

Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok

Informatika rovattal

Támogassa lapunk kiadását
adója 1%-ával – 18157444-2-43

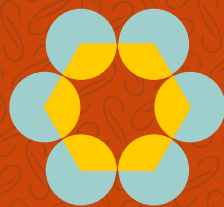


A NapCsiga



Hunyorító festő

Amit jó tudni a projektív geometriáról – I. rész | Öntögetős
feladatok megoldása geometriai modell segítségével |
Matematika és fizika feladatok megoldásai | Egy teljesen
napeleemes jármű | Matek az utcán 2026 |



KöMaL

76. évfolyam

4. szám

2026.
április



Matek az utcán – 2026. március 9–17. képek a rendezvényekről



A π -naplakátja



Cegléd



Gödöllő



Veszprém



Szeged



A 99 éves Obádovics József Gyula Siófokon



Kocka vs. ikozaéder

KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK

INFORMATIKA ROVATTAL BŐVÍTVE

ALAPÍTOTTA: **ARANY DÁNIEL** 1894-ben

76. évfolyam 4. szám

Budapest, 2026. április

Megjelenik évente 9 számban, januártól májusig és szeptembertől decemberig havonta. ÁRA: 1600 Ft

TARTALOMJEGYZÉK

<i>Kiss György:</i> Amit jó tudni a projektív geometriáról, I. rész	194
<i>Bozóki Sándor:</i> Rejtvények, ördöglakatok – Az öntögetős játékok egy geometriai modellje ..	202
<i>Polák Péter:</i> Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire	206
<i>Horváth Eszter:</i> Megoldásvázlatok a 2026/3. szám matematika gyakorló feladatsorához...	209
Matematika feladatok megoldása (5453.)	220
A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok (899–903.)	223
A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (902–903., 1898–1902.)	224
A B pontversenyben kitűzött feladatok (5526–5533.)	226
Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (932–934.)	227
Informatikából kitűzött feladatok (695–698.) ..	228
<i>Dőry István:</i> NapCsiga – egy teljesen napelemes jármű lehetőségei és fizikai korlátai	233
Méresi feladatok megoldása (445.)	237
Fizika gyakorlatok megoldása (911., 912.)	240
Fizika feladatok megoldása (5691., 5700.)	243
Fizikából kitűzött feladatok (449., 921–924., 5724–5732.)	250
Problems in Mathematics	253
Problems in Physics	255

Főszerkesztő: KORÁNDI JÓZSEF
Fizikus szerkesztő: VANKÓ PÉTER
Műszaki szerkesztő: FRIED KATALIN
Borító: BURGHARDT ZSUZSA
Kiadja: MATFUND ALAPÍTVÁNY
Alapítványi képviselő: KÓS RITA
Felelős kiadó: PATKÓS BALÁZS
Nyomda: OOK-PRESS Kft.
Felelős vezető: SZATHMÁRY ATTILA
 INDEX: 25 450 ISSN 1215-9247

A matematika bizottság tiszteletbeli elnöke:
 HERMANN PÉTER

A matematika bizottság vezetője: KÓS GÉZA

Tagjai: BÁN-SZABÓ ÁRON, BÍRÓ BÁLINT, CZETT MÁTYÁS, GYENES ZOLTÁN, HUJTER BÁLINT, KISS GÉZA, KOZMA KATALIN ABIGÉL, MAGYAR ESZTER, NÉMETH MÁRTON, PACH PÉTER PÁL, PAULOVIK ZOLTÁN, RATKÓ ÉVA, SIMON LÁSZLÓ BENCE, SZTRANYÁK ATTILA, UJHÁZY MÁRTON, VIGH VIKTOR

A fizika bizottság vezetője: SZÉCHENYI GÁBOR

Tagjai: BARANYAI KLÁRA, GNÄDIG PÉTER, HONYEK GYULA, OLOSZ BALÁZS, SZÁSZ KRISZTIÁN, VIGH MÁTÉ, VLADÁR KÁROLY, WOYNAROVICH FERENC

Az informatika bizottság vezetője:
 SCHMIEDER LÁSZLÓ

Tagjai: LÓCZI LAJOS, SIEGLER GÁBOR, TÓTH TAMÁS

Fordítók: GYENES ZOLTÁN, TASNÁDI ANIKÓ

Nyelvi korrektor: ANDICS ÁGNES
Javítás koordinálása: CSOBÁNKA PETRA
Szerkesztőségi titkár: ONDINÉ SZABÓ SÁRA

A szerkesztőség címe: 1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/C III. emelet 3.405.
 Telefon: +36 20 320-1143
 A lap megrendelhető a
<https://komalujsg.myshoprenter.hu>
 oldalon keresztül.

Előfizetési díj egy évre: 12 500 Ft
 Kéziratokat nem őrzünk meg és nem küldünk vissza.
 Minden jog a KöMaL tulajdonosaié.
 E-mail: szerk@komal.hu
 Internet: <http://www.komal.hu>

This journal can be ordered from the Editorial office:
 Pázmány Péter sétány 1/C III. emelet 3.405.
 1117–Budapest, Hungary
 telephone: +36 20 320-1143
 or on the Internet:
<https://komalujsg.myshoprenter.hu>.
 A Lapban megjelenő hirdetések tartalmáért felelősséget nem vállalunk.



Amit jó tudni a projektív geometriáról

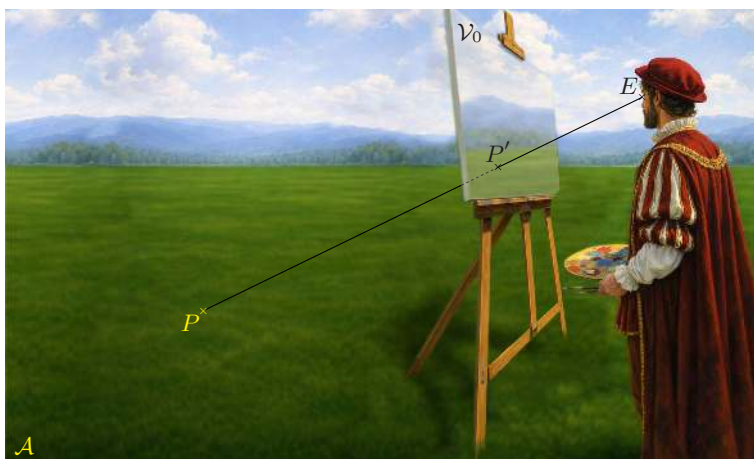
I. rész

Ennek a kétrészes cikknek az a célja, hogy megismertesse az olvasót a projektív geometria néhány olyan alapvető fogalmával és tételével, amelyek nem igényelnek mély előismereteket, középiskolás tudással tárgyalhatók és segítséget nyújthatnak középiskolások számára kitűzött feladatok megoldásához is.

A projektív geometria eredete a reneszánsz idejére tehető, amikor nem matematikusok, hanem festők kezdték tanulmányozni a valósághű ábrázolás és ezen keresztül a középpontos vetítés szabályait.

Hogyan dolgozik a Fél szemű Festő?

A fél szemű festő szerencsére nem volt gyakori a reneszánsz idején sem. De az igen, hogy egy festő egyik szemével hunyorítva nézte a tájat, tárgyakat, így próbálván felderíteni a perspektivikus képüket. Ennek a „hunyorításnak” az absztrakt megfelelője lesz most a Fél szemű Festő, FF , aki szeretne realista képet készíteni a vásznára (jelölje $\mathcal{V}_0$) az Alföld (jelölje $\mathcal{A}$) egy darabjáról. Mit kell tennie? Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy $\mathcal{V}_0$ valamilyen átlátszó anyagból készült téglalap, $\mathcal{A}$ egy $\mathcal{V}_0$ -t nem tartalmazó sík, FF egyetlen szeme, E pedig egy olyan pont, amely sem $\mathcal{A}$ -ra, sem a $\mathcal{V}_0$ -t tartalmazó $\mathcal{V}$ síkra nem illeszkedik. A festőnek szeme sem rebben, tehát az E pont helye rögzített.



1. ábra

Amikor FF az Alföldet $\mathcal{V}_0$ -n keresztül nézi, az $\mathcal{A}$ sík egy konkrét P pontja esetén egy fénysugár érkezik a szemébe. Ez a fénysugár $\mathcal{V}_0$ -t az EP szakasz valamely P'

Ez a nagyon leegyszerűsített eljárás azt mutatja, hogy az élethű képek készítésekor fontos szerepet játszik az euklidészi tér valamely síkjának a tér egy másik síkjára való középpontos vetítése.

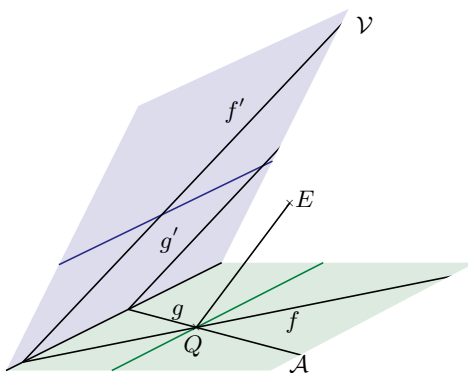
Legyen $\mathcal{A}$ és $\mathcal{V}$ két egymást metsző sík az euklidészi térben, E pedig egy olyan pont, amely sem $\mathcal{A}$ -ra, sem $\mathcal{V}$ -re nem illeszkedik. A Φ -vel jelölt E középpontú centrális vetítés $\mathcal{A}$ -ról $\mathcal{V}$ -re legyen az a transzformáció, amely egy tetszőleges $P \in \mathcal{A}$ pont esetén P -hez az EP egyenesnek a $\mathcal{V}$ síkkal vett metszéspontját rendeli hozzá, feltéve, hogy a metszéspont létezik. Azoknak a P pontoknak, amelyekre EP párhuzamos $\mathcal{V}$ -vel, nyilván nincs képük a $\mathcal{V}$ -n. Ezek a pontok egy egyenest alkotnak (m). Látható, hogy az m egyenes az E -n átmenő $\mathcal{V}$ -vel párhuzamos sík és az $\mathcal{A}$ sík metszészvonala.

Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok, 2026/4

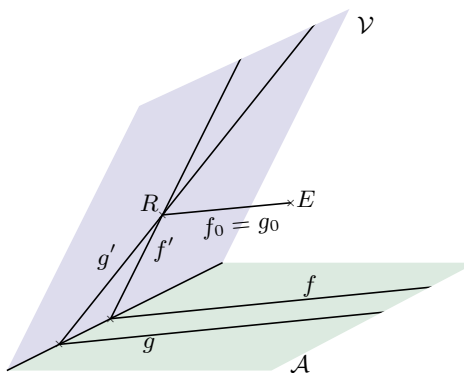
egyenes Q metszéspontjának nem lesz képe $\mathcal{V}$ -n. De f' -nek sem kapjuk meg minden pontját, hiszen az az R pont, amelyre az R -en és E -n átmenő egyenes párhuzamos az $\mathcal{A}$ síkkal, semelyik f -en lévő pontnak nem lesz a képe.

Szeretnénk a Q és az R pontok kivételes szerepét – vagyis azt, hogy Q -nak nincs képe, R -nek pedig nincs „őse” a Φ leképezés szerint – megszüntetni. Mivel alkalmas „képpont”, illetve „ős pont” nincs a $\mathcal{V}$, illetve az $\mathcal{A}$ síkon, ezért ezt csak úgy tudjuk megtenni, ha újabb, képzeletbeli, „ideális” pontokat veszünk a síkokhoz. Hogy ezt hogyan tegyük, arra ötletet ad, ha észrevesszük, hogy ha a P pont az f egyenesen tart a Q ponthoz, akkor a képe – P' – valamelyik irányban kiszalad a végtelenbe. Hogy melyik irányban, az attól függ, hogy P -vel egyik vagy másik oldaláról tartunk-e Q -hoz. Ennek mintegy fordítottjaként, ha P -vel az f egyenes mentén kiszaladunk a végtelenbe (teljesen mindegy, hogy melyik irányban), akkor viszont a P' képpont az R ponthoz fog tartani. Ha tehát az f és az f' egyenest is kiegészítjük egy-egy F_∞ , illetve F'_∞ „végtelen távoli” ponttal, akkor Φ -t kiterjeszthetjük úgy, hogy minden pont képe maradjon ugyanaz, mint eddig, de a Q -nak is legyen képe, mégpedig az F'_∞ , és az R -nek is legyen őse, mégpedig az F_∞ . Ez a Φ már kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesít az f és f' – „végtelen távoli” pontokkal kibővített – egyenesek között.

Csatoljunk tehát minden euklidészi egyeneshez egy „végtelen távoli” pontot. Ha f és g az $\mathcal{A}$ sík két egyenesese, akkor a velük párhuzamos, E -n átmenő f_0 és g_0 egyenesek pontosan akkor egyeznek meg, ha f és g párhuzamosak. Azaz *két egyeneshez pontosan akkor kell ugyanazt a „végtelen távoli” pontot csatolnunk, ha az egyenesek párhuzamosak*. Ez a szabály a Q ponton átmenő egyenesek esetén is működik, olyan értelemben, hogy ha az $\mathcal{A}$ sík f és g egyenesesei átmennek Q -n, akkor a $\mathcal{V}$ síkon lévő képeik párhuzamosak az EQ egyenessel, és így egymással is.



3. ábra



4. ábra

Az egyenesek „végtelen távoli” pontjai nem az euklidészi tér pontjai, ahogy a matematikában sok helyen használt $+\infty$ és $-\infty$ szimbólumok sem valós számok. Mivel a „végtelen távoli” pontok nem az euklidészi térben helyezkednek el, így nem lehet „megfogni” azokat. Emiatt a „végtelen távoli” pontokat *ideális pontoknak* is szokták nevezni, utalva e pontok gondolatiságára. Ha az euklidészi tér pontjait meg

akarjuk különböztetni az ideális pontoktól, akkor *közönséges pontoknak* nevezzük őket.

Mivel Φ kiterjesztése az m egyenest pontonként a $\mathcal{V}$ sík ideális pontjaiba viszi, ezért bevezetjük a $\mathcal{V}$ sík m' *ideális egyenesét*, amelyre gondolhatunk úgy, mint a $\mathcal{V}$ sík ideális pontjainak összességére, és úgy is, mint az m egyenes Φ szerinti képére. Ennek az egyenesnek nincs közönséges pontja.

Megfordítva pedig ha $\mathcal{A}$ ideális egyenesét, h -t tekintjük, akkor ez nem más, mint $\mathcal{A}$ ideális pontjainak az összessége, tehát amiket a kibővített Φ az E -n átmenő, $\mathcal{A}$ -val párhuzamos $\mathcal{A}'$ sík és a $\mathcal{V}$ sík n metszéspontjába visz. Vagyis h képe n .

Az ideális pontokkal és ideális egyenessel kiegészített $\mathcal{A}$ és $\mathcal{V}$ síkok közt tehát a Φ középpontos vetítés kiterjesztése egy olyan kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés a két sík pontjai közt, ami egyenest egyenesbe visz és illeszkedéstartó, vagyis ha $\mathcal{A}$ egy pontja rajta van $\mathcal{A}$ egy egyenesén, akkor a képpont rajta van az egyenes képén.

A projektív geometria a geometriának az az ága, amely az alakzatoknak a középpontos vetítéskor megmaradó tulajdonságait vizsgálja. Mivel a távolságok és szögek a vetítésnél megváltozhatnak, az euklidészi geometriában fontos fogalmak egy része idegen a projektív geometriától. Mivel a középpontos vetítésnél közönséges pontok ideális pontokba képződhetnek és ideális pontok képe lehet közönséges is, ezért a projektív geometriában a közönséges és ideális pontokat egyenrangúnak tekintjük. Ebből adódik a projektív geometria egy másik fontos vonása, a párhuzamosság fogalmának eltűnése. (Az euklidészi geometriában például két egyenes párhuzamos volt, ha egy síkban voltak és nem volt közös pontjuk. A projektív geometriában ha két egyenes egy síkban van, akkor biztosan van – vagy közönséges vagy ideális – közös pontjuk.)

A klasszikus projektív sík illeszkedési tulajdonságai

A továbbiakban (*klasszikus*) *projektív síknak* nevezzük az ideális pontokkal és az ideális egyenessel kibővített euklidészi síkot. A projektív síkon a pontok és egyenesek illeszkedési tulajdonságait a következő táblázatban foglalhatjuk össze.

ILLESZKEDÉS	közönséges pont	ideális pont
közönséges egyenes	pontosan akkor, amikor az euklidészi síkon	akkor, ha az egyenes benne van a megfelelő párhuzamossági osztályban
ideális egyenes	soha	mindig

1. Tétel. A klasszikus projektív síkon

S1: bármely két különböző pontnak egyértelműen létezik összekötő egyenese;

S2: bármely két különböző egyenesnek egyértelműen létezik metszéspontja.

Bizonyítás. Az euklidészi sík jól ismert illeszkedési tulajdonságait használjuk. Az első állítás esetén három esetet különböztetünk meg:

- Ha két közönséges pontunk van, akkor az euklidészi síkon egyértelműen létezik közönséges összekötő egyenesük, az ideális egyenes pedig egyikükre sem illeszkedik.

- Ha egy közönséges pontunk, P , és egy ideális pontunk, I , adott, akkor az euklidészi síkon egyértelműen létezik P -n átmenő, az I által meghatározott párhuzamossági osztályba tartozó egyenes, az ideális egyenes pedig nem illeszkedik P -re.
- Ha két ideális pontunk van, akkor az ideális egyenes megfelelő, közönséges egyenes pedig nem kötheti össze őket, mert minden közönséges egyenes pontosan egy ideális pontra illeszkedik.

A második rész bizonyításánál is három esetet különböztetünk meg:

- Ha két közönséges egyenes metsző az euklidészi síkon, akkor különböző párhuzamossági osztályokba tartoznak, tehát nincs közös ideális pontjuk, viszont egyértelműen létezik közönséges metszéspontjuk.
- Két közönséges egyenesnek, amelyek párhuzamosak az euklidészi síkon, nincs közös közönséges pontjuk, viszont ugyanaz az ideális pontjuk.
- Egy közönséges egyenesnek, e -nek, és az ideális egyenesnek nincs közönséges metszéspontja, mert az ideális egyenes nem tartalmaz egyetlen közönséges pontot sem, viszont pontosan egy közös ideális pontjuk van, az e ideális pontja. $\square$

Érdemes észrevennünk, hogy **S1**-ből megkapjuk **S2**-t, és viszont, **S2**-ből megkapjuk **S1**-et, ha az állításokban a pontok és az egyenesek szerepét felcseréljük.

A klasszikus projektív tér illeszkedési tulajdonságai

Az euklidészi tér minden síkján elvégezhetjük a kiegészítést az ideális pontokkal és a síkhoz rendelt ideális egyenessel. A projektív síkon két egyeneshez akkor rendeltük ugyanazt az ideális pontot, ha párhuzamosak voltak. Ezt a tér esetén is így definiáljuk. Ebből az is következik, hogy párhuzamos síkokhoz ugyanazt az ideális egyenest rendeljük, mert két sík pontosan akkor párhuzamos, ha az egyiken lévő bármelyik egyenessel van párhuzamos egyenes a másik síkon is. Tehát *két különböző sík ideális egyenese akkor és csak akkor egyezik meg, ha a két sík párhuzamos.*

A továbbiakban *klasszikus projektív térnek* nevezzük az euklidészi tér kiterjesztését az előzőekben bevezetett ideális pontokkal és ideális egyenesekkel, valamint egy *ideális síkkal*, amit most vezetünk be. A tér összes ideális pontjából – és csak azokból – álló halmazt nevezzük így, amely tehát tartalmazza minden közönséges sík ideális egyenesét is. Definícióink alapján a klasszikus projektív térben

- egy ideális pont akkor és csak akkor illeszkedik egy ideális egyenesre, ha a pontnak megfelelő párhuzamossági egyenesosztály elemei párhuzamosak az egyenesnek megfelelő párhuzamossági síkosztály síkjaival;
- egy ideális egyenes akkor és csak akkor illeszkedik egy közönséges síkra, ha a közönséges sík benne van az ideális egyenesnek megfelelő párhuzamossági síkosztályban.

2. Tétel. A klasszikus projektív térben

T1: bármely két különböző pontnak egyértelműen létezik összekötő egyenese;

T2: két különböző egyenes vagy egy síkban van és metszi egymást, vagy kitérő;

T3: ha három pont nincs egy egyenesen, akkor pontosan egy sík illeszkedik rájuk;

T4: ha egy sík nem tartalmaz egy egyenest, akkor a síknak és az egyenesnek pontosan egy közös pontja van;

T5: bármely két különböző sík metszete egy egyenes.

Az 1. Tételhez hasonlóan az euklidészi tér illeszkedési tulajdonságait felhasználva ezeket az állításokat is lehet esetszétválasztással bizonyítani. Ezt a hosszadalmas, de nem nehéz munkát feladatnak hagyjuk. Cikkünk végén lineáris algebrai eszközöket felhasználva megadjuk majd a tétel egy rövid bizonyítását.

A következőkben a 2. Tétel felhasználásával bebizonyítunk két egyszerűbb állítást, majd pedig a projektív geometria egyik alapvető tételét, a Desargues-tételt.

3. Tétel. *Ha a projektív térben három sík páronkénti metszésvonalai nem esnek egybe, akkor a három metszésvonal egy ponton megy át.*

Bizonyítás. Legyen a három sík S_1 , S_2 és S_3 , az S_1 és S_2 metszésvonalát jelölje e_3 , az S_2 és S_3 metszésvonalát e_1 , S_1 és S_3 -ét pedig e_2 . Mivel az e_1 és e_2 egyenesek benne vannak S_3 -ban, ezért a **T2** tulajdonság miatt létezik a $P = e_1 \cap e_2$ pont. A P pont rajta van az e_1 egyenesen, ezért benne van az S_2 síkban, de az e_2 egyenesen is rajta van, ezért benne van az S_1 síkban is. A **T5** tulajdonság miatt S_1 és S_2 közös pontjai megegyeznek e_3 pontjaival, azaz P rajta van az e_3 egyenesen is, tehát a három egyenes egy ponton megy át. $\square$

Érdemes megjegyezni, hogy a 3. Tétel jól láthatóan mutatja a projektív geometria előnyét az euklidészi geometriával szemben az illeszkedési tulajdonságok vizsgálatánál. A tétel euklidészi változatát úgy kapjuk, hogy megkülönböztetjük azt a két esetet, amikor a síkok metszésvonalainak közös pontja közös, illetve ideális pont:

3'. Tétel. *Ha az euklidészi térben három sík páronkénti metszésvonalai nem esnek egybe, akkor a három metszésvonal vagy egy ponton megy át, vagy párhuzamos.*

Ennek a tételnek az ideális térelemek bevezetése nélküli szép, de hosszadalmas bizonyítása (majd pedig ennek felhasználásával Desargues tételének egy bizonyítása) található a [4] cikkben.

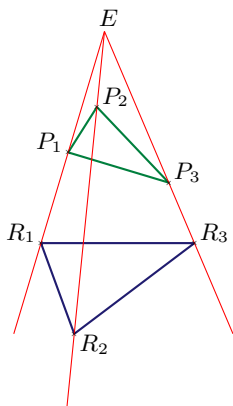
4. Tétel (Veblen–Young-lemma). *Ha a projektív térben az AB és a CD egyenesek metszik egymást, akkor az AC és a BD egyenesek is metszik egymást.*

Bizonyítás. A **T2** és **T3** tulajdonságok alapján az egymást metsző AB és CD egyenesekhez egyértelműen létezik a mindkettőjüket tartalmazó S sík. Az S sík az AC és a BD egyeneseknek is legalább két pontját tartalmazza, ezért a **T4** tulajdonság miatt mindkét egyenes teljes egészében S -ben van. Ha viszont két egyenes egy síkban van, akkor a **T2** tulajdonság miatt metszik egymást. $\square$

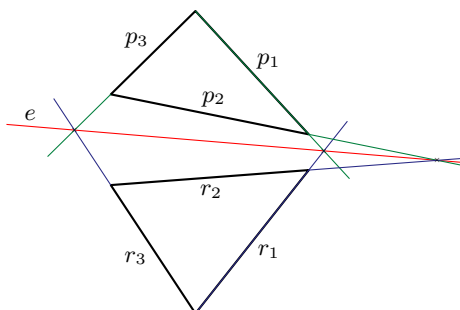
Desargues tételének kimondásához szükségünk van a perspektív háromszögek fogalmának bevezetésére.

Definíció. *A $P_1P_2P_3$ és $R_1R_2R_3$ csúcsokkal adott háromszögek az E pontra nézve perspektívek, ha a P_1R_1 , P_2R_2 és P_3R_3 egyenesek mindegyike átmegy az E ponton.*

A $p_1p_2p_3$ és $r_1r_2r_3$ oldalegyenesekkel adott háromszögek az e egyenesre nézve perspektívek, ha a $p_1 \cap r_1$, $p_2 \cap r_2$ és $p_3 \cap r_3$ pontok mindegyike létezik és rajta van az e egyenesen.



5. ábra

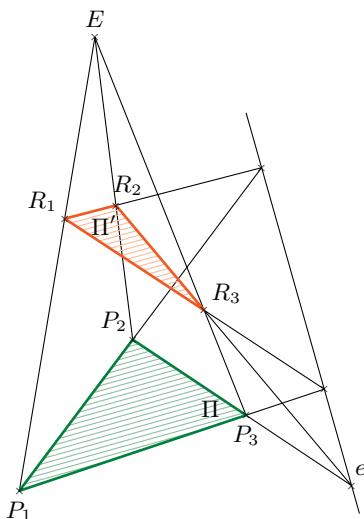


6. ábra

A definíció feltételezi, hogy a két háromszög csúcsai, illetve oldalai között van egy rögzített megfeleltetés, de nem teszi fel, hogy a háromszögek egysíkúak lennének.

Desargues tétele. *Két háromszög akkor és csak akkor perspektív egy pontra nézve, ha perspektív egy egyenesre nézve.*

Most a tételnek csak az egyik irányát bizonyítjuk be, a másik irány bizonyítására cikkünk második részében kerül majd sor. Azt mutatjuk meg, hogy *ha két háromszög perspektív egy pontra nézve, akkor perspektív egy egyenesre nézve is.*

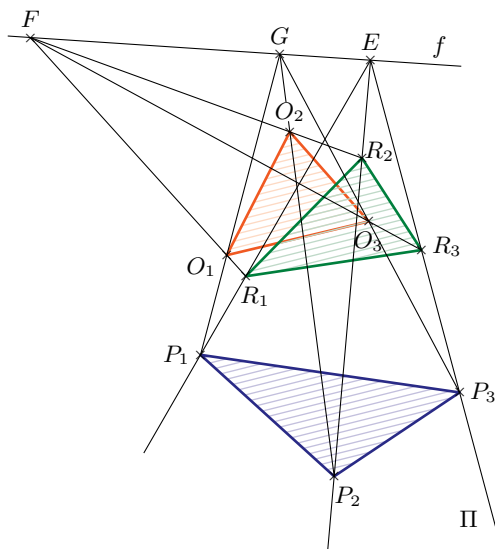


7. ábra

Először abban az esetben bizonyítjuk be az állítást, amikor az E pontra nézve perspektív $P_1P_2P_3$ és $R_1R_2R_3$ háromszögek két különböző síkban vannak.

Legyen Π és Π' ez a két különböző sík, metszésvonaluk pedig az e egyenes. A $P_iP_j \cap R_iR_j$ ($i, j \in \{1, 2, 3\}$) metszéspontok a Veblen–Young-lemma miatt léteznek, mert a P_1R_1 , P_2R_2 és P_3R_3 egyenesek az E pontban metszik egymást. Ezek a metszéspontok rajta vannak egyrészt a Π síkon, mert a P_iP_j egyenes Π -beli, másrészt a Π' síkon is, mert az R_iR_j egyenes pedig Π' -beli. Tehát a metszéspontok rajta vannak a két sík metszésvonalán, az $e = \Pi \cap \Pi'$ egyenesen (7. ábra).

Most tegyük fel, hogy az E pontra nézve perspektív $P_1P_2P_3$ és $R_1R_2R_3$ háromszögek ugyanabban a Π síkban vannak. Legyen f egy olyan E -n átmenő egyenes, ami nincs benne Π -ben. Vegyünk fel az f egyenesen két E -től különböző pontot, F -et és G -t. Mivel az FR_i és a GP_i ($i = 1, 2, 3$) egyenesek benne vannak az f és a P_iR_i egyenesek által meghatározott síkban, ezért a Veblen–Young-lemma miatt metszik egymást. Legyen $O_i = FR_i \cap GP_i$. Ekkor a $P_1P_2P_3$ és $O_1O_2O_3$ háromszögek G -re nézve, az $R_1R_2R_3$ és $O_1O_2O_3$ háromszögek pedig F -re nézve perspektívek (8. ábra).



8. ábra

Az $O_1O_2O_3$ háromszög nincs benne a Π síkban, mert ha benne lenne, akkor az F és G pontok is Π -ben lennének. Tehát a különböző síkokban lévő háromszögekre vonatkozó, már bizonyított állítás alapján ha $i, j \in \{1, 2, 3\}$ és $i \neq j$, akkor a $P_iP_j \cap O_iO_j$ pontok is és az $R_iR_j \cap O_iO_j$ pontok is egy egyenesen vannak. Viszont az $O_1O_2O_3$ háromszög bármely oldalegyenesének csak egy pontja van Π -ben, ezért ezek a dőléspontok megegyeznek ezen oldalegyenesek és a $P_1P_2P_3$, valamint az $R_1R_2R_3$ háromszögek megfelelő oldalegyeseinek metszéspontjaival. Ezek szerint viszont a $P_1P_2 \cap R_1R_2$, $P_2P_3 \cap R_2R_3$ és $P_3P_1 \cap R_3R_1$ pontok ugyanezek a metszéspontok, ezért a $P_1P_2P_3$ és $R_1R_2R_3$ háromszögek egyenesre nézve is perspektívek. $\square$

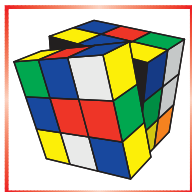
Desargues tételének fontos szerepe van a projektív geometria több területén. Szorosan kapcsolódik különböző kollineációk (a sík pontjainak olyan permutációi, amelyek egyeneseket egyenesekbe visznek) létezéséhez, valamint az absztrakt projektív síkok algebrai struktúrákkal való leírásához. Az első témakörrel a [3] cikkben, a másodikkal pedig a [2] könyv 2. és 3. fejezetében és a [7] cikkben talál részletes leírást az érdeklődő olvasó. Erdemes megemlítenünk, hogy Desargues tételét nem lehet csak a projektív síkok **S1** és **S2** illeszkedési tulajdonságait felhasználva bizonyítani, vannak olyan absztrakt projektív síkok, amelyeken nem igaz Desargues tétele.

Irodalomjegyzék

- [1] Csikós B. és Kiss Gy.: *Projektív geometria*, Polygon Kiadó, Szeged, 2011.
- [2] Kiss Gy. és Szőnyi T.: *Véges geometriák*, Polygon Kiadó, Szeged, 2001.
- [3] Kiss Gy.: *Desargues tétele*, Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok 57 (2007), 130–137.
- [4] Kós G.: *Térbe kilépő bizonyítások I, Projektív geometriai tételek*, Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok 69 (2019), 389–397.
- [5] Kós R.: *Kúpszeletek és Dandelin gömbjeik*, Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok, <https://www.komal.hu/cikkek/dandelin/dandelin.h.shtml>
- [6] Reiman I.: *Geometria és határterületei*, Gondolat Kiadó, Budapest, 1999.
- [7] Schmidt T.: *Geometriai terek az algebra szemszögéből*, Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok 54 (2004), 199–206.

Kiss György

ELTE Geometriai Tanszék



Rejtvények, ördöglakatok

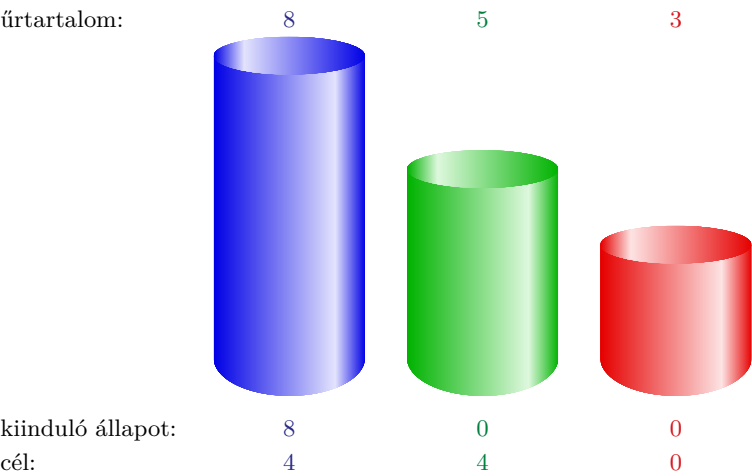
Az öntögetős játékok egy geometriai modellje

Rovatunkban minden hónapban valamilyen szórakoztató matematikai fejtörőt mutatunk be. Ezek között fontos helyet foglalnak el a különböző kirakós játékok, topológiai feladványok, ördöglakatok és a matematikát felhasználó bűvészmutatványok.

Manapság szinte mindent meg lehet találni az interneten, de az igazi élményt az adja, ha a feladatokat magunk oldjuk meg, a bűvészmutatványok trükkjeit mi találjuk ki, és a szükséges kellékeket is mi tervezzük meg és készítjük el. Próbáljuk meg a feladatokat továbbgondolni, általánosítani, igyekezzünk új feladatokat kitalálni.

Egy klasszikus feladat három edényről szól. A kék edény űrtartalma 8 liter, a zöldé 5 liter, a pirosé 3 liter. Kezdetben a kék edény tele van vízzel, a másik kettő üres. Az edényeken nincsenek jelzések. Egy edényből átönthetünk vizet egy másikba, egészen addig, amíg az előbbiből ki nem fogy, vagy az utóbbi meg nem telik. Értjük el, hogy a kék és a zöld edényben 4-4 liter víz legyen! (1. ábra)

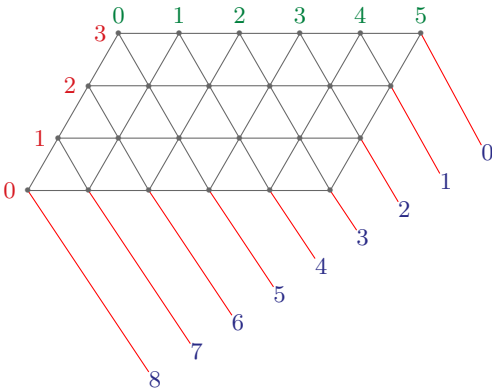
Hasonló feladványokkal már a 15. században is foglalkoztak [2]. Dudeney [3] helyesen sejtette, hogy kell lennie egy szisztematikus megoldási módszernek is a hagyományos próbálgatás, illetve „kilogikázás” mellett.



1. ábra. A 8-5-3 literes öntögetős feladvány

Egy ilyen, geometriai modellen alapulót ismertetünk [6, 7] alapján.

Képzeljünk egy 5 és 3 oldalhosszúságú, 60 fokos paralelogramma alakú „biliárdasztalt” (2. ábra). A paralelogramma minden pontja (beleértve a határát is és a belsejét is) megfelel egy elvben lehetséges vízelosztásnak a zöld és a piros edények között. Érdekes berajzolni az ábrán látható segédvonalakat is. A vízszintes vonalak mentén haladva a piros, a másik két irányban haladva vagy a zöld, vagy a kék edényben változatlan a víz mennyisége.

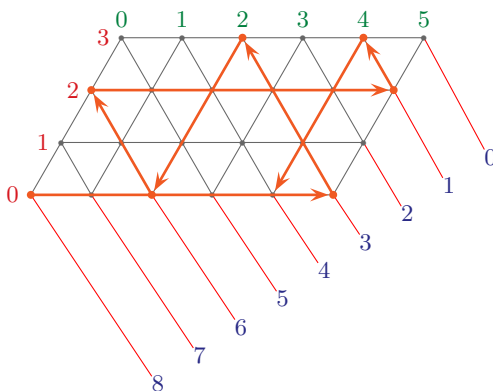


2. ábra. A 8-5-3 literes feladvány „biliárdasztalos” modellje

A 2. ábra rácspontjai az összes olyan vízelosztást mutatják, amelyek során minden edényben egész számú liternyi víz van. A célunk a $(8, 0, 0)$ pontból eljutni a $(4, 4, 0)$ pontba úgy, hogy végig rácsvonalakkal párhuzamosan – sőt, igazából rácsvonalak mentén – haladjunk, hiszen ez felel meg az egyik edényből egy másikba való átöntésnek. (Miközben a harmadik edényben a víz mennyisége változatlan.) Az már most is látható, hogy a paralelogramma belsejében lévő 8 rácsponton legfeljebb átutazóban mehetünk át, de megállni sosem fogunk, hiszen ekkor egyik edény sem telítődhetett és nem is ürülhetett ki.

Vizsgáljuk meg, hogy ténylegesen mely állapotok érhetők el a kezdeti $(8, 0, 0)$ állapotból! Mivel csak a kék edényben van víz, ebből önthetünk a zöldbe vagy a pirosba. Kezdjük a zölddel: 5 liter vizet átöntünk, így a $(3, 5, 0)$ állapotba jutunk. Innen kétféleképpen léphetünk tovább: visszaöntjük a zöld edényből a kékbe mind az 5 liter vizet, visszajutva a kiinduló állapotba; vagy a zöld edényből a pirosba öntünk 3 liter vizet, annak beteléséig, azaz a $(3, 2, 3)$ állapotig. Érdeemes ezt a 3. ábrán is követni. Egy pontszerű biliárdgolyó pályáját látjuk, amit a bal alsó $(8, 0, 0)$ sarokból vízszintesen meglökve, majd a fizika törvényei szerint a jobb alsó $(3, 5, 0)$ sarokból 60 fokos szögben elpattanva a $(3, 2, 3)$ állapotba jutunk. Visszafelé most is léphetnénk, de azzal nem kapnánk új állapotokat. Továbbhaladni háromféleképpen lehet: a zöld edényből önthetünk a kékbe 2 liter vizet, vagy a kékbe a zöldbe 3 litert, vagy a pirosból a kékbe 3 litert. E harmadik lehetőség az érdekes, hiszen a másik kettőt, amik a biliárdasztal valamelyik csúcsába visznek, egyébként is el tudnánk érni a kiinduló állapottól egy vagy két lépésben.

A 3. ábrán folytatva a golyó útját, már látszik is a megoldás: $(3, 2, 3) \rightarrow (6, 2, 0) \rightarrow (6, 0, 2) \rightarrow (1, 5, 2) \rightarrow (1, 4, 3) \rightarrow (4, 4, 0)$, ami éppen a célállapot.



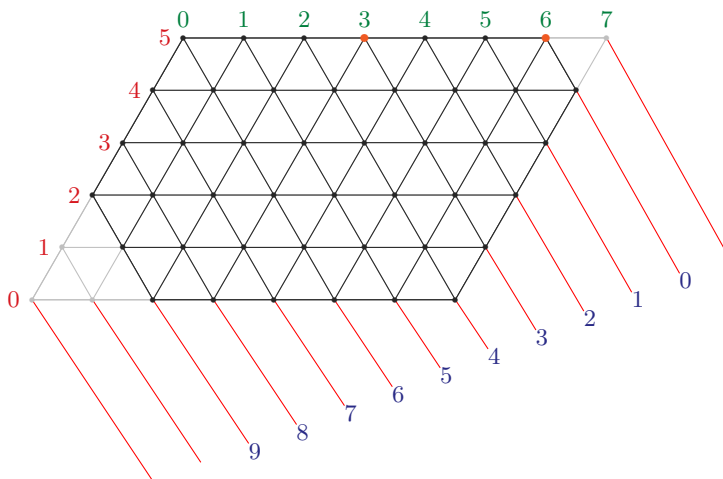
3. ábra. Egy lehetséges út a $(8, 0, 0)$ állapottól a $(4, 4, 0)$ állapotba

Kíváncsiságból megnézhetjük a golyó további útját: $(4, 4, 0) \rightarrow (4, 1, 3) \rightarrow (7, 1, 0) \rightarrow (7, 0, 1) \rightarrow (2, 5, 1) \rightarrow (2, 3, 3) \rightarrow (5, 3, 0) \rightarrow (5, 0, 3)$, ahonnan visszaléphetünk a kiinduló $(8, 0, 0)$ állapotba.

E hosszú körutunk során a paralelogramma kerületén minden rácspontban pattant a golyó, így ezek az állapotok mind elérhetők. Egyedül a $(0, 5, 3)$ csúcsponti

állapot nem esett eddig utunkba, de elérhettük volna a paralelogramma bármelyik felső vagy jobb oldali rácspontjából.

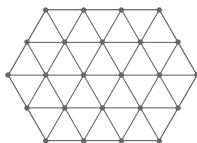
Ha az út legelején mégsem vízszintesen indultunk volna el, hanem jobbra felfelé, akkor is ezt a körutat kaptuk volna, csak visszafelé. Ez az észrevétel sorsdöntő lehet a feladat egy olyan lehetséges változatában, amelyben valamelyik kerületi rácspontnak, például az $(1, 4, 3)$ -nak megfelelő állapot valamilyen okból nincs megengedve. A feladat ettől még megoldható marad.



4. ábra. Egy trükkösebb öntögetős feladat biliárdasztalos modellje

Tekintsünk most egy másik, kicsit bonyolultabb öntögetős feladatot! Legyen a piros edény 5, a zöld 7, a kék edény pedig 9 liter űrtartalmú, a kiinduló állapot pedig $(0, 6, 5)$. Mivel a teljes vízmennyiség (11 liter) nagyobb, mint amennyi a legnagyobb edénybe fér, ezért a paralelogramma bal alsó sarkát le kell vágnunk, a kék edény 10 és 11 literes képzeletbeli szinthalmazaihoz tartozó rácspontokkal együtt. Le kell vágni a paralelogramma jobb felső sarkában lévő rácspontot is, mert a teljes vízmennyiség nem tudja a zöld és a piros edényeket egyszerre megtölteni. A biliárdasztalunk tehát hatszög alakú (4. ábra), amelyben a golyó pályája ugyanolyan szemléletesen követhető, mint a korábbi, egyszerűbb esetben. Elérhető-e a $(3, 3, 5)$ célállapot?

Találjunk ki további öntögetős feladványokat, és rajzoljuk fel a biliárdasztalos modelljüket! Vagy akár fordítva: kezdjük a rajzzal (mint például az 5. ábrán) és fogalmazzunk meg hozzá tartozó feladványokat, keressünk érdekes kezdő- és célállapotokat!



5. ábra. Keressünk a rajzhoz tartozó feladványokat!

A most tárgyalt geometriai modell abban a tekintetben hasonlít a 2024. szeptemberi [5] és októberi [8], illetve 2025. novemberi [1] számokban felrajzolt gráfokhoz, hogy az állapotoknak itt is egy-egy (rács)pont felel meg. Az öntögetős feladványban az állapotpárok közötti átmeneteket ugyan szintén be lehetne rajzolni éllel [4], de a biliárdasztalos ábrázolás – a maga szabályaival – egyszerűbben és szemléletesebben jeleníti meg a megengedett lépéseket.

Jó szórakozást!

Hivatkozások

- [1] Bozóki Sándor: A Hanoi tornyai feladvány gráfja, KöMaL, 2025. november.
- [2] Nicolas Chuquet (1484): Triparty en la science des nombres.
- [3] Henry Ernest Dudeney (1917): Amusements in Mathematics (109. o.).
- [4] S. M. Hegde, S. Kulamarva (2025): A Graph-Theoretic Model for a Generic Three-Jug Puzzle, <https://arxiv.org/abs/2308.13868>.
- [5] Kós Géza: Átkelés a folyón, KöMaL, 2024. szeptember.
- [6] Hugo Steinhaus: Matematikai kaleidoszkóp, Gondolat Kiadó, 1984, 66–67. o.
- [7] M. C. K. Tweedie (1939): A Graphical Method of Solving Tartaglian Measuring Puzzles, The Mathematical Gazette 23(255) 278–282.
- [8] Víg Viktor: Rejtvények, ördöglakatok rovat, KöMaL, 2024. október.

Bozóki Sándor



Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire

I. rész

1. a) Egy számtani sorozat három egymást követő tagja (ebben a sorrendben): y , x és $4x - 5$. Határozza meg ezeket a számokat, ha összegük 1500. (4 pont)

b) Hány olyan mértani sorozat van, amelynek első 5 tagja között szerepel a 2, a 8 és a 32, ha számít a tagok sorrendje is? (5 pont)

c) Rendezze növekvő sorrendbe az alábbi halmazok számosságát! Válaszát indokolja!

$$A = \{x \mid x^2 + 2x + 1 = 2 \text{ egyenlet racionális megoldásai}\};$$

$$B = \{A \text{ 40 pozitív osztói}\};$$

$$C = \left\{n \mid 3^{-n+1} > \frac{1}{27^3}, n \in \mathbb{N}\right\}. \quad (5 \text{ pont})$$

2. a) Bizonyítsa be az alábbi állítást:

„Ha egy derékszögű háromszög mindhárom oldalának hossza pozitív egész szám, akkor az átfogóhoz tartozó magasságának hossza racionális.” (4 pont)

b) Írja fel az a) feladatban szereplő állítás megfordítását, és döntse el róla, hogy igaz vagy hamis! Válaszát indokolja! (3 pont)

c) Összeadtuk 27 különböző prímszám négyzetét, és eredményül 155 787-et kaptunk. Szerepelhetett-e a prímek között a 3?

3. Egy táborban 90 diák vett részt, akiket faházakban szállásoltak el. A faházak mindegyike négy-, nyolc- vagy kilencágas volt, a nyolcágasból pontosan öt darab. Miután a diákok elfoglalták a házakat, nem maradt üres ágy.

a) Érkezéskor a szállásadó odaadta az egyik kísérőtanárnak egyesével a kulcsokat. Először a négyágasokét, utána a nyolcágasokét, végül pedig a kilencágasokét. Hányféle sorrendben tehette ezt meg, ha minden faháznak egy kulcsa van, és a kulcsok különbözőek? (4 pont)

Egyik délután a diákok több különböző túralehetőségből választhattak. Összesen 6 csoport alakult a 90 főből. A hat csoport létszámáról a következőket tudjuk:

- i) minden csoport létszáma osztható hattal,
- ii) van olyan csoport, amelyikben éppen feleannyian vannak, mint egy másikban,
- iii) a létszámoknak két módusza van, az egyik megegyezik a mediánnal,
- iv) terjedelme 30.

b) Adja meg, hogy hány fő volt az egyes csoportokban! (6 pont)

4. a) Tekintsük az alábbi pontokat a koordináta-rendszerben:

$$A(\log_3 r; \log_3 5r); \quad B\left(-\log_3\left(\frac{r}{3}\right); \log_{\frac{1}{3}} 10\right) \quad \text{és} \quad C(\log_r 1; \log_r 1).$$

Mennyi $r \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ értéke, ha tudjuk, hogy az ABC háromszög súlypontja az $S(\frac{1}{3}; \frac{1}{3})$ pontban van? (5 pont)

b) Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto 2x^3 + 6x - 6x^2 - 2$ függvény. Adja meg annak a valós számokon értelmezett $g(x)$ függvénynek a hozzárendelési szabályát, amelyre $g(f(x)) = x$. (4 pont)

c) Határozza meg a $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 + px + p$ függvény hozzárendelési szabályában a p nemnulla valós paraméter értékét úgy, hogy a g és az $x \mapsto x + 1$ lineáris függvény grafikonjainak pontosan egy metszéspontja legyen! (6 pont)

II. rész

5. a) Egy szabályos hatszög alapú egyenes hasáb alap- és oldaléleinek hossza egyenlő. Ha térfogatának adott mértékrendszerben kifejezett mérőszámát elosztjuk a felszínének ugyanabban a mértékrendszerben kifejezett mérőszámával, akkor a hányados 1,392. Hány egység hosszú a hasáb egy éle? Válaszát egészre kerekítse! (9 pont)

b) Egy hatszög alapú hasáb élei közül kiválasztunk hármat. Mennyi a valószínűsége, hogy a három él közül pontosan kettőnek van közös pontja? (7 pont)

6. Egy marketingcég egy újfajta csokoládéről készít 100 fős közvéleménykutatást. Először a termék ismerete nélkül, csak a neve alapján döntenek a résztvevők,

hogy vennének-e ilyet. Ezután meg is kóstoltatják velük a terméket és újra megkérdezik tőlük, hogy megvennék-e. A két kérdésre adott válaszokat az alábbi táblázat mutatja:

	Név alapján	Kóstolás után
igen	45	72
nem	55	28

a) Legfeljebb hány ember változtathatta meg a véleményét a termék megvásárlásáról a kóstolás hatására? (4 pont)

b) Lehet-e, hogy éppen 42 ember véleménye maradt változatlan a kóstolás hatására? (4 pont)

Ugyanez a cég szervezi egy társasjáték reklámkampányát is. A játék egyik tartozéka egy szabályos ikozaéder. Ennek 20 oldallapja van, és a feldobása után bármelyikre ugyanakkora valószínűséggel esik. A lapokon csak 4-es, 7-es és 11-es szám szerepel (mindegyiken pontosan egy). A szabálykönyvben egy helyen ezt írják: „a három számból kettő dobási valószínűsége ugyanannyi, és a dobás eredményének várható értéke 7,35”.

c) Hány 4-es szerepel a dobótesten? (8 pont)

7. Egy erdei kilátótorony egyik emelete szabályos ötszög alakú, amelynek oldalai 5 métereseek. Az emelet padlóján elhelyeztek két, különböző „fotópontot”, ahová állva a legjobb fotókat lehet készíteni a tájról. Külön-külön mindkét pontra igaz, hogy egyenlő távol van az ötszög köré írt körének középpontjától és két szomszédos csúcsától.

a) Legfeljebb milyen messze lehet egymástól a két „fotópont”? (11 pont)

b) A kilátóban ingyenes tájékoztatófüzetet osztanak az erdő élővilágáról. Ebben van egy ábra is, amelyben tíz, a környékre jellemző állatból álló tápláléklánc szerepel. A képen két állatot egy vonallal összekötöttek, ha az egyik megeszi a másikat. Balambér azt számolta, hogy van két állatkép, amiből csak 3 vonal indul ki, de a többiből legalább hat. Testvére szerint ez azt jelenti, hogy bármelyik állatképtől el lehet jutni bármelyik másikhoz a vonalak mentén. Igaza van-e? (5 pont)

8. a) Egy konkáv deltoidot a szimmetriatengelye körül megforgatva olyan forgástestet kapunk, amelyiknek a térfogata $\frac{500\pi}{3}$ dm³. Számítsa ki a deltoid területét, ha az egyik átlója 5 dm-es. (7 pont)

b) Meghatároztuk a valós számok halmazán értelmezett

$$f(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 4)$$

hozzárendelési szabállyal megadott függvény zérushelyeit. Ezután kiszámítottuk a második, illetve harmadik legnagyobb zérushely közötti határozott integrál értékét, így egy nem egész számot kaptunk. Melyik az a legkisebb pozitív szám, amellyel megszorozva az f -et a szóban forgó határozott integrál egész? (5 pont)

c) Írja fel az $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ függvény egy x tengellyel párhuzamos érintőjének az egyenletét! (4 pont)

9. a) Bizonyítsa be, hogy tetszőleges $x, y \in \left[\frac{\pi}{7}; \frac{3\pi}{7}\right]$ esetén az $\mathbf{a}(\operatorname{tg} x; \operatorname{tg} y)$ és a $\mathbf{b}\left(\frac{\cos x}{\sin x}; \frac{\cos y}{\sin y}\right)$ vektor skaláris szorzata 2. (4 pont)
- b) Oldja meg az

$$\frac{x}{y^2} + \frac{1}{xy} = \frac{4-x}{y} - \frac{1}{x}$$

egyenletet a pozitív valós számpárok halmazán! (5 pont)

- c) Az alábbi végtelen összegről tudjuk, hogy konvergens és értéke negatív, valós szám. Adja meg a $p \in \mathbb{R}$ lehetséges értékeit! (7 pont)

$$\frac{1}{p+1} + \frac{p^2-1}{p+1} + \frac{(p^2-1)^2}{p+1} + \frac{(p^2-1)^3}{p+1} + \dots < 0$$

(7 pont)

Polák Péter
Budapest

Megoldásvázlatok a 2026/3. szám matematika gyakorló feladatsorához

I. rész

1. a) Oldja meg a valós számpárok halmazán az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} \frac{5}{x+y} + \frac{4}{x-2y} &= \frac{3}{4}, \\ \frac{15}{x+y} - \frac{8}{x-2y} &= 1. \end{aligned} \quad (9 \text{ pont})$$

- b) Egy kétjegyű szám 5-tel osztva 2-t, 6-tal osztva 3-at, 9-cel osztva 6-ot ad maradékul. Melyik ez a kétjegyű szám? (5 pont)

Megoldás. a) A törtek nevezői miatt $x+y \neq 0$ és $x-2y \neq 0$. Az $a = \frac{1}{x+y}$; $b = \frac{1}{x-2y}$ új ismeretlenek bevezetésével ezt az egyenletrendszert kapjuk:

$$5a + 4b = \frac{3}{4}, \quad (1)$$

$$15a - 8b = 1. \quad (2)$$

Az első egyenletet 2-vel megszorozzuk:

$$10a + 8b = \frac{3}{2}. \quad (3)$$

Összeadjuk a (2) és a (3) egyenletet:

$$\begin{aligned}25a &= 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}, \\ a &= \frac{1}{10}.\end{aligned}$$

Ezt az (1) egyenletbe behelyettesítve:

$$\frac{5}{10} + 4b = \frac{3}{4}; \quad 4b = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}; \quad b = \frac{1}{16}.$$

$a = \frac{1}{10}$ és $b = \frac{1}{16}$ alapján:

$$\begin{aligned}x + y &= 10, \\ x - 2y &= 16.\end{aligned}$$

Az első egyenletből kivonjuk a másodikat:

$$3y = -6; \quad y = -2.$$

Behelyettesítéssel kapjuk, hogy $x = 12$.

Az eredeti egyenletekbe behelyettesítve látjuk, hogy ezek az értékek valóban megoldások:

$$\begin{aligned}\frac{5}{12 + (-2)} + \frac{4}{12 - 2 \cdot (-2)} &= \frac{5}{10} + \frac{4}{16} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}, \\ \frac{15}{12 + (-2)} - \frac{8}{12 - 2 \cdot (-2)} &= \frac{15}{10} - \frac{8}{16} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1.\end{aligned}$$

Az egyenletrendszer megoldása $x = 12$ és $y = -2$.

b) A keresett kétjegyű számnál a 3-mal nagyobb szám osztható 5-tel, 6-tal és 9-cel is, a legkisebb (és egyetlen) ilyen kétjegyű szám a 90, tehát az eredeti a 87 lehet csak, ami valóban teljesíti a feltételeket.

2. Szatmári Ferenc családjával egy meleg nyári napon autóval Budapestről Kisvárdára utazott. 7 óra 50 perckor indult. 25 perc alatt, 12 km-t haladva érte el az M3-as autópályát. 10 óra 55 perckor a 403-as útra tért le az autópályáról, majd 40 km megtétele után, összesen 284 kilométert vezetve 11:35 perckor ért Kisvárdára.

a) Mekkora volt az autó átlagsebessége az autópályán? (3 pont)

Az M3-ason öt alkalommal összesen 20 km-en volt útjavítás miatt sebességkorlátozás. Ezeken a szakaszokon a megengedett maximális sebesség 80 km/h volt, de az autósok ezeken a szakaszokon csak 50 km/h sebességgel tudtak vezetni.

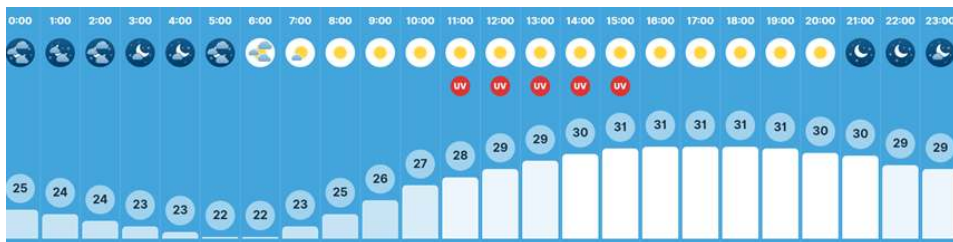
b) Ferenc úgy gondolta, hogy ha itt 120 km/h sebességgel haladhatott volna, akkor legalább fél órával hamarabb ért volna Kisvárdára. Igaza van-e Ferencnek?

(3 pont)

A család három gyereke, Péter, Anna és Lilla az autó hátsó ülésén utazott, ahol szabály szerint három ember ülhet. Péter azt kérte, hogy ne ő üljön középre, nem szeret a két lány között utazni.

c) Hányféle módon ülhettek be a kocsí hátsó három ülésére, ha Péter kérését figyelembe vették? (3 pont)

Az erre a napra készült óránkénti időjárás-előrejelzést mutatja az Időkép applikáció grafikonja:



d) Mekkora az óránkénti hőmérsékleti értékek módusza, illetve mediánja ezen a napon? Mekkora az óránkénti adatok alapján az átlaghőmérséklet? (4 pont)

Megoldás. a) Az M3-ason megtett út $284 - 12 - 40 = 232$ km. 8:15-kor ért az autópályára, 8:15-től 10:55-ig 2 óra 40 perc, azaz $2\frac{2}{3}$ óra telt el. Az átlagsebesség $\frac{232 \text{ km}}{2\frac{2}{3} \text{ óra}} = 87 \text{ km/h}$ volt.

b) A 20 km 50 km/h sebességgel $\frac{20 \text{ km}}{50 \frac{\text{km}}{\text{h}}} = 0,4 \text{ óra} = 24 \text{ perc}$ alatt tehető meg, így semmiképpen nem spórolhat 30 percet.

c) Péter a jobb vagy bal szélső ülésre ülhet. Ez két lehetőség. Ezután Anna két helyre kerülhet, Lilla pedig a fennmaradó helyre ül. A választások egymástól függetlenek, ezért $2 \cdot 2 = 4$ lehetőség van.

d) A hőmérsékleti értékek előfordulásának gyakoriságát az alábbi táblázatban foglaljuk össze:

hőmérséklet (fok)	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
gyakoriság	2	3	2	2	1	1	1	4	3	5

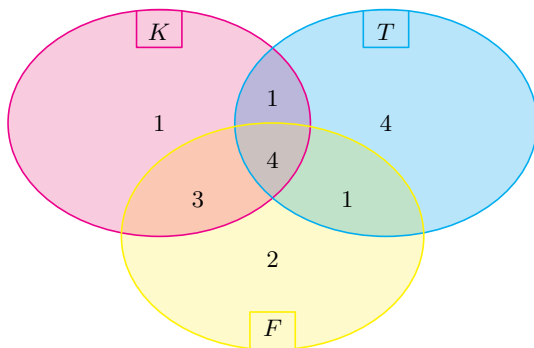
A táblázat alapján: a módusz 31 fok.

24 adat van. Nagyság szerint sorba rendezve a 12. adat 28 fok, a 13. adat 29 fok. Így a medián $(28 + 29) : 2 = 28,5$ fok.

A hőmérsékletek átlaga:

$$\frac{2 \cdot 22 + 3 \cdot 23 + 2 \cdot 24 + 2 \cdot 25 + 26 + 27 + 28 + 4 \cdot 29 + 3 \cdot 30 + 5 \cdot 31}{24} = \frac{653}{24} = 27,2 \text{ fok.}$$

3. A 30 fős 11. a osztály tanulói sokféle nyári programon vettek részt. Többek között külföldre (K) utaztak, balatoni táborban (T) voltak, könnyűzenei fesztiválon (F) vettek részt. Az alábbi halmazábra mutatja, hogy melyik programon hány diák volt.



a) *Hányan nem voltak sem külföldi úton, sem táborban, sem fesztiválon?*

(2 pont)

b) *Véletlenszerűen kiválasztunk az osztály tanulói közül egyet. Mennyi a valószínűsége annak, hogy volt külföldön vagy táborban, de nem vett részt fesztiválon?*

(3 pont)

A kötelező és ajánlott olvasmányok elolvasása nem mindig könnyű. Egy tanévben akár 15 irodalmi alkotás is szerepelhet az olvasmányok listáján.

c) *Egy 405 oldalas kötelező olvasmányt Soma az alábbi terv szerint kíván elolvasni pontosan 15 nap alatt. A második naptól kezdve minden nap egy oldallal többet olvas el, mint az előző nap. Hány oldal elolvasását tervezi az első napra és hányat a tizenötödikre?*

(5 pont)

Az egyik matematikaszakkörön 7 tanuló jelent meg. Matematikatanárunk beszélgetéssel szokta kezdeni a nyolcadik órában tartott szakkört.

d) *Megkérdezte a jelenlévőktől, hogy hány embert hívtak fel mobiltelefonon az előző héten a jelenlévő diákok közül. Ezeket a számokat mondták: Péter 4, Sári 1, Balázs 0, Sanyi 2, Bori 2, Ernő 4, Miki 2. Tanáruk erre azt mondta, valaki rosszul emlékszik. Mire alapozta a véleményét a matematikatanár?*

(2 pont)

Megoldás. a) A halmazábrában szereplő számok összege: $1 + 1 + 4 + 3 + 4 + 1 + 2 = 16$ megmutatja, hogy hányan voltak legalább egy programon a három közül.

Az osztálylétszám 30, így $30 - 16 = 14$ diák nem volt sem külföldi úton, sem táborban, sem fesztiválon.

b) Határozzuk meg a $(K \cup T) \setminus F$ halmaz elemszámát. A halmazábra megfelelő tartományaiban lévő számokat adjuk össze: $1 + 1 + 4 = 6$. A kedvező esetek száma tehát 6, az összes eset 30. A keresett valószínűség $\frac{6}{30} = \frac{1}{5} = 0,2$.

c) Az első nap x oldalt, az utolsó nap $x + 14$ oldalt olvas el Soma, a 15 nap alatt $\frac{(x + x + 14) \cdot 15}{2} = 405$ oldalt. Az egyenletet rendezve: $(x + x + 14) \cdot 15 = 810$,

$$2x + 14 = 54,$$

$$x = 20.$$

Ezek alapján Soma úgy tervezi, hogy az első napon 20 oldalt, a tizenötödik napon $20 + 14 = 34$ oldalt olvas el.

d) Minden mobiltelefonos beszélgetést a benne részt vevő két ember említi meg, így az elhangzott számok összegének párosnak kellene lennie. Mivel az elhangzott számok összege: $4 + 1 + 0 + 2 + 2 + 4 + 2 = 15$ páratlan, valóban nem mindenki emlékezett jól.

Megjegyzés. A feladatot lerajzolhatjuk egy gráffal is. A gráf pontjai a diákoknak felelnek meg, az élek pedig azt jelölik, hogy a két diák folytatott telefonbeszélgetést. Tudjuk, hogy egy gráfban a foksámok összege páros. Úgy is fogalmazhatunk, hogy a páratlan foksámú pontok száma páros. A feladatnak megfelelő gráfban ez nem teljesül.

4. Bizonyítsa be az alábbi állításokat:

$$a) \binom{2024}{10} + 2 \cdot \binom{2024}{11} + \binom{2024}{12} = \binom{2026}{12}. \quad (4 \text{ pont})$$

$$b) \text{ Ha } n \text{ pozitív egész szám, akkor } (n-1)! + n! + (n+1)! = (n+1)! \cdot \frac{n+1}{n}. \quad (4 \text{ pont})$$

$$c) \frac{3^{150} - 2 \cdot 3^{149} + 3^{148}}{3^{147} + 3^{146}} = 9. \quad (4 \text{ pont})$$

Megoldás. a) A Pascal-háromszög tulajdonsága szerint $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$, ezért

$$\begin{aligned} \binom{2024}{10} + 2 \cdot \binom{2024}{11} + \binom{2024}{12} &= \binom{2024}{10} + \binom{2024}{11} + \binom{2024}{11} + \binom{2024}{12} = \\ &= \binom{2025}{11} + \binom{2025}{12} = \binom{2026}{12}. \end{aligned}$$

b) Kifejezzük $n!$ -t és $(n+1)!$ -t $(n-1)!$ segítségével:

$$(n-1)! + n! + (n+1)! = (n-1)! + n \cdot (n-1)! + (n+1) \cdot n \cdot (n-1)!.$$

Az így kapott kifejezést egyszerűbb alakra hozzuk:

$$\begin{aligned} (1 + n + (n+1) \cdot n) \cdot (n-1)! &= (n^2 + 2n + 1) \cdot (n-1)! = \\ &= (n+1)^2 \cdot (n-1)! = \frac{(n+1) \cdot (n+1) \cdot n \cdot (n-1)!}{n} = (n+1)! \cdot \frac{n+1}{n}. \end{aligned}$$

c) A hatványozás azonosságainak használatával átalakítjuk a tört számlálóját és nevezőjét:

$$\frac{3^{150} - 2 \cdot 3^{149} + 3^{148}}{3^{147} + 3^{146}} = \frac{9 \cdot 3^{148} - 2 \cdot 3 \cdot 3^{148} + 3^{148}}{3 \cdot 3^{146} + 3^{146}} = \frac{4 \cdot 3^{148}}{4 \cdot 3^{146}} = 3^2 = 9.$$

II. rész

5. a) Oldja meg a valós számok halmazán a $\left(\sin(x) - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\cos(x) + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$ egyenletet. (7 pont)

b) Határozza meg az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{\sin(x) + 2}$ függvény értékkészletét! (4 pont)

Egy üzletben négyféle zsebszámológépet árúsítanak, 9500, illetve 6100 forintért PÖPEC típusút, 5800, illetve 7100 forintért SPICC típusút. Az üzlet statisztikája szerint a vevők 60%-a PÖPEC márkát vásárol, 40% SPICC-et választ. A PÖPEC számológépet vásárlók 40%-a a drágább típust választja, a SPICC típus esetében 65% dönt a drágább mellett.

c) A vásárlók hány százaléka vásárol 7000 forintnál olcsóbb számológépet? (5 pont)

Megoldás. a) Egy szorzat akkor és csak akkor 0, ha valamelyik tényezője 0.

Ha $\sin(x) - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$, akkor $\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $x = \frac{\pi}{3} + 2k \cdot \pi$ vagy $x = \frac{2\pi}{3} + 2l \cdot \pi$, $k, l \in \mathbb{Z}$.

Ha $\cos(x) + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$, akkor $\cos(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x = \frac{5\pi}{4} + 2m \cdot \pi$ vagy $x = \frac{3\pi}{4} + 2n \cdot \pi$, $m, n \in \mathbb{Z}$.

A $\sin(x)$ és $\cos(x)$ függvények periódusa 2π , ezért az ellenőrzést elég $k, l, m, n = 0$ -ra elvégezni. A kapott értékek valóban kielégítik az egyenletet.

b) Az $x \mapsto \sin(x)$ függvény értékkészlete a $[-1; 1]$ intervallum, ahonnan egyszerű függvénytranszformáció alapján a $\sin(x) + 2$ értékkészlete az $[1; 3]$ intervallum.

Így az $\frac{1}{\sin(x) + 2}$ függvény értékkészlete az $[\frac{1}{3}, 1]$ intervallum, mert minden $[\frac{1}{3}, 1]$ intervallumbeli elem egy $[1, 3]$ intervallumba eső szám reciproka.

c) 7000 forintnál olcsóbb az 5800 forintos SPICC és a 6100 forintos PÖPEC. SPICC-et választ a vevők 40%-a, közülük $100 - 65 = 35\%$ veszi az olcsóbb típust, ez a vevők $0,4 \cdot 0,35 = 0,14$ része. PÖPEC-et választ a vevők 60%-a, közülük $100 - 40 = 60\%$ veszi az alacsonyabb árú típust, ez a vevők $0,6 \cdot 0,6 = 0,36$ része. Összesen a vásárlók $0,14 + 0,36 = 0,5$ része, azaz 50%-a vásárol 7000 forintnál olcsóbb zsebszámológépet.

6. Értelmezzük az f függvényt az alábbi módon:

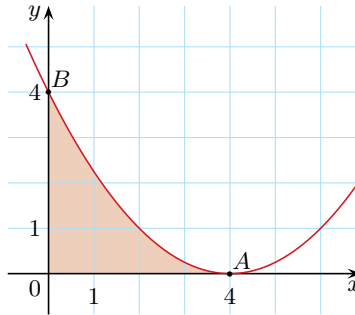
$$f: [0; 4] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{4}(x - 4)^2.$$

a) Határozza meg a függvény grafikonjának és a koordinátatengelyek közös pontjainak koordinátáit! (4 pont)

b) Mekkora az a terület, amelyet a függvény grafikonja és a koordinátatengelyek közrefognak? (6 pont)

c) Adja meg az f függvény inverzét! (6 pont)

Megoldás. a)



Az x tengelyen lévő pontok második koordinátája 0. Ha $\frac{1}{4}(x-4)^2 = 0$, akkor $x = 4$. Az ábra szerint az $A = (4; 0)$ pontban érinti a grafikon az x -tengelyt.

Az y tengelyen lévő pontok első koordinátája 0.

Ekkor $y = \frac{1}{4}(0-4)^2 = 4$. A grafikon a $B = (0; 4)$ pontban metszi az y tengelyt.

b) A keresett területet határozott integrállal tudjuk kiszámítani az a) feladatban adott intervallumon:

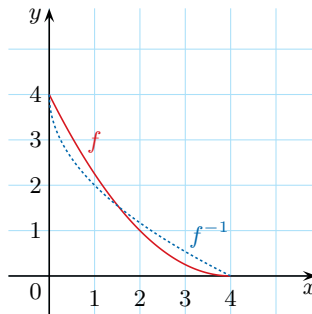
$$T = \int_0^4 \frac{1}{4}(x-4)^2 dx = \int_0^4 \frac{1}{12}(x-4)^3 dx = \left[\frac{1}{12}(x-4)^3 \right]_0^4 = \frac{16}{3} \text{ területegység.}$$

b) $f(0) = 4$; $f(4) = 0$. Az f függvény folytonos, ezért az értékkészlete a $[0; 4]$ intervallum. Ennek megfelelően az inverz függvény értelmezési tartománya a $[0; 4]$ intervallum. A függvény hozzárendelési szabálya szerint $y = \frac{1}{4}(x-4)^2$, $4y = (x-4)^2$, $y \geq 0$, ezért $2\sqrt{y} = |x-4|$, $0 \leq x \leq 4$, így $|x-4| = 4-x$.

$$2\sqrt{y} = 4 - x,$$

$$x = 4 - 2\sqrt{y}.$$

Tehát az inverz függvény hozzárendelési szabálya $y \mapsto 4 - 2\sqrt{y}$. Az inverz függvény változóját is x -szel jelölve: $f^{-1}: [0; 4] \rightarrow \mathbb{R}$; $x \mapsto 4 - 2\sqrt{x}$. Az ábrán látjuk az f függvény és az f^{-1} függvény grafikonját.



7. Az e egyenes egyenlete $4x + 3y = 120$, az f egyenes egyenlete $3x - 4y = -60$. Az $ABCD$ négyszögben az A csúcs a $(0; 0)$ pont, a B csúcs az x tengelyen, a D

csúcs az y tengelyen van. A BC oldal az e egyenesre, a CD oldal az f egyenesre illeszkedik.

- a) Számítsa ki a négyszög B , C , D csúcsainak a koordinátáit! (4 pont)
 b) Bizonyítsa be, hogy a négyszög húrnégyszög! (5 pont)
 c) Írja fel a négyszög köré írható körének az egyenletét! (4 pont)

Az interneten találtunk egy 25 feladatot tartalmazó gyakorló feladatsort. A feladatok közül 8 a sorozatok, 6 a függvények, 4 a kombinatorika, 7 a koordinátageometria témakörbe tartozik.

d) Találomra egyszerre választunk ezek közül öt feladatot úgy, hogy minden feladatot ugyanakkora eséllyel választunk ki. Mennyi a valószínűsége annak, hogy 3 sorozatos és 2 koordinátageometriai feladat lesz a választottak között? (3 pont)

Megoldás. a) A B pont rajta van az x tengelyen, ezért a második koordinátája 0. Illeszkedik az e egyenesre is, tehát $4x + 3y = 120$ és $y = 0$. Innen $x = 30$, tehát $B = (30; 0)$.

A D pont az y tengelyen és az f egyenesen van: $x = 0$ és $3x - 4y = -60$ feltételekből $y = 15$; $D = (0; 15)$.

A C csúcs az e és f egyenesek metszéspontja, koordinátáit ennek az egyenletrendszernek a megoldásával kapjuk:

$$\left. \begin{array}{l} 4x + 3y = 120 \\ 3x - 4y = -60 \end{array} \right\}.$$

Az első egyenletet 4-gyel, a másodikat 3-mal szorozva és a két egyenletet összeadva:

$$25x = 300, \quad x = 12.$$

Visszahelyettesítéssel $y = 24$, $C = (12; 24)$.

b) Az x és y tengely merőleges egymásra, tehát a négyszög A csúcsánál derékszög van.

$$\overrightarrow{CB} = (30 - 12; 0 - 24) = (18; -24), \quad \overrightarrow{DC} = (12 - 0; 24 - 15) = (12; 9).$$

c) A két vektor skaláris szorzata $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{DC} = 18 \cdot 12 + (-24) \cdot 9 = 0$, így a két vektor merőleges egymásra. A négyszög két szemben lévő szögének összege 180° , ezért a négyszög húrnégyszög. Az ABD háromszög és a BCD háromszög derékszögű. A Thalész-tétel megfordítása miatt az A és a C csúcsok rajta vannak a BD átmérőjű körön. Ez éppen a négyszög köré írható kör lesz. (Az ábrát lásd a túloldalon.)

A BD szakasz felezőpontja, $O = \left(\frac{30+0}{2}; \frac{0+15}{2} \right) = (15; 7,5)$ a kör középpontja.

A körülírt kör sugara $r = OB = \sqrt{(30-15)^2 + (0-7,5)^2} = \sqrt{281,25}$.

A kör egyenlete: $(x-15)^2 + (y-7,5)^2 = r^2 = 281,25$.

d) A huszonöt feladatból ötöt $\binom{25}{5}$ -féle módon választhatunk ki. A sorozatokra vonatkozó feladatok közül hármat $\binom{8}{3}$, a koordinátageometria feladatok közül

Az egyik piacon karácsony előtt évek óta háromféle fenyő verseng a vásárlók kegyeiért: a nordmannfenyő, a lucfenyő és az ezüstenyő. A nordmannfenyőt 45, a lucfenyőt 37, míg az ezüstenyőt a vásárlók 13 százaléka választja. 5 százalék más fenyőfajták részesedése az eladásokban.

c) Ha véletlenszerűen megkérdezzük hat fenyőfát vásárló embert, hogy milyen fát vett, akkor mennyi annak a valószínűsége, hogy közülük három nordmannfenyőt, kettő lucfenyőt és egy ezüstenyőt vásárolt? A valószínűség értékét három tizedesjegy pontossággal adja meg. (Feltételezzük, hogy mindenki pontosan egy fenyőfát vásárolt.) (5 pont)

Megoldás. a) A feladat alapján 2025. október végén 12 000 fenyőfa van. Ennek 10%-át, $12\,000 \cdot 0,1 = 1200$ fát kivágnak decemberben, és megmarad az állomány 90%-a, $12\,000 \cdot 0,9 = 10\,800$ fa.

Ilyen módon számolva az alábbi táblázat mutatja az egyes években az ültetés utáni állomány nagyságát, a kivágott fa mennyiségét és az év végére maradó állomány mennyiségét:

Év	ültetés után	kivágás	év vége
2025	12 000	1200	10 800
2026	12 800	$12\,000 \cdot 0,1 = 1280$	$12\,000 \cdot 0,9 = 11\,520$
2027	13 520	$13\,520 \cdot 0,1 = 1352$	$13\,520 \cdot 0,9 = 12\,168$

Így tehát $1200 + 1280 + 1352 = 3832$ fa kivágását tervezik.

b) $a_1 = 12\,000 \cdot 0,9$; $a_2 = 12\,000 \cdot 0,9^2 + 2000 \cdot 0,9$. A képzési szabály alapján:

$$\begin{aligned} a_n &= (a_{n-1} + 2\,000) \cdot 0,9 = \\ &= 12\,000 \cdot 0,9^n + 2000 \cdot 0,9^{n-1} + 2000 \cdot 0,9^{n-2} + \dots + 2000 \cdot 0,9. \end{aligned}$$

Az összeg a második tagtól kezdve egy mértani sorozat első $n - 1$ tagjának az összege. Felhasználjuk, hogy ennek a mértani sorozatnak az első tagja $2000 \cdot 0,9$, a kvóciense $0,9$.

$$\begin{aligned} a_n &= 12\,000 \cdot 0,9^n + 2\,000 \cdot 0,9 \cdot \frac{0,9^{n-1} - 1}{0,9 - 1} = 12\,000 \cdot 0,9^n + 2000 \cdot 0,9 \cdot \frac{0,9^{n-1} - 1}{-0,1} = \\ &= 12\,000 \cdot 0,9^n + 18\,000 \cdot (1 - 0,9^{n-1}). \end{aligned}$$

És ezt a kifejezést tovább egyszerűsítve megkaphatjuk azt is, hogy

$$a_n = 18\,000 - 8000 \cdot 0,9^n.$$

c) Annak a valószínűsége, hogy az első három ember nordmannfenyőt, a következő kettő ezüstenyőt, a hatodik lucfenyőt vásárolt $0,45^3 \cdot 0,37^2 \cdot 0,13$. Hatból három embert $\binom{6}{3}$ -féle módon választhatunk ki, a maradék háromból kettőt $\binom{3}{2}$ -féle módon. Ekkor egy ember marad a harmadik fenyőfajára. $\binom{6}{3} \cdot \binom{3}{2}$ -féle sorrend

lehetséges. A sorrendet is figyelembe véve a keresett valószínűség

$$\binom{6}{3} \cdot \binom{3}{2} \cdot 0,45^3 \cdot 0,37^2 \cdot 0,13 = 20 \cdot 3 \cdot 0,45^3 \cdot 0,37^2 \cdot 0,13 \approx 0,097.$$

9. a) Oldja meg a valós számok halmazán a $\lg(36 + 2^{\sqrt{3x}}) > 2$ egyenlőtlenséget! (7 pont)

b) Fogalmazza meg az alábbi állítás megfordítását! Döntse el, hogy igaz-e az állítás és annak megfordítása!

Ha egy valós szám nagyobb, mint 5, akkor értelmezhető a valós szám tízes alapú logaritmus. (3 pont)

Egy emelt szintű érettségi feladatsor II. részében öt feladat van, 5–9-ig számozva. Ezekből csak négyet kell megoldania a vizsgázónak.

c) Egy 17-fős matematika csoportból mindenki emelt szinten írta az érettségi dolgozatát. Péter és Anna beszélgetnek:

Péter: Biztos, hogy közülünk legalább négy ember ugyanazt a feladatot hagyta ki.

Anna: Biztos, hogy volt olyan feladat, amelyet pontosan négyen hagytak ki.

Melyikük állítása igaz? Indokolja a választ! (4 pont)

Az alábbi táblázat mutatja, hogy az egyes feladatokat hányan választották és ha foglalkoztak vele, hányan oldották meg hibátlanul, 16 pontra.

	5. feladat	6. feladat	7. feladat	8. feladat	9. feladat
foglalkozott vele	14	14	16	13	11
16 pontos	4	6	9	3	5

d) Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy dolgozatot véletlenszerűen kiválasztva a 17 közül, abban azt látjuk, hogy az érettségiző a 8. feladatot 16 pontra oldotta meg? (2 pont)

Megoldás. a) A négyzetgyököt csak nemnegatív számokra értelmezzük, ezért $\sqrt{3x}$ akkor van értelmezve, ha $x \geq 0$. A logaritmusfüggvény értelmezési tartománya a pozitív számok halmaza. $2^{\sqrt{3x}} + 36 \geq 2^0 + 36 > 0$, így $\lg(36 + 2^{\sqrt{3x}})$ az $x \geq 0$ feltétel mellett mindig értelmezhető. Tehát az egyenlőtlenség megoldását az $x \geq 0$ feltétellel keressük.

$$\lg(36 + 2^{\sqrt{3x}}) > 2 = \lg 100.$$

Felhasználjuk, hogy a 10-es alapú logaritmusfüggvény szigorúan monoton nő:

$$36 + 2^{\sqrt{3x}} > 100, \quad 2^{\sqrt{3x}} > 64 = 2^6.$$

A 2-es alapú exponenciális függvény szigorúan monoton nő, ezért $\sqrt{3x} > 6$. Mivel mindkét oldal nemnegatív, a négyzetre emelés ekvivalens átalakítás, így $3x > 36$, amiből $x > 12$. Ez megfelel az értelmezési tartomány feltételének is, tehát az egyenlőtlenség megoldása: $x > 12$, $x \in \mathbb{R}$. Ekvivalens átalakításokat végeztünk.

b) Az állítás megfordítása: Ha egy valós szám tízes alapú logaritmus értelmezhető, akkor a szám nagyobb mint 5. Bármelyik 5-nél nem nagyobb pozitív szám megfelelő ellenpélda. Az eredeti állítás igaz, a megfordítása hamis.

c) Indirekt módon bizonyítunk. Ha mindegyik feladatot legfeljebb hárman hagyták volna ki, akkor a csoportban legfeljebb $5 \cdot 3 = 15$ érettségiző lenne. Így valamelyik feladatot legalább négyen hagyták ki. Péternek igaza van.

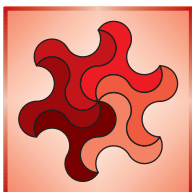
Annának viszont nincs igaza, ha például mindenki a 9. feladatot hagyja ki.

d) A 17 dolgozat közül háromban van maximális pontszámú 8. feladat. Így a keresett valószínűség: $P = \frac{3}{17} \approx 0,176$.

Megjegyzés. A diákok $\frac{13}{17}$ része foglalkozott a 8. feladattal. Ezen diákok $\frac{3}{13}$ része kapott megoldására 16 pontot. Annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott dolgozatban a 8. feladatra a diák 16 pontot kapott $\frac{13}{17} \cdot \frac{3}{13} = \frac{3}{17} \approx 0,176$.

Horváth Eszter

Budapest

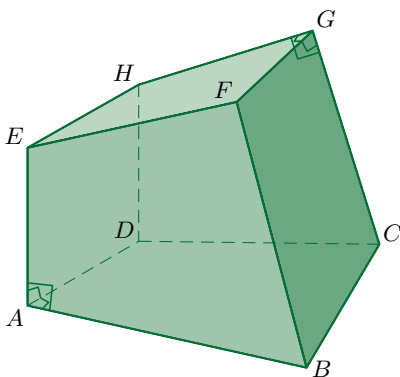


Matematika feladatok megoldása

B. 5453. Egy konvex polidéder lapjai az $ABCD$, $ABFE$, $BCGF$, $CDHG$, $ADHE$ és $EFGH$ négyszögek az ábra szerint. Az A , illetve a G csúcsból induló élek páronként merőlegesek egymásra. Igazoljuk, hogy

$$[ABCD]^2 + [ABFE]^2 + [ADHE]^2 = [BCGF]^2 + [CDHG]^2 + [EFGH]^2.$$

($[XYZW]$ az $XYZW$ négyszög területét jelöli.)



(6 pont)

javasolta: Kós Géza (Budapest)

Megoldás. A feladat állítása többféleképpen igazolható vektorok segítségével. A honlapon megjelent elegáns megoldás egy nevezetes, de középiskolában talán még kevésbé ismert tételt használ fel, ezért itt mutatunk két direktebb lehetséges utat. Ezek valójában menet közben a honlapon használt tételt igazolják a feladatban szereplő speciális poliéderre; az első gondolatmenet térfogat-összefüggések segítségével, a második merőleges vetítésekkel használva. A tagoltabb, jobban követhető leírás érdekében a skalárszorzatra a szokásos jelölés helyett a kevésbé elterjedt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ írásmódot használjuk.

1. megoldás. Rendre jelölje $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, illetve $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}$ és $\hat{\mathbf{k}}$ az $\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}$, illetve $\overrightarrow{GC}, \overrightarrow{GF}$ és $\overrightarrow{GH}$ irányú egységvektorokat.

Legyen továbbá $\mathbf{I} = \mathbf{i} \cdot [ABCD]$. Ekkor tetszőleges P pontra $\langle \overrightarrow{AP}, \mathbf{I} \rangle / 3$ éppen az $ABCDP$ gúla előjeles térfogata, hiszen $\langle \overrightarrow{AP}, \mathbf{i} \rangle$ éppen a gúla magassága aszerint előjelezve, hogy P az $ABCD$ sík melyik oldalára esik.

Hasonlóan definiáljuk a $\mathbf{J} = \mathbf{j} \cdot [ABFE]$ és $\mathbf{K} = \mathbf{k} \cdot [ADHE]$ vektorokat. Ekkor az előző bekezdés szerint

$$\frac{\langle \overrightarrow{AP}, \mathbf{I} \rangle + \langle \overrightarrow{AP}, \mathbf{J} \rangle + \langle \overrightarrow{AP}, \mathbf{K} \rangle}{3} = \frac{\langle \mathbf{v}, \overrightarrow{AP} \rangle}{3},$$

éppen a három gúla uniójaként előálló $ABCDEFPH$ poliéder térfogata (ha $P \in ABCDEFGH$), ahol $\mathbf{v} = \mathbf{I} + \mathbf{J} + \mathbf{K}$. Mivel a feladat feltételei szerint $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ és $\mathbf{k}$, és így $\mathbf{I}, \mathbf{J}$ és $\mathbf{K}$ is páronként merőlegesek, így

$$\mathbf{v}^2 = (\mathbf{I} + \mathbf{J} + \mathbf{K})^2 = \mathbf{I}^2 + \mathbf{J}^2 + \mathbf{K}^2 = [ABCD]^2 + [ABFE]^2 + [ADHE]^2.$$

Analóg módon bevezetjük $\hat{\mathbf{v}} = \hat{\mathbf{I}} + \hat{\mathbf{J}} + \hat{\mathbf{K}}$ vektort, amire az előzőekhez hasonlóan

$$\hat{\mathbf{v}}^2 = \hat{\mathbf{I}}^2 + \hat{\mathbf{J}}^2 + \hat{\mathbf{K}}^2 = [BCGF]^2 + [CDHG]^2 + [EFGH]^2;$$

valamint $\langle \overrightarrow{GP}, \hat{\mathbf{v}} \rangle / 3$ a megfelelő három gúla össztérfogata.

Tetszőleges $P \in ABCDEFGH$ pontra az $ABCDEFGH$ poliéder felbomlik $ABCDP, ABFEP, ADHEP, BCGFP, CDHGP$ és $EFGHP$ gúlák uniójára, ahol a gúlák belsejei páronként diszjunktak, ezért az $ABCDEFGH$ poliéder térfogata

$$V = \frac{\langle \mathbf{v}, \overrightarrow{AP} \rangle}{3} + \frac{\langle \hat{\mathbf{v}}, \overrightarrow{GP} \rangle}{3}.$$

Ugyanezt egy P -től különböző Q pontra felírva, majd a két egyenlőséget kivonva egymásból nyerjük, hogy

$$0 = \frac{\langle \mathbf{v}, \overrightarrow{AP} \rangle}{3} - \frac{\langle \mathbf{v}, \overrightarrow{AQ} \rangle}{3} + \frac{\langle \hat{\mathbf{v}}, \overrightarrow{GP} \rangle}{3} - \frac{\langle \hat{\mathbf{v}}, \overrightarrow{GQ} \rangle}{3} = \frac{\langle \mathbf{v}, \overrightarrow{QP} \rangle + \langle \hat{\mathbf{v}}, \overrightarrow{QP} \rangle}{3},$$

azaz $\langle \overrightarrow{QP}, \mathbf{v} + \hat{\mathbf{v}} \rangle = 0$. Mivel P és Q tetszőleges pontok $ABCDEFGH$ belsejében, ezért azt kaptuk, hogy a $\mathbf{v} + \hat{\mathbf{v}}$ vektor minden vektorra merőleges, így $\mathbf{v} + \hat{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$. Ebből $\mathbf{v} = -\hat{\mathbf{v}}$, s így $\mathbf{v}^2 = \hat{\mathbf{v}}^2$, ami a korábbiak szerint a bizonyítandóval egyenértékű. Ezzel az állítást beláttuk.

Aravin Péter (Budapest, Fazekas M. Gyak. Ált Isk. és Gimn., 8. o. t.)

2. megoldás. Az A csúcsra illeszkedő $ABCD$, $ABFE$ és $ADHE$ lapok területei legyenek A_1 , A_2 és A_3 , a megfelelő lapokra merőleges, a testből kifelé mutató egységvektorok pedig rendre $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ és $\mathbf{e}_3$. Ugyanígy, a G -nél lévő lapok területei legyenek T_1 , T_2 és T_3 , a hozzájuk tartozó külső egységnormálisok rendre $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ és $\mathbf{u}_3$.

Vetítsük le a poliéder minden lapját merőlegesen az $ABCD$ lapsíkra! Vegyük észre, hogy $ABCD$ területe megkapható a vetületek területeinek előjeles összegeként, az előjelek pedig éppen attól függenek, hogy a vetített lap és az $ABCD$ lap normálvektorai hegyes- vagy tompaszöveget zárnak-e be. Jól ismert továbbá, hogy egy síkidom merőleges vetületének területe a $T' = T \cdot \cos \alpha$ képlettel számolható, ahol α a síkidom síkjának és a vetítősíknak a bezárt szöge. Ezekből következik az alábbi elegáns formula:

$$A_1 = \sum_{i=1}^3 -\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{u}_i \rangle T_i - \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle A_2 - \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3 \rangle A_3 = - \sum_{i=1}^3 \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{u}_i \rangle T_i,$$

ahol kihasználtuk, hogy a feltétel szerint az A -ra illeszkedő lapok páronként merőlegesek, így $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3 \rangle = 0$. A fenti képlet természetesen minden A -ra illeszkedő lapra igaz, azaz $k = 1, 2, 3$ esetén

$$A_k = - \sum_{i=1}^3 \langle \mathbf{e}_k, \mathbf{u}_i \rangle T_i.$$

Ezeket az összefüggéseket emeljük négyzetre, adjuk össze, és rendezzük:

$$\sum_{k=1}^3 A_k^2 = \sum_{i=1}^3 \left(\sum_{k=1}^3 \langle \mathbf{e}_k, \mathbf{u}_i \rangle^2 \right) T_i^2 + 2 \sum_{i \neq j} \left(\sum_{k=1}^3 \langle \mathbf{e}_k, \mathbf{u}_i \rangle \langle \mathbf{e}_k, \mathbf{u}_j \rangle \right) T_i T_j.$$

Itt a T_i^2 tag $\sum_{k=1}^3 \langle \mathbf{e}_k, \mathbf{u}_i \rangle^2$ együtthatója a térbeli Pitagorasz-tétel miatt éppen $\mathbf{u}_i$ vektor hosszának négyzetével egyenlő, azaz 1.

A $T_i T_j$ vegyes tag együtthatója pedig

$$\sum_{k=1}^3 \langle \mathbf{e}_k, \mathbf{u}_i \rangle \langle \mathbf{e}_k, \mathbf{u}_j \rangle = \left\langle \mathbf{u}_i, \sum_{k=1}^3 \langle \mathbf{e}_k, \mathbf{u}_j \rangle \mathbf{e}_k \right\rangle = \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle = 0.$$

Kaptuk, hogy

$$\sum_{k=1}^3 A_k^2 = \sum_{i=1}^3 T_i^2,$$

ami éppen a bizonyítandó állítás.

1. megjegyzés. Melléktermékként megkaptuk a Conant–Beyer-tétel¹ egy speciális esetét:

$$T_i^2 = \sum_{k=1}^3 T_{i \perp k}^2,$$

ahol $T_{i \perp k}$ a T_i területű lap e_k normálisú lapsíkra vett merőleges vetületének területe, azaz $|\langle \mathbf{e}_k, \mathbf{u}_i \rangle T_i|$.

¹https://en.wikipedia.org/wiki/De_Gua's_theorem

2. megjegyzés. Ahogyan előzetesen megjegyeztük, mindkét megoldás alap gondolata alkalmas arra, hogy a honlapon közölt megoldásban használt tételt igazolja. A teljesség kedvéért – a 2. megoldásban használt vetítések használva – vázolunk is egy lehetséges bizonyítást.

Tétel. Legyen P egy konvex poliéder, és minden ℓ_i lapjához definiáljuk a $\mathbf{t}_i$ lapvektort, amely merőleges ℓ_i -re, P -ből kifelé mutat, és hossza ℓ_i területével egyezik meg. Ekkor $\sum_i \mathbf{t}_i = \mathbf{0}$.

Bizonyítás. Válasszunk egy tetszőleges $\mathbf{u}$ egységvektort, és legyen S egy $\mathbf{u}$ -ra merőleges sík, amely nem metszi P -t. (Utóbbi feltétel nem lényeges, de segíti a szemléletes bizonyítás megértését.) Vetítsük le P -t merőlegesen S -re. Az így kapott P' poligont P lapjainak merőleges vetületei kétrétűen fedik le: egyrétű fedést adnak azon lapok vetületei, amelyekre $\mathbf{u}$ és $\mathbf{t}_i$ hegyes- vagy nullszöget zárnak be; és szintén egyrétű fedést adnak azon lapok vetületei, amelyekre $\mathbf{u}$ és $\mathbf{t}_i$ tompa- vagy egyenesszöget zárnak be. (Derékszög esetén a vetület egy szakasz, ezeket később könnyen kezeljük.) A 2. megoldásban használt összefüggés és a skalárszorzat definíciója szerint ℓ_i lap vetületének területe éppen $\pm \langle \mathbf{u}, \mathbf{t}_i \rangle$, az előjelet a szerint választva, hogy $\mathbf{u}$ és $\mathbf{t}_i$ hegyes- vagy tompaszöget zár be. Ezért előbbi megállapításunkból következik, hogy

$$\sum_{\text{hegyesszög}} \langle \mathbf{u}, \mathbf{t}_i \rangle = - \sum_{\text{tompaszög}} \langle \mathbf{u}, \mathbf{t}_i \rangle.$$

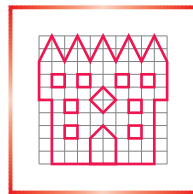
Ha $\mathbf{u}$ és $\mathbf{t}_i$ derékszöget zár be, akkor $\langle \mathbf{u}, \mathbf{t}_i \rangle = 0$, így az előző összefüggést átrendezve és a derékszögű tagokat is hozzávéve kapjuk, hogy

$$\sum_i \langle \mathbf{u}, \mathbf{t}_i \rangle = 0.$$

Kiemelve $\mathbf{u}$ -t nyerjük, hogy $\langle \mathbf{u}, \sum_i \mathbf{t}_i \rangle = 0$. Mivel $\mathbf{u}$ tetszőleges egységvektor volt, ezért $\sum_i \mathbf{t}_i = \mathbf{0}$, ahogyan azt állítottuk.

A feladatra összesen 3 versenyző küldött megoldást. 6 pontos Aravin Péter és Gyenes Károly; 5 pontos Kámán-Gausz Péter dolgozata.

A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok ABACUS-szal közös pontverseny 9. osztályosoknak (899–903.)



K. 899. Anna felírta az összes kétjegyű pozitív egész számot egyszer a táblára. Boglárka egymás után letörölte Anna számait és mindegyik helyére azt a számot írta fel, amelyet úgy kapott, hogy a második számjegyéből kivonta az elsőt. Például a 26 helyett $6 - 2 = 4$ -et, a 73 helyett $3 - 7 = -4$ -et írt. Mennyi a Boglárka által felírt számok összege?

Javasolta: Kozma Katalin Abigél (Győr)

K. 900. Egy négyzet négy sarkából egyenlő szárú derékszögű háromszögeket vágunk le úgy, hogy szabályos nyolcszöget kapjunk. Igazoljuk, hogy a szabályos nyolcszög oldalának hossza épp a négyzet átlójának és oldalának a különbsége.

Javasolta: *Ujházy Márton* (Budapest)

K. 901. Zilah Alíz és anyukája, Anna ugyanazon a napon ünneplik a születésnapjukat, március 30-án, vagy másképp 03.30-án. Idén éppen palindrom-születésnapjuk van, azaz Alíz életkorának számjegyeit megcserélve Anna életkorát kapjuk. Tudjuk, hogy Alízt édesanyja 20 éves kora és 47 éves kora között szülte. Hány éves lehetett Alíz születésekor Anna? (Az összes lehetőséget adjuk meg.)

Javasolta: *Ujházy Márton* (Budapest)

K/C. 902. Van 2026 darab egységnyi élű kockánk. Ezekből összeragasztással elkészítjük a lehető legtöbb olyan építményt, amely egy $3 \times 3 \times 3$ -as kocka sarokkockáinak kihagyásával adódik. Mekkora az így keletkezett, sarkok nélküli építmények és a 2026 darabból megmaradt összes kiskocka felszínének aránya?

Javasolta: *Bíró Bálint* (Eger)

K/C. 903. Egy huszonöt fős baráti társaságban 20-an tudnak bridzsezni, 19-en sakkozni és 18-an gózni.

a) Legalább;

b) legfeljebb

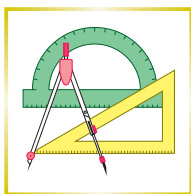
hányan űzik mindhárom említett sportot ebben a társaságban?

Javasolta: *Kozma Katalin Abigél* (Győr)



Beküldési határidő: 2026. május 11.

Elektronikus munkafüzet: <https://www.komal.hu/munkafuzet>



A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (902–903., 1898–1902.)

Feladatok 10. évfolyamig

K/C. 902. A szövegét lásd a **K** feladatoknál.

K/C. 903. A szövegét lásd a **K** feladatoknál.

Feladatok mindenkinek

C. 1898. Tekintsük egy 2×2 -es négyzetrács kilenc rácpontját. A kilenc pont közül szeretnénk néhányat megjelölni úgy, hogy semelyik három jelölt csúcs ne alkosson derékszögű háromszöget.

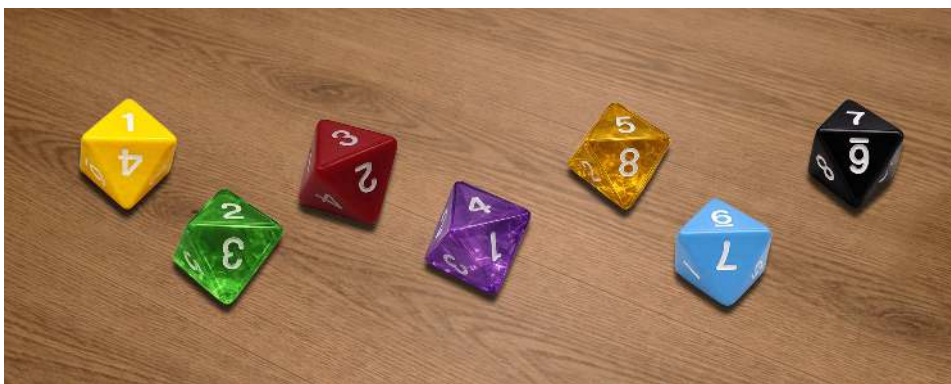
- a) Mutassuk meg, hogy öt pont megjelölése nem lehetséges a fenti feltétellel.
 b) Hányféle módon tudunk 4 pontot megjelölni úgy, hogy teljesüljön a fenti feltétel? (Két jelölést különbözőnek tekintünk, ha van olyan pont, ami az egyikben jelölt, a másikban nem.)

Javasolta: *Ujházy Márton* (Budapest)

C. 1899. A 2227 két szempontból is különleges szám. Egyrészt legközelebb ebben az évben lesz a Plútó közelebb a Naphoz, mint a Neptunusz, másrészt kiválasztható három számjegye úgy, hogy ezeket összeszorozva a kihagyott számjegynél eggyel nagyobb számot kapunk. Hány olyan négyjegyű pozitív egész szám van, amely rendelkezik ez utóbbi tulajdonsággal?

Javasolta: *Czett Mátyás* (Zalaegerszeg)

C. 1900. Matekórán egy 30 fős osztályban a következő játékot játsszák. A tanárnő feldobja hét különböző színű dobókockaéderét, a gyerekek pedig a kapott számokat egy általuk választott sorrendben leírják, így egy hétjegyű számot hoznak létre. Most éppen az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 számokat dobta a tanárnő. Lehetséges-e, hogy a diákok által írt számok közül az egyik valamely másiknak a többszöröse? (*Megjegyzés.* A játékban az nyer, aki azt a számot választotta, amelynek a többi leírt számtól való távolságainak minimuma a legnagyobb.)



Javasolta: *Paulovics Zoltán* (Budapest)

Feladatok 11. évfolyamtól

C. 1901. Az a és b valós számokra

$$|a - 1| + |b - 1| = |a| + |b| = |a + 1| + |b + 1|$$

teljesül. Mennyi $|a - b|$ legkisebb lehetséges értéke?

Javasolta: *Róka Sándor* (Nyíregyháza)

C. 1902. Az $ABCD$ négyzet körülírt körének kisebbik AB ívén vegyük fel az E belső pontot. Az E -nek a négyzet középpontjára vonatkozó tükröképe legyen E' . Az E pontból a négyzet AC , illetve BD átlóira bocsátott merőlegesek talppontjai

legyenek F , illetve G . Hasonlóan kapjuk az E' pont felhasználásával a H és I pontokat.

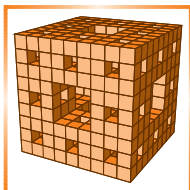
- Bizonyítsuk be, hogy az $FGHI$ négyszög rombusz.
- Határozzuk meg az $FGHI$ négyszög területének maximumát.

Javasolta: *Bíró Bálint* (Eger)



Beküldési határidő: 2026. május 11.

Elektronikus munkafüzet: <https://www.komal.hu/munkafuzet>



A B pontversenyben kitűzött feladatok (5526–5533.)

B. 5526. Az O középpontú k kör O -tól különböző belső pontja P . Az O pont tükörképe P -re O' , az O' középpontú $O'P$ sugarú kör és k egyik metszéspontja X . Az XP egyenes k -t másodszor Y -ban metszi. Mutassuk meg, hogy P harmadolja az XY szakaszt.

(3 pont)

Javasolták: *az SZTE II. évf. matematika tanárszakos hallgatói*

B. 5527. Az ABC hegyesszögű háromszög oldalai a , b és c , a beírt körének sugara r . Mutassuk meg, hogy (a **B. 5495.** feladatban is szereplő) $2r^2 = (c - a)(c - b)$ egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $a + b = 3c$.

(4 pont)

Javasolta: *Kiss Géza* (Csömör)

B. 5528. Mutassuk meg, hogy akárhogyan színezzük a természetes számokat 100 színnel, mindig vannak olyan egyszínű $a < b < c < d$ számok, amelyekre $a + d = b + c$.

(4 pont)

Javasolta: *Pálvölgyi Dömötör* (Budapest)

B. 5529. A $6^2, 6^3, 6^4, \dots, 6^{2026}$ hatványok között hány olyan van, amelynek első számjegye kisebb, mint 6?

(3 pont)

Javasolta: *Sztranyák Attila* (Budapest)

B. 5530. Öt különböző pozitív egész szám közül akárhogyan választunk ki néhányszor, a mértani közepük mindig egész. Legalább mekkorának kell lennie közülük a legnagyobbak?

(5 pont)

Javasolta: *Pach Péter Pál* (Budapest)

B. 5531. Az ABC háromszög beírt körének középpontja I , az ABI , BCI és CAI háromszögek körülírt köreinek középpontjai D , E , illetve F . Bizonyítsuk be, hogy a DEF háromszög területe legalább akkora, mint az ABC háromszög területe.

(5 pont)

Javasolta: *Holló Gábor* (Budapest)

B. 5532. Egy operaháznak 8 páholya van. Egy páholybérlettel a 2027/28. szezon legfeljebb hét különböző, a vásárló által kiválasztott estéjére le lehet foglalni ugyanazt a páholyt. Minden este egy előadás van. Egy páholyt egy estére csak egyvalaki bérelhet ki, de szólhat több bérlet is ugyanabba a páholyba, amennyiben a kiválasztott esték halmaza diszjunkt. Legalább hányféle előadásból áll a repertoár, ha az operaház garantáltan össze fogja tudni állítani úgy a programot (a bérletek napjainak ismeretében), hogy minden páholybérletes csupa különböző előadást láthasson?

(6 pont)

Javasolta: *Imolay András* (Budapest)

B. 5533. Az ABC hegyesszögű háromszögben az A -ból induló magasság talppontja A_0 , a B -ből induló magasság talppontja B_0 . Legyen az A_0B_0C körön X és Y az a két pont, amelyre az ABX , illetve az ABY kör érinti az A_0B_0C kört. Mutassuk meg, hogy az XY egyenes felezi az AB oldalt.

(6 pont)

Javasolta: *Kós Géza* (Budapest)

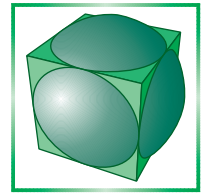


Beküldési határidő: 2026. május 11.

Elektronikus munkafüzet: <https://www.komal.hu/munkafuzet>



Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (932–934.)



A. 932. Az ABC hegyesszögű háromszög magasságpontja H . A D , E pontok rendre az AC , AB egyeneseken vannak úgy, hogy a B , C , D , E pontok egy körön vannak, továbbá a DE egyenes felezi a BC oldalt. Tegyük fel, hogy a BD , CE egyenesek M -ben találkoznak. Mutassuk meg, hogy a HM egyenes merőleges az A csúcshoz tartozó szimmedián egyenesre.

Javasolta: *Bán-Szabó Áron* (Palaiseau)

A. 933. Az a , b , c valós számok legyenek az $(1, 4)$ intervallumból. Tekintsük az alábbi három egyenlőtlenséget:

$$bx(x + y - z) + cx(x + z - y) \geq a(2yz + x),$$

$$cy(y + z - x) + ay(y + x - z) \geq b(2zx + y),$$

$$az(z + x - y) + bz(z + y - x) \geq c(2xy + z),$$

a) Határozzuk meg a , b , c függvényében, hogy legfeljebb hány egyenlőtlenség teljesülhet egyszerre olyan pozitív valós x , y , z számokra, amelyekre $x + y + z = 1$.

b) Adjunk meg a , b , c segítségével olyan, esetbontás nélküli explicit képletet az x , y , z számokra, amely mellett x , y , $z > 0$ és $x + y + z = 1$, továbbá a három egyenlőtlenség egyike sem teljesül.

Javasolta: *Bán-Szabó Áron* (Palaiseau)

A. 934. Jelölje $\mathcal{T}$ a megszámlálható, irányítatlan fagráfok halmazát. A valós számok egy X részhalmazát *bariton*nak nevezzük, ha bármely nemüres részhalmazának van legkisebb eleme.

a) Igazoljuk, hogy minden bariton X esetén létezik olyan $f: X \rightarrow \mathcal{T}$ függvény, amelyre bármely $y, z \in X$ esetén $y \leq z$ akkor és csak akkor teljesül, ha $f(y)$ izomorf $f(z)$ -nek egy részgráfjával.

b) Igaz marad-e az előző állítás, ha még azt is megköveteljük, hogy minden $x \in X$ -re $f(x)$ minden csúcsának véges legyen a fokszáma?

Egy V csúcshalmazú gráf megszámlálható, ha létezik $V \rightarrow \mathbb{N}$ injektív leképezés.

Javasolta: *Németh Márton* (Budapest)



Beküldési határidő: 2026. május 11.

Elektronikus munkafüzet: <https://www.komal.hu/munkafuzet>



Informatikából kitűzött feladatok (695–698.)

I. 695. Egy szöveg csak az angol ábécé nagybetűit tartalmazza, írásjeleket, szóközőket vagy más karaktert nem. Egy kódolás a szöveg ASCII-kódjait tartalmazó számsorozatot módosítja. Eredetileg a szöveg minden karakterének egy 65 és 90 közötti szám felel meg.

Először minden szám értékéhez hozzáadjuk az eredeti szövegben az elsőtől az előző számig terjedő számok összegének egy adott K számmal ($3 \leq K \leq 27$) vett osztási maradékát. Az első szám így nem változik, de minden más szám valószínűleg igen. Az így kapott számok nagyobbak lehetnek 90-nél, ezért szükség esetén kivonunk belőlük 26-ot. Ezután a kapott számok megfelelnek ASCII kódjuk alapján az angol ábécé egy betűjének. Az így kapott szöveget tekintjük az eredeti szöveg kódolt változatának.

Készítsünk két programot a kódolásra és a kódolt szöveg visszaalakítására. Az első, **i695be** nevű program standard bemenetének első sorában a K szám, második sorában a szöveg található, amelynek hosszabb legfőljebb 100 karakter. A program a standard kimenet egyetlen sorába a kódolt szöveget írja ki.

A második, **i695ki** nevű program standard bemenetének első sorában a K szám, második sorában egy kódolt szöveg található. A program a standard kimenet egyetlen sorába a visszaalakított szöveget írja ki.

Minta a kódolásra:

Bemenet:	Kimenet:
13 INFORMATIKA	IVNOSREXSPC

Minta a visszaalakításra:

Bemenet:	Kimenet:
25 PWAWDTVZOFM	PROGRAMOZAS

Beküldendő egy tömörített **i695.zip** állományban a két program forráskódja és rövid dokumentációja, amely tartalmazza a megoldás rövid leírását, és megadja, hogy a forrásállományok melyik fejlesztői környezetben fordíthatók.

(10 pont)

I. 696. Az e és a π szám a matematika több területén előtűnő, alapvető irracionális szám. Az **I. 689.** feladatban a π első 10 000 számjegyét vizsgáltuk meg, most kibővítjük a vizsgálatot az e -re is.

1. Nyissunk egy üres munkafüzetet. Hozzunk létre benne egy e és egy π nevű munkalapot. A megfelelő munkalapokra az **A1** cellától kezdődően töltjük be az **e1-10000.txt** és a **pi1-10000.txt**, tabulátorral tagolt szövegfájlok tartalmát. Hozzuk létre az *eredmény* és a *segéd* nevű munkalapokat. Az e , a π és a *segéd* munkalapon végezhetünk segédszámításokat. A következő feladatok tartomány- és cellahivatkozásai az *eredmény* munkalapra vonatkoznak. A munkafüzetet *epi* néven mentjük.
2. Az e és a π első 10 000 számjegyéből hány helyen áll ugyanaz a számjegy? (Például mindkettő 10 000. jegye 8-as, vagy a 21. számjegy mindkettőben 6-os.) Az eredmény – hogy hány helyiértéken áll ugyanaz a számjegy mindkettőben – kerüljön a **C1**-es cellába.
3. Melyik 1966-os dátum mint számjegysorozat szerepel az e első 10 000 jegyében nyolcjegyű számként ÉÉÉÉHHNN alakban? És 1970-es? Az eredmények kerüljenek a **D1** és az **E1** cellába.
4. Melyik az azonos számjegyekből álló leghosszabb szakasz számjegye, hossza, kezdő pozíciójának cellája? Az eredményt az **F1:F3** tartományban jelenítsük meg.
5. Mely számjegyekből van több az első 10 000 között az e -ben, mint a π -ben? A számjegyek növekvő sorrendű, egymástól vesszővel és szóközzel elválasztott listája kerüljön a **C2** cellába.
6. Hány számjegy lelhető fel a π elejéből (31415926...) folyamatosan az e első 10 000 jegyében? A válasz jelenjen meg az **E2** cellában.
7. Határozzuk meg a $\pi + 2e$ szám első száz számjegyét! Ezek csökkenő helyiérték szerint az **A1:A100** tartomány celláiba, illetve összefűzött szöveggként a **C4** cellába kerüljenek.
8. Keressük meg az e és a π első 10 000 számjegyéből a leghosszabb növekvő szakasz hosszát, egy ilyen szakasz kezdőcellájának helyét és értékét. Például

nem növekvő szakasz a „603758” de növekvő szakasz az „124678”, minkettő hossza 6. Az e eredményei a **G1:G3**, míg a π eredményei a **H1:H3** tartományba kerüljenek.

9. Ábrázoljuk oszlopdiagramon az e és a π első tízezer jegyében az egyes számjegyek gyakoriságát. A diagram kerüljön új, diagram típusú munkalapra. Kapszjon jelmagyarázatot, a diagram címe *Számjeggyakoriságok* legyen.

Segédszámításokat tetszőleges, adatot nem tartalmazó helyen lehet végezni. A megoldásban saját függvény vagy makró nem használható.

Beküldendő egy tömörített **i696.zip** állományban az **epi** néven mentett táblázatkezelő munkafüzet és egy dokumentáció, amelyben szerepel a készítő neve, iskolája, a táblázatkezelő neve és verziószáma.

Források:

<http://www.t-es-t.hu/minden/tudom/pii/pi10000.txt>

<https://www.gutenberg.org/ebooks/127>

Letölthető fájlok:

e1-10000.txt

pi1-10000.txt

(10 pont)

I. 697. A sporttörténelem a szurkolók számára izgalmas téma. A XX. század második felében a nagypályás kézilabdát felváltotta a ma ismert kispályás és ezzel intenzívebb változat.

A feladatunk a magyar férfi kispályás kézilabdaválogatott játékosairól és a válogatott különböző nemzetközi tornákon elért eredményeiről szóló adatok elemzése. Először az adatok alapján adatbázist kell létrehoznunk és adatokkal feltöltenünk, majd az adatbázis segítségével néhány kérdésre kell válaszolnunk.

Hozzuk létre a **kezilabda.sql** állományt, amely tartalmazza az adatbázist és a táblát létrehozó, valamint az adatokat a táblába beszűrő SQL parancsokat. Ha az elkészült **kezilabda.sql** parancsfájlt futtatjuk a lokális SQL szerveren, akkor az az adatbázist, a táblákat és az adatfelvitelt elvégzi és készen áll a lekérdezések futtatására.

1. Készítsünk új adatbázist **kezilabda** néven.
2. A táblák kialakításához vegyük figyelembe az alábbi táblaleírásokat és kapcsolatokat:

Táblák:

torna (azon, ev, nev, helyezes, kapitany)

azon	A válogatott hivatalos tornájának azonosítója (szám), ez az elsődleges kulcs
ev	A torna évszáma (szám)
nev	A torna megnevezése (szöveg), értéke: Olimpia, Világ bajnokság és Európa-bajnokság lehet
helyezes	A válogatott tornán elért helyezése (szám)
kapitany	A válogatott szövetségi kapitányának neve a tornán (szöveg)

reszvetel (torna_azon, jatekos_azon)

torna_azon A torna azonosítója (szám), ez az összetett kulcs egyik tagja

jatekos_azon A játékos azonosítója (szám), ez az összetett kulcs másik tagja

jatekos (azon, nev)

azon A játékos azonosítója (szám), ez az elsődleges kulcs

nev A játékos neve (szöveg), névrokonok nincsenek az adatbázisban



Az adatbázis tartalmazza a táblák elsődleges kulcsa és az idegen kulcsok beállítását, hogy azok helyes kapcsolatot mutassanak.

3. Az adatbázist a táblákkal és az adatokkal együtt elkészítő parancsokat mentjük a `kezilabda.sql` parancsfájlbba.

A következő feladatokat megoldó SQL parancsokat rögzítsük a `lekerdezesek.sql` nevű állományban a feladatok végén zárójelben megadott névvel. Ügyeljünk arra, hogy a lekérdezésekben pontosan a kívánt mezők szerepeljenek, felesleges mezőt ne jelenítsünk meg.

1. Listázzuk ki ábécérendben lekérdezés segítségével az 1960–1969 között a válogatottban szereplő játékosok nevét. Minden név egyszer szerepeljen a listában. (**4hatvanasok**)
2. Készítsünk lekérdezést, amely kilistázza azoknak a kapitányoknak a nevét, akik legalább két Olimpián irányították a válogatottat. (**5olimpia**)
3. Adjuk meg lekérdezéssel azoknak a játékosoknak a nevét, akik a legtöbb Világbajnokságon vettek részt. (**6vilag**)
4. Egyetlen lekérdezés segítségével írassuk ki minden játékos esetén, hogy hány tornán vett részt típusonként. Az eredmény megjelenítése a mintának megfelelően történjen. (**7stat**)

▼ nev	Olimpia	Világbajnokság	Európa-bajnokság
és Adorján János	1	3	0
és Ancsin Gábor	1	6	6
és Andó Arián	0	0	1
és Balázs Jenő	0	1	0

5. Soroljuk fel lekérdezés segítségével az adatbázisban rögzített utolsó Európa-bajnokságon szereplő játékosok nevét ábécérendben. (**8eu fiatalok**)
6. Készítsünk lekérdezést, amely megadja azoknak a játékosoknak a nevét, akik ugyan Világbajnokságon voltak, de Olimpián egyszer sem szerepeltek. A listában minden név egyszer jelenjen meg. (**9hi anyzok**)
7. Készítsünk lekérdezést, amely meghatározza, hogy „**Pásztor István**” első és utolsó válogatottsága között kik voltak szintén válogatottak. A listában minden név egyszer jelenjen meg. (**10egyutt**)
8. Készítsünk lekérdezést, amely meghatározza azoknak a tornáknak az évét és nevét, ahol „Hanusz Egon” és „Imre Bence” játékosok egyszerre vettek részt. (**11HEIB**)
9. Nem minden tornára sikerült a válogatottnak kijutnia. Készítsünk lekérdezést, amely megadja, hogy hány év volt a legnagyobb szünet két nemzetközi torna között. (**12szunet**)

Beküldendő egy tömörített **i697.zip** állományban a **kezilabda.sql** parancsfájl és a **lekerdezések.sql** nevű szöveges állomány.

Letölthető fájl: **jatekos.txt**, **reszvetel.txt**, **torna.txt**

(10 pont)

I. 698. Andi és Bandi matematikai játékot játszanak. A játék elején véletlenszerűen kiválasztanak egy pozitív egész számot 1 és 100 között, ez lesz a kiinduló szám. Ezután felváltva mondanak pozitív egész számokat, először Andi, azután Bandi. A szabály az, hogy az előző szám után a legkisebb olyan számot kell mondani, amely nagyobb nála, és eggyel több osztója van. Andi első száma előtt a kiinduló számot tekintjük előzőnek. A játék addig tart, amíg az első 10000-nél nagyobb számot eléri.

Készítsünk programot **i698** néven, amely a kiinduló szám ismeretében megadja, hogy Andi és Bandi milyen számokat mondanak a játék során. A program standard bemenetének első sorában a kiinduló szám szerepel. A program a standard kimenet egy sorába írja ki a játékból szereplő számokat. A programnak egy átlagos számítógépen le kell futnia 10 másodpercen belül.

Minta:

Bemenet:	Kimenet:
55	81 92 729 730 1089 1136 59049

Beküldendő egy tömörített **i698.zip** állományban a program forráskódja és rövid dokumentációja, amely tartalmazza a megoldás rövid leírását, és megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben fordítható.

(10 pont)



Beküldési határidő: 2026. május 15.

Elektronikus munkafüzet: <https://www.komal.hu/munkafuzet>



NapCsiga – egy teljesen napelemes jármű lehetőségei és fizikai korlátai



A *NapCsiga* egy tisztán napelemes (tehát hálózatról nem tölthető) kishaszonjármű (1. ábra), amely 2017-ben a tatabányai Edutus Egyetemen egy projekt keretében készült, és azóta is használatban van. A járműre szerelt adatgyűjtőnek köszönhetően rengeteg adat áll rendelkezésre, amelyből érdekes tapasztalatok összegezhetők. Ebben az írásban néhány egyszerű és közismert fizikai összefüggés gyakorlati érvényesülését mutatjuk meg; mit lehet elérni és milyen korlátokat jelent ez a technológia.



1. ábra

Méretezés

A napelemes jármű tervezésének legalapvetőbb lépése a méretezés. A jármű saját tömege 350 kg, a maximális terhelhetősége kb. 300 kg. A felszerelt napelemtáblák teljes felülete $4,8 \text{ m}^2$, ezzel szép idő esetén naponta 1-2 kWh befogott energiára lehet számítani. Ehhez kell méretezni a motor teljesítményét ($1500 \text{ W} \approx 2 \text{ LE}$) és az akkumulátorok kapacitását (3 kWh, 1-2 naponként feltöltődik, 1-2 naponta kihasználjuk). Ez megszabja a hatótávolságot ($30\text{--}40 \text{ km}$ helyi fuvar, ha közben süt a Nap, akkor néha 100 km)², és a használat módját: jellemzően helyi teherszállítás, fatelep, bolt, posta, néha országjárás, tábori felszerelés szállítása, nyáron maximális kihasználtság, télen csendes pihenő. Csodák nincsenek: ha egy hétig esik az eső, akkor az akkumulátorban lévő 40 km-re lehet számítani, hiába vannak sürgős elképzeléseink.

A járműbe a szombathelyi ELTE-n szereltünk egy fedélzeti elektronikát, amely másodpercenként megméri néhány feszültség- és áramadatot (Arduino Orange Pie Zero segítségével). A kormányon lévő mobiltelefon (wifi által közvetítve) élőben mutatja a teljesítményt, a sebességet, az irányt és néhány egyéb értéket, míg az

²A legtöbb, amit egy nap megtett, az 130 km volt, de arra már nagyon fel kellett készülni: előltöltöttség, korai indulás, sok napoztatás.

átlagokat percenként rögzítjük is a későbbi elemzés céljából. Ezekből az összesítésekéből derül ki, hogy a NapCsiga átlagosan kb. 1 kWh-t tölt naponta, és ebből 0,85 kWh-t használ fel. Az elektronika önfogyasztása 1,5 W, a jármű önfogyasztása 4 W, ami jelentős ahhoz képest, hogy a napelemek átlagosan (éjjel-nappal, télen és nyáron) 40 W teljesítménnyel termelnek.

Megjegyzés. Ha 10-szer erősebben sütné a Nap, akkor meglenne egy Trabant teljesítménye (19 kW), de akkor néhány nap múlva már forrna a tenger felszíne.

Fontos megemlíteni a méretfüggőséget is. Kicsiny napjárművet bárki tud készíteni: végy egy tenyérnyi napelemet, kösd rá egy egyenáramú villanymotorra, és menni fog – az első árnyékig. A sebessége 1 m/s lesz, a teherbírása pár gramm.

Ehhez képest kell nagyobbbat álmodni, hogy elbírjon egy embert, karosszériát, pár csomagot, akkumulátort, hogy este is menjen, és egy kicsit gyorsabban, 7 m/s-mal. Sajnos a térfogat/felület arány ellenünk dolgozik: ha száz tenyérnyi napelem a tetőfelülete, akkor ezerszer nagyobb lesz az egész tömege, amit meg kell mozdítani. Ez az álom, ahogy láthatjuk, még éppen megvalósítható.

Ugyanakkor, ami nem elérhető: egy szokásos autóban 4 kW csak a fűtés, 1,5 kW az alapjárat, 1 kW a lengéscsillapítás, 8 mázsa az akkumulátor, 4 mázsa az ütközési zóna, 40 kW a légellenállás, és 1 kW az önvezető infrastruktúra. A NapCsiga majdnem autó méretű, tud menni 25 km/h sebességgel, de kevesebbet fogyaszt, mint egy autó alapjárata a piros lámpánál. Ezt tudja a Nap!

Mechanikai korlátozó tényezők

A jármű kis sebessége miatt a légellenállás elhanyagolható, a sebességtől független *gördülési ellenállás* a meghatározó. A μ_g gördülési ellenállási tényező értéke többféleképp is megmérhető. Az egyik lehetőség: a tapasztalat szerint a jármű egy 3%-os lejtőn egyenletes sebességgel, gyorsulás vagy lassulás nélkül gurul szabadon, amiből az $mg \sin \alpha = \mu_g mg \cos \alpha$ összefüggés alapján $\mu_g = \tan \alpha \approx 0,03$. A másik lehetőség: vízszintes talajon egy fürdőszobai mérleggel eltoljuk a járművet. 150 kg hasznos tömeg ($m = 500$ kg össztömeg) esetén a mért gördülési ellenállás $F_g \approx \approx 150$ N, amelyből szintén $\mu_g \approx 0,03$ gördülési ellenállási tényezőt kapunk.

Ez az érték azért nagyon fontos, mert a gördülési ellenállás és a motor teljesítménye meghatározza a jármű maximális sebességét is. Vízszintes úton

$$P = F_g v = mg \mu_g v,$$

ahonnan $P \approx 1000$ W átlagos teljesítménnyel és $m = 500$ kg jellemző össztömeggel számolva $v_{\max} \approx 7$ m/s ≈ 25 km/h sebesség adódik. Ha a jármű α hajlásszögű lejtőn felfelé halad, akkor

$$P = mg(\mu_g + \sin \alpha)v,$$

amiből a hajlásszög növelésével egyre kisebb elérhető sebesség adódik: 6%-os emelkedőn kb. 10 km/h-val, 10%-os emelkedőn 6 km/h-val tud felmenni.³

³10%-os emelkedőnél a sebességváltót felezőbe kell kapcsolni, de ez a teljesítményen és a sebességen nem változtat, csak más lesz a hangja. A legmeredekebb emelkedő 16%-os volt, itt a végén már meg kellett állni, mert túlmelegedett a motor.

Hasonlóan csökkenti a sebességet a jelentős szembeszél is. Egy hosszú, egyenes szakaszon megmértük, hogy a széllal szemben és hátszéllal haladás között a jármű fogyasztásában 500 W-nyi különbség jelentkezett, ami körülbelül megegyezik az akkumulátorok maximális töltési teljesítményével (vagy kicsit akár meg is haladja azt). Akkor ez most egy napjármű, vagy vitorlás? Az óriási különbség az – azon kívül, hogy a szél csak az egyik irányban segít, a másikban hátráltat –, hogy álló helyzetben, behúzott kézifékkal és felnyitott napelemtáblákkal órákon keresztül 500 W a Nap, viszont 0 W a szél teljesítménye.

Ugyanakkor az akkumulátorokban tárolt energiával megtehető távolság nem függ a sebességtől, hiszen a gördülési ellenállás sebességfüggetlen. Ha az út során az előjelesen összegzett teljes szintemelkedés nulla, akkor a teljes munka

$$W = F_g s = mg\mu_g s,$$

amelyből a rendelkezésre álló energia ismeretében $s_{\max}$ meghatározható. A sebességfüggetlenséget méréssel igazoltuk is: egy gyakran járt, ismert távon, ha szándékosan lassabban mentünk, még egy kicsit több energia is fogyott, mert hosszabb ideig volt bekapcsolva a fedélzeti elektronika.

Az akkumulátor fizikája

Az összegyűjtött adatok alapján érdekes megfigyeléseket tehetünk az akkumulátor és az elektronika viselkedéséről is. A gyorsítás, lassítás minden esetben egy-egy mérőkísérlet, amely megmondja, hogy a 30-40 A nagyságú motoráram hogyan csökkenti le (vagy fékezéskor, lejtmenetben hogyan növeli meg) a kapocsfeszültség pillanatnyi értékét. Az akkumulátor működését egy adott állapotában az

$$U = U_0 - IR_b$$

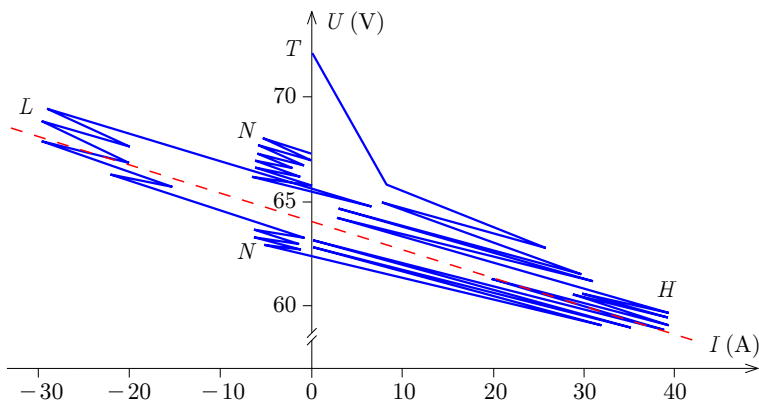
összefüggés jellemzi, ahol az U kapocsfeszültséget és az akkumulátor által leadott I áramerősséget folyamatosan mérjük. Az $U(I)$ függvény tehát egy egyenes, amelynek meredeksége $-R_b$, az akkumulátor belső ellenállásának -1 -szerese, tengelymetszete pedig U_0 , az akkumulátor pillanatnyi elektromotoros ereje (töltöttségtől függően jellemzően 60-63 V).

Az éveken át végzett sok-sok mérés tapasztalata alapján: ha már ment 10 percet a jármű⁴, és ezután nem adunk gázt (de nem is fékezünk, a motor árama nulla), akkor 8 másodperccel később a mért kapocsfeszültség megegyezik a pillanatnyi elektromotoros erővel. Egyébként a kapocsfeszültség a gyorsítás és lassítás során a terhelés függvényében le-föl ugrál („feszültségfésű” az $U(t)$ grafikonon), amiből viszont az elektronika egyenesillesztéssel folyamatosan ki tudja számítani U_0 és R_b pillanatnyi értékét.

A 2. ábra az akkumulátor kapocsfeszültségének és áramának kapcsolatát mutatja egy hosszabb, hegyre felvezető, majd onnan legruló út során. Kezdetben az akkumulátor teljesen fel van töltve (T pont), és az elektromotoros erő (U_0) nagyon magas értéken áll, ez azonban a használat első perceiben gyorsan csökken. Ezután az U - I függvény rövid távon egy negatív meredekségű egyenes mentén mozog

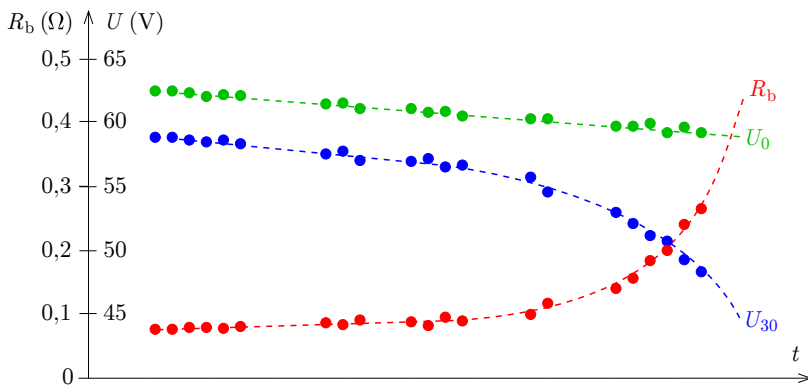
⁴A teljesen feltöltött akkumulátor feszültsége az első percekben aránylag gyorsan csökken.

(amelynek $-R_b$ a meredeksége, piros szaggatott vonal), és amely az akkumulátorok merülése miatt lassan lefelé tolódik. A nagyon nagy, $+40$ A nagyságú áramok (és az ehhez tartozó alacsony kapocsfeszültségek) a hegymenet (H pontok) közben, míg a nagy abszolút értékű, de negatív előjelű, -30 A nagyságú áramok (és az ehhez tartozó emelkedett kapocsfeszültségek) a lejtőn gurulás (L pontok) közben mérhetők. Az utóbbi esetben a jármű motorfékkel fékez, és ezzel tölti az akkumulátort, amely a hosszú gurulás alatt láthatóan megemeli a töltöttséget. A -5 A-es töltőáram csúcsokat (álló helyzetben) a napelemek teljesítménye okozza (N pontok), de a töltés az elvonuló felhők miatt néha gyengébb, vagy meg is szakad.



2. ábra

Az U_0 elektromotoros erő használat közben (az akkumulátor merülésével) kb. 20-30 percenként 1 V-tal csökken. Azonban használat közben, a merülés és melegedés hatására az akkumulátor R_b belső ellenállása is változik, növekszik. A 3. ábrán látható grafikon azt mutatja, hogy az utóbbi jelenti a nagyobb problémát: amikor R_b értéke meghaladja az eredeti érték dupláját, akkor a működéshez szükséges 30 A-es terhelés hatására már annyira lecsökken a kapocsfeszültség (U_{30}), hogy a jármű nem lesz üzemképes: nem tud elindulni, gyorsítani. Ilyenkor egy időre meg kell állni, hogy az akkumulátor regenerálódjon, és ha süt a Nap, töltődjön is.



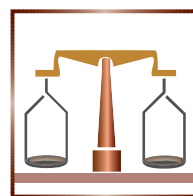
3. ábra

Az is hasznos megfigyelés, hogy menet közben csak „átalányban” tölt a jármű (kb. 200 W teljesítménnyel), ha viszont megállunk egy szép napos helyen, akkor jellemzően több mint 400 W a töltés teljesítménye. Lehet gyanakodni az út menti fákra (nem), a felhőkre (nem), a kanyarokra, hogy jobbról vagy balról süt a Nap vagy szemből, ami a legkisebb felület (ez sem). Azért kicsi a töltés, mert menet közben a gyorsítás-lassítás miatt folyamatosan változik az akkumulátor kapcsolófeszültsége, és így a töltésvezérlő nem talál optimális munkapontot (ahhoz kell körülbelül 30 másodperc nyugalom).

De ez nem olyan nagy baj, mert egy kb. egy órás út után jellemzően több órát áll a napon, így az utóbbi, nagyobb teljesítményérték a meghatározó. (A benzines autók még soha nem termeltek egyetlen csepp kőolajat, sem menet közben, sem parkolva. Az ígás lovak tudnak legelni az út szélén, de menet közben ők sem.)

Dőry István

Mérési feladatok megoldása



M. 445. *Mérjük meg, hogy egy adott granuláris anyagnak (pl. rizs, gersli stb.) mekkora a térkitöltése! Mennyire függ ez a rendszer preparálásától (pl.: tömörítés, rázogatós stb.)?*

(6 pont)

Közli: Széchenyi Gábor, Budapest

I. megoldás. A mérés során bab és lencse térkitöltését vizsgáltuk. A granuláris anyagot mérőhengerbe öntjük, lemérjük a halmaz térfogatát (V_h), majd folyadékot öntünk rá bizonyos adagonként (pl. 50 ml). Amikor a folyadék teljesen ellepi a szemeket, újra lemérjük a teljes térfogatot (V_t). A mért értékből kivonva a ráöntött folyadék V_f térfogatát megkapjuk a szemek térfogatát. Végül ezt leosztva az elején mért térfogattal megkapjuk a térkitöltést:

$$\phi = \frac{V_t - V_f}{V_h}.$$

A mérés előtt a bab esetében megvizsgáltuk, mennyire szívja magába a különböző folyadékokat (víz, metanol, 1,2%-os sóoldat). Az 1. táblázat eredményei alapján a legkevésbé a metanol szívódott fel, így a méréseket azzal végeztük. A tömegeket elektromos konyhai mérleggel mértük fél gramm hibával, a térfogatokat pedig mérőhengerrel állapítottuk meg 1 ml eltéréssel belül.

A babbal végzett mérések eredménye a 2. táblázatban látható.

A térkitöltés a rázás előtt átlagosan 53%, a rázás után átlagosan 55%. A legnagyobb eltérés az átlagtól mindkét esetben 3%, ami kb. 6% relatív eltérés. A rázás hatására a térkitöltés csak a hibával összemérhetően kis mértékben növekedett.

folyadék	víz	metanol	sóoldat
folyadék tömege (g)	5,35	4,97	6,20
bab tömege előtt (g)	2,76	2,45	2,79
bab tömege után (g)	3,02	2,63	3,02
tömegnövekedés (g)	0,26	0,18	0,23
relatív növekedés	9,4%	7,3%	8,3%

1. táblázat

	mérés	1.	2.	3.
bab tömege	m (g)	22,0	44,5	66,0
bab térfogata rázás előtt	V_h (ml)	33	60	91
bab térfogata rázás után	V'_h (ml)	29	58	86
folyadék térfogata	V_f (ml)	50	50	50
teljes térfogat	V_t (ml)	65	83	98
térkitöltés rázás előtt	ϕ	50%	55%	54%
térkitöltés rázás után	ϕ'	52%	57%	57%

2. táblázat

Megpróbáltuk a babot darabolni, de ez a szemek keménysége miatt nem sikerült. Ezután madáreledellel próbálkoztunk, de ennek egyik összetevője, a napraforgómag úszott a folyadékon. Végül a mérést a babon kívül lencsével tudtuk elvégezni: darabolni azt se sikerült, így ismét a rázás hatását vizsgáltuk. Az eredmények a 3. táblázatban láthatók.

	mérés	1.	2.	3.
lencse tömege	m (g)	25,0	50,0	75,0
lencse térfogata rázás előtt	V_h (ml)	33	71	97
lencse térfogata rázás után	V'_h (ml)	32	65	94
folyadék térfogata	V_f (ml)	30	40	43
teljes térfogat	V_t (ml)	48	76	99
térkitöltés rázás előtt	ϕ	54,5%	51%	58%
térkitöltés rázás után	ϕ'	56%	55%	60%

3. táblázat

A térkitöltés a rázás előtt átlagosan 54,5%, a rázás után átlagosan 57%. A legnagyobb eltérés az átlagtól 3-3,5%. A rázás hatására a térkitöltés a babhoz hasonlóan csak kis mértékben növekedett.

*A Mi folyik itt Gyöngyösön? csapat: Fuchs Vince, Lakatos Levente
(Szekszárdi Garay János Gimn., 10. évf.)*

II. megoldás. Megmérjük egy granuláris anyag (jelen esetben: száraz rizs) térkitöltését többféle preparálás mellett. A térkitöltés definíció szerint a szemcsék által

ténylegesen elfoglalt térfogat és a halmaz teljes (látszólagos) térfogatának aránya. Azt vizsgáljuk, mennyire függ az eredmény a preparálástól (laza betöltés, rázogatós, rezgetés, préselés).

A térkitöltés a szemcsék térfogatának (V_{sz}) és a halmaz térfogatának (V_h) hányadosa:

$$\phi = \frac{V_{sz}}{V_h}.$$

Ha a szemcsék anyagának sűrűsége ρ és a halmaz tömege m , akkor a térkitöltés így is írható:

$$(1) \quad \phi = \frac{m}{V_h},$$

a halmaz átlagsűrűsége pedig:

$$\rho_h = \frac{m}{\phi V_h} = \phi \rho.$$

A méréshez használt eszközök és anyagok: 0,01 g felbontású digitális mérleg, 250 ml-es mérőhenger 1 ml-es osztással, száraz rizs.

1. Az anyagsűrűség mérése

A mérőhengerbe V_1 térfogatú vizet töltünk, beleszórunk $m_1 \approx 40$ g tömegű rizst, és leolvassuk a kialakuló V_2 végső térfogatot. A keresett sűrűség:

$$\rho = \frac{m_1}{V_2 - V_1}.$$

A mért és számított adatokat a 4. táblázat tartalmazza.

mérés	m_1 (g)	V_1 (ml)	V_2 (ml)	ρ (g/ml)
1	40,12	50,0	77,7	1,448
2	40,05	50,0	76,7	1,500
3	39,98	50,0	76,7	1,497
4	40,10	50,0	77,7	1,448
5	40,07	50,0	76,7	1,501

4. táblázat

A sűrűségek átlaga $\bar{\rho} = 1,479$ g/ml. A fő hibaforrás a térfogatmérés hibája (a tömegmérés sokkal pontosabb): $\Delta V = \sqrt{2} \cdot 0,5$ ml $\approx 0,7$ ml, amiből a térfogatmérés relatív hibája $\frac{\Delta V}{V_2 - V_1} \approx 2,5\%$. A rizs anyagsűrűsége tehát:

$$\rho = (1,48 \pm 0,04) \text{ g/ml} = (1480 \pm 40) \text{ kg/m}^3.$$

2. Térkitöltés mérése különböző preparálás mellett

Rögzített, $m = 150$ g rizsmennyiséget használunk minden mérésben, és a következő módokon állítjuk be a halmazt a mérőhengerben:

- laza betöltés: lassú beöntés, ütögetés nélkül;

- rázogató: 50 darab függőleges kocogtatás;
- rezgetés: 30 s enyhe rezgetés (asztallapon, kézzel);
- préselés: kb. állandó terhelés 30 s-ig.

Mindegyik esetet ötször ismételjük és minden ismétlésnél leolvassuk a halmaz V_h térfogatát. Ezek átlagából és a korábban meghatározott anyagsűrűségből az (1) összefüggés alapján számítjuk a térkitöltést. A térkitöltés hibáját elsősorban ϱ hibája okozza (ami egy nagyságrenddel nagyobb, mint V_h hibája). A mért és számított értékek az 5. táblázatban láthatók.

preparálás	V_h (ml)					$\bar{V}_h$ (ml)	ϕ
laza betöltés	185	186	184	185	187	$185,4 \pm 0,7$	$0,547 \pm 0,016$
rázogató (50-szer)	171	170	172	169	171	$170,6 \pm 0,7$	$0,597 \pm 0,017$
rezgetés (30 s)	166	165	167	166	185	$165,8 \pm 0,6$	$0,611 \pm 0,017$
préselés (30 s)	160	159	160	158	159	$159,2 \pm 0,6$	$0,637 \pm 0,018$

5. táblázat

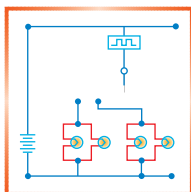
Látható, hogy a preparálás hatására a térkitöltés szignifikánsan növekszik, a különbség egyértelműen nagyobb a hibánál:

$$\phi_{\text{préselt}} - \phi_{\text{laza}} = 0,637 - 0,547 = 0,090 > \sqrt{(\Delta\phi_{\text{préselt}})^2 + (\Delta\phi_{\text{laza}})^2} \approx 0,024.$$

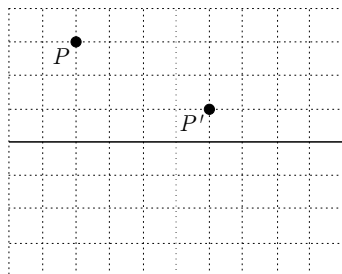
A rázogató gyorsan növeli a térkitöltést, a további lépések ezt már csak kisebb mértékben fokozzák. A kezdeti és végállapot között $0,090 \pm 0,024$ a térkitöltés növekedése, ami kb. 16%-os relatív változás.

Erdélyi Dominik (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 12. évf.)

15 dolgozat érkezett. Helyes 10 megoldás. Kicsit hiányos (5 pont) 2, hiányos (1–2 pont) 3 dolgozat.



Fizika gyakorlatok megoldása



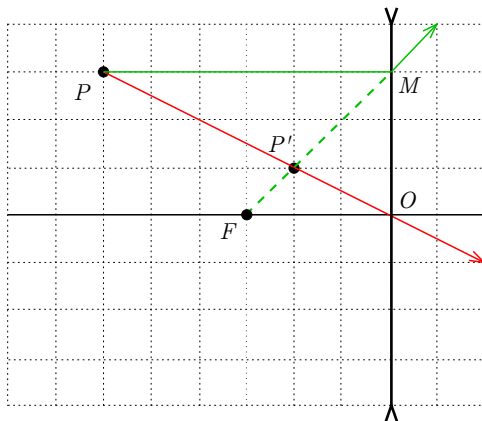
(4 pont)

G. 911. Egy vékony szórólencse az ábrán látható P pontból a P' pontban állít elő látszólagos képet. A lencse optikai tengelyét a folytonos vonal jelöli, a négyzethálón egy-egy beosztás vízszintesen 10 cm-nek, függőlegesen 1 cm-nek felel meg. Mekkora a lencse fókusz távolsága?

Megoldás. Egy szórólencse egy tárgypontról látszólagos képet állít elő ugyanazon az oldalon, amelyiken a tárgypont van. Ha egy fénysugár áthalad egy szórólencse optikai középpontján, akkor változatlanul halad tovább, ezért a tárgypont, a képpont és az optikai középpont egy egyenesre esik. Ahhoz, hogy megtaláljuk a lencse optikai középpontját, kössük össze a P és P' pontokat, majd hosszabbítsuk meg ezt a szakaszt (piros egyenes az ábrán). Ahol ez az egyenes metszi a lencse optikai tengelyét, ott van a lencse középpontja (O). Állítsunk merőlegest az optikai tengelyre az O pontban, ez lesz a lencse síkjá.

A P pontból rajzoljunk egy merőleges egyenest a lencse síkjára, amely az M pontban metszi a lencse síkját. Ez a (zölddel rajzolt) egyenes egy fénysugarat jelképez. Mivel a lencse síkjára párhuzamosan érkező fénysugarak úgy törnek meg a szórólencsén, mintha a fókusból indulnának, kössük össze a P' pontot az M ponttal, ahol ennek a szakasznak a meghosszabbítása (zöld szaggatott vonal) metszi az optikai tengelyt, ott van a lencse (egyik) fókuszpontja.

Az ábráról leolvasható, hogy az OF távolság 30 cm, azaz a szórólencse fókusz távolsága $f = -30$ cm.



A Tuggyuk csapat: Csuvár Barnabás, Fekete Ákos
(Kecskeméti Bányai Júlia Gimn., 9. évf.)

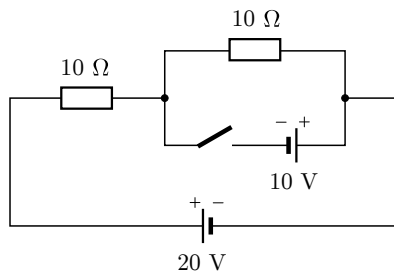
40 dolgozat érkezett. Helyes 27 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 5, hiányos (1–2 pont) 2, hibás 4, nem versenyszerű 2 dolgozat.

G. 912. Az ábrán látható áramkörben kezdetben a kapcsoló nyitva van.

a) Mekkora áramok folynak az áramkör ellenállásain és a telepeken a kapcsoló zárása előtt és után?

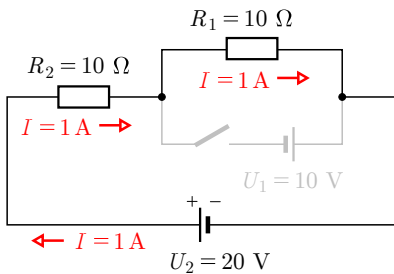
b) Mekkora áramok folynak, ha a kapcsoló melletti feszültségforrás polaritását megfordítjuk?

(4 pont)

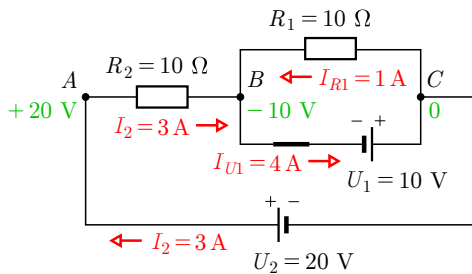


Megoldás. a) Ameddig a kapcsoló nyitva van, a 10 V-os telepen nem folyik áram, mintha ott sem lenne (1. ábra). Így csak egy egyszerű soros kapcsolás marad, amelynek eredő ellenállása $R_e = R_1 + R_2 = 20\ \Omega$. Ebből az áramerősség ebben az esetben $I = U_2/R_e = 1$ A.

Tehát ekkor mindkét ellenálláson és a 20 V-os telepen is $I = 1$ A erősségű áram folyik. (A 10 V-os telepen pedig nem folyik áram.)



1. ábra



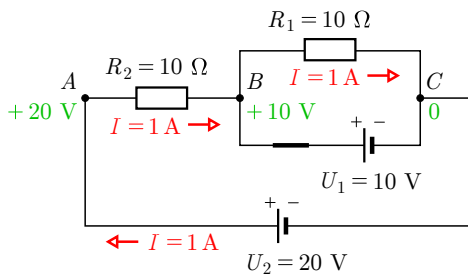
2. ábra

Ha a kapcsolót bezárjuk, akkor az R_1 ellenálláson $U_1 = 10$ V feszültség esik, tehát rajta most is $I_{R1} = U_1/R_1 = 1$ A áram folyik, de az előzővel ellentétes irányba, vagyis a 2. ábrán jobbról balra.

Ha a C pont potenciálját 0-nak vesszük, akkor a B pont potenciálja -10 V, míg az A ponté $+20$ V, így az R_2 ellenálláson $U_{AB} = 30$ V feszültség esik. Tehát rajta $I_2 = U_{AB}/R_2 = 3$ A erősségű áram folyik, a korábbival azonos irányban (az ábrán balról jobbra). A 20 V-os telep árama ugyanekkora, míg a 10 V-os telepen a csomóponti törvény szerint $I_{U1} = I_{R1} + I_2 = 4$ A áram folyik (a B pontból a C pont irányába).

Összefoglalva: az R_2 ellenálláson és a 20 V-os telepen 3 A, az R_1 ellenálláson 1 A, míg a 10 V-os telepen 4 A erősségű áram folyik.

b) Nyitott kapcsoló esetén a 10 V-os telep polaritása érdektelen, a megoldás ekkor megegyezik az a) részben leírtakkal.



3. ábra

Ha a kapcsolót a 10 V-os telep fordított polaritása mellett zárjuk (3. ábra), a B pont potenciálja a C ponthoz képest $+10$ V lesz, így mindkét ellenálláson ugyanakkora és ugyanolyan irányú feszültség esik, mint a nyitott kapcsoló esetében.

Ebben az esetben tehát a kapcsoló zárása semmilyen változást nem okoz: mindkét ellenálláson és a 20 V-os telepen is $I = 1$ A erősségű áram folyik, a 10 V-os telepen pedig nem folyik áram.

Villant Vanda (Pécsi Leőwey Klára Gimn., 9. évf.)

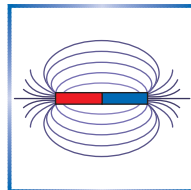
Megjegyzés. A feladat nem kéri, de érdemes megvizsgálni az áramkör energiaviszonyait is (ez egyben ellenőrzésre is alkalmas). Nyitott kapcsoló esetén, és a fordított polaritásánál a

zárt kapcsoló esetén is csak a 20 V-os telepen át folyik áram, az általa leadott teljesítmény ekkor $P = U_2 I = 20 \text{ W}$. A Joule-hő miatt fejlődő hőteljesítmény pedig mindkét ellenálláson $P_J = RI^2 = 10 \text{ W}$, összesen 20 W, ami megegyezik a leadott teljesítménnyel.

Az a) esetben zárt kapcsoló esetén a 10 V-os telep $P_1 = U_1 I_{U1} = 40 \text{ W}$, míg a 20 V-os telep $P_2 = U_2 I_2 = 60 \text{ W}$ teljesítményt ad le. Eközben az R_1 ellenálláson a disszipálódó hőteljesítmény $P_{J1} = I_{R1}^2 R_1 = 10 \text{ W}$, az R_2 ellenálláson pedig $P_{J2} = I_2^2 R_2 = 90 \text{ W}$. Megnyugtató módon teljesül az energiamérleg: $40 \text{ W} + 60 \text{ W} = 100 \text{ W} = 10 \text{ W} + 90 \text{ W}$.

40 dolgozat érkezett. Helyes 18 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 5, hiányos (1–2 pont) 14, hibás 1, nem versenyszerű 2 dolgozat.

Fizika feladatok megoldása



P. 5691. Határozzuk meg egy vékony, m tömegű, homogén tömegeloszlású, a oldalú szabályos háromszög alakú lemez tehetetlenségi nyomatékát az egyik csúcsán áthaladó tengelyre vonatkozóan, ha az

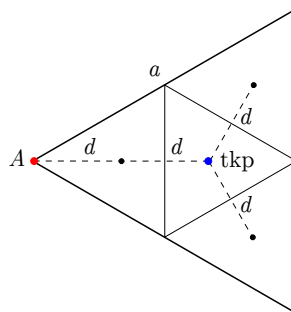
- a háromszög síkjára merőleges,
- a magasságvonal,
- az előző két tengelyre merőleges.

(5 pont)

Közli: Zsigri Ferenc, Budapest

Megoldás. a) Határozzuk meg először a $\Theta_{a, \text{tkp}}$ tehetetlenségi nyomatékot a háromszög tömegközéppontján átmenő (és a háromszög síkjára merőleges) tengelyre. Ehhez osszuk fel a szabályos háromszöget 4 egybevágó kis háromszögre, ahogy azt az 1. ábra mutatja. A kis háromszögek tömegközéppontjai között, valamint a kis háromszögek tömegközéppontja és csúcsai között a távolság: $d = \frac{\sqrt{3}}{6} a$.

Keressük a nagy háromszög tehetetlenségi nyomatékát $\Theta_{a, \text{tkp}} = k_1 m a^2$ alakban! Ekkor egy kis háromszög (saját tömegközéppontján átmenő tengelyre vonatkoztatott) tehetetlenségi nyomatéka:



1. ábra

$$\Theta_{a, \text{tkp}, k} = k_1 \frac{m}{4} \left(\frac{a}{2} \right)^2 = \frac{1}{16} k_1 m a^2 = \frac{1}{16} \Theta_{a, \text{tkp}}.$$

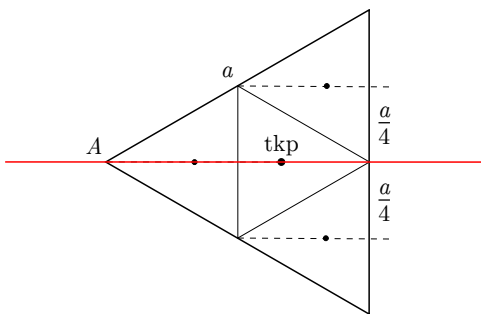
(Felhasználtuk, hogy a kis síkidom méretei a nagy méreteinek fele, és így a tömege a nagy tömegének negyede.) Rakjuk össze a nagy háromszög tehetetlenségi nyomatékát a négy kis háromszögeből a Steiner-tétel segítségével, felhasználva, hogy három

kis háromszög tömegközéppontja a közös tömegközépponton átmenő tengelytől d távolságra helyezkedik el:

$$k_1 m a^2 = 4 \cdot \frac{1}{16} k_1 m a^2 + 3 \cdot \frac{m}{4} d^2 = \frac{1}{4} k_1 m a^2 + \frac{3}{4} m \left(\frac{\sqrt{3}}{6} a \right)^2 = \left(\frac{1}{4} k_1 + \frac{1}{16} \right) m a^2.$$

Az egyenletből $k_1 = \frac{1}{12}$ adódik. Végül a csúcson átmenő tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékot a Steiner-tétel alapján határozzuk meg (felhasználva, hogy a tömegközéppont és a csúcs távolsága $2d = \frac{\sqrt{3}}{3} a$):

$$\Theta_a = \Theta_{a, \text{tkp}} + m(2d)^2 = \frac{1}{12} m a^2 + \frac{1}{3} m a^2 = \frac{5}{12} m a^2.$$



2. ábra

ségi nyomatékának $\frac{1}{16}$ -od része. A nagy háromszög tehetetlenségi nyomatékát ismét a négy kis háromszögből rakjuk össze a Steiner-tétel segítségével, felhasználva, hogy most két kis háromszög tömegközéppontja a tengelytől $\frac{a}{4}$ távolságra helyezkedik el:

$$k_2 m a^2 = 4 \cdot \frac{1}{16} k_2 m a^2 + 2 \cdot \frac{m}{4} \left(\frac{a}{4} \right)^2 = \left(\frac{1}{4} k_2 + \frac{1}{32} \right) m a^2.$$

Az egyenletből $k_2 = \frac{1}{24}$ adódik, tehát a keresett tehetetlenségi nyomaték:

$$\Theta_b = \frac{1}{24} m a^2.$$

c) Legyen a keresett tehetetlenségi nyomaték Θ_c . A *merőleges tengelyek tétele*⁵ értelmében:

$$\Theta_a = \Theta_b + \Theta_c,$$

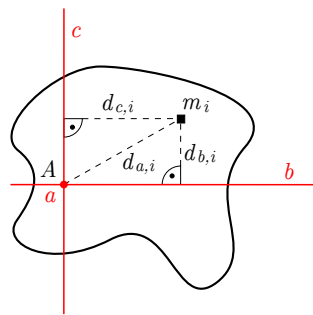
amiből

$$\Theta_c = \Theta_a - \Theta_b = \frac{3}{8} m a^2.$$

Papp Emese Petra (Budapest, ELTE Apáczai Csere J. Gyak. Gimn., 11. évf.)

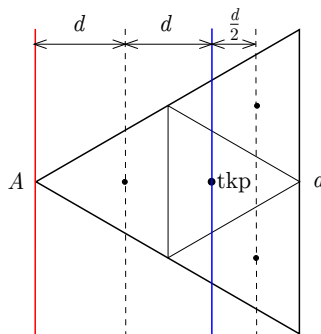
⁵https://en.wikipedia.org/wiki/Perpendicular_axis_theorem

Megjegyzések. 1. A merőleges tengelyek tétele könnyen levezethető a tehetetlenségi nyomaték definíciója alapján. Egy síkidom tehetetlenségi nyomatéka bármely tengelyre a $\Theta = \sum m_i d_i^2$ összefüggéssel számítható ki, ahol d_i az adott kis tömegelem távolsága a kiválasztott tengelytől. A 4. ábrán látható, hogy a síklapra merőleges a tengelytől mért $d_{a,i}$ távolságra fennáll, hogy $d_{a,i}^2 = d_{b,i}^2 + d_{c,i}^2$, ahol $d_{b,i}$ és $d_{c,i}$ a síkban lévő, egymásra merőleges b és c tengelyektől mért távolságok. Ebből és a tehetetlenségi nyomaték fenti összegzős képletéből azonnal adódik a $\Theta_a = \Theta_b + \Theta_c$ összefüggés.



3. ábra

2. A $c)$ kérdésre ennek ismerete nélkül, az előző két esethez hasonló módon is adhatunk megoldást. Ekkor az $a)$ részhez hasonlóan először a tömegközépponton átmenő, az egyik oldallal párhuzamos $\Theta_{c,tkp}$ tehetetlenségi nyomatékokat határozzuk meg ugyanolyan módszerrel. A 4. ábrán most is $d = \frac{\sqrt{3}}{6}a$.



4. ábra

Keressük a nagy háromszög tehetetlenségi nyomatékát most $\Theta_{c,tkp} = k_3 ma^2$ alakban! Egy kis háromszög tömegközéppontján átmenő, egyik oldallal párhuzamos tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka az előzőkhöz hasonlóan most is a nagy háromszög tehetetlenségi nyomatékának $\frac{1}{16}$ -od része. A nagy háromszög tehetetlenségi nyomatékát ismét a négy kis háromszögből rakjuk össze a Steiner-tétel segítségével, felhasználva, hogy most két kis háromszög tömegközéppontja a tengelytől $\frac{d}{2}$, míg egy kis háromszögé d távolságra helyezkedik el:

$$k_3 ma^2 = 4 \cdot \frac{1}{16} k_3 ma^2 + 2 \cdot \frac{m}{4} \left(\frac{d}{2} \right)^2 + \frac{m}{4} d^2 = \frac{1}{4} k_3 ma^2 + \frac{3}{8} m \left(\frac{\sqrt{3}}{6} a \right)^2 = \left(\frac{1}{4} k_3 + \frac{1}{32} \right) ma^2.$$

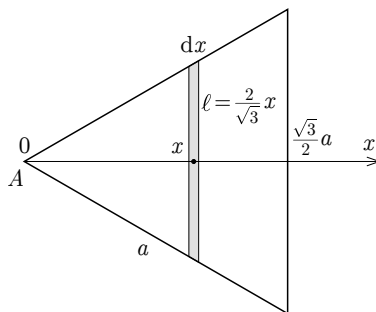
Az egyenletből $k_3 = \frac{1}{24}$ adódik. A csúcson átmenő tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékokat ismét a Steiner-tétel alapján határozzuk meg (megint felhasználva, hogy a tömegközéppont és a csúcs távolsága $2d = \frac{\sqrt{3}}{3}a$):

$$\Theta_c = \Theta_{c,tkp} + m(2d)^2 = \frac{1}{24} ma^2 + \frac{1}{3} ma^2 = \frac{5}{8} ma^2,$$

az előző megoldással összhangban.

3. A megoldásokhoz más feldarabolással is el lehet jutni.

4. A tehetetlenségi nyomatékok kiszámíthatók integrálszámítással is. Különböző felosztásokat lehet használni, itt most a háromszöglapot dx szélességű, $\ell = \frac{2}{\sqrt{3}}x$ hosszúságú kis téglalapokból fogjuk összerakni (5. ábra), amelyek tehetetlenségi nyomatéka a középpontjukon átmenő, a szakaszra merőleges tengelyekre $d\Theta = \frac{1}{12} \ell^2 dm$, a szakaszon átmenő



5. ábra

tengelyre pedig nulla. A kis szakasz tömegét a $dm = \frac{m}{A} \ell dx$ összefüggéssel fejezhetjük ki, ahol $A = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$ a háromszög területe. Ahol szükséges, használjuk a Steiner-tételt.

$$\Theta_a = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a} \left(x^2 + \frac{1}{12} \ell^2 \right) \frac{4m}{\sqrt{3}a^2} \ell dx = \frac{80m}{27a^2} \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a} x^3 dx = \frac{80m}{27a^2} \left[\frac{1}{4} x^4 \right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a} = \frac{5}{12} m a^2.$$

$$\Theta_b = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a} \frac{1}{12} \ell^2 \frac{4m}{\sqrt{3}a^2} \ell dx = \frac{8m}{27a^2} \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a} x^3 dx = \frac{8m}{27a^2} \left[\frac{1}{4} x^4 \right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a} = \frac{1}{24} m a^2.$$

$$\Theta_c = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a} x^2 \frac{4m}{\sqrt{3}a^2} \ell dx = \frac{8m}{3a^2} \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a} x^3 dx = \frac{8m}{3a^2} \left[\frac{1}{4} x^4 \right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a} = \frac{3}{8} m a^2.$$

Már az integrálás elvégzése előtt látszik, hogy teljesül a $\Theta_a = \Theta_b + \Theta_c$ összefüggés (merőleges tengelyek tétele).

30 dolgozat érkezett. Helyes 21 megoldás. Kicsit hiányos (3–4 pont) 4, hiányos (1–2 pont) 5 dolgozat.

P. 5700. A legenda szerint Dido, Türosz hercegnője, miután menekülni kényszerült hazájából, Észak-Afrikába érkezett, ahol a helyi uralkodótól annyi földet kért, amennyit egy ökörbőrrel körbe tud keríteni. Az uralkodó beleegyezett, mire Dido hosszú, keskeny csíkra vágta a bőrt, amiből kerítést készített, majd a lehető legnagyobb földterületet választotta le a tengerpart mentén, megalapítva Karthágó városát.

A történet egy kevésbé ismert változata szerint Dido hajózásai során egy 1 km sugarú, kör alakú szigeten kötött ki, valahol a Földközi-tengeren. Legfeljebb mekkora földterületet tudott leválasztani, ha a kerítésének hossza 1 km volt?

Dido a kettéosztott sziget kisebb területrészt tekinthette sajátjának.

(5 pont)

Közli: Vigh Máté, Herceghalom

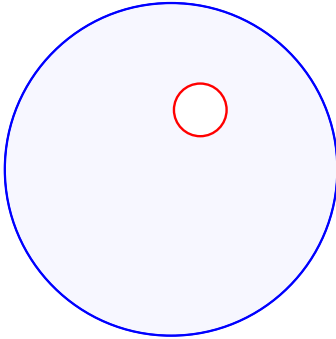
I. megoldás. Azt szeretnénk elérni, hogy a határvonalon kívüli terület *minimális* legyen. Ehhez analógiaként vizsgálhatunk egy fonállal két részre választott szappanhártyát: ha az egyik részen a hártyát kilyukasztjuk, akkor a másik a felületi feszültség hatására minimális területű lesz.

Két esetet vizsgálunk: az első esetben a határvonal nem érintkezik a sziget peremével (1. ábra). Ilyenkor a körbekerített terület egy kör lesz, melynek kerülete $k = 1$ km (a kerítés hosszúsága). A területe ebből:

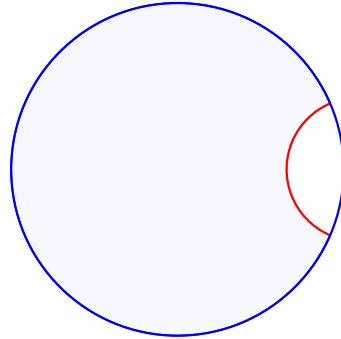
$$T_1 = r^2 \pi = \left(\frac{k}{2\pi} \right)^2 \pi = \frac{k^2}{4\pi} \approx 0,0796 \text{ km}^2.$$

A második esetben a határ két vége a sziget pereméhez ér, ahol szabadon elmozdulhat (2. ábra). A határvonal ilyenkor egy körív lesz, amely merőlegesen csatlakozik a sziget pereméhez. Az állítás első része abból következik, hogy a fonatra

a felületi feszültségből származó hosszegységenként ható erő a fonal mentén állandó, és mindenhol a fonalra merőlegesen hat, így egyensúlyban a fonalban ható erő és a fonal görbületi sugara is állandó. A második része pedig abból, hogy ha a fonal a határoló kört nem merőlegesen érné el, akkor elmozdulna.



1. ábra



2. ábra

Ezután már meg tudjuk határozni az így leválasztott terület nagyságát. Mivel a fonal merőlegesen érintkezik a peremmel, a körív r sugara is merőleges a sziget R sugarára. A 3. ábra alapján a körívhez tartozó fél középponti szög:

$$\varphi = \frac{k}{2r},$$

másrészt a derékszögű háromszögben:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{R}{r}.$$

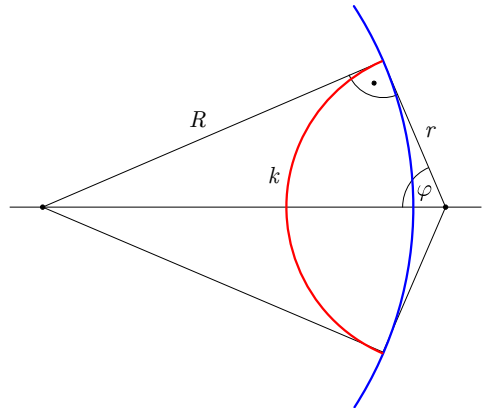
Az egyenletrendszer φ -re rendezve:

$$\varphi = \frac{k}{2R} \operatorname{tg} \varphi,$$

amelyből a $k = R = 1$ km adatok behelyettesítésével a

$$\operatorname{tg} \varphi = 2\varphi$$

transzcendens egyenletet kapjuk, amely grafikusán vagy numerikusan oldható meg.



3. ábra

Megjegyzés. Utóbbihoz lásd a lapunk 2025. novemberi számában megjelent cikket: *Woynarovich Ferenc: Egy egyszerű egyenletmegoldó eljárás.* Esetünkben a megoldandó

egyenlet

$$\varphi = \operatorname{arctg} 2\varphi$$

alakjából érdemes kiindulni, ekkor a

$$\varphi_{n+1} = \operatorname{arctg} 2\varphi_n$$

rekurziós szabály alkalmazásával (a számológépen a 2-vel való szorzás és az arctg függvény egymás utáni ismételt elvégzésével – természetesen radián állásban) bármely pozitív értékről indulva gyorsan eljutunk a (kívánt pontosságú) közelítő megoldáshoz.

Az egyenlet megoldása:

$$\varphi \approx 1,166 \approx 66,78^\circ,$$

amiből a kerítés ívének sugara:

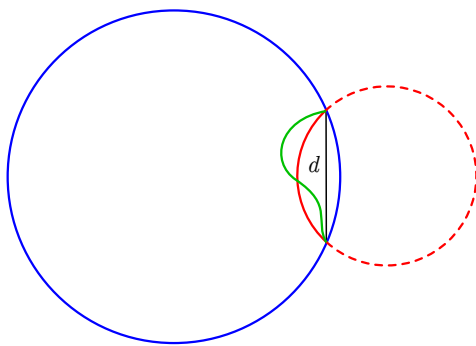
$$r = \frac{k}{2\varphi} \approx 0,429 \text{ km.}$$

A Dido által így megszerezhető terület két körszelet területének összege. A körszeletek sugara és középponti szöge r és 2φ , illetve R és $\pi - 2\varphi$, amiből r és R értékének behelyettesítésével a terület:

$$T_2 = r^2 \left(\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2} \right) + R^2 \left(\frac{\pi}{2} - \varphi - \frac{\sin(\pi - 2\varphi)}{2} \right) \approx 0,191 \text{ km}^2.$$

Ez több mint kétszer akkora, mint az első esetben, így ez a feladat megoldása.

Bogdán Balázs Ákos (Óbudai Árpád Gimn., 12. évf.)



4. ábra

II. megoldás. Tegyük fel, hogy a kerítés két vége d távolságra van egymástól (4. ábra). Rajzoljunk be egy ezeken áthaladó, $k = 1 \text{ km}$ hosszúságú tetszőleges görbét (zöld vonal), és egy ugyanilyen hosszúságú körívet (piros vonal). Egészítsük ki a körívet egy körre (piros szaggatott vonal).

Ha a zöld görbe által leválasztott terület nagyobb lenne, mint a körív által leválasztott, akkor a szaggatott vonallal és a zöld görbével határolt síkidom területe nagyobb lenne, mint a

piros kör területe. Viszont a két síkidom kerülete ugyanakkora, így ez ellentmondana az *izoperimetrikus egyenlőtlenség*⁶. Tehát az optimális kerítés körív alakú.

Legyen a $k = 1 \text{ km}$ hosszúságú piros körív sugara r , a d hosszú húrhoz tartozó középponti szög pedig α (5. ábra). A koszinusztételből:

$$d^2 = r^2 + r^2 - 2r^2 \cos \alpha = 2r^2(1 - \cos \alpha) = \frac{2k^2(1 - \cos \alpha)}{\alpha^2},$$

⁶https://hu.wikipedia.org/wiki/Izoperimetrikus_egyenlőtlenség

ahol felhasználtuk, hogy $r = \frac{k}{\alpha}$. Ehhez hasonlóan a másik, β középponti szögű körcikkben:

$$d^2 = R^2 + R^2 - 2R^2 \cos \beta = 2R^2(1 - \cos \beta).$$

A két kifejezés egyenlőségéből:

$$\cos \beta = \frac{k^2}{R^2} \frac{\alpha^2 - 1 + \cos \alpha}{\alpha^2} = \frac{\alpha^2 - 1 + \cos \alpha}{\alpha^2},$$

ahol az utolsó lépésben felhasználtuk, hogy $R = k$. A teljes leválasztott terület két körszelet területének összege:

$$T = \frac{k^2}{2\alpha^2}(\alpha - \sin \alpha) + \frac{R^2}{2}(\beta - \sin \beta),$$

amelybe behelyettesítve a

$$\beta = \arccos \frac{\alpha^2 - 1 + \cos \alpha}{\alpha^2}$$

kifejezést, valamint az $R = k = 1$ km értékeket, a terület α függvényében (km²-ben):

$$T = \frac{\alpha - \sin \alpha}{2\alpha^2} + \frac{\arccos \frac{\alpha^2 - 1 + \cos \alpha}{\alpha^2} - \sin \left(\arccos \frac{\alpha^2 - 1 + \cos \alpha}{\alpha^2} \right)}{2}.$$

Ennek a kifejezésnek numerikusan meghatározható a maximumhelye és maximum-értéke⁷: $\alpha \approx 2,331 \approx 133,6^\circ$ esetén a terület $T \approx 0,191$ km². Ekkora területet tud lehatárolni Dido.

Rajtik Sándor Barnabás (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.)

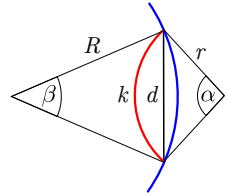
Megjegyzések. 1. A II. megoldás nem használja fel, hogy a kerítés merőlegesen éri el a sziget peremét. Ez a maximum meghatározása után azonban ellenőrizhető:

$$\beta = \arccos \frac{\alpha^2 - 1 + \cos \alpha}{\alpha^2} \approx 0,810 \approx 46,4^\circ = 180^\circ - \alpha,$$

tehát a négyszög húrnégyszög, és így a szimmetria miatt a sugarak által bezárt szögek derékszögek.

2. A feladat megoldható variációs számítás⁸ segítségével is, amelyhez azonban általában a középiskolás tananyagot meghaladó matematikai apparátusra van szükség. Lapunk következő, 2026. májusi számában egy cikkben ismertetni fogjuk a módszer alapjait és alkalmazását a **P. 5717.** feladat megoldásához.

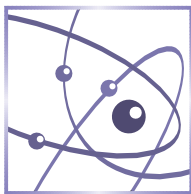
19 dolgozat érkezett. Helyes 4 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 1, hiányos (1–3 pont) 7, hibás 7 dolgozat.



5. ábra

⁷Például WolframAlpha segítségével, <https://www.wolframalpha.com>

⁸<https://hu.wikipedia.org/wiki/Variációs számítás>



Fizikából kitűzött feladatok

M. 449. Készítsünk torziós ingát egy befőttesüvegből úgy, hogy az üveget függőleges helyzetében két párhuzamos cérnával felfüggesztjük. (A cérnaszálak hossza legyen 1 méter, távolságuk pedig egyezzen meg az üveg szájának átmérőjével. A csavaros tető segítségével rögzíthetőek.)

Mérjük meg a torziós inga lengésidejét az üvegbe töltött kristálycukor mennyiségének függvényében!

(6 pont)

Közli: Szabó Endre, Vágfüzes (Szlovákia)

G. 921. Gyerekek egy 10° -os hajlásszögű hegyoldalon szánkóznak. A hegy alján a lejtő vízszintes felületben folytatódik. A jeges hórétég mindenütt egyforma, így a súrlódási együttható értéke a lejtőn és a vízszintes felületen megegyezik. A szánkó kezdősebesség nélkül indul el a lejtő tetejéről, majd a lejtő aljára érve tovább csúszik a vízszintes szakaszon, ahol végül megáll. A szánkó harmad annyi idő alatt csúszott le a lejtőn, mint amennyi ideig mozgott a vízszintes szakaszon.

a) Hányszor hosszabb utat tett meg a szánkó a vízszintes szakaszon, mint a lejtőn?

b) Határozzuk meg a csúszási súrlódási együttható értékét!

c) A lecsúzás után az egyik gyerek visszahúzza a kiindulási pontra a szánkót. Hányszor több munkát végez a lejtőn, mint a vízszintes részen történő húzás közben? (A gyerek mindig a talajjal párhuzamos erőt fejt ki, és egyenletesen mozog.)

(4 pont)

Tarján Imre fizikaverseny, Szolnok

G. 922. Van két azonos hosszúságú, de különböző erősségű rugónk, az egyik piros, a másik kék színű. Ha „sorosan kapcsolva” feszítjük meg a rugópárt, a piros rugó rugalmas energiája kétszerese lesz a kék rugóénak. Mekkora a rugalmas energiák aránya akkor, ha „párhuzamosan kapcsoljuk” a két rugót, és úgy feszítjük meg azokat?

(4 pont)

G. 923. Egy literes, kocka alakú edényben fél liter higany és fél liter víz van. Egy másik edény – melynek lineáris méretei kétszeresek – szintén higanyval és vízzel van teletöltve. Mindkét edény alján ugyanakkora a hidrosztatikai nyomás.

a) Mekkora a hidrosztatikai nyomás az edények alján?

b) Mennyi higany és mennyi víz van a nagyobbik edényben?

(4 pont)

Közli: Szabó Endre, Vágfüzes (Szlovákia)

G. 924. Egy +6 dioptriás kontaktlencsét viselő ember elkér egy +2 dioptriás szemüveget, és felveszi a kontaktlencséje elé. Keressünk egy olyan szituációt, amikor ennek a dolognak van értelme! Vagy ez teljesen értelmetlen?

(4 pont)

P. 5724. Egy hosszú egyirányú főútcán sűrűn egymás után következnek a lámpás kereszteződések. A lámpák az idő felében zölddek, és úgy vannak beállítva, hogy 50 km/h sebességgel zöldhullámot kapjanak az autósok. Eduárd a biciklijével, amikor épp nem egy piros lámpánál áll, 25 km/h sebességgel halad. Mekkora az átlagsebessége? (A gyorsítási és fékezési szakaszokat tekintsük pillanatszerűnek. A kereszteződések olyan sűrűn követik egymást, hogy Eduárd a lámpák ciklusideje alatt jó sok kereszteződésen át tud hajtani.)

(5 pont)

Közli: Bodor András, Budapest

P. 5725. Két egyforma, homogén tömegeloszlású hengert lejtőre helyezünk úgy, hogy egymáshoz érjenek, és a tengelyük vízszintes legyen. Súrlódás van közöttük és a lejtő között is. Egyensúlyban lehet-e ez a rendszer, ha magára hagyjuk?

(4 pont)

Közli: Gelencsér Jenő, Kaposvár

P. 5726. Egy derékszögben meghajlított, könnyű, de merev pálca szárainak hossza ℓ_1 és ℓ_2 . A szárak végére m_1 és m_2 tömegű, kis méretű testeket rögzítettünk. A pálca a töréspontjánál lévő vízszintes tengely körül a saját síkjában szabadon elfordulhat. Mekkora az egyensúlyi helyzetéből kicsit kitérített rendszer lengésideje?

(4 pont)

Kvant feladat nyomán

P. 5727. Egy függőleges helyzetű, 2 dm^2 keresztmetszetű, hőszigetelt hengerben lévő 30 cm magas légoszlopot 8 kg tömegű dugattyú zár be. A külső légnyomás 100 kPa. A bezárt gáz nyomása akkora, hogy képes lenne felfelé tolni a dugattyút, amit állandó nagyságú, lefelé mutató erővel tartunk stabilan. Egy adott pillanatban elengedjük a dugattyút, és hagyjuk, hogy a 10 cm-rel fölötte lévő ütközőig mozogjon. Egy fűtőszállal biztosítjuk, hogy a tartályban lévő levegő állandó gyorsulással mozgassa a dugattyút.

a) Mennyi kezdetben a levegő nyomása, ha a dugattyú súrlódásmentes mozgása 0,2 másodpercig tart?

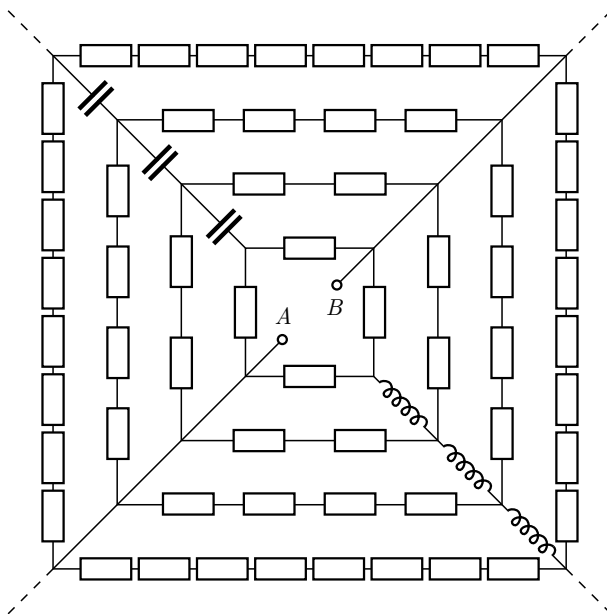
b) Adjuk meg a fűtőszál teljesítményét az idő függvényében!

(4 pont)

Közli: Kis Tamás, Heves

P. 5728. A következő oldalon lévő ábrán látható végtelen hálózatban minden ellenállás azonos R ellenállású, minden kondenzátor azonos C kapacitású és minden tekercs azonos L induktivitású.

Adjuk meg a hálózatba befolyó áramerősséget az idő függvényében, ha az A és a B pontok közé $U_{A,B} = U_{\max} \sin \omega t$ függvény szerint váltakozó feszültséget kapcsolunk!



(4 pont)

Közli: Zsigri Ferenc, Budapest

P. 5729. Két azonos m tömegű, $+q$ és $-q$ töltésű pontszerű test kezdetben egymástól d távolságra, nyugalomban van. Ha a testeket egyszerre elengedjük, akkor egy idő után összeütköznek. Ha a kísérletet megfelelő erősségű, a testeket összekötő szakaszra merőleges irányú, homogén mágneses mező jelenlétében ismétljük meg, akkor a testek nem ütköznek össze.

A 2025. évi Eötvös-versenyen kitűzött feladat megoldása⁹ szerint az ütközés elkerüléséhez szükséges mágneses indukció minimális értéke: $B_{\min} = 4\sqrt{km/d^3}$.

a) Numerikus módszerekkel határozzuk meg és ábrázoljuk a töltések pályáját $B = \frac{4}{5}B_{\min}$, $B \approx B_{\min}$ és $B = \frac{5}{4}B_{\min}$ mágneses indukció esetén!

b) $B < B_{\min}$ esetén határozzuk meg és ábrázoljuk $B/B_{\min}$ függvényében a töltések összeütközéséig eltelt időt!

c) $B > B_{\min}$ esetén a töltések periodikusan újra és újra d távolságra távolodnak egymástól. Határozzuk meg és ábrázoljuk $B/B_{\min}$ függvényében ezt a periódusidőt!

A numerikus megoldáshoz segítség: Csóka Péter, Seprődi Barnabás: *Fizika problémák megoldása numerikus módszerrel* lapunk 2024. novemberi számában.

(5 pont)

Közli: Vankó Péter, Budapest

P. 5730. Egy hagyományos (egyforma résekből álló) optikai rácsra 535 nm hullámhosszú lézerfényt ejtünk. Mekkora a rácsállandó, ha 35°-os szögben látható egy maximum, és a megfigyelhető legmagasabb elhajlási rend az ötödik?

(4 pont)

Példatári feladat

⁹Lásd lapunk 2026. januári számában.

P. 5731. Ha egy igen nagy energiájú gamma-foton álló elektronnal ütközik, akkor párkeltés következhet be, sőt megtörténhet, hogy nem egy elektron-pozitron pár keletkezik, hanem több.

a) Legalább mekkora a gamma-foton energiája, ha a folyamatban n elektron-pozitron pár keletkezik?

b) Legalább mekkora lesz a keletkező részecskék sebessége a párkeltés után?

(5 pont)

Közlő: *Honyek Gyula*, Veresegyház

P. 5732. Egy M tömegű ember egy kötélhágcsó alján lóg. A hágcsó két, elhanyagolható tömegű, párhuzamos kötélből áll, amelyeket m tömegű, ℓ hosszúságú, merev létrafokok kötnek össze. A létrafokok közötti távolság h . Az ember tömege a fokok össztömegénél sokkal nagyobb.

Mekkora a hágcsón terjedő, hosszú hullámú, kis szögű torziós hullámok sebessége?

(6 pont)

Közlő: *Vigh Máté*, Herceghalom

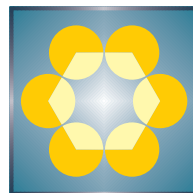


Beküldési határidő: 2026. május 15.

Elektronikus munkafüzet: <https://www.komal.hu/munkafuzet>



MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL FOR SECONDARY SCHOOLS (Volume 76. No. 4. April 2026)



Problems in Mathematics

K. 899. New exercises for practice – competition K (see page 223): Anna has written all the positive two-digit numbers on the blackboard once. Boglárka has erased Anna's numbers one by one and replaced them with the numbers obtained by subtracting their first digits from the second. For example, 26 is replaced with $6 - 2 = 4$ and 37 is replaced with $3 - 7 = -4$. Find the sum of Boglárka's numbers. (Proposed by *Katalin Abigél Kozma*, Győr) **K. 900.** We obtain a regular octagon by cutting out isosceles right triangles from the four corners of a square. Prove that the length of the side of the octagon is equal to the difference of the lengths of the diagonal and the side of the square. (Proposed by *Márton Ujházy*, Budapest) **K. 901.** Aliz Zilah and her mother, Anna celebrate their birthdays on the same day, 03.30. They celebrate this year the palindrome birthday: we can obtain Anna's age by replacing the digits of Aliz' age. How old was Anna when Aliz was born? (Find all possible solutions.) (Proposed by *Márton Ujházy*, Budapest) **K/C. 902.** We have 2026 unit cubes. From these we create the biggest number of compositions that can be obtained by removing the corner cubes of a $3 \times 3 \times 3$ cube. Find the ratio of surface areas of these cornerless compositions and the remaining unit cubes. (Proposed by *Bálint Bíró*, Eger) **K/C. 903.** In a group of twenty-five friend 20 people can play bridge, 19 people can play chess and 18 people can play. How many people can play all three games a) at least? b) at most? (Proposed by *Katalin Abigél Kozma*, Győr)

New exercises for practice – competition C (see page 224): **Exercises up to grade 10:** **K/C. 902.** See the text at Exercises K. **K/C. 903.** See the text at Exercises K. **Exercises**

for everyone: C. 1898. We would like to select some of the nine lattice points of a 2×2 square lattice such that no three of them form a right triangle. *a)* Prove that it's not possible to select five points with the property above. *b)* How many ways are there to select four points satisfying the above property? (Two selections are considered different if there is a point that is selected in one of them and not selected in the other.) (Proposed by *Márton Ujházy*, Budapest) **C. 1899.** 2227 is a special number for two different reasons. The first is that this is the next year when Pluto will be the closer to the Sun than Neptun, and the second is that three of its digits can be chosen such that their product is bigger by one than its remaining digit. How many four-digit numbers are there having the second property? (Proposed by *Mátyás Czett*, Zalaegerszeg) **C. 1900.** In a mathematics class of 30 students they play the following game. The teacher rolls seven octahedral dice of different colors, and the students write down the seven resulting numbers in an order of their choice, thus creating a seven-digit number. This time (see the figure on page 225) the resulting numbers were 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Is it possible that one of the numbers created by the students is a multiple of another number? (*Remark.* The winner of the game is the student the minimum difference of whose number from the other numbers is the largest.) (Proposed by *Zoltán Paulovics*, Budapest) **Exercises upwards of grade 11: C. 1901.** Real numbers a and b satisfy $|a - 1| + |b - 1| = |a| + |b| = |a + 1| + |b + 1|$. Find the smallest possible value of $|a - b|$. (Proposed by *Sándor Róka*, Nyíregyháza) **C. 1902.** On the smaller arc AB of the circumcircle of square $ABCD$ we pick internal point E . Let E' be the reflection of E across the center of the square. Let F and G be the feet of the perpendiculars from E to diagonals AC and BD , respectively. We get similarly points H and I from point E' . *a)* Prove that quadrilateral $FGHI$ is a diamond. *b)* Find the maximum of the area of quadrilateral $FGHI$. (Proposed by *Bálint Bíró*, Eger)

New exercises – competition B (see page 226): **B. 5526.** Let P be an interior point of circle k with center O , different from O . Let O' be the reflection of point O across point P . Let X be one of the intersection points of the circle with center O' and radius $O'P$ and circle k . Line XP intersects circle k at point Y for the second time. Prove that P trisects line segment XY . (3 points) (Proposed by *Mathematics sophomores of University of Szeged*) **B. 5527.** The sides of acute triangle ABC are a, b, c , and its inradius is r . Prove that equality $2r^2 = (c - a)(c - b)$ (also featured in problem **B.5495.**) holds if and only if $a + b = 3c$. (4 points) (Proposed by *Géza Kiss*, Csömör) **B. 5528.** Prove that no matter how we color the natural numbers using 100 colors, it is always possible to find numbers $a < b < c < d$ with the same color satisfying $a + d = b + c$. (4 points) (Proposed by *Dömötör Pálvölgyi*, Budapest) **B. 5529.** How many of the perfect powers $6^2, 6^3, 6^4, \dots, 6^{2026}$ have a first digit that is smaller than 6? (3 points) (Proposed by *Attila Sztranyák*, Budapest) **B. 5530.** Five different positive integers satisfy the following property: no matter how we choose some of them, their geometric mean is always an integer. Find the smallest possible value of the biggest of these numbers. (5 points) (Proposed by *Péter Pál Pach*, Budapest) **B. 5531.** The incenter of triangle ABC is I , the circumcenters of triangles ABI , BCI and CAI are D , E and F , respectively. Prove that the area of triangle CDE is at least as large as the area of triangle ABC . (5 points) (Proposed by *Gábor Holló*, Budapest) **B. 5532.** An opera house has 8 boxes. With a box subscription, one can reserve the same box for at most 7 different evenings of the 2027/28 season, chosen by the buyer. There is one performance each evening. A box can be rented by only one person for a given evening, but multiple subscriptions may refer to the same box as long as the sets of selected evenings are disjoint. What is the minimum number of different performances in the repertoire such that the opera house can always arrange the program (knowing the subscribers' chosen dates) so that every box subscriber sees only different performances? (6 points) (Proposed by *András Imolay*, Budapest) **B. 5533.** In acute triangle ABC let A_0 be the foot of the altitude from A , and let B_0 be the foot of the altitude from B . On circle A_0B_0C let X and Y be the two points for which circles ABX and ABY are tangent

to circle A_0B_0C . Prove that line XY bisects side AB . (6 points) (Proposed by Géza Kós, Budapest)

New problems – competition A (see page 227): **A. 932.** Let ABC be an acute triangle with orthocenter H . Points D and E lie on the lines AC and AB , respectively, such that the points B, C, D, E are concyclic, and the line DE bisects the side BC . Suppose that the lines BD and CE meet at M . Prove that the line HM is perpendicular to the symmedian through A . (Proposed by Áron Bán-Szabó, Palaiseau) **A. 933.** Let a, b, c be real numbers in the interval $(1, 4)$. Consider the following three inequalities: $bx(x + y - z) + cx(x + z - y) \geq a(2yz + x)$, $cy(y + z - x) + ay(y + x - z) \geq b(2zx + y)$, $az(z + x - y) + bz(z + y - x) \geq c(2xy + z)$. a) Determine, in terms of a, b, c , the maximum number of these inequalities that can hold simultaneously for positive real numbers x, y, z satisfying $x + y + z = 1$. b) Find an explicit formula for x, y, z in terms of a, b, c , without using case distinctions, such that $x, y, z > 0$, $x + y + z = 1$, and none of the three inequalities holds. (Proposed by Áron Bán-Szabó, Palaiseau) **A. 934.** Let $\mathcal{T}$ denote the set of countable, undirected trees. A subset X of the real numbers is called *bariton* if every nonempty subset of X has a least element. a) Prove that for every bariton X there exists a function $f: X \rightarrow \mathcal{T}$ such that for all $y, z \in X$ we have $y \leq z$ if and only if $f(y)$ is isomorphic to a subgraph of $f(z)$. b) Does the statement remain true if we additionally require that for every $x \in X$, all vertices of $f(x)$ have finite degree? (A graph with vertex set V is called countable if there exists an injective map $V \rightarrow \mathbb{N}$.) (Proposed by Márton Németh, Budapest)

Problems in Physics

(see page 250)

M. 449. Construct a torsion pendulum from a mason jar by suspending it vertically with two parallel threads. (The threads should each be 1 metre long, and their spacing should be equal to the diameter of the jar's opening. They can be secured with the screw cap.) Measure the period of the torsion pendulum as a function of the amount of granulated sugar poured into the jar!

G. 921. Children are descending a mountain slope inclined at 10° on sleds. At the base of the slope, the surface continues horizontally. The icy snow layer is uniform throughout the entire path, so the coefficient of friction is identical on both the inclined and horizontal sections. The sled starts from the top of the slope without initial velocity, travels down the incline, and then proceeds along the horizontal surface until it comes to a complete stop. The time required to travel the slope is one-third of the time spent moving along the horizontal section. a) How much farther did the sled travel on the level section compared to the slope? b) Determine the coefficient of kinetic friction. c) After sliding down, one of the children pulls the sled back to the starting point. How many times more work does he perform on the slope than on the horizontal section? (The child always pulls with a force parallel to the ground and moves at constant speed.) **G. 922.** We have two springs of equal length but different spring constants, one red and one blue. If we stretch the two springs connected “in series”, the elastic energy of the red spring will be twice that of the blue one. What is the ratio of the elastic energies if the two springs are connected “in parallel” and stretched that way? **G. 923.** A one-litre cubic container holds half a litre of mercury and half a litre of water. Another container, with twice the linear dimensions, is likewise filled with mercury and water. The hydrostatic pressure at the bottom of the two containers is the same. a) What is the hydrostatic pressure at the bottom of the containers? b) What quantities of mercury and water are there in the second container? **G. 924.** A person wearing +6 dioptre contact lenses borrows a pair of +2 dioptre glasses and puts them on over their contact lenses. Under what circumstances, if any, would this be reasonable? Or is it completely pointless?

P. 5724. On a long one-way main street, traffic-light-controlled intersections are very closely spaced. The lights are green half the time and are timed to give drivers a green wave at 50 km/h. When Edward is not stopped at a red light, he rides his bicycle at 25 km/h, braking and accelerating abruptly. What is his average speed? (The intersections are so close together that Edward can pass many of them during one full light cycle.)

P. 5725. Two identical cylinders with homogeneous mass distribution are placed on a slope so that they touch each other, their axes are horizontal. There is friction both between the cylinders and between each cylinder and the slope. Can this system remain in equilibrium if it is left alone?

P. 5726. A lightweight but rigid rod is bent at a right angle, with arm lengths ℓ_1 and ℓ_2 . Small bodies of masses m_1 and m_2 are attached to the ends of the arms. The rod can rotate freely in its own plane about a horizontal axis passing through the elbow of the rod. What is the period of the oscillation of the system when it is slightly displaced from its equilibrium position?

P. 5727. A 30 cm high air column is enclosed by an 8 kg piston in a vertical, thermally insulated cylinder with a cross-sectional area of 2 dm^2 . The external air pressure is 100 kPa. The enclosed gas is kept in stable equilibrium by a constant downward force acting on the piston. At a certain moment the piston is released and allowed to move freely upward until it reaches a bumper located 10 cm above its initial position. A heating coil ensures that the gas inside the cylinder drives the piston upward with constant acceleration.

a) What is the initial pressure of the gas if the piston moves frictionlessly and the duration of its motion is 0.2 s? *b)* Give the power of the heating coil as a function of time.

P. 5728. In the infinite circuit shown *in the figure*, each resistor has resistance R , each capacitor has capacitance C , and each inductor has inductance L . Determine how the current in the circuit varies as a function of time if an alternating voltage supply $U_{A,B} = U_{\max} \sin \omega t$ is connected across points A and B .

P. 5729. Two point-like bodies of equal mass m , carrying charges $+q$ and $-q$, are initially held at rest at a distance d from each other. If they are released simultaneously, they will collide after some time. However, if the experiment is repeated in a uniform magnetic field of appropriate strength, directed perpendicular to the line joining the bodies, the collision does not occur. According to the solution to the problem set for the 2025 Eötvös competition¹⁰, the minimum value of magnetic induction necessary to avoid collision is: $B_{\min} = 4\sqrt{km/d^3}$

a) Using numerical methods, determine and plot the trajectory of the charges for magnetic inductions $B = \frac{4}{5}B_{\min}$, $B \approx B_{\min}$, and $B = \frac{5}{4}B_{\min}$.

b) For $B < B_{\min}$, determine and plot the time elapsed until the collision of the charges as a function of $B/B_{\min}$.

c) When $B > B_{\min}$, the charges periodically move away from each other a distance of d again and again. Determine and plot this period as a function of $B/B_{\min}$. Hint for the numerical solution can be found in Péter Csóka and Barnabás Seprődi, “Solving Physics Problems Using Numerical Methods”, published in the November 2024 issue of our journal.

P. 5730. Laser light of wavelength 535 nm falls on a standard (consisting of identical slits) diffraction grating. A diffraction maximum is visible at an angle of 35° , and the highest observable diffraction order is the fifth. Determine the grating constant.

P. 5731. If a very high-energy gamma photon collides with a stationary electron, pair production may occur, and in some cases more than one electron-positron pair can be created.

a) What is the minimum energy of the gamma photon if n electron-positron pairs are created in the process? *b)* What is the least velocity of the particles created after pair production?

P. 5732. A man of mass M hangs from the end of a rope ladder. The ladder consists of two parallel ropes of negligible mass which are connected by rigid rungs of mass m and of length ℓ . The spacing between adjacent rungs is h . The mass of the man is much larger than the total mass of the rungs. At what speed do long wave, small angle-amplitude torsional waves propagate along the ladder?

¹⁰See the January 2026 issue of our journal.

Matek az utcán – 2026. március 9–17. képek a rendezvényekről



Vonatozás



Fraktálok



Dunasziget



Esztergom



Budapest



Budapest, dal a π -ről



Debreceni süti



Budapest

π forever





68.
NEMZETKÖZI
MATEMATIKAI
DIÁKOLIMPIA
BUDAPEST 2027

2027-ben, 35 év után ismét Magyarországon kerül megrendezésre a Nemzetközi Matematikai Diákolimpia (IMO)

Írd be a naptáradba:
2027. július 19–26., Budapest

A vizsgafelügyelők és önkéntesek
toborzását szeptembertől kezdjük!

Hamarosan jelentkezünk
részletekkel: honlap, videók,
érdekességek, infók,
Instagram, Facebook,
Tiktok, Youtube,
és még sok más...

Rád is
szükségünk
van! Ha 2027
nyarára betöltöd
a 18-at, szeretettel
várunk **GUIDE**-nak.

Jelentkezés itt →

Elérhetőség: imo2027@imo2027.com

