 d^3}}}{4},$$

és $B = B_{\min}$, azaz $D = 0$ esetén $\frac{x}{d} = \frac{1}{4}$. Ebből a két töltés közötti legkisebb távolság:

$$d_{\min} = d - 2x = \frac{d}{2}.$$

II. megoldás. Vizsgáljuk a 11. ábrán látható bal oldali, origóból induló pont-töltés x irányú mozgását! Ehhez írjuk fel Newton II. törvényét erre a testre egy tetszőleges időpillanatban:

$$ma_x = k \frac{q^2}{(d-2x)^2} - qv_y B,$$

ahol felhasználtuk, hogy a Lorentz-erő x komponense az y irányú sebességgel arányos. Az I. megoldásban korábban kapott (12) összefüggés segítségével v_y kifejezhető x -szel:

$$ma_x = k \underbrace{\frac{q^2}{(d-2x)^2} - \frac{q^2 B^2}{m}}_{F_x(x)} x.$$

Az egyenlet jobb oldala nem más, mint a testre ható eredő erő x komponense. Figyelemreméltó, hogy ez az erő kifejezhető csupán az x koordináta függvényeként.

Ebből következik, hogy F_x felírható egy szintén csak x -től függő ún. *effektív potenciál* negatív deriváltjaként:

$$F_x(x) = -\frac{dV_{\text{eff}}(x)}{dx}.$$

Az itt szereplő effektív potenciál az erő x szerinti integrálásával kapható meg:

$$V_{\text{eff}}(x) = \frac{q^2 B^2}{2m} x^2 - \frac{kq^2}{2(d-2x)}.$$

Itt a jobb oldal első, x -ben négyzetes tagja egy rugóban tárolt rugalmas energiával analóg, míg a második tag a Coulomb-féle potenciális energia egyik töltésre jutó hányadának feleltethető meg.

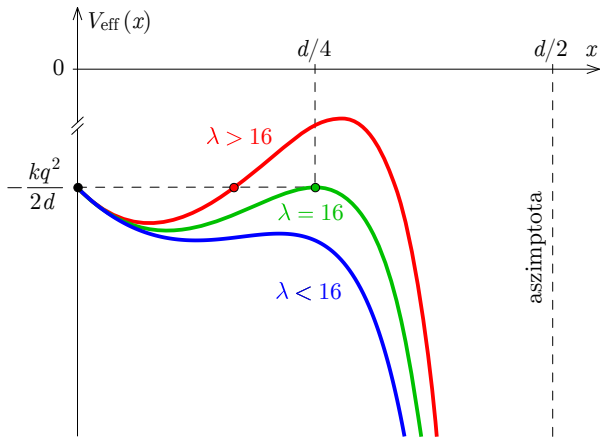
Ezek szerint a vizsgált ponttöltés x irányú mozgása ekvivalens egy *képzelt* m tömegű test egydimenziós konzervatív mozgásával a fenti egyenlet által adott V_{eff} potenciálban. Ennek a képzelt mozgásnak a kezdeti feltételei $x = 0$ és $v_{x,0} = 0$, ezért a mozgáshoz tartozó teljes mechanikai energia:

$$E = V_{\text{eff}}(x=0) + \frac{1}{2}mv_{x,0}^2 = -\frac{kq^2}{2d}.$$

A $V_{\text{eff}}(x)$ függvény alaposabb vizsgálatához végezzük el a következő átalakítást:

$$(13) \quad V_{\text{eff}}(x) = \frac{kq^2}{2d} \left(\underbrace{\frac{B^2 d^3}{km}}_{\lambda} \cdot \frac{x^2}{d^2} - \frac{1}{1 - \frac{2x}{d}} \right).$$

Vezessük be a $\lambda = \frac{B^2 d^3}{km}$ dimenziótlan paramétert! A $V_{\text{eff}}(x)$ grafikon alakja és a mozgás jellege nagyban függ λ értékétől. A függvény $x \rightarrow d/2$ esetén $-\infty$ -hez tart, ez a helyzet felel meg a két test összeütközésének. Kis λ (gyenge mágneses tér) esetén a (13) kifejezés zárójelében lévő második tag dominál, így a függvény szigorúan monoton csökken. Ha λ értékét (és ezzel együtt B nagyságát) fokozatosan növeljük, akkor a zárójelben lévő első, x -ben másodfokú tag erősödik, majd a $V_{\text{eff}}(x)$ függvénynek a $0 < x < d/2$ tartományban egy lokális maximuma jelenik meg. Részletesebb függvényvizsgálattal kiderül, hogy $\lambda < 16$ esetén ennek a maximumnak az értéke $E = -\frac{kq^2}{2d}$ -nél kisebb, $\lambda = 16$ esetén éppen ekkora, míg $\lambda > 16$ esetén a maximumértéke E -nél nagyobb (12. ábra).



12. ábra

Mit jelent mindez a képzeletbeli mozgás lefolyására nézve? A test az $x = 0$ állapottól indul, és mindhárom esetben gyorsulva halad a csökkenő potenciál irányába (az ábrán jobbra). $\lambda > 16$ esetén azonban egy $x < d/4$ helyen, ahol a potenciál értéke újra megegyezik az E összenergiával, a sebessége ismét nulla lesz, és megáll (majd elindul vissza a kezdeti állapot felé). $\lambda < 16$ esetén nincsen ilyen pont: a rendszer – egy kisebb lassulás után – egyre nagyobb gyorsulással fejlődik az $x = d/2$ állapot (azaz az összeütközés) felé. Annak feltétele, hogy ne legyen ütközés:

$$\frac{B^2 d^3}{km} = \lambda \geq 16, \quad \text{amiből} \quad B \geq 4 \sqrt{\frac{km}{d^3}},$$

az előző megoldással összhangban. A grafikonról rögtön a *b)* kérdés megoldása is leolvasható: határesetben a töltések maximális elmozdulása $x = d/4$, azaz a legkisebb távolság $d/2$.

Megjegyzés. A II. megoldás nélkül meglepőnek tűnhet, hogy ha a mágneses indukció értéke eléri a minimális értéket, akkor a töltések csak $\frac{d}{2}$ távolságra közelítik meg egymást, ha viszont ennél (kicsit) kisebb, akkor a töltések – minden átmenet nélkül – összeütköznek. A 12. ábra grafikonja szemléletesen mutatja, milyen változás történik a határ átlépésekor.

*

Az ünnepélyes eredményhirdetésre és díjkiosztásra 2025. november 28-án délután került sor az ELTE TTK Eötvös termében. Megemlékeztünk az 50 és 25 évvel ezelőtti Eötvös-versenyről, ismertettük az akkori feladatokat és a győztesek nevét. Az 50 évvel ezelőtti díjazottak közül *Virosztek Attila*, a 25 évvel ezelőttiek közül *Pozsgay Balázs* volt jelen – ők röviden beszéltek a versennyel kapcsolatos emlékeikről és a pályafutásukról. Az 50 évvel ezelőtti II. díjas *Zimányi Gergely* videóüdvözlőlevelet, a 25 évvel ezelőtti I. díjas *Buruzs Ádám* pedig szöveges üzenetet küldött a jelenlévőknek. Ezután következett a 2025. évi verseny feladatainak és megoldásainak bemutatása. Az 1. feladat megoldását *Széchenyi Gábor*, a 2. feladatét *Vankó Péter*, a 3. feladatét *Vigh Máté* ismertette.

Az esemény végén került sor az eredményhirdetésre. A díjakat *Ormos Pál*, az Eötvös Loránd Fizikai Társulat elnöke adta át.

I. díjat a versenybizottság nem adott ki.

Az első és harmadik feladat helyes megoldásáért *második díjat* nyert **Bencz Benedek**, az ELTE Fizika BSc szakos hallgatója, aki a Baár–Madás Református Gimnázium, Általános Iskola és Kollégiumban érettségizett *Horváth Norbert* tanítványaként.

Egy feladat helyes megoldásáért, vagy két feladatban elért jelentős eredményért *harmadik díjat* nyert **Erdélyi Dominik**, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 12. osztályos tanulója, *Schramek Anikó* és *Nagy Piroška Mária* tanítványa, **Sánta Gergely Péter**, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 11. osztályos tanulója, *Schramek Anikó* tanítványa és **Téti Miklós**, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 12. osztályos tanulója, *Schramek Anikó* tanítványa.

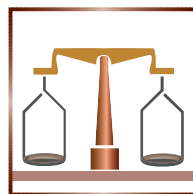
Egy feladat lényegében helyes megoldásáért *dicséretet* kapott **Jávor Bence**, a BME Fizika BSc szakos hallgatója, érettségizett a Városmajori Gimnáziumban

Jäger Csaba és Horicsányi Attila tanítványaként, **Kossár Benedek Balázs**, a Pécsi Leőwey Klára Gimnázium 10. osztályos tanulója, *Hegedüs János* és *Pálfalvi László* tanítványa, **Papp András József**, a Szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium 12. osztályos tanulója, *Mike Péter* tanítványa, **Pázmándi József Áron**, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 10. osztályos tanulója, *Csefkó Zoltán* és Nagy Piroska Mária tanítványa és **Vödrös Dániel**, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 11. osztályos tanulója, Schramek Anikó tanítványa.

A második díjjal az *Andersen Adótanácsadó Zrt.* és a *Nanorobot Vagyonkezelő Kft.* adományából 75 ezer forint, a harmadik díjjal 35 ezer, a dicsérettel 20 ezer forint pénzjutalom jár. A díjazottak tanárai könyvutalványt kaptak. Gratulálunk a díjazottaknak, köszönjük az adományozók önzetlen támogatását!

Széchenyi Gábor, Vankó Péter, Vigh Máté, Vladár Károly

Mérési feladatok megoldása



M. 443. *Mobiltelefon fényérzékelőjét használva mutassuk meg, hogy a fényintenzitás inverz négyzetesen függ egy pontszerű fényforrástól mért távolságtól! Hogyan válasszuk a kísérleti körülményeket ahhoz, hogy minél pontosabban tudjuk igazolni ezt az összefüggést?*
(6 pont)

Közli: *Vadász Gergely, Solymár*

Megoldás. A mérés célja, hogy bizonyítsuk, a fényintenzitás inverz négyzetesen függ egy pontszerű fényforrástól mért távolságtól. A fényintenzitás azt mutatja meg, hogy egységnyi területre mekkora fényáram esik. Egy pontszerű fényforrás adott nagyságú fényáramot bocsát ki minden irányba, így ha távolabb megyünk tőle, az nagyobb felületen oszlik el, így a fényintenzitás csökken. Az I fényintenzitás az alábbi képlet szerint függ az izzótól mért d távolságtól:

$$I = Ad^m,$$

ahol A egy d -től független állandó, a kitevőre pedig $n = -2$ értéket várunk. Ha a kifejezés mindkét oldalának vesszük a logaritmusát, akkor a

$$\lg I = n \lg d + \lg A$$

összefüggést kapjuk. Ha ábrázoljuk $\lg I$ -t $\lg d$ függvényében, akkor a pontokra illesztett egyenes meredekségéből meghatározhatjuk n értékét.

A mérési elrendezés az 1. ábrán látható. A mérést besötétített szobában végeztük, így az izzó bekapcsolása előtt a telefon 0 lx fényintenzitást mért. Az áramforrás bekapcsolása után vártunk kb. egy percet, hogy bemelegedjen az izzó.

A fényintenzitást a mobiltelefon *Physics Toolbox* alkalmazás *Fényérzékelő* funkciójával mértük. Többször mértünk, és ezekből az öt legjobban sikerültet közöljük. A mérést kétféle izzóval, azonos, 6 V-os feszültségen végeztük. Adott távolságra beállítottuk a mobiltelefont, leolvastuk az I fényintenzitást a kijelzőről és a d távolság értékét, majd másik távolságra állítottuk a mobiltelefont, és ezt ismételtük. Minden mérés során 8-10 távolságon mértünk, egymáshoz képest 10 cm-es eltérésekkel.



1. ábra

A stabil elrendezés és a zavaró körülmények kiküszöbölése ellenére nagyon gyorsan változó, ingadozó értéket kaptunk minden egyes távolságnál. A váltakozó értékek maximuma és minimuma között 4–8 lx, az izzóhoz közelebb akár 40–80 lx is volt. Ezek átlagát vettük minden esetben, vagy azt az értéket, amely leggyakrabban jelent meg a képernyőn.

A mért adatokat *táblázatba* foglaltuk (a d távolságok méterben, az I intenzitások luxban megadva), majd $\lg I$ -t $\lg d$ függvényében ábrázoltuk, és az adatsorokra egyenest illesztettünk (2. ábra).

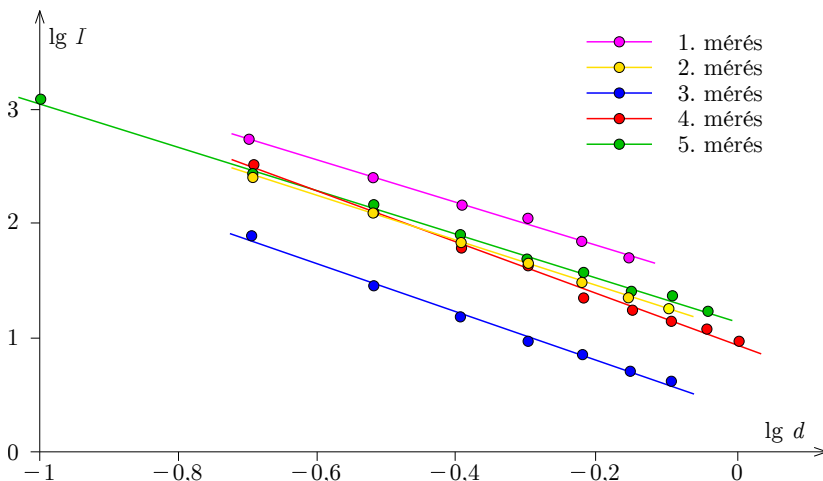
		1. mérés		2. mérés		3. mérés		4. mérés		5. mérés	
d	$\lg d$	I	$\lg I$	I	$\lg I$	I	$\lg I$	I	$\lg I$	I	$\lg I$
0,10	-1,00									1198	3,08
0,20	-0,70	571	2,76	267	2,43	77	1,89	305	2,48	278	2,44
0,30	-0,52	254	2,41	143	2,16	28	1,45	139	2,14	141	2,15
0,40	-0,40	150	2,18	66	1,82	15	1,18	60	1,78	76	1,88
0,50	-0,30	110	2,04	44	1,64	9	0,95	41	1,61	47	1,67
0,60	-0,22	70	1,85	31	1,49	7	0,85	22	1,34	37	1,57
0,70	-0,16	50	1,70	23	1,36	5	0,70	17	1,23	26	1,42
0,80	-0,10			18	1,26	4	0,60	14	1,15	23	1,36
0,90	-0,05							12	1,08	17	1,23
1,00	0,00							9,5	0,98		

Az illesztett egyenesek meredekségéből az egyes méréseknél a kitevők:

$$n_1 = -1,90; \quad n_2 = -2,00; \quad n_3 = -2,12; \quad n_4 = -2,21; \quad n_5 = -1,92.$$

A kapott n értékek átlaga és szórása:

$$n = -2,03 \pm 0,12.$$



2. ábra

Ezzel a kívánt összefüggést hibahatáron belül igazoltuk: a fényintenzitás valóban inverz négyzetesen függ egy pontszerű fényforrástól mért távolságtól.

A relatív hiba 6%, de a mérés tényleges hibája ennél valamivel nagyobb lehet az említett instabil fényintenzitás-értékek miatt.

Megfelelő körülmények a mérés pontosításához:

A mérést éjszaka, lehúzott redőnyökkel és minden külső fényforrás kikapcsolásával kellene elvégezni, így biztosan nem szűrődne be fény.

Az izzó megfelelő megválasztása fontos. Kellően kicsi, és minden irányba világító fényforrásra van szükség, így valóban pontszerűnek lehetne tekinteni.

A távolságot a fényforrás közepétől (nem az állvány), illetve a telefon fényérzékelőjének síkjától kell mérni.

Nagyon stabil rögzítést igényel a telefon, hogy merőleges legyen a felülete az izzóhoz húzott egyenesre (ha kicsit is csúszkál, akkor már nem biztosított ez, és a mérés pontatlanná válik).

A mérés körül matt háttér szükséges, hogy ne verjen vissza fényt.

A mérés nagyon sokszori megismétlése nem teszi pontosabbá a mérést, ha nem küszöböljük ki az elrendezésből adódó pontatlanságokat.

A Satírozás ki egy hetet, „adatvesztés” történetét csapat:

*Papp Emese Petra (Budapest, ELTE Apáczai Csere J. Gyak. Gimn., 11. évf.)
és Kis Boglárka (Kecskeméti Katona J. Gimn., 11. évf.)*

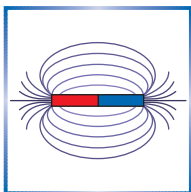
Megjegyzések. 1. Több megoldó LED-et használt fényforrásként. A LED biztosan nem gömbszimmetrikusan bocsát ki fényt, de a mérés kicsiny térszögtartományában legalább annyira egyenletes megvilágítást hoz létre, mint egy izzó.

2. A fényforrás pontszerűsége egy közvetlenül elé helyezett kicsiny diafragmával (kör alakú nyílással) javítható.

3. Az inverz négyzetes összefüggés igazolására a logaritmikus ábrázolás helyett az I intenzitás d^{-2} függvényében való ábrázolása is megfelelő: ekkor azt kell vizsgálni, hogy a mérési pontok valóban (hibahatáron belül) egy egyenesen fekszenek-e.

4. *Erdélyi Dominik* (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 12. évf.) olyan modellt készített, amely figyelembe veszi egyrészt a háttérfény által okozott I_0 intenzitást, másrészt a fényforrás és a szenzor valódi helyzetének kicsiny δ eltérését a távolságmérés síkjaitól. Ekkor a mérési adatokra az $I(d) = A(d + \delta)^{-2} + I_0$ függvényt kell illeszteni, amelyből I_0 és δ meghatározható.

19 dolgozat érkezett. Helyes 6 megoldás. Kicsit hiányos (4–5 pont) 10, hiányos (3 pont) 1, hibás 2 dolgozat.



Fizika feladatok megoldása

P. 5653. *Két egyenes út merőlegesen keresztezi egymást. Az egyik úton egy személyautó 90 km/h sebességgel, a másikon egy motoros 72 km/h sebességgel közeledik a kereszteződéshez. Egy adott ($t = 0$) pillanatban a két jármű távolsága (légvonalban) 347 m. 5 másodperc elteltével a távolságuk 188 m-re csökken.*

a) *Milyen messze volt a két jármű a kereszteződéstől kezdetben?*

b) *Mekkora lesz a két jármű közötti legkisebb távolság?*

Az egyszerűség kedvéért mindkét járművet tekintsük pontszerűnek.

(5 pont)

1897. évi érettségi feladat nyomán

Megoldás. a) Jelölje az autó távolságát a kereszteződéstől kezdetben x , a motorosét y . A személyautó sebessége $v_x = 25 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, a motorosé $v_y = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Kezdetben a távolságuk $d_0 = 347$ m, $t_1 = 5$ s idővel később $d_1 = 188$ m. Ezekkel a jelölésekkel kezdetben fennáll:

$$x^2 + y^2 = d_0^2,$$

$t_1 = 5$ s eltelte után pedig:

$$(x - v_x t_1)^2 + (y - v_y t_1)^2 = d_1^2.$$

Az egyszerűség kedvéért helyettesítsük be a két egyenletbe az ismert értékeket (mindent SI mértékegységben). Ez alapján:

$$(1) \quad x^2 + y^2 = 347^2,$$

$$(2) \quad (x - 25 \cdot 5)^2 + (y - 20 \cdot 5)^2 = 188^2.$$

Vonjuk ki az (1) egyenletből a (2) egyenletet. Így rendezés után:

$$25x + 20y = 11069.$$

Ebből y -t kifejezve, és beírva (1)-be, majd rendezve az alábbi másodfokú egyenlet adódik:

$$1025x^2 - 553450x + 74359161 = 0.$$

Ennek megoldásai x -re, valamint az egyes x értékekhez tartozó y értékek:

$$\begin{aligned}x_1 &= 289 \text{ m} & y_1 &= 193 \text{ m}, \\x_2 &= 252 \text{ m} & y_2 &= 239 \text{ m}.\end{aligned}$$

Láthatjuk, hogy mindkét megoldaspár fizikailag értelmes. Tehát az autó és a motoros kezdetben 289 m és 193 m, vagy 252 m és 239 m távolságra voltak a kereszteződéstől.

b) A t idő függvényében a két jármű közötti d távolság a következő összefüggés szerint változik:

$$d = \sqrt{(x - 25t)^2 + (y - 20t)^2}.$$

Ennek ott van minimuma, ahol a gyök alatt lévő kifejezésnek, tehát a következő függvény szélsőértékét keressük:

$$f(t) = (x - 25t)^2 + (y - 20t)^2 = 1025t^2 - (50x + 40y)t + 120409.$$

(A rendezésnél felhasználtuk, hogy $x^2 + y^2 = d_0^2 = 347^2$.) Beírva az a) részben megkapott $x_1 = 289$ m és $y_1 = 193$ m értékpárt:

$$f(t) = 1025t^2 - 22170t + 120409.$$

Ez egy másodfokú függvény, minimumhelyét megkereshetjük deriválással:

$$\frac{df}{dt} = 2050t - 22170 = 0,$$

amiből

$$t_{\min} \approx 10,8 \text{ s}.$$

Ezt visszahelyettesítve d kifejezésébe:

$$d_{\min} = \sqrt{(x_1 - 25t_{\min})^2 + (y_1 - 20t_{\min})^2} \approx 30 \text{ m}.$$

Tehát a két jármű közötti legkisebb távolság 30 m. (Az a) részben kapott másik x_2 - y_2 értékpárral ugyanezt az eredményt kapjuk.)

Klement Tamás (Pécsi Leőwey Klára Gimn., 12. évf.)

Megjegyzések. 1. A másodfokú kifejezés minimumhelye teljes négyzetté alakítással is megkapható.

2. Az a) részben kapott két megoldás szimmetrikus abban az értelemben, hogy ha a járművek az x_1 - y_1 értékekkel megadott pontból indulnak, akkor $2t_{\min}$ idő múlva a kereszteződés túloldalán az x_2 - y_2 értékpárral megadott pontokba érkeznek – és viszont. Ez érthető, hiszen a mozgások időben megfordíthatók. Egyik esetben a motoros, a másikban az autó halad át előbb a kereszteződésen.

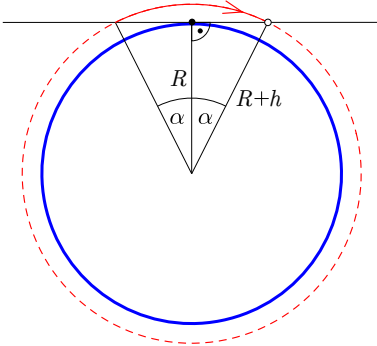
35 dolgozat érkezett. Helyes 22 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 9, hiányos (2-3 pont) 4 dolgozat.

P. 5672. Az Egyenlítőn állva, éppen a fejünk felett halad át egy műhold, amely a Föld felszínétől 400 km-re levő pályán kering. Legfeljebb mennyi ideig láthatjuk a műholdat?

(4 pont)

Közli: Németh László, Fonyód

Megoldás. A Föld egyenlítői sugara $R = 6378$ km. Az ábra alapján a $h = 400$ km magasan keringő műhold épp a horizonton látszik, amikor a megfigyelőhöz képest a szögelfordulása:



$$\alpha = \arccos \frac{R}{R+h} = 19,78^\circ = 0,3453.$$

A műholdat a Föld gravitációs vonzása tartja körpályán, így a mozgásegyenlete:

$$\frac{\gamma M m}{r^2} = m \omega_m^2 r,$$

ahol $\gamma = 6,674 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2}$ a gravitációs állandó, $M = 5,972 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ a Föld tömege, m a műhold tömege, $r = R + h$ a műhold pályasugara és ω_m a keringésének szögsebessége. Rendezve és az adatokat behelyettesítve:

$$\omega_m = \sqrt{\frac{\gamma M}{r^3}} = 1,131 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}.$$

A Föld forgásának szögsebessége (az állócsillagokhoz képest, így a $23^{\text{h}} 56' 4''$ -es csillagnappal kell számolni):

$$\omega_F = \frac{2\pi}{86164 \text{ s}} = 7,292 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}.$$

A műhold akkor látszik leghosszabb ideig, ha az Egyenlítő síkjában és a Föld forgásával azonos irányba kering. Ekkor a Földhöz viszonyított relatív szögsebessége:

$$\omega_r = \omega_m - \omega_F = 1,058 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1},$$

és így

$$t = \frac{2\alpha}{\omega_r} \approx 653 \text{ s} = 10,9 \text{ perc}$$

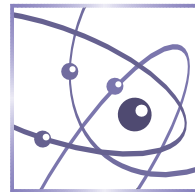
ideig láthatjuk.

Kádár Luca Linda (Budapest, Békásmegyeri Veres Péter Gimn., 10. évf.)

Megjegyzés. A számításhoz sík felületet feltételeztünk, és a légkör fénytörését nem vettük figyelembe.

47 dolgozat érkezett. Helyes 12 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 11, hiányos (1-2 pont) 24 dolgozat.

Fizikából kitűzött feladatok



M. 446. Polcon azonos könyvek a függőlegeshez képest kis dőlésszögben, egymással párhuzamosan állnak. MÉRJÜK MEG, HOGY AZ UTOLSÓ KÖNYV MEKKORA ERŐVEL NYOMJA A POLC OLDALSÓ FALÁT. HOGYAN FÜGG AZ ERŐ A KÖNYVEK SZÁMÁTÓL ÉS A DŐLÉSSZÖGÉTŐL?

(6 pont)

Közli: Széchenyi Gábor, Budapest

G. 909. Egy versenyautó egyenes tesztpályán mozog. A pálya kezdőpontjától mért s távolsága és az időmérés kezdete óta eltelt t idő kapcsolata – ha a hosszúságot méter, az időt másodperc egységekben mérjük és a mértékegységeket nem írjuk ki – így adható meg:

$$s = 10 + 10t + 2t^2.$$

Hogyan alakul át az út-idő függvény, ha hosszegységül a kilométert, időegységül pedig az órát választjuk? Számítsuk ki mind a két rendszerben a versenyautó helyzetét, sebességét és gyorsulását az indulás után $1/4$ perc múlva!

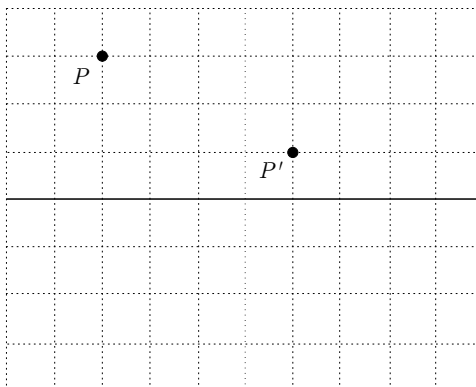
(3 pont)

G. 910. Egy G súlyú, rombusz alakú, homogén tömegeloszlású lemezt vízszintes helyzetben a csúcsainál alátámasztunk. Az egyik alátámasztási pontot $G/5$ nagyságú erő terheli. Mekkora erő terheli a többi alátámasztási pontot?

(4 pont)

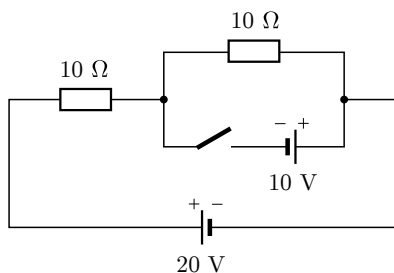
Példatári feladat nyomán

G. 911. Egy vékony szórólencse az ábrán látható P pontról a P' pontban állít elő látszólagos képet. A lencse optikai tengelyét a folytonos vonal jelöli, a négyzethálón egy-egy beosztás vízszintesen 10 cm-nek, függőlegesen 1 cm-nek felel meg. Mekkora a lencse fókusztávolsága?



(4 pont)

G. 912. Az ábrán látható áramkörben kezdetben a kapcsoló nyitva van.



a) Mekkora áramok folynak az áramkör ellenállásain és a telepeken a kapcsoló zárása előtt és után?

b) Mekkora áramok folynak, ha a kapcsoló melletti feszültségforrás polaritását megfordítjuk?

(4 pont)

P. 5697. Egy tűzijáték során ugyanarról a helyről, ugyanakkora kezdősebességgel mindenféle irányban lövedékeket lönek ki, amelyek a pályájuk tetőpontjánál erős fényfelvillanást hoznak létre. Milyen felület mentén helyezkednek el a felvillanó pontok?

A léghellenállást hanyagoljuk el.

(4 pont)

Közli: Gnädig Péter, Vácduka

P. 5698. Vízzintes talajon csörlő segítségével emelnek levegőbe egy kétüléses, M tömegű vitorlázó repülőgépet, amelyet egy hosszú, D rugóállandójú, m tömegű vontatókötél köt össze a csörlővel. A vontatás megkezdésekor a gyorsulás nagysága a , miközben a kötél súrlódik a füves talajon, ahol a súrlódási együttható μ . Számítsuk ki, mennyire nyúlik meg a vízszintes helyzetű drótkötél röviddel a gép megmozdulása után!

Adatok: $m = 150$ kg, $M = 400$ kg, $a = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, $D = 2500 \frac{\text{N}}{\text{m}}$, $\mu = 0,15$.

(5 pont)

Közli: Németh László, Fonyód

P. 5699. Egy mesterséges hold az Egyenlítő síkjában, a felszín fölött állandó 4 földugárnyi magasságban, a Föld forgásirányában köröz bolygónk körül.

a) Mekkora a mesterséges hold keringési ideje?

b) Hány naponként halad át a mesterséges hold az Egyenlítő egy kiszemelt pontja fölött?

(4 pont)

Tornyai Sándor fizikaverseny, Hódmezővásárhely

P. 5700. A legenda szerint Dido, Türosz hercegnője, miután menekülni kényszerült hazájából, Észak-Afrikába érkezett, ahol a helyi uralkodótól annyi földet kért, amennyit egy ökörbőrrel körbe tud keríteni. Az uralkodó beleegyezett, mire Dido hosszú, keskeny csíkra vágta a bőrt, amiből kerítést készített, majd a lehető

legnagyobb földterületet választotta le a tengerpart mentén, megalapítva Karthágó városát.

A történet egy kevésbé ismert változata szerint Dido hajózásai során egy 1 km sugarú, kör alakú szigeten kötött ki, valahol a Földközi-tengeren. Legfeljebb mekkora földterületet tudott leválasztani, ha a kerítésének hossza 1 km volt?

Dido a kettéosztott sziget kisebb területrészét tekinthette sajátjának.

(5 pont)

Közli: *Vigh Máté*, Herceghalom

P. 5701. Egy bizonyos mennyiségű nitrogéngázzal izochor folyamatban valamennyi hőt közlünk, majd közvetlenül ezt követően úgy nyomjuk össze adiabatikusan, hogy a környezet gázon végzett munkája megegyezze az izochor folyamatban közölt hővel. Befejezésül izobár folyamatban addig melegítjük, míg a gáz által végzett mechanikai munka meg nem egyezik az izochor folyamatban közölt hővel. A három folyamat közben mekkora volt a nitrogén hőmérséklet-változása, ha az izochor folyamatban 80 °C-kal növekedett a hőmérséklete?

(4 pont)

Közli: *Zsigri Ferenc*, Budapest

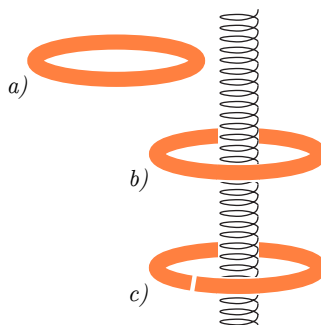
P. 5702. Egy rézcsövet kör alakúra hajlítunk, és a végeit összeforrasztjuk, vagyis belül üres, rézfalú tóruszt készítünk. Mekkora az elektromos télerősség a rézcső belsőjében és a falának anyagában, ha egy *elegendően hosszú*, egyenes tekercs áramát időben egyenletesen változtatjuk, és a rézcsövet az *ábra* szerint

a) a tekercs mellé,

b) a tekercssel koaxiálisan

helyezzük el?

c) Mekkora az elektromos télerősség a rézcső falában az előző helyzetben, ha a csövet valahol elfűrészeltük?



A tekercs áramellátását úgy oldottuk meg, hogy sem a hozzávezető kábelek, sem a szolenoid hossz tengelye mentén (a menetemelkedés miatt) fellépő eredő áram mágneses hatása ne érvényesülhessen. (Pl. az áramellátást egy koaxiális kábel biztosítja, a szolenoid pedig dupla, azonos forgásirány mellett oda-vissza tekercselésű.)

(5 pont)

Közli: Holics László, Budapest

P. 5703. Egy 2 milliméteres fossziliát merőlegesen a tisztánlátás távolságából, 25 cm-ről szemlélünk. Ennél közelebről nézve szabad szemmel nem látnánk élesen.

a) Mekkora szög alatt látjuk a fossziliát nagyító nélkül?

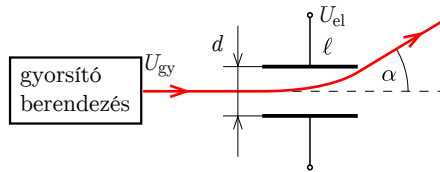
b) Azért, hogy jobban lássuk az ősmaradvány részleteit, egy 5 cm gyújtótávolságú vékony nagyítón át nézzük azt. Mekkora szög alatt látjuk a fossziliát, ha a nagyító 3 cm-re, a szemünk pedig 25 cm-re van a tárgytól?

c) A nagyítót helyezük a lehető legközelebb a szemünkhöz. Mekkora maximális szög alatt láthatjuk a fossziliát nagyítóval, ha a tárgy és a szemünk távolságát szabadon változtathatjuk?

(5 pont)

Közli: Széchenyi Gábor, Budapest

P. 5704. Egy berendezés segítségével töltött részecskéket gyorsítunk fel nyugalmi helyzetből U_{gy} gyorsítófeszültséggel akkora sebességre, ami jelentősen kisebb a fénysebességnél. A légritkított térben egyenes mentén mozgó részecskék egy síkkondenzátorba kerülnek, ahol eltérülnek, majd eredeti irányukhoz képest valamekkora szöggel kilépnek a síkkondenzátorból. A síkkondenzátor hosszúsága ℓ , a lemezek távolsága d , az eltérítő feszültség U_{el} . A töltött részecskék az ábrának megfelelően a síkkondenzátor középvonala mentén lépnek be az eltérítő térbe, és mozgásuk során nem ütköznek a lemezekbe. (A gravitáció hatásától eltekinthetünk.)



a) Hogyan függ az eltérülés α szöge a megadott adatoktól?

b) Hogyan befolyásolja az eltérülés szögét az, hogy milyen részecskével végezzük a kísérletet?

(4 pont)

Közli: Honyek Gyula, Veresegyház

P. 5705. A kis herceg egy különös bolygóra tévedt, ahol leült játszani egy méz-tó partjára. Azonos méretű, m tömegű kavicsokat hajigált a nagyon mély tóba. Megfigyelte, hogy ha közvetlenül a tófelszín felett ejtett el egy kavicsot, az legfeljebb v_{max} sebességre gyorsult fel a mézben. (Feltételezhető, hogy a kavicsra ható közegellenállási erő nagysága egyenesen arányos a kavics sebességével.)

Ezután a kis herceg a partról úgy dob egy kavicsot a tóba, hogy az a part közvetlen közelében v_0 nagyságú, közel vízszintes irányú sebességgel érkezik a mézbe. Kiszámítja, hogy a kavics a parttól (vízszintesen mérve) legfeljebb x_{max} távolságban érhet a tó fenekére.



a) Mekkora y mélységbe jut el a kavics, mialatt vízszintes irányban mérve $x < x_{max}$ távol kerül a parttól?

b) Mekkora a közegellenállási erő munkája a kavicson, mialatt az a parttól x távol és y mélyen található P pontig süllyed le a mézben?

A kis herceg az eredményeket a v_0 , v_{\max} x_{\max} paraméterekkel, valamint az x változóval kifejezve adta meg, miközben felhasználta az alábbi integrálformulákat:

$$\int_0^a \frac{1}{1-u} du = \ln \frac{1}{1-a}, \quad \int_0^a \frac{u}{1-u} du = \ln \frac{1}{1-a} - a,$$

$$\int_0^a \frac{u^2}{1-u} du = \ln \frac{1}{1-a} - a - \frac{a^2}{2}.$$

(6 pont)

Saint-Exupéry regénye nyomán

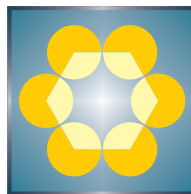


Beküldési határidő: 2026. február 16.

Elektronikus munkafüzet: <https://www.komal.hu/munkafuzet>



**MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL
FOR SECONDARY SCHOOLS
(Volume 76. No. 1. January 2026)**



Problems in Mathematics

New exercises for practice – competition K (see page 33): **K. 884.** A number is called a zigzag number if, when reading its digits from left to right, the second digit is smaller than the first, the third digit is larger than the second, the fourth digit is smaller than the third, and so on. Create all the zigzag numbers from digits 1, 2, 3, 4, 5, i.e., all five-digit numbers $abcde$ with all different digits satisfying $a > b$, $b < c$, $c > d$ and $d < e$. How many such five-digit zigzag numbers are there? **K. 885.** Every morning, Peti drinks either cocoa or fruit juice (but only one of them). Drinking cocoa is a two-day activity in the sense that the cocoa-drinking periods consist of even number of days. How many ways are there to choose his morning drinks in the first ten days of February? **K. 886.** A tire of a car wears out if it runs 20,000 km when placed on the front wheel, or 30,000 km when placed on the rear wheel. *a)* We have 4 fresh tires. What is the maximum number of kilometres we can travel if we can switch the tires between the front and the rear wheels? After how many kilometres should we switch tires between the front and the rear wheels to achieve the maximum distance? *b)* We have 5 fresh tires. What is the maximum number of kilometres we can travel if we can switch the tires between the front and the rear wheels? How should we swap tires between the wheels to achieve the maximum distance? **K/C. 887.** Which three-digit number satisfies $\overline{xyz} = x! + y! + z!$? (x , y and z denote the digits of the three-digit numbers, and $n!$ denotes the product of numbers between 1 and n , while $0! = 1! = 1$.) **K/C. 888.** The sum of the squares of three consecutive odd integers is a four-digit number with four equal digits. Find all such triples of positive integers.

New exercises for practice – competition C (see page 34): **Exercises up to grade 10:** **K/C. 887.** See the text at Exercises **K.** **K/C. 888.** See the text at Exercises **K.** **Exercises for everyone:** **C. 1883.** Find all natural numbers n satisfying $n^3 + 25n \geq 10n^2 + 16$. (Proposed

by *Mátyás Czett*, Zalaegerszeg) **C. 1884.** 30 students in a class did a test in mathematics. The teacher marked the tests, and sent a table of the marks to the students such that the marks appeared in a column: 15 of them were four, and 15 of them were five. Prove that it is always possible to find 14 consecutive rows such that the sum of the marks contained in them equals 63. (Problem of the competition “Felvidéki Magyar Matematikaverseny”) **C. 1885.** We inscribe regular hexagon $ABCDEF$ in equilateral triangle PQR such that points B , D and F are midpoints of sides PQ , QR and RP . Find the area of triangle QPR if the area of pentagon $ABQRF$ equals one unit. (Dutch competition problem) **Exercises upwards of grade 11: C. 1886.** The internal angles of hexagon $ABCDEF$ are equal. Prove that the area of triangles ACE and BDF are equal. (Proposed by *Márton Ujházy*, Budapest) **C. 1887.** How many numbers are there with a base nine representation of $abcabc_9$ and exactly 40 positive divisors? (Proposed by *Márton Ujházy*, Budapest)

New exercises – competition B (see page 35): **B. 5502.** Let A be a set of real numbers with n elements. Prove that at least $4n - 3$ numbers can be written in the form $a - 2b + c$ such that $a, b, c \in A$ not necessarily distinct. (3 points) (Proposed by *Péter Pál Pach*, Budapest) **B. 5503.** Let P and Q be the third vertices of the equilateral triangles on side BC of triangle ABC . Prove that $AP^2 + AQ^2 = AB^2 + BC^2 + CA^2$. (3 points) (Proposed by *Géza Kiss*, Csömör) **B. 5504.** Let a, b and c be real numbers such that not all of them are equal. Prove that $\frac{a+b+c}{3} > \sqrt[3]{abc}$ holds if and only if $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c} > 0$. (4 points) (Proposed by *Mátyás Barczy*, Szeged and *Páles Zsolt*, Debrecen) **B. 5505.** Let the diagonal AC and BD of cyclic quadrilateral $ABCD$ intersect each other in point P . Let K be the circumcenter of triangle APB , and let M be the orthocenter of triangle CPD . Prove that points K , M and P are collinear. (4 points) (Proposed by *Mihály Bence*, Brassó) **B. 5506.** Solve the following equation on the set of positive integers: $x^5 - xy^2 + y^2 = 1$. (5 points) (Proposed by *István Molnár*, Békéscsaba) **B. 5507.** Let us choose two different integers, a and b from interval $(n^2, n^2 + n)$, for a given $n > 2$ positive integer. Prove that it is not possible to find an integer number different from a and b that divides product ab . (5 points) (Proposed by *Sándor Róka*, Nyíregyháza) **B. 5508.** Let $ABCD$ be a convex quadrilateral. a) Prove that if $\tan \angle BAC \cdot \tan \angle DCA = \tan \angle CAD \cdot \tan \angle ACB$, then $\tan \angle CBD \cdot \tan \angle ADB = \tan \angle DBA \cdot \tan \angle BDC$. b) Prove that if $\tan \frac{\angle BAC}{2} \cdot \tan \frac{\angle DCA}{2} = \tan \frac{\angle CAD}{2} \cdot \tan \frac{\angle ACB}{2}$, then $\tan \frac{\angle CBD}{2} \cdot \tan \frac{\angle ADB}{2} = \tan \frac{\angle DBA}{2} \cdot \tan \frac{\angle BDC}{2}$. (6 points) (Proposed by *Bálint Hujter*, Budapest and *Géza Kós*, Budapest) **B. 5509.** Let $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ be the set of vertices of a graph on n vertices, and let d_i denote the degree of vertex v_i . We call function f *Verőcese*, if it takes non-negative real values and for every edge $v_i v_j$ of the graph $f(v_i) + f(v_j) \geq d_i + d_j$ holds. Find the largest real number λ such that for every n , every simple graph on n vertices and every Verőcese function f $f(v_1) + f(v_2) + \dots + f(v_n) \geq \lambda(d_1 + d_2 + \dots + d_n)$ holds true. (6 points) (Proposed by *Boldizsár Varga*, Verőce)

New problems – competition A (see page 37): **A. 923.** 2026 people visited an exhibition where 1000 paintings were displayed. Prove that it is possible to send some of the visitors to two rooms, with at least one visitor in each room, such that there is no painting that was liked by someone in one room but by nobody in the other, and there is no painting whose painter is personally known by someone in one room but by nobody in the other. **A. 924.** For which pairs (k, l) of positive integers is the following statement true: for every positive integer n there exists an integer i with $0 \leq i \leq l - 1$ such that $\binom{n}{i} + (-1)^l \binom{n}{i+l} + (-1)^{2l} \binom{n}{i+2l} + \dots$ is not divisible by k ? (Based on a *Kvant problem*) **A. 925.** Call four points to be in general position if they are pairwise distinct, no three of them are collinear, and no two of the six lines determined by them are parallel. Let A, B, C, D be points in general position lying on a circle. Let E be the intersection point of lines AB and CD , let F be the intersection point of lines AC and BD , and let G be the intersection

point of lines AD and BC . In triangle EFG , denote by P , Q , and R the feet of the altitudes corresponding to the vertices E , F , and G , respectively. *a)* Show that the triples of lines $AR-BQ-CP$, $AQ-BR-DP$, $AP-CR-DQ$, and $BP-CQ-DR$ are either concurrent or parallel. *b)* Suppose that each of the four triples of lines is concurrent, and denote their points of concurrency by X , Y , Z , and W , respectively. Assume further that these points are in general position. Prove that the Miquel points of quadrilaterals $XWYZ$, $XYZW$, and $XZWY$ are precisely the points P , Q , and R . (Proposed by *Boldizsár Varga*, Verőce and *Áron Bán-Szabó*, Palaiseau)

Problems in Physics

(see page 57)

M. 446. Some identical books on a shelf are parallel to each other and tilted at a small angle relative to the vertical. Measure the force exerted by the last book on the side wall of the shelf. How does the force depend on the number of books and the angle of tilt?

G. 909. A racing car is moving on a straight test track. The relationship between the distance s measured from the starting point of the track and the time t elapsed since the start of the time measurement – if the length is measured in metres and the time in seconds, and the units of measurement are not written out – can be expressed as follows: $s = 10 + 10t + 2t^2$. How does the distance-time function change if we choose kilometres as the unit of length and hours as the unit of time? Calculate the position, speed, and acceleration of the racing car 1/4 minute after the start in both systems. **G. 910.** A rhombus-shaped plate with a weight of G and of uniform mass distribution is supported horizontally at its vertices. The force exerted on the support at one of the vertices is $G/5$. What are the forces exerted on the other supports at the other vertices? **G. 911.** The virtual image of point P produced by a thin diverging lens is at point P' as shown *in the figure*. The principal axis of the lens is marked by a continuous line, and each division on the grid corresponds to 10 cm horizontally and 1 cm vertically. What is the focal length of the lens? **G. 912.** In the circuit shown *in the figure*, the switch is initially open. *a)* How much current flows through the resistors and batteries in the circuit before and after the switch is closed? *b)* How much are these currents if the polarity of the voltage source next to the switch is reversed?

P. 5697. During a fireworks display, projectiles are fired from the same location at the same initial speed in all directions, creating a bright flash at the peak of their trajectory. Along what surface are the flash points located? Neglect air resistance. **P. 5698.** On the level ground, a two-seater glider with mass M is lifted into the air by means of a winch. The winch is connected to the glider by a long tow rope with spring constant D and mass m . When the towing begins, the acceleration is a , while there is friction between the rope and the grassy ground, where the coefficient of friction is μ . Calculate how much the horizontal tow rope stretches shortly after the plane starts moving. *Data:* $m = 150$ kg, $M = 400$ kg, $a = 3 \frac{m}{s^2}$, $D = 2500 \frac{N}{m}$, $\mu = 0.15$. **P. 5699.** An artificial moon orbits the Earth in the same direction as the Earth's rotation, in the plane of the equator, at a constant height above the surface of the Earth, which is of 4 times the radius of the Earth. *a)* What is the period of the artificial satellite? *b)* How many days does it take for the artificial satellite to pass over a selected point on the equator? **P. 5700.** According to the legend, Dido, the princess of Tyre, after being forced to flee her homeland, arrived in North Africa, where she asked the local ruler for as much land as she could enclose with an ox-hide. The ruler agreed, so Dido cut the skin into a long, narrow strip, made a fence out of it, and then chose the largest possible area of land along the coast, founding the city of Carthage. According to a lesser-known version of the story, Dido's voyages took her to a circular island with a radius of 1 km, somewhere in the Mediterranean Sea. What was the maximum area of

land she could have selected if the length of her fence was 1 km? Dido could consider the smaller part of the divided island as her own. **P. 5701.** A sample of nitrogen gas was taken through an isochoric process, during which some heat was transferred to it. Then the gas was immediately compressed adiabatically so that the work done by the environment on the gas was equal to the heat transferred during the isochoric process. Finally, the gas was heated in an isobaric process until the mechanical work done by the gas became equal to the heat transferred in the isochoric process. During the three processes, what was the change in the temperature of the nitrogen if the temperature of the gas increased by 80°C in the isochoric process? **P. 5702.** A copper pipe is bent into a circle and its ends are soldered together, that is, a hollow torus with copper walls is created. What is the electric field strength inside the copper tube and in the material of its wall, if the current in a *sufficiently long*, straight coil is changed at a constant rate in time and the copper tube is positioned as shown *in the figure*, a) next to the coil, b) coaxially with the coil? c) What is the electric field strength in the wall of the copper tube in the previous situation if the tube is cut somewhere? Supplying power to the coil was set up in a way that the magnetic effects of both the connecting cables and the resulting current occurring along the symmetry axis of the solenoid were eliminated. (E.g. power is supplied by a coaxial cable, and the solenoid is double-wound.) **P. 5703.** We observe a 2-millimetre fossil perpendicularly from a distance of 25 cm, which is the distance of normal vision. If we looked any closer, we would not be able to see it clearly with the naked eye. a) What is the angle subtended by the fossil, if we do not use a magnifying glass? b) In order to see the details of the fossil better, we look at it through a thin magnifying glass with a focal length of 5 cm. At what angle do we see the fossil if the magnifying glass is 3 cm away and our eyes are 25 cm away from the object? c) Place the magnifying glass as close to your eye as possible. What is the maximum angle at which you can see the fossil with the magnifying glass if you can freely change the distance between the object and your eye? **P. 5704.** Using a device, charged particles are accelerated from rest, through a voltage of U_{gy} , to a speed significantly less than the speed of light. The particles moving in a straight line in vacuum enter to a parallel plate capacitor, where they are deflected and exit the capacitor at some angle relative to the original direction of their motion. The length of the parallel plate capacitor is ℓ , the distance between the plates is d , and the deflection voltage is U_{el} . The charged particles enter the deflecting field along the symmetry line of the parallel plate capacitor, as shown in the figure, and do not collide with the plates during their motion. (The effect of gravity can be ignored.) a) How does the angle of deflection α depend on the given data? b) How does the type of particle used in the experiment affect the angle of deflection? **P. 5705.** The Little Prince wandered onto a strange planet, where he sat down to play on the shore of a honey lake. He threw pebbles of identical size and mass m into the very deep lake. He observed that when he dropped a pebble from directly above to the surface of the lake, it accelerated to a maximum speed of v_{max} in the honey. (It can be assumed that the magnitude of the drag force acting on the pebble is directly proportional to the speed of the pebble.) Then, the Little Prince threw a pebble into the lake from the shore so that it entered the honey close to the shore at a velocity of v_0 in a nearly horizontal direction. He calculated that the pebble can reach the bottom of the lake at a maximum distance of x_{max} from the shore (measured horizontally). a) To what depth y did the pebble go while it moved horizontally a distance of $x < x_{\text{max}}$ measured from the shore? b) How much work is done by the drag force on the pebble while the pebble sinks in the honey to point P , which is at a distance of x from the shore and at a depth of y ? The Little Prince gave the results in terms of the parameters v_0 , v_{max} , x_{max} and the variable x , using the following integral formulas: $\int_0^a \frac{1}{1-u} du = \ln \frac{1}{1-a}$, $\int_0^a \frac{u}{1-u} du = \ln \frac{1}{1-a} - a$, $\int_0^a \frac{u^2}{1-u} du = \ln \frac{1}{1-a} - a - \frac{a^2}{2}$.

VÁLASZD A BME MATEK SZAKOT!


ELMÉLETI MATEK MÉRNÖKI MATEK
SZTOCHASZTIKA
OPERÁCIÓKUTATÁS ADATTUDOMÁNY



AIT-BUDAPEST



Morgan Stanley

 hiflylabs

Az ELTE a legrégebbi, mindmáig
működő magyar egyetem



Természettudományi Kar

Az ELTE Természettudományi Kara (TTK) minden felmérés szerint az egyik legjobb egyetemi kar Magyarországon. A képzések a természettudományok teljes spektrumát felölelik: *matematika, biológia, fizika, földrajz, földtudományi, kémia, környezettan* alapszakok (BSc) – ezeken belül különböző specializációk (biofizikus, csillagász, meteorológus...) – kerülnek meghirdetésre. <https://ttk.elte.hu/>



Matematikai Intézet

A matematika alapszak (BSc) egyaránt felkészít a kutatói életpályára és a matematika különböző területeken történő magas szintű alkalmazására is – kiváló karrierlehetőségeket nyújtva.

Az intézetben nagy hangsúlyt helyezünk a tehetséggondozásra, és hogy a választható szintek és blokkok révén mindenki megtalálja a neki megfelelő kurzusokat.

Az intézetben általános- és középiskolai tanárképzést is folytatunk osztatlan *matematikanári* szakon. <https://www.math.elte.hu/>



Az ELTE TTK idén december 9-én tartja nyílt napját: https://ttk.elte.hu/nyiltnap_2025.
Ha esetleg későn jutna el hozzád ez a hír, a program a fenti linken vissza is nézhető.

